

第 10 章

重积分



在现实生活中,常需要计算与多元函数及空间有界闭区域有关的量,如立体体积、曲面面积、物体的质量、重心等,需要用到各种不同的多元函数的积分. 定义这些多元函数积分的方法和步骤仍然按照定义定积分的“分割、近似、求和、取极限”步骤,给出某种确定形式的和的极限,将其推广到定义在区域、曲线及曲面上的多元函数的情形,便得到重积分、曲线积分及曲面积分的概念.

本章主要介绍重积分(包括二重积分和三重积分)的概念、计算方法以及它们的一些应用,它是下一章曲线积分与曲面积分的基础.

10.1 二重积分的概念与性质

10.1.1 二重积分的概念

(1) 曲顶柱体的体积

1) 平顶柱体

如图 10.1、图 10.2 所示,平顶柱体的体积为

$$V = \text{底面积} \times \text{高}$$

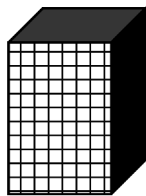


图 10.1

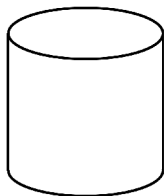


图 10.2

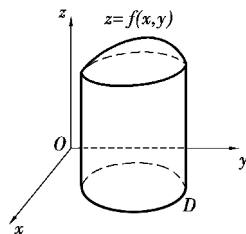


图 10.3

2) 曲顶柱体

如图 10.3 所示, 设有一空间立体 Ω , 它的底是 xOy 面上的有界闭区域 D , 它的侧面是以 D 的边界曲线为准线, 而母线平行于 z 轴的柱面, 它的顶是曲面 $z=f(x, y)$. 当 $(x, y) \in D$ 时, $z=f(x, y)$ 在 D 上连续且 $f(x, y) \geq 0$, 称这种立体为曲顶柱体.

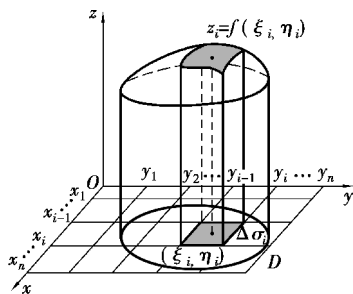


图 10.4

其体积的计算可仿照用定积分求曲边梯形面积的方法来处理, 即“分割, 近似, 求和, 取极限”, 如图 10.4 所示.

①分割. 用任意一组曲线网将闭区域 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 以这些小闭区域的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面将原来的曲顶柱体 Ω 分划成 n 个小曲顶柱体 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ (假设 $\Delta\sigma_i$ 所对应的小曲顶柱体为 $\Delta\Omega_i$, 这里 $\Delta\sigma_i$ 既代表第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 个小闭区域, 又表示它的面积, $\Delta\Omega_i$ 既代表第 i 个小曲顶柱体, 又代表它的体积). 因此,

整个曲顶柱体的体积为

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i$$

②近似. 由于 $f(x, y)$ 连续, 对于同一个小闭区域来说, 函数值的变化不大. 因此, 可将小曲顶柱体近似地看成小平顶柱体, 于是

$$\forall (\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i, \Delta\Omega_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, i=1, 2, \dots, n$$

③求和. 将上面的 n 个近似式两端分别相加, 就得到整个曲顶柱体体积的近似值

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

④取极限. 为得到 V 的精确值, 只需分割越来越细, 即用 d_i 表示第 i 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径 ($d_i = \max \{ |P_1 P_2| \mid \forall P_1, P_2 \in \Delta\sigma_i \}, i=1, 2, \dots, n$), 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i \}$. 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和式

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 的极限就是该曲顶柱体的体积, 即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

例如, 求面密度 (不妨设为 $\rho(x, y)$) 不均匀的平面薄片 D 的质量. 也可

用类似方法解决, 其质量仍为一和式的极限, 即 $M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$.



求面密度不均匀的
平面薄片 D 的质量

(2) 二重积分的定义

定义 10.1 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. 其中, $\Delta\sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 若当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时, 这和式的极限总存在, 且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (10.1)$$

其中, $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y) d\sigma$ 称为被积表达式, $d\sigma$ 称为面积元素, x, y 称为积分变量, D 称为积分区域, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 称为积分和.

注 ① $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = I$ 存在时, 极限 I 与闭区域 D 的分割法和点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 此时, 也称函数 $f(x, y)$ 在闭域 D 上可积.

② $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = I$ 存在时, 极限 I 只与被积函数和积分区域有关, 而与积分变量 x, y 的形式无关.

③如果在直角坐标系 xOy 中用平行于坐标轴的直线网来划分 D , 那么, 除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_i 和 Δy_i , 则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$, 因此, 在直角坐标系中, 常把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dx dy$, 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

其中, $dx dy$ 称为直角坐标系中的面积元素.

(3) 二重积分的几何意义

当 $(x, y) \in D$ 且 $f(x, y) \geq 0$ 时, 由前面的讨论可知, 二重积分的几何意义就是以曲面 $z = f(x, y)$ 为曲顶的柱体的体积. 如果 $f(x, y) \leq 0$, 曲顶柱体就在 xOy 面的下方, 二重积分的值是负的, 其绝对值仍等于此曲顶柱体的体积.

(4) 二重积分存在定理

定理 10.1 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

证明略.

定理 10.2 若有界函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上除有限个点或有限条光滑曲线外都连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

证明略.

10.1.2 二重积分的性质

二重积分与定积分都是一种“和式的极限”, 因此也有类似的性质. 在下面的讨论中, 总假定所用到的函数 $f(x, y), g(x, y)$ 等在有界闭区域 D 上的二重积分存在.

性质 1 (线性性质) 设 c_1, c_2 为常数, 则

$$\iint_D [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] d\sigma = c_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + c_2 \iint_D g(x, y) d\sigma \quad (10.2)$$

性质 2 (积分区域的可加性) 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个无公共内点的部分闭区域, 则在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和.

例如, D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2 ($D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 无公共内点), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \quad (10.3)$$

此性质表示二重积分对于积分区域具有可加性.

$$\text{性质 3} \quad \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma \quad (\sigma \text{ 为区域 } D \text{ 的面积}) \quad (10.4)$$

性质 4 (保序性) 如果在 D 上, $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则有不等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma \quad (10.5)$$

特别地, 由于 $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$, 有

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma \quad (10.6)$$

性质 5 设 M, m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值, σ 为 D 的面积, 则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma \quad (10.7)$$

不等式(10.5)一不等式(10.7)常用于估计二重积分.

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 为 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma \quad (10.8)$$

显然, 由性质 5 及在闭区域上连续函数的介值定理即可证之, 请扫二维码.

注 ①性质 3 的几何意义是: 高为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于该柱体的底面积.

②性质 6 的几何意义是: 在闭区域 D 上, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体体积等于 D 上某一平顶柱体的体积.

③针对奇偶函数在对称区间上的定积分, 二重积分也有类似结论.

首先定义函数 $f(x, y)$ 在对称闭区域 D 上的奇偶性:

对 $\forall (x, y) \in D$, 有 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 则称 $f(x, y)$ 在 D 上关于 x 为奇函数;

对 $\forall (x, y) \in D$, 有 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则称 $f(x, y)$ 在 D 上关于 y 为奇函数;

对 $\forall (x, y) \in D$, 有 $f(-x, y) = f(x, y)$ (或 $f(x, -y) = f(x, y)$), 则称 $f(x, y)$ 在 D 上关于 x (或 y) 为偶函数;

对 $\forall (x, y) \in D$, 有 $f(-x, -y) = f(x, y)$, 称 $f(x, y)$ 在 D 上关于 x, y 为偶函数.

