《信息论基础》模拟试卷

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得　分									
评卷人									

一、填空题（共 15 分，每空 1 分）

1、信源编码的主要目的是_______，信道编码的主要目的是_______。

2、信源的剩余度主要来自两个方面，一是_______，二是_______________。

3、三进制信源的最小熵为____，最大熵为______。

4、无失真信源编码的平均码长最小理论极限制为_____________ 。

5、当______时，信源与信道达到匹配。

6、根据信道特性是否随时间变化，信道可以分为_________和_____________。

7、根据是否允许失真，信源编码可分为___________和 _________ 。

8、若连续信源输出信号的平均功率为σ^2，则输出信号幅度的概率密度是____________ 时，信源具有最大熵，其值为值___________________。

9、在下面空格中选择填入数学符号“$=,\geq,\leq,\rangle$”或“$\langle$”

（1）当 X 和 Y 相互独立时，H（XY）___H(X)+H(X/Y)____H(Y)+H(X)。

（2）$H_2(X)=\dfrac{H(X_1X_2)}{2}$_____$H_3(X)=\dfrac{H(X_1X_2X_3)}{3}$

（3）假设信道输入用 X 表示，信道输出用 Y 表示。在无噪有损信道中，H(X/Y) ___0, H(Y/X)__0,I(X;Y)__ H(X)。

二、(6 分）若连续信源输出的幅度被限定在【2,6】区域内，当输出信号的概率密度是均匀分布时，计算该信源的相对熵，并说明该信源的绝对熵为多少。

三、(16 分）已知信源

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

（1）用霍夫曼编码法编成二进制变长码；（6 分）

（2）计算平均码长$\overline{L}$；（4 分）

（3）计算编码信息率R'；（2 分）

（4）计算编码后信息传输率R；（2 分）

（5）计算编码效率η。（2 分）

四、(10 分）某信源输出 A、B、C、D、E 五种符号，每一个符号独立出现，出现概率分别为 1/8、1/8、1/8、1/2、1/8。如果符号的码元宽度为 0.5μs。计算：

（1）信息传输速率R_t。（5 分）

（2）将这些数据通过一个带宽为 B=2000kHz 的加性白高斯噪声信道传输，噪声的单边功率谱密度为 $n_0=10^{-6}\,W/Hz$。试计算正确传输这些数据最少需要的发送功率 P。（5 分）

五、(16 分)一个一阶马尔可夫信源，转移概率为

$$P(S_1|S_1)=\frac{2}{3},P(S_2|S_1)=\frac{1}{3},P(S_1|S_2)=1,P(S_2|S_2)=0$$ 。

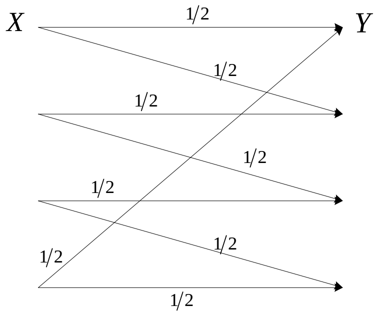
(1) 画出状态转移图。(4 分)

(2) 计算稳态概率。(4 分)

(3) 计算马尔可夫信源的极限熵。(4 分)

(4) 计算稳态下 H_1,H_2 及其对应的剩余度。(4 分)

六、设有扰信道的传输情况分别如图所示。试求这种信道的信道容量。



七、(16 分)设 X、Y 是两个相互独立的二元随机变量，其取 0 或 1 的概率相等。定义另一个二元随机变量 Z=XY(一般乘积)。试计算

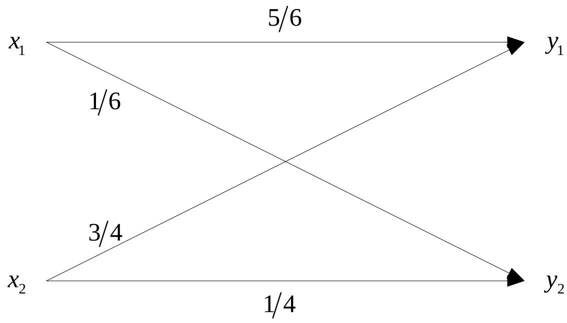
(1) $H(X),H(Z)$;

(2) $H(XY),H(XZ)$;

(3) $H(X|Y),H(Z|X)$;

(4) $I(X;Y),I(X;Z)$;