性质 7 (对称闭区域上奇偶函数的二重积分性质) ①设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 若 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0 & f(x, y) \text{ 对 } y \text{ 为奇函数} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, y) \text{ 对 } y \text{ 为偶函数} \end{cases} \quad (10.9)$$

其中, D_1 为 D 在 x 轴的上半部分.

②设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 若 D 关于 y 轴对称, 则



二重积分
性质 6 的证明

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \begin{cases} 0 & f(x,y) \text{ 对 } x \text{ 为奇函数} \\ 2 \iint_{D_2} f(x,y) d\sigma & f(x,y) \text{ 对 } x \text{ 为偶函数} \end{cases} \quad (10.10)$$

其中, D_2 为 D 在 y 轴的右半部分.

还有关于对称闭区域上奇偶函数的二重积分的另外两条性质, 请扫二维码.



对称闭区域上二重积分的两条性质

例1 设 D 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$, 计算 $\iint_D (5 + \sqrt[3]{xy}) d\sigma$.

解 D 关于 x 轴对称, $\sqrt[3]{xy}$ 关于 y 为奇函数, 则

$$\iint_D \sqrt[3]{xy} d\sigma = 0$$

$$\iint_D (5 + \sqrt[3]{xy}) d\sigma = 5 \iint_D d\sigma = 20\pi$$

例2 估计二重积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 的值, D 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$.

解 由性质5知, 可先求出被积函数 $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 9$ 在区域 D 上可能的最值, 由

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8y = 0 \end{cases}$$

解得, $(0,0)$ 是 $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 9$ 的唯一驻点, 且 $f(0,0) = 9$. 在 D 的边界上, 有

$$f(x,y) = x^2 + 4(4 - x^2) + 9 = 25 - 3x^2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$13 \leq f(x,y) \leq 25$$

故 $\forall (x,y) \in D$, 有 $f_{\min}(x,y) = 9$, $f_{\max}(x,y) = 25$, 从而

$$36\pi = 9 \cdot 4\pi \leq I \leq 25 \cdot 4\pi = 100\pi$$

例3 判断积分 $\iint_D \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy$ 的符号, 其中, $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

解 因为

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy + \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 3} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy + \iint_{3 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy \\ &\leq \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1 - 0} dx dy + \iint_{3 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1 - 3} dx dy \\ &= \pi + (-\sqrt[3]{2})(4\pi - 3\pi) = \pi(1 - \sqrt[3]{2}) < 0 \end{aligned}$$

所以积分 $\iint_D \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy$ 的符号为负.

习题 10.1

1. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中, $D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$;

$I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. 试用二重积分的几何意义

说明 I_1 与 I_2 的大小关系.

2. 利用二重积分的定义证明:

(1) $\iint_D d\sigma = \sigma$ (其中, σ 为 D 的面积);

(2) $\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma$ (其中, k 为常数).

3. 设 D 是 $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$, 又 $I_1 = \iint_D (x+y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, $I_3 = \iint_D (x+y)^4 d\sigma$,

试给出 I_1, I_2, I_3 的大小顺序.

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分大小:

(1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中, 积分区域 D 是由 x 轴、 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围

成的;

(2) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中, D 是以 $(1,0), (1,1), (2,0)$ 为顶点的三角形闭

区域;

(3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中, $D = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D (x^2 + 8y^2 + 6) d\sigma$, 其中, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$;

(3) $I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$, 其中, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;

(4) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

10.2 二重积分的计算法

利用二重积分的定义来计算二重积分显然不简便,可将二重积分的计算通过两次定积分的计算(即二次积分)来实现.下面讨论二重积分的计算问题.

10.2.1 利用直角坐标计算二重积分

为了便于讨论,假定 $f(x, y) \geq 0$, 如果有界闭区域 D 为 **X 型区域**(其特点是:穿过 D 的内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界线相交不多于两点),如图 10.5 所示.

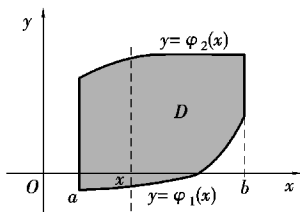


图 10.5

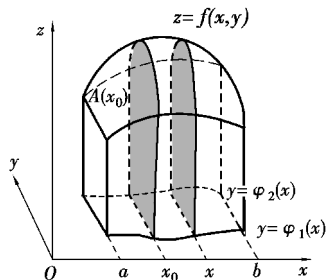


图 10.6

即积分区域 D 可用不等式 $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ 表示,其中, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

由二重积分的几何意义可知, $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的值等于以 D 为底,以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积(见图 10.6).

在区间 $[a, b]$ 上任意取一个点 x_0 ,作平行于 yOz 面的平面 $x = x_0$,这平面截曲顶柱体所得截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底,曲线 $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形,其面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$$

一般地,过区间 $[a, b]$ 上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

利用平行截面面积已知的立体求其体积方法,则该曲顶柱体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

从而

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (10.11)$$

这类积分称为先对 y 、后对 x 的二次积分.

注 ①先对 y 、后对 x 的二次积分是先将 $f(x, y)$ 只看成 y 的函数,对 $f(x, y)$ 计算 y 从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分,然后再把所得的结果对 x 从 a 到 b 计算定积分.

②在上述讨论中,假定了 $f(x,y) \geq 0$,利用二重积分的几何意义,导出了二重积分的计算式(10.11).但实际上,式(10.11)并不受此条件限制,对一般的 $f(x,y)$ (在 D 上连续),式(10.11)总是成立的,也记作

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \quad (10.12)$$

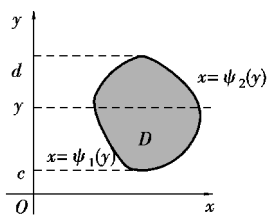


图 10.7

③类似地,如果闭区域 D 为 Y 型区域(其特点是:穿过 D 的内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界线相交不多于两点),如图10.7所示.

$D: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d$, 则有

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \quad (10.13)$$

这类积分称为先对 x 、后对 y 的二次积分.

④二重积分与二次积分是不同的概念,只有在二重积分与两种二次积分都存在的情况下,它们才相等.

例1 计算 $I = \iint_D (1-x^2) d\sigma$, 其中, $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I &= \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (1-x^2) dy = \int_{-1}^1 (1-x^2) y \Big|_0^2 dx = 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= 2 \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



直角坐标系下二重积分的定限口诀

前面所画的两类积分区域的形状具有一个共同点:对 X 型(或 Y 型)区域,用平行于 y 轴(x 轴)的直线穿过区域内部,直线与区域的边界相交不多于两点.如果积分区域不满足这一条件(见图10.8),可对区域进行分割,划归为 X 型(或 Y 型)区域的并集,再利用二重积分对积分区域具有可加性来计算.

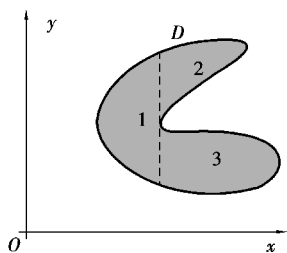


图 10.8

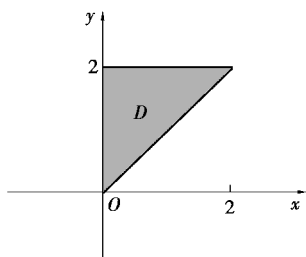


图 10.9

例2 设有连续函数 $f(x,y)$ 的二次积分为 $\int_0^2 dx \int_x^2 f(x,y) dy$, 求交换积分顺序后的二次积分.

解 二次积分交换积分顺序关键在于积分区域的描述,由 X 型积分区域 $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$,如图10.9所示.

转化为 Y 型积分区域 $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$, 故

$$\int_0^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_0^y f(x, y) dx$$

例 3 计算 $\iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$, 其中, D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=\sqrt{x}$ 所围成的区域.

分析 若将 $\iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$ 转化为先对 y 、后对 x 积分, 即

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$$

因为 $\int \frac{\sin y}{y} dy$ 不能用初等函数表示, 将难以计算下去, 所以选择先对 x 、后对 y 积分.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy \\ &= -\cos y \Big|_0^1 + \int_0^1 y d(\cos y) = 1 - \cos 1 + y \cos y \Big|_0^1 - \sin y \Big|_0^1 \\ &= 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

例 4 计算二重积分 $\iint_D e^{x^2} dx dy$, D 是由直线 $y=0, y=x$ 和 $x=1$ 围成的区域.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

例 5 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中, D 是由直线 $y=x, y=x-1, y=0, y=1$ 围成的平面区域.

$$\text{解} \quad \iint_D y dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} y dx = \int_0^1 y(y+1-y) dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{例 6 计算积分 } I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx.$$

解 因为 $\int e^{\frac{y}{x}} dx$ 不能用初等函数表示, I 的积分区域 D 如图 10.10 所示, 所以先改变积分顺序, 再计算

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

例 7 计算 $\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma$, 其中, D 由直线 $y=1, x=-1, y=x$ 所围成.

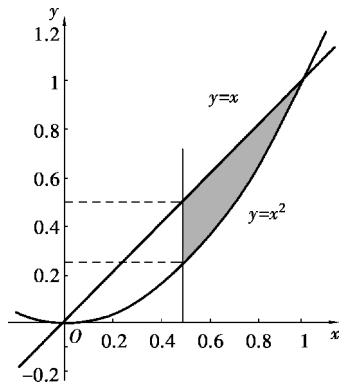


图 10.10

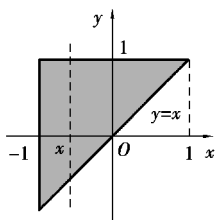


图 10.11

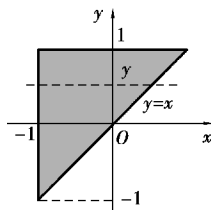


图 10.12

解 D 既是 X 型区域(见图 10.11), 又是 Y 型区域(见图 10.12). 若视 D 为 X 型区域: 在 $[-1, 1]$ 内任取点 x , 则在以 x 为横坐标的直线段上的点, 其纵坐标从 $y=x$ 变到 $y=1$, 因此有

$$\begin{aligned}\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}dy \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_x^1 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (|x|^3 - 1) dx \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

注 若把 D 看成 Y 型区域(见图 10.12), 则有

$$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}dx$$

此时计算较烦琐, 因此, 选择适当的区域类型很重要.

例 8 证明:

- (1) $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$ ($a < b$, $f(x, y)$ 是连续函数);
- (2) $\int_0^x du \int_0^u f(t) dt = \int_0^x (x-u)f(u) du$.

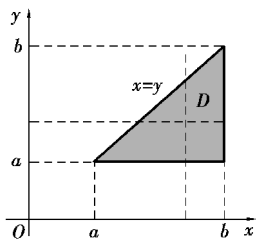


图 10.13

证 (1) 由左端得积分区域 $D: a \leq x \leq b; a \leq y \leq x$ (见图 10.13), 交换积分顺序

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$$

(2) 由(1)可得

$$\int_0^x du \int_0^u f(t) dt = \int_0^x dt \int_t^x f(t) du = \int_0^x (x-t)f(t) dt = \int_0^x (x-u)f(u) du$$

注 在直角坐标系中, 两种不同顺序的二次积分的互相转化是一种很重要的手段, 它是首先把给定的二次积分反过来化为二重积分, 求出它的积分区域 D , 然后根据 D 再把二重积分化为另一种顺序的二次积分.

10.2.2 利用极坐标计算二重积分

(1) 二重积分在极坐标系下的形式

由二重积分的定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

用以极点 O 为圆心的一簇同心圆 $\rho = \text{常数}$, 以及从极点出发的一簇射线 $\theta = \text{常数}$, 将 D 划分成 n 个小闭区域 (见图 10.14). 除了包含边界点的一些小闭区域外, 小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积可计算为

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_i &= \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2} \cdot \rho_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i) \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i \\ &= \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta\rho_i)}{2} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i \end{aligned}$$

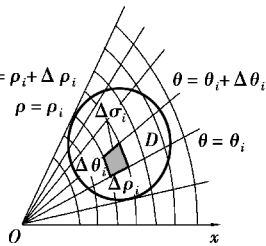


图 10.14

其中, $\bar{\rho}_i$ 表示相邻两圆弧的半径的平均值.

在 $\Delta\sigma_i$ 内取点 $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$, 设其直角坐标为 (ξ_i, η_i) , 则有

$$\xi_i = \bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \eta_i = \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i$$

于是

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i) \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i$$

即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

由于 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 也常记作 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 因此, 上述变换公式也可写为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \quad (10.14)$$

式(10.14)即为二重积分由直角坐标变换成极坐标的变换公式, 其中, $\rho d\rho d\theta$ 是极坐标下的面积元素.

(2) 极坐标系下二重积分的计算

极坐标系中的二重积分, 同样可划归为二次积分来计算. 在极坐标系中, 一般只考虑一种顺序的二次积分, 即首先固定 θ 对 ρ 进行积分, 然后再对 θ 进行积分. 根据有界闭区域 D 的不同类型, 有相应的计算方法.

①极点 O 在积分区域 D 外, 如图 10.15(a)、(b) 所示.

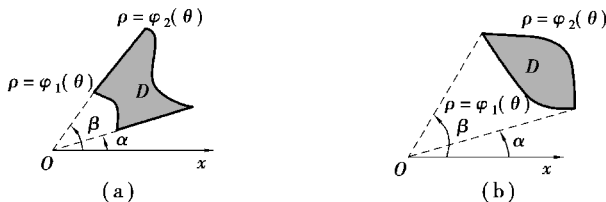


图 10.15

D 可表示为 $\alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta)$, 则

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

②极点 O 在积分区域 D (见图 10.16) 的边界上, D 可表示为 $\alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

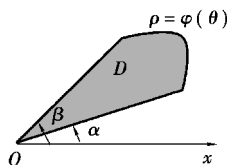


图 10.16

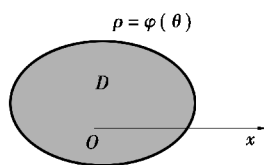


图 10.17

③极点 O 在积分区域 D 内, D 可表示为 $0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (见图 10.17), 则

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

由上面的讨论不难发现, 将二重积分化为极坐标形式进行计算, 其关键在于将积分区域用极坐标变量 ρ, θ 表示为 $\alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta)$ 这种形式.

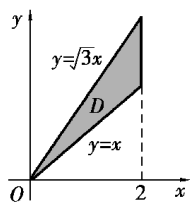


图 10.18

例 9 化二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$ 为极坐标系下的二次积分.

解 因为 $D: 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq \sqrt{3}x$ (见图 10.18),

所以

$$\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy = \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} f(\rho) \rho d\rho$$

例 10 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)$.

解 $D: 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\theta = \pi (1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

例 11 计算广义积分: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解 因为 $\int e^{-x^2} dx$ 不能用初等函数表示, 所以 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx$ 难以直接求得, 但可考虑其平方后转换成二重积分来处理, 即

$$\left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy$$

如图 10.19 所示, 设

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$$

显然 $D_1 \subset S \subset D_2$. 由于 $e^{-x^2-y^2} > 0$, 因此

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

由例 10 可知

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

因此, 上面的不等式可写为

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 上式两端趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$, 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 12 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$ 所截得 (含在圆柱面内) 的立体的体积.

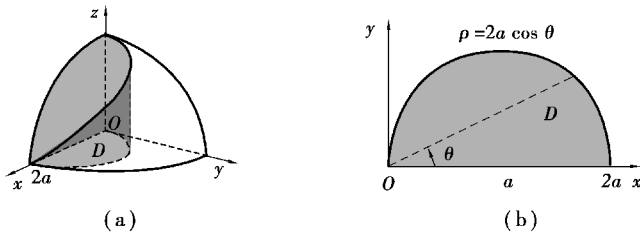


图 10.20

解 由对称性, 立体体积为第一卦限部分的 4 倍, 见图 10.20(a), 则

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

其中, D 为半圆周 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 及 x 轴所围成的闭区域.