八、(10 分)设离散无记忆信源的概率空间为$\begin{bmatrix}X\\P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\0.8 & 0.2\end{bmatrix}$，通过干扰信道，信道输出端的接收符号集为$Y=[y_1,y_2]$，信道传输概率如下图所示。



(1) 计算信源 X 中事件 x_1 包含的自信息量；

(2) 计算信源 X 的信息熵；

(3) 计算信道疑义度 $H(X|Y)$；

(4) 计算噪声熵 $H(Y|X)$；

(5) 计算收到消息 Y 后获得的平均互信息量。

《信息论基础》参考答案

一、填空题（共 15 分，每空 1 分）

1、信源编码的主要目的是提高有效性，信道编码的主要目的是提高可靠性。

2、信源的剩余度主要来自两个方面，一是信源符号间的相关性，二是信源符号的统计不均匀性。

3、三进制信源的最小熵为 0，最大熵为 $\log_2^3$ bit/符号。

4、无失真信源编码的平均码长最小理论极限制为信源熵（或 H(S)/logr= H_r(S)）。

5、当 R=C 或（信道剩余度为 0）时，信源与信道达到匹配。

6、根据信道特性是否随时间变化，信道可以分为恒参信道和随参信道。

7、根据是否允许失真，信源编码可分为无失真信源编码和限失真信源编码。

8、若连续信源输出信号的平均功率为 σ^2，则输出信号幅度的概率密度是高斯分布或正态分布或 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ 时，信源具有最大熵，其值为值 $\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2$。

9、在下面空格中选择填入数学符号“$=,\geq,\leq,\rangle$”或“$\langle$”

（1）当 X 和 Y 相互独立时，H（XY）=H(X)+H(X/Y)=H(Y)+H(X)。

（2）$H_2(X)=\frac{H(X_1X_2)}{2} \geq H_3(X)=\frac{H(X_1X_2X_3)}{3}$

（3）假设信道输入用 X 表示，信道输出用 Y 表示。在无噪有损信道中，H(X/Y) $\geq$ 0，H(Y/X)=0，I(X;Y)$\leq$H(X)。

二、（6 分）若连续信源输出的幅度被限定在【2，6】区域内，当输出信号的概率密度是均匀分布时，计算该信源的相对熵，并说明该信源的绝对熵为多少。

$$\because f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, 2\leq x\leq 6\\ 0,\quad \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore \text{相对熵} h(x)=-\int_2^6 f(x)\log f(x)dx$$

=2bit/自由度

该信源的绝对熵为无穷大。

三、（16 分）已知信源

$$\begin{bmatrix}S\\P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6\\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

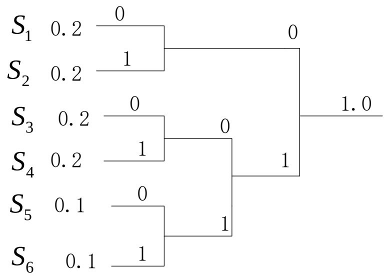
（1）用霍夫曼编码法编成二进制变长码；（6 分）

（2）计算平均码长 $\overline{L}$；（4 分）

（3）计算编码信息率 R'；（2 分）

（4）计算编码后信息传输率 R；（2 分）
（5）计算编码效率 η。（2 分）

（1）



编码结果为：

$$S_1=00$$
$$S_2=01$$
$$S_3=100$$
$$S_4=101$$
$$S_5=110$$
$$S_6=111$$

（2）$\bar{L}=\sum_{i=1}^{6}P_i\rho_i=0.4\times2+0.6\times3=2.6\,{}^{码元}\!/\!{}_{符号}$

（3）$R'=\bar{L}\log\text{r}=2.6\,{}^{\text{bit}}\!/\!{}_{符号}$

（4）$R=\frac{H(S)}{\bar{L}}=\frac{2.53}{2.6}=0.973\,{}^{\text{bit}}\!/\!{}_{码元}$ 其中，$H(S)=H(0.2,0.2,0.2,0.2,0.1,0.1)=2.53\,{}^{\text{bit}}\!/\!{}_{符号}$

（5）$\eta=\frac{H(S)}{\bar{L}\log r}=\frac{H(S)}{\bar{L}}=0.973$

评分：其他正确的编码方案：1，要求为即时码 2，平均码长最短

四、（10 分）某信源输出 A、B、C、D、E 五种符号，每一个符号独立出现，出现概率分别为 1/8、1/8、1/8、1/2、1/8。如果符号的码元宽度为 0.5 μs。计算：