在极坐标系中, D 可表示为 (见图 10.20(b))

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{32}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{32}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

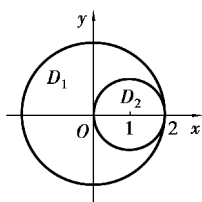


图 10.21

例 13 计算 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 2x| dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

解 由 $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$ 和 $x^2 + y^2 - 2x < 0$ 将 D 划分为两部分(见图 10.21), 即

$$D_1: 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$D_2: x^2 + y^2 \leq 2x$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 2x) dx dy + \iint_{D_2} (2x - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \iint_{D_1+D_2} (x^2 + y^2 - 2x) dx dy + 2 \iint_{D_2} (2x - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^2 - 2\rho \cos \theta) \rho d\rho + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} (2\rho \cos \theta - \rho^2) \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{2}{3} \rho^3 \cos \theta \right) \Big|_0^2 d\theta + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3} \rho^3 \cos \theta - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4 - \frac{16}{3} \cos \theta \right) d\theta + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} \cos^4 \theta - 4 \cos^4 \theta \right) d\theta \\ &= 8\pi + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 8\pi + \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 9\pi \end{aligned}$$

例 14 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积.

解 作两抛物面所围立体的示意图(见图 10.22), 确定它在 xOy 面上的投影区域 D : 消去变量 z 得一垂直于 xOy 面的柱面, 立体在 xOy 面的投影区域就是该柱面在 xOy 面上所围成的区域(见图 10.23) $D: x^2 + y^2 \leq 2$. 在极坐标系下, $D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$.

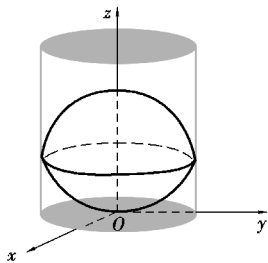


图 10.22

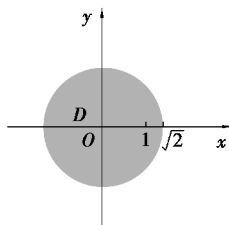


图 10.23

所围立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(6 - 2x^2 - y^2) - (x^2 + 2y^2)] d\sigma \\ &= 6 \iint_D d\sigma - 3 \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = 6 \cdot (\sqrt{2})^2 \pi - 3 \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 12\pi - 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = 12\pi - 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
 &= 6\pi
 \end{aligned}$$

* 10.2.3 二重积分的换元法

在现实生活中的场景变化,实质上就是坐标变换、变量替换.例如,移动电话信号从一个基站的转出到下一个基站的接收,就是如此.把平面上同一点 M 既用直角坐标 (x, y) 表示,又用极坐标 (ρ, θ) 表示,它们之间的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (10.15)$$

式(10.15)可看成从平面 $\rho O\theta$ 到平面 xOy 的一种变换,且是一一映射,即将平面 $\rho O\theta$ 上的点 $M'(\rho, \theta)$,通过变换式(10.15)变成平面 xOy 上的一点 $M(x, y)$. 下面给出二重积分换元法的一般情形.

定理 10.3 设 $f(x, y)$ 在平面 xOy 上的闭区域 D 上连续,若一一变换

$$T: D' \rightarrow D$$

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (10.16)$$

将平面 uOv 上的闭区域 D' 变为平面 xOy 上的闭区域 D ,且满足:

① $x(u, v), y(u, v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数;

② 在 D' 上雅可比行列式 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv \quad (10.17)$$

证明略.

注 ①式(10.17)称为二重积分的换元公式.

②在定理 10.3 中,若雅可比行列式 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 只在闭区域 D' 内个别点处或一条曲线上为零,而在其他点上不为零,式(10.17)仍成立.

例如,在极坐标与直角坐标的变换式(10.15)中,雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

仅在 $\rho = 0$ (即坐标原点)处为零,故换元式(10.17)仍成立,其中, D' 是 D 在直角坐标平面 $\rho O\theta$ 上的对应闭区域. 当积分区域 D 用极坐标表示时,则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

③雅可比行列式绝对值 $|J|$ 的几何意义为面积的伸缩系数.

例 15 计算 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中, D 是由 x 轴、 y 轴和直线 $x + y = 1$ 所围成的闭区域.

解 令 $u = x - y, v = x + y$, 则

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$$

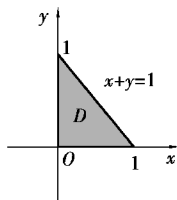


图 10.24

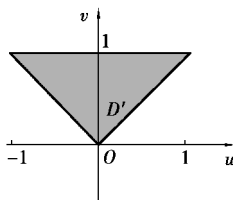


图 10.25

从而通过变换 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$ 将 uOv 平面上的闭区域 D' (见图 10.25) 变为 xOy 平面上

的闭区域 D (见图 10.24), 且雅可比行列式 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. 由二重积分的换元公

式得

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{x+y}{2}} dx dy &= \iint_{D'} e^{\frac{u}{2}} \left| \frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e - e^{-1}) v dv = \frac{1}{4} (e - e^{-1}) \end{aligned}$$

习题 10.2

1. 计算下列二重积分:

- (1) $\iint_D (3x + 2y) d\sigma$, 其中, D 是由两坐标轴及直线 $x + y = 1$ 所围成的闭区域;
- (2) $\iint_D x \cos(x + y) d\sigma$, 其中, D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

- (1) $\iint_D x \sqrt{y} d\sigma$, 其中, D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}, y = x^2$ 所围成的闭区域;
- (2) $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中, D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;
- (3) $\iint_D e^{x+y} d\sigma$, 其中, $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
- (4) $\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma$, 其中, D 是由直线 $y = 2, y = x$ 及 $y = 2x$ 轴所围成的闭区域.

3. 计算 $\iint_D y[1 + xf(x^2 + y^2)] dx dy$, 其中, 积分区域 D 由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 所围成.

4. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中, D 是由直线 $y = x, y = a$ 及 $x = b (b > a)$ 围成的闭区域, 证明 $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

5. 改换下列二次积分的积分顺序:

$$(1) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy.$$

6. 计算下列二次积分:

$$(1) \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_1^y (e^{-x^2} + e^x \sin x) dx.$$

7. 计算 $I = \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中, D 是由直线 $y = x, y = 1$ 及 y 轴所围成的平面闭区域.

8. 求由平面 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及抛物面 $x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积.

9. 求由曲面 $z = x^2 + y^2, z = 6 - x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积.

10. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy;$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx.$$

11. 利用极坐标计算下列各题:

$$(1) \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma, \text{ 其中, } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 所围成的闭区域};$$

(2) $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma$, 其中, D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中, D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

12. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中, D 是由直线 $x = 2, y = x$ 及曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中, D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中, D 是由直线 $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a (a > 0)$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中, D 是圆环形闭区域 $\{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$;

(5) $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中, $D: |x| + |y| \leq 1$;

(6) $\iint_D \frac{y^3}{x} dx dy$, 其中, $D: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}x$.

13. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2 + y^2 = ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

14. 求由平面 $y = 0, y = kx (k > 0), z = 0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

15. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$.

16. 一个高为 l 的柱体贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆, 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时, 计算油的质量(其中, 长度单位为 m , 质量单位为 kg , 油的密度为常数 $\rho \text{ kg/m}^3$).

10.3 三重积分

二重积分的定义、性质和计算方法不难推广到三重积分的情形.

10.3.1 三重积分的概念与性质

在现实生活中, 所涉及的问题有 3 个自变量, 其取值范围是一个空间立体. 例如, 密度为连续函数 $f(x, y, z)$ 的空间立体 Ω 的质量 M 可表示为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

因此需要引入三重积分的概念.

(1) 三重积分的概念

定义 10.2 设 $f(x, y, z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数. 将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$$

其中, Δv_i 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的体积. 在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$. 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 此和的极限总存在, 且与闭区域 Ω 的分法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i \quad (10.18)$$

其中, \iiint 称为三重积分号, $f(x, y, z)$ 称为被积函数, $f(x, y, z) dv$ 称为被积表达式, dv 称为体积元素, x, y, z 称为积分变量, Ω 称为积分区域.

在直角坐标系中, 如果用平行于坐标面的平面来划分 Ω , 则 $\Delta v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, 因此, 也把体积元素 dv 记为 $dx dy dz$, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

当函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在.

(2) 三重积分的性质

设函数 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上可积. 三重积分具有与二重积分类似的性质, 如 c_1, c_2 为常数时, 有

$$\iiint_{\Omega} [c_1 f(x, y, z) \pm c_2 g(x, y, z)] dv = c_1 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \pm c_2 \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$$

$$\iiint_{\Omega_1 + \Omega_2} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

其中, Ω_1 与 Ω_2 无公共内点.

$$\iiint_{\Omega} dv = V$$

其中, V 为区域 Ω 的体积.

其余性质读者自己归纳.

三重积分在物理上的意义是指占有空间闭区域 Ω 的物体, 在点 (x, y, z) 处具有体密度 $f(x, y, z)$ 时, 则其质量为 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分.

10.3.2 三重积分的计算

基本方法是将三重积分化为三次积分来计算. 下面利用不同的坐标来分别叙述其计算方法.

(1) 利用直角坐标计算三重积分

1) 可化为三次积分来计算

假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点, Ω 在 xOy 面上的投影闭区域为 D_{xy} . 以 D_{xy} 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 此柱面与 Ω 的边

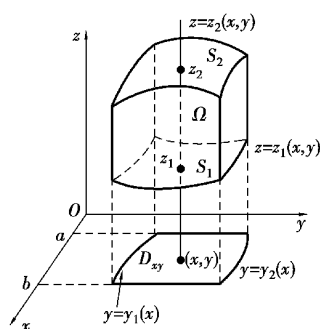


图 10.26

界曲面 S 的交线将 S 分为两部分(见图 10.26), 其方程为

$$S_1: z = z_1(x, y)$$

$$S_2: z = z_2(x, y)$$

其中, $z_1(x, y)$ 和 $z_2(x, y)$ 均为 D_{xy} 上的连续函数, 且

$$z_1(x, y) \leq z_2(x, y).$$

在 D_{xy} 内任取点 (x, y) , 作平行于 z 轴的直线, 此直线通过曲面 S_1 穿入 Ω , 再通过曲面 S_2 穿出 Ω , 其穿入点与穿出点的竖坐标分别为 $z_1(x, y)$ 和 $z_2(x, y)$.

此时, 空间闭区域

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy} \}$$

将 x, y 看成常数, 对 $f(x, y, z)$ 在闭区间 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上作定积分. 其结果为 x, y 的函数, 即为

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (10.19)$$

当 D_{xy} 是 X 型区域: $a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ 时, 再将 $F(x, y)$ 在闭区域 D_{xy} 上作二重积分

$$\iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma \quad (10.20)$$

即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (10.21)$$

当 D_{xy} 是 Y 型区域: $c \leq y \leq d; x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ 时, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (10.22)$$

当平行于 x 轴或者 y 轴且穿过 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点时, 也可将 Ω 投影到 yOz 平面或 xOz 平面, 得到类似的结论.

当平行于坐标轴且穿过 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交多于两点时, 则将 Ω 划分成若干部分, 使每个部分符合上述条件, 再分别在各部分上计算并相加即可.

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中, Ω 为 3 个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 围成的闭区域.

解 如图 10.27 所示, 将 Ω 投影到 xOy 面上, 得投影区域

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

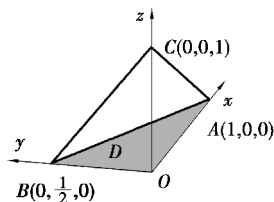


图 10.27

例2 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 为平面 $z=0, z=y, y=1$ 及柱面 $y=x^2$ 围成的闭区域.

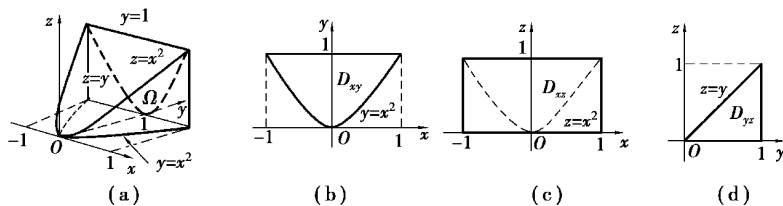


图 10.28

解 如图 10.28(a) 所示, 则:

方法 1: 将 Ω 投影到 xOy 面上, 则 $D_{xy}: -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$. 如图 10.28(b) 所示, 于是

$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y xz dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 xy^2 dy = 0$$

方法 2: 将 Ω 投影到 xOz 面上, 则 $D_{xz}: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. 如图 10.28(c) 所示, 于是

$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dz \int_z^{x^2} xz dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_{x^2}^1 xz dy = 0$$

方法 3: 将 Ω 投影到 yOz 面上, 则 $D_{yz}: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y$. 如图 10.28(d) 所示, 于是

$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xz dx = 0$$

2) 可化为一个二重积分和一个定积分(先二后一法或称切片法)来计算

当空间区域 Ω (见图 10.29) 为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\}$$

其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得的一个平面闭区域. 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \quad (10.23)$$

注 利用先二后一法时, 一般要求被积函数 $f(x, y, z)$ 与 x, y 无关, 或者 $\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$ 容易计算.

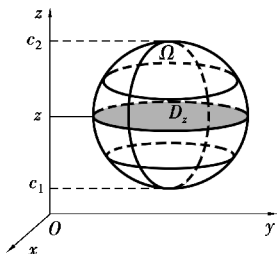


图 10.29

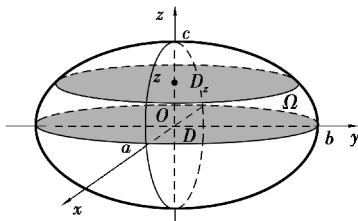


图 10.30

例3 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) 围成.

解 如图 10.30 所示, 则

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, -c \leq z \leq c\}$$

$$D_z: \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_{-c}^c \pi ab z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{4\pi}{15} abc^3 \end{aligned}$$

3) 利用积分区域的对称性计算三重积分

①若积分区域关于 xOy 平面对称, 函数 $f(x, y, z)$ 关于 z 为奇函数, 则三重积分为零;

②若积分区域关于 xOz 平面对称, 函数 $f(x, y, z)$ 关于 y 为奇函数, 则三重积分为零;

③若积分区域关于 yOz 平面对称, 函数 $f(x, y, z)$ 关于 x 为奇函数, 则三重积分为零.

例 4 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$, 其中, Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围区域.

解 因为被积函数 $\frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ 关于 z 为奇函数, 由 Ω 的对称性可知, 原式 $= 0$.