（1）信息传输速率 R_t。（5 分）

（2）将这些数据通过一个带宽为 B=2000kHz 的加性白高斯噪声信道传输，噪声的单边功率谱密度为 $n_0=10^{-6}\,{}^{W}\!/\!{}_{Hz}$。试计算正确传输这些数据最少需要的发送功率 P。（5 分）

解：

（1）$R_t=\frac{1}{t}\left[H(X)-H\left({}^{X}\!/\!{}_{Y}\right)\right]$

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\times 4 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\log 8 + \frac{1}{2}\log 2 \\
&= \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 \\
&= 2\log 2 \\
&= 2\text{bit}
\end{aligned}
$$

$$R_t = \frac{2bit}{0.5\mu s} = 4\times 10^6 bps$$

$$4\times 10^6 = 2\times 10^6 \log\left(1+\frac{P}{10^{-6}\times 2\times 10^6}\right)$$

（2）$1+\frac{P}{2} = 2^2$

$P = 6W$

五、(16 分)一个一阶马尔可夫信源，转移概率为

$P(S_1 \mid S_1) = \frac{2}{3}, P(S_2 \mid S_1) = \frac{1}{3}, P(S_1 \mid S_2) = 1, P(S_2 \mid S_2) = 0$。

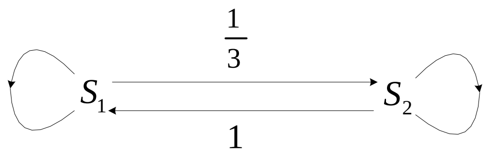
(1) 画出状态转移图。(4 分)

(2) 计算稳态概率。(4 分)

(3) 计算马尔可夫信源的极限熵。(4 分)

(4) 计算稳态下 H_1, H_2 及其对应的剩余度。(4 分)

解：(1)



(2)由公式 $P(S_i) = \sum_{j=1}^{2} P(S_i \mid S_j) P(S_j)$

$$
有\begin{cases}
P(S_1) = \sum_{i=1}^{2} P(S_1 \mid S_i) P(S_i) = \frac{2}{3}P(S_1) + P(S_2) \\
P(S_2) = \sum_{i=1}^{2} P(S_2 \mid S_i) P(S_i) = \frac{1}{3}P(S_1) \\
P(S_1) + P(S_2) = 1
\end{cases}
$$

$$
得\begin{cases}
P(S_1) = \frac{3}{4} \\
P(S_2) = \frac{1}{4}
\end{cases}
$$

(3)该马尔可夫信源的极限熵为：

$$
\begin{aligned}
H_\infty &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P\left(S_i\right)P\left(S_j \mid S_i\right)\log P\left(S_j \mid S_i\right) \\
&= -\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\log\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\log\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}\times 0.578 + \frac{1}{4}\times 1.599 \\
&= 0.681\,bit/\text{符号} \\
&= 0.472\,nat/\text{符号} \\
&= 0.205\,hart/\text{符号}
\end{aligned}
$$

(4)在稳态下：

$$
= -\sum_{i=1}^{2} P\left(x_i\right)\log P\left(x_i\right) = -\left(\frac{3}{4}\times\log\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\times\log\frac{1}{4}\right) = 0.811\,bit/\text{符号}
$$

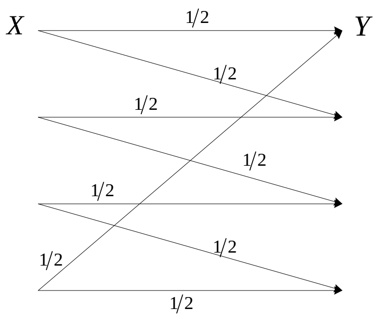
$$
H_2 = H_\infty = 0.205\,hart/\text{符号} = 0.472\,nat/\text{符号} = 0.681\,bit/\text{符号}
$$

对应的剩余度为

$$
\eta_1 = 1 - \frac{H_1}{H_0} = 1 - \frac{0.811}{-\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = 0.189
$$

$$
\eta_2 = 1 - \frac{H_2}{H_0} = 1 - \frac{0.681}{-\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = 0.319
$$

六、设有扰信道的传输情况分别如图所示。试求这种信道的信道容量。



解：信道传输矩阵如下

$$
P_{Y|X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

可以看出这是一个对称信道，L=4,那么信道容量为

$$C=\log 4-H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)$$
$$=\log L+\sum_{j=1}^{L}p\left(y_j\mid x_i\right)\log p\left(y_j\mid x_i\right)$$
$$=\log 4+2\times\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$
$$=1bit$$