(2) 利用柱面坐标计算三重积分

1) 柱面坐标系

如图 10.31(a) 所示, 设 $M(x, y, z)$ 为空间内任意一点, 并设点 M 在 xOy 面上的投影点 P 的极坐标为 $P(\rho, \theta)$, 则这样的 3 个数 ρ, θ, z 就称为点 M 的柱面坐标, 这里规定 ρ, θ, z 的变化范围为

$$0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty$$

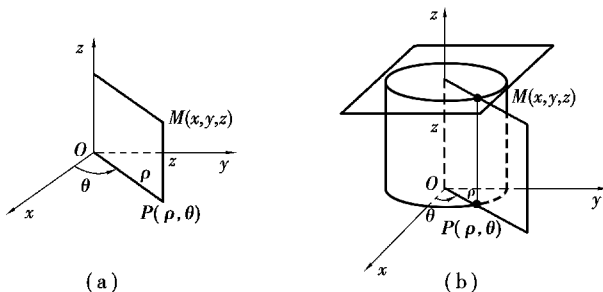


图 10.31

其中, 3 个坐标面(见图 10.31(b)):

$\rho = \text{常数}$, 是以 z 轴为对称轴的圆柱面 $0 \leq \rho < +\infty$;

$\theta = \text{常数}$, 是过 z 轴的半平面 $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

$z = \text{常数}$, 是与 xOy 面平行的平面 $-\infty < z < +\infty$.

显然, 点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (10.24)$$

2) 利用柱面坐标计算三重积分

用 $\rho = \text{常数}$, $\theta = \text{常数}$, $z = \text{常数}$ 将 Ω 划分为一些直径很小的区域(见图 10.32), 以 $d\rho, d\theta, dz$ 分别表示 ρ, θ, z 的增量, 则以 $d\rho, d\theta, dz$ 组成的柱体的体积为

$$dv = \rho d\rho d\theta dz \quad (\text{体积元素})$$

于是

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \quad (10.25)$$

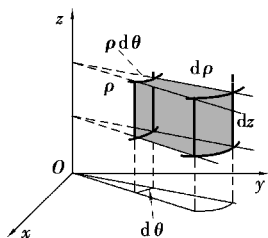


图 10.32

式(10.25)为直角坐标到柱面坐标的三重积分变换公式. 在柱面坐标下, 再将三重积分化为三次积分.

例 5 用柱面坐标计算: $I = \iiint_{\Omega} z dv$, 其中, Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 围成的闭区域.

解 如图 10.33 所示, 因为

$$\Omega: r^2 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} z r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_{r^2}^4 z dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(16 - r^4) dr = \frac{64}{3} \pi \end{aligned}$$

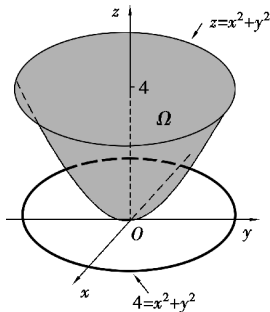


图 10.33

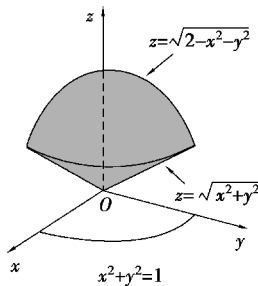


图 10.34

例 6 计算: $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中, Ω 是球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的第一卦限的部分.

解 如图 10.34 所示, 因为

$$\Omega: r \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} z^2 dv &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r [(\sqrt{2-r^2})^3 - r^3] dr = \frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

(3) 用球面坐标计算三重积分

1) 球面坐标系

如图 10.35(a) 所示, 设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点, 点 P 为点 M 在 xOy 面上的投影点, 点 M 用 r, θ, φ 确定. 其中, 3 个坐标面 (见图 10.35(b)):

$r = \text{常数}$, 即以原点 O 为圆心的球面, $0 \leq r < +\infty$;

$\varphi = \text{常数}$, 即以原点为顶点、 Z 轴为对称轴的圆锥面, $0 \leq \varphi \leq \pi$;

$\theta = \text{常数}$, 即过 z 轴的半平面, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

设点 P 在 x 轴上的投影为点 A , 则 $OA = x, AP = y, PM = z$. 于是, 点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (10.26)$$

下面求球面坐标下的体积微元, 如图 10.36 所示.

用 $r = \text{常数}$, $\theta = \text{常数}$, $\varphi = \text{常数}$ 将 Ω 划分成直径很小的区域, 则由 r, θ, φ 产生的增量 $dr, d\theta, d\varphi$ 形成的六面体 (可看成长方体) 的体积近似为

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \quad (10.27)$$

式 (10.27) 就是球面坐标系下的体积元素.

于是

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \quad (10.28)$$

其中, $F(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$.

式 (10.28) 为直角坐标到球面坐标的变换公式. 在球面坐标下, 再将三重积分化为三次积分.

2) 特殊情形

①若 Ω 的边界曲面是一个包含原点在内的闭曲面, 其曲面方程为 $r = r(\theta, \varphi)$, 则有

$$\iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\theta, \varphi)} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr \quad (10.29)$$

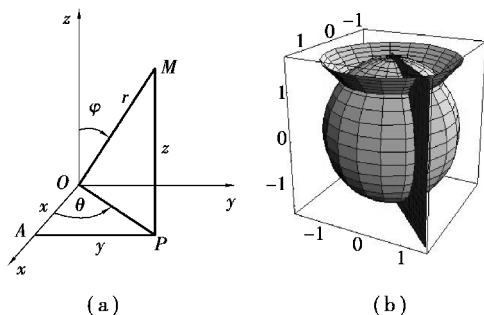


图 10.35

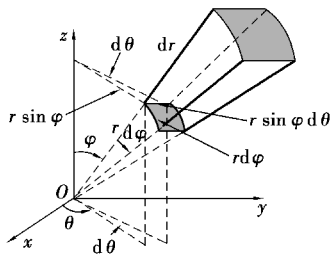


图 10.36

②当 Ω 的边界曲面为球面 $r = a (a > 0)$ 时, 则有

$$\iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr \quad (10.30)$$

特别地, 当 $F(r, \theta, \varphi) = 1$ 时, 有

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{3} \pi a^3$$

例 7 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积.

解 设球面过原点, 球心在 z 轴上, 内接锥面的顶点在原点, 其轴与 z 轴重合, 建立如图 10.37 所示的坐标系, 则球面方程为

$$r = 2a \cos \varphi$$

锥面方程为

$$\varphi = \alpha$$

此时, 立体占有的空间区域为

$$\Omega = \{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} (1 - \cos^4 \alpha) \end{aligned}$$

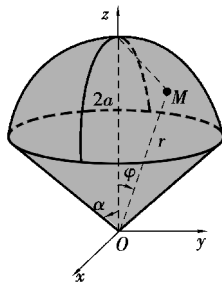


图 10.37

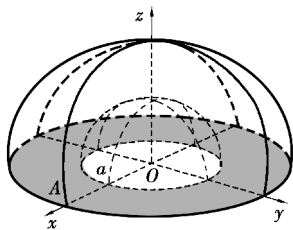


图 10.38

例 8 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中, Ω 由 $0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A$ 及 $z \geq 0$ 确定.

解 如图 10.38 所示, 因 $\Omega: a \leq r \leq A, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_a^A r^4 \sin^2 \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5) \end{aligned}$$

习题 10.3

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中, 积分区域 Ω 分别是:

- (1) 由双曲抛物面 $z = xy$ 及平面 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成的闭区域;
- (2) 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成的闭区域;
- (3) 由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 2 - x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz = xy (c > 0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, $z = 0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x + y + z$, 计算该物体的质量.

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y) dv$, 其中, Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成的闭区域.

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中, Ω 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中, Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及 3 个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中, Ω 是由平面 $z = 0, z = y, y = 1$ 以及抛物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域.

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中, Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (R > 0, h > 0)$ 所围成的闭区域.

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中, Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中, Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中, Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中, 闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2 (a > 0)$, $x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中, Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中, Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中, Ω 是由曲面 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = 5$ 所围成的闭区域;

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中, 闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0$ 所确定.

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$ (含有 z 轴的部分);

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$;

(4) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

10.4 重积分的应用

在现实生活中, 许多求总量的问题可用定积分的元素法来处理, 这种元素法也可推广到二重积分的应用中. 如果所要计算的某总量 U 对于闭区域 D 具有可加性 (就是说, 当闭区域 D 分成许多小闭区域时, 所求量 U 相应地分成许多部分量, 且 U 等于部分量之和), 并且在闭区域 D 内任取一个直径很小的闭区域 $d\sigma$ 时, 相应的部分量可近似地表示为 $f(x, y) d\sigma$ 的形式, 其中 (x, y) 在 $d\sigma$ 内, 则称 $f(x, y) d\sigma$ 为所求量 U 的元素, 记为 dU , 以它为被积表达式, 在闭区域 D 上积分

$$U = \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (10.31)$$

这就是所求总量的积分表达式. 下面利用重积分的元素法来讨论重积分的一些应用.

10.4.1 曲面的面积

引例 地球的一颗同步轨道通信卫星的轨道位于地球的赤道平面内, 且可近似认为是圆轨道. 通信卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同, 即人们看到它在天空上不动. 若地球半径取为 R , 问卫星距地面的高度 h 应为多少? 通信卫星的覆盖面积多大?

设曲面 S 由方程 $z = f(x, y)$ 给出, D 为 S 在 xOy 面上的投影区域. $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在 D 上具有连续的导数, 故要计算曲面 S 的面积.

在有界闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (也表示此闭区域的面积). 在 $d\sigma$ 上任取一点 $P(x, y)$, 对应曲面 S 上的点为 $M(x, y, f(x, y))$. 点 M 在 xOy 上的投影为点 P , 点 M 在曲面 S 的切平面为 T (见图 10.39).

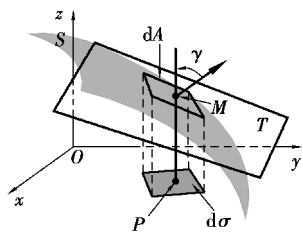


图 10.39

以小闭区域 $d\sigma$ 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 此柱

面在曲面 S 上截下一小片曲面,在切平面上截下一小片平面 dA . 由于 $d\sigma$ 很小,从而可用切平面上的小片平面 dA 代替曲面上的小片曲面.

设点 M 在 S 上的法线(指向向上)与 z 轴所成的角为 γ , 因为 $d\sigma$ 为 dA 在 xOy 面上的投影, 所以

$$d\sigma = dA \cdot \cos \gamma \quad (10.32)$$

从而

$$dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}$$

因为

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$

所以

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma \quad (10.33)$$

式(10.33)为曲面 S 的面积元素. 以它为被积表达式在 D 上积分, 得曲面 S 的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma \quad (10.34)$$

或

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (10.35)$$

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dz$$

设曲面的方程为

$$x = g(x, z)$$

则曲面面积公式为

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz \quad (10.36)$$

设曲面的方程为

$$y = h(z, x)$$

则曲面面积公式为

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dz dx \quad (10.37)$$

例 1 求半径为 $a(a > 0)$ 的球的表面积.

解 取上半球面方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 则其在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

得

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

于是,上半球面的面积为

$$S = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

此为反常二重积分(因为被积函数在 D 上无界).

因此,先取区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$ 为积分区域,再令 $b \rightarrow a$, 则

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a \int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \end{aligned}$$

于是

$$S = \lim_{b \rightarrow a} S_1 = 2\pi a^2$$

故整个球面的面积为 $A = 4\pi a^2$.

注 读者可直接用极坐标来解答此题,更为简便.

例 2 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部那部分面积.

解 如图 10.40 所示,由对称性知 $A = 4A_1$, $D_1: x^2 + y^2 \leq ax$ ($x, y \geq 0$), 曲面方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

于是

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

所求面积为

$$\begin{aligned} A &= 4 \iint_{D_1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 4 \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho \\ &= 2\pi a^2 - 4a^2 \end{aligned}$$

读者可自行编撰前面引例的具体条件后,再作解答.

10.4.2 重积分在物理上的应用

(1) 质心

平面薄片的质心:

设在 xOy 面上有 n 个质点,分别位于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处,质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 则此质点系的质心坐标为

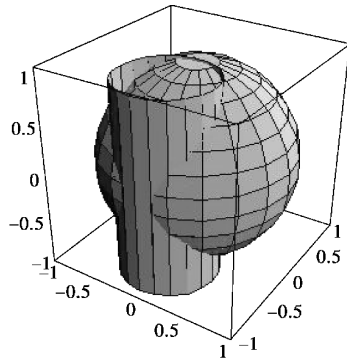


图 10.40

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

其中, $M = \sum_{i=1}^n m_i$ 为质点系的总质量, $M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$, $M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$ 分别为质点对 y 轴和 x 轴的静矩.

设有平面薄片, 占有闭区域 D , 在点 (x, y) 处具有面密度 $\mu(x, y)$. 设 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续. 现求其质心坐标.

在 D 内取一小闭区域 $d\sigma$ (同时表示其面积), 当 $d\sigma$ 的直径很小时, 其质量近似为

$$\mu(x, y) d\sigma$$

静矩元素分别为

$$dM_y = x\mu(x, y) d\sigma, dM_x = y\mu(x, y) d\sigma$$

于是

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x\mu(x, y) d\sigma; M_x = \iint_D y\mu(x, y) d\sigma \\ \bar{x} = \frac{M_y}{M} &= \frac{\iint_D x\mu(x, y) d\sigma}{\iint_D \mu(x, y) d\sigma}; \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x, y) d\sigma}{\iint_D \mu(x, y) d\sigma} \end{aligned} \quad (10.38)$$

其中, $M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma$ 为平面薄片的质量.

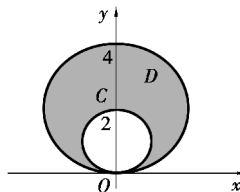


图 10.41

当 $\mu(x, y)$ 为常数时, 平面薄片的质心为平面图形的形心.

于是, 形心公式为

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma; \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma \quad (10.39)$$

其中, A 为 D 的面积.

例 3 求位于两圆 $\rho = 2 \sin \theta$ 和 $\rho = 4 \sin \theta$ 之间的均匀薄片的质心,

如图 10.41 所示.

解 由于闭区域 D 关于 y 轴对称, 因此 $\bar{x} = 0$. 则

$$\begin{aligned} \iint_D y d\sigma &= \iint_D \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} \rho^2 d\rho = \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = 7\pi \\ \bar{y} &= \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

故所求质心为 $(0, \frac{7}{3})$.

类似地, 设物体占有空间区域 Ω , 在点 (x, y, z) 处的体密度为 $\rho(x, y, z)$, 且 ρ 在 Ω 上连续. 则:

物体的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv \quad (10.40)$$

物体的重心坐标为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho dv \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho dv \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv \end{aligned} \quad (10.41)$$

其中, $\iiint_{\Omega} x \rho dv$, $\iiint_{\Omega} y \rho dv$, $\iiint_{\Omega} z \rho dv$ 分别为物体关于 yOz , xOz , xOy 平面的静矩.

例4 求均匀半球体的质心.

解 建立如图 10.42 所示的坐标系, 则

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0, a \geq 0 \} \\ \bar{x} &= \bar{y} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{4} \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}$$

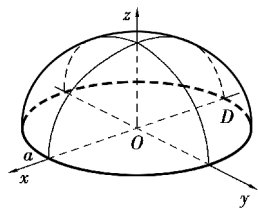


图 10.42

故所求质心为 $(0, 0, \frac{3a}{8})$.

例5 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 内各点处的密度的大小等于该点到原点的距离的平方, 试求该球的重心.

解 这里

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad \Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

因为

$$M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^4 dr = \frac{32\pi}{15}$$

$$M_x = \iiint_{\Omega} x(x^2 + y^2 + z^2) dv = 0; \quad M_y = \iiint_{\Omega} y(x^2 + y^2 + z^2) dv = 0$$

$$\begin{aligned} M_z &= \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^4 \cdot r \cos \varphi dr = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

所以

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$$

(2) 转动惯量

设在 xOy 面上有 n 个质点, 分别位于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处. 质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 则此质点系的转动惯量为

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i, I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i$$

设有平面薄片, 占有闭区域 D (见图 10.43), 在点 (x, y) 处具有面密度 $\mu(x, y)$. 设 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续. 求其对 x 轴和对 y 轴的转动惯量.