七、(16 分)设 X、Y 是两个相互独立的二元随机变量，其取 0 或 1 的概率相等。定义另一个二元随机变量 Z=XY(一般乘积)。试计算

(1) $H\left(X\right),H\left(Z\right);$

(2) $H\left(XY\right),H\left(XZ\right);$

(3) $H\left(X\mid Y\right),H\left(Z\mid X\right);$

(4) $I\left(X;Y\right),I\left(X;Z\right);$

解：(1)

Z	0	1
P(Z)	3/4	1/4

$$H\left(X\right)=H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1bit$$

$$H(2)=H\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=0.8113bit$$

(2) $H\left(XY\right)=H\left(X\right)+H\left(Y\right)=1+1=2bit/$对

$$H\left(XZ\right)=H\left(X\right)+H\left(Z\mid X\right)=1+\frac{1}{2}H\left(1,0\right)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1.5bit/\text{对}$$

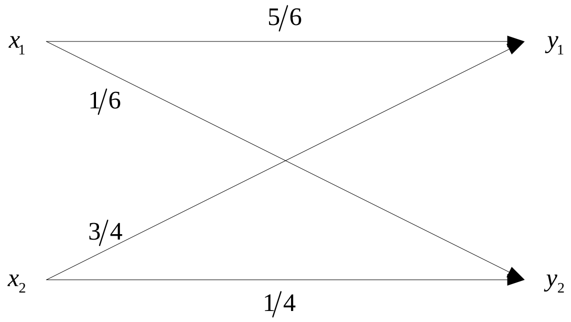
(3) $H\left(X\mid Y\right)=H\left(X\right)=1bit$

$$H\left(Z\mid X\right)=\frac{1}{2}H\left(1,0\right)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0.5bit$$

(4) $I\left(X,Y\right)=H\left(Y\right)-H\left(Y\mid X\right)=H\left(Y\right)-H\left(Y\right)=0$

$$I\left(X,Z\right)=H\left(Z\right)-H\left(Z\mid X\right)=0.8113-0.5=0.3113bit$$

八、(10 分)设离散无记忆信源的概率空间为$\begin{bmatrix}X\\P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\0.8 & 0.2\end{bmatrix}$，通过干扰信道，信道输出端的接收符号集为$Y=\left[y_1,y_2\right]$，信道传输概率如下图所示。



(6) 计算信源 X 中事件 x_1 包含的自信息量；

(7) 计算信源 X 的信息熵；

(8) 计算信道疑义度 $H\left(X\mid Y\right)$；

(9) 计算噪声熵 $H\left(Y\mid X\right)$；

(10)计算收到消息 Y 后获得的平均互信息量。

解：

(1) $I\left(x_1\right)=-\log 0.8=0.322bit=0.0969hart=0.223nat$

(2) $H\left(X\right)=H\left(0.8,0.2\right)=0.722\,bit/\text{符号}=0.5\,nat/\text{符号}=0.217\,hart/\text{符号}$

(3)转移概率：

x \ y	y_1	y_2
x_1	5/6	1/6
x_2	3/4	1/4

联合分布：

x \ y	y_1	y_2	
x_1	2/3	12/15	4/5
x_1	3/20	1/20	1/5
	49/60	11/60	1/5

$$
\begin{aligned}
H\left(XY\right)=H&\left(\frac{2}{3},\frac{2}{15},\frac{3}{20},\frac{1}{20}\right)\\
&=1.404\,bit/\text{符号}\\
&=0.973\,nat/\text{符号}\\
&=0.423\,hart/\text{符号}
\end{aligned}
$$

$$H\left(Y\right)=H\left(49/60,11/60\right)=0.687\,bit/\text{符号}=0.476\,nat/\text{符号}=0.207\,hart/\text{符号}$$

$$H\left(X\mid Y\right)=H\left(XY\right)-H\left(Y\right)=0.717\,bit/\text{符号}=0.497\,nat/\text{符号}=0.216\,hart/\text{符号}$$

(4) $H\left(Y\mid X\right)=H\left(XY\right)-H\left(X\right)=0.682\,bit/\text{符号}=0.473\,nat/\text{符号}=0.205\,hart/\text{符号}$

(5) $I\left(X;Y\right)=H\left(X\right)-H\left(X\mid Y\right)=0.00504\,bit/\text{符号}=0.00349\,nat/\text{符号}=0.00152\,hart/\text{符号}$