在 D 内取一小闭区域 $d\sigma$ (同时表示其面积), 当 $d\sigma$ 的直径很小时, 其质量近似为 $\mu(x, y) d\sigma$.

对 x 轴和 y 轴的转动惯量元素分别为

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) d\sigma, dI_y = x^2 \mu(x, y) d\sigma$$

于是, 平面薄片对 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) d\sigma \\ I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) d\sigma \end{cases} \quad (10.42)$$

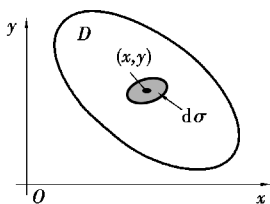


图 10.43

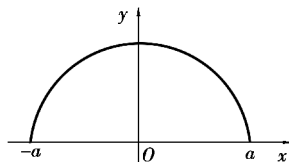


图 10.44

例 6 求半径为 a ($a > 0$) 的均匀半圆薄片 (面密度 μ 为常数) 对于其直径边的转动惯量.

解 建立如图 10.44 所示的坐标系, 则

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$$

所求转动惯量为 D 对 x 轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \mu d\sigma = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho \\ &= \mu \int_0^\pi d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta d\rho = \mu \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu \pi a^4}{8} = \frac{Ma^2}{4} \end{aligned}$$

其中, $M = \frac{\mu \pi a^2}{2}$ 为半圆薄片的质量.

类似地, 设物体占有空间区域 Ω , 在点 (x, y, z) 处的体密度为 $\rho(x, y, z)$, 且 ρ 在 Ω 上连续, 则物体关于 x, y, z 3 个坐标轴的转动惯量分别为

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv \\ I_y &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dv \\ I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv \end{aligned} \quad (10.43)$$

例 7 求半径为 a , 高为 h 的均匀圆柱体对过中心且平行于母线的轴的转动惯量.

解 建立如图 10.45 所示的坐标系, 则

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h \}$$

利用柱面坐标, 有

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^h r^2 dz = \frac{\pi \rho h a^4}{2}$$

其中, ρ 为体密度.

(3) 引力

设物体占有空间有界闭区域 Ω , 它在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$, 并假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续. 在此物体内任取一直径很小的闭区域 dv (也表示其体积), 点 (x, y, z) 为这一小块中的一点. 将此小块物体的质量 ρdv 近似地看成集中在点 (x, y, z) 处, 于是可得这一小块物体. 对位于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处单位质量的质点的引力近似地为

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= (dF_x, dF_y, dF_z) \\ &= \left(G \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, G \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, G \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right) \end{aligned} \quad (10.44)$$

其中, dF_x, dF_y, dF_z 分别为 $d\mathbf{F}$ 在三坐标轴上的分量, 则

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

G 为引力常数.

于是, 得引力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(\iiint_{\Omega} G \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, \iiint_{\Omega} G \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, \iiint_{\Omega} G \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right) \end{aligned} \quad (10.45)$$

例 8 求半径为 R 的均匀球体: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对球外一点 $A(0, 0, a)$ 处的单位质点的引力.

解 建立如图 10.46 所示的空间直角坐标系, 设球的密度为 ρ_0 , 由对称性得

$$F_x = F_y = 0$$

$$F_z = \iiint_{\Omega} G \rho_0 \frac{(z - a) dv}{r^3} = \iiint_{\Omega} G \rho_0 \frac{(z - a) dv}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

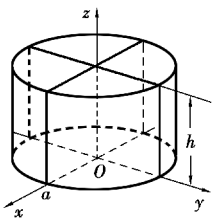


图 10.45

$$\begin{aligned}
 &= G\rho_0 \int_{-R}^R (z-a) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} \frac{dx dy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= G\rho_0 \int_{-R}^R (z-a) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r dr}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 2\pi G\rho_0 \int_{-R}^R (z-a) \left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \right) dz \\
 &= 2\pi G\rho_0 \left[-2R + \frac{1}{a} \int_{-R}^R (z-a) d\sqrt{R^2-2az+a^2} \right] \\
 &= 2\pi G\rho_0 \left(-2R + 2R - \frac{2R^3}{3a^2} \right) = -G \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0 \cdot \frac{1}{a^2} \\
 &= -G \frac{M}{a^2}
 \end{aligned}$$

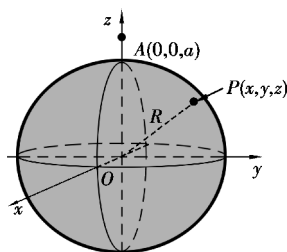


图 10.46

其中, $M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0$ 为球的质量.

注 此例表明均匀球体对球外一点处的引力如同球的质量集中于球心处的两质点间的引力.

习题 10.4

1. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面积.
2. 求底面半径相同的两个直交柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积.
3. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:
 - (1) D 是半椭圆形闭区域 $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0, a > 0, b < 0\}$;
 - (2) D 是介于两个圆 $\rho = a \cos \theta, \rho = b \cos \theta (0 < a < b)$ 之间的闭区域.
4. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y) = x^2 y$, 求该薄片的质心.
5. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.
6. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心(设密度 $\rho = 1$):
 - (1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;
 - (2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z = 0$;
 - (3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$.
7. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$, 它在内部各点的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求这球体的质心.
8. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a > 0, b > 0 \right\}$, 求 I_y ;

(2) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成, 求 I_x 和 I_y ;

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, 求 I_x 和 I_y .

9. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h ($b > 0, h > 0$), 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

10. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0, |x| = a, |y| = a$ 所围成,

(1) 求物体的体积;

(2) 求物体的质心;

(3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

11. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho = 1$).

12. 设面密度为常量 u 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D = \{(x, y, 0) \mid R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, R_1, R_2 > 0, x \geq 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > 0$) 处单位质量的质点的引力 F .

13. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > h$) 处单位质量的质点的引力.

总习题 10

1. 选择题:

(1) 设有空间闭区域

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

则有().

A. $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$

B. $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$

C. $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$

D. $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$

(2) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a (a \geq 0), x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = ()$.

A. $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$

B. $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

C. $4 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$

D. 0

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (1+x) \sin y d\sigma$, 其中, D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$, 其中, $D = \{(x,y) | 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$;

(3) $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中, D 是圆周 $x^2 + y^2 = Rx (R > 0)$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma$, 其中, $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2, R > 0\}$.

3. 交换下列二次积分的顺序:

(1) $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y) dx$;

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y) dx$;

(3) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.

4. 证明题:

(1) 设 a, m 为常数, $f(x)$ 可积, 证明 $\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx$;

(2) 设 $f(x) \in C[0, a]$, 证明 $2 \int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = \left[\int_0^a f(x) dx \right]^2$.

5. 把积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$ 表示成极坐标形式的二次积分, 其中, 积分区域 $D = \{(x,y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$.

6. 设 m, n 为正数, 且 m, n 至少有一个为奇数, $a > 0$, 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy$.

7. 计算 $\iint_D x(1+yf(x^2+y^2)) dx dy$, 其中, D 是由 $y = x^3$, $y = 1$ 与 $x = -1$ 所围成的区域, 且 $f(z)$ 连续.

8. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中, 积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ 及平面 $y = 1, z = 0$ 所围成的闭区域.

9. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中, Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$ 的公共闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$, 其中, Ω 是由 xOy 面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.

10. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

11. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

12. 求抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ) 对于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

13. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片, 占有平面闭域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P , $OP = a$, 求半圆形薄片对质点 P 的引力.



部分习题答案