第 9 章

多元函数微分法及其应用

上册讨论了一元函数的微分法,但很多实际问题往往涉及多方面的因素,反映到数学上,就是一个变量依赖多个变量的情形. 这就提出了多元函数及其微积分问题. 本章将在一元函数微分学基础上,讨论以二元函数为主的多元函数的微分法及其应用.

9.1　多元函数的基本概念

9.1.1　平面点集

为了介绍多元函数,先引入一些概念.

(1) 平面点集

由平面解析几何可知,平面上的点 P 与有序二元实数组 (x,y) 之间建立了一一对应关系. 因此,把有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 视为等同的.

坐标平面上具有某种性质 q 的点的集合,称为**平面点集**,记作

$$E = \{(x,y) \mid (x,y) \text{ 具有性质 } q\}$$

例如,平面上以原点为中心、r 为半径的圆内所有点的集合是

$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

如果以点 P 表示 (x,y),以 $|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离,那么,集合 C 可表示为

$$C = \{P \mid |OP| < r\}$$

现在引入 $\mathbf{R}^2$ 中的邻域的概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ **邻域**,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

在 xOy 平面上，$U(P_0,\delta)$ 表示以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体，这就是邻域的几何意义.

点 P_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$$

注　如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的去心邻域.

可利用邻域来描述点与点集之间的关系.

在平面上，任意一点 P 与任意一个点集 E 之间必有以下 3 种关系之一：

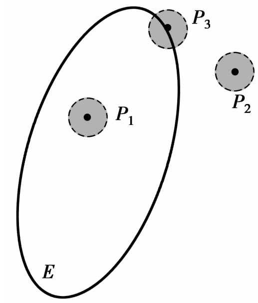

图 9.1

①如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**；

②如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\phi$，则称 P 为 E 的**外点**；

③如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**.

如图 9.1 所示，P_1 是 E 的内点，P_2 是 E 的外点，P_3 是 E 的边界点.

E 的边界点的全体，称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

显然，E 的内点必属于 E；E 的外点必定不属于 E；而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

任意一点 P 与任意一个点集 E 之间还有另一种关系.

如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**.

由聚点的定义可知，点集 E 的聚点 P 可能属于 E，也可能不属于 E.

例如，设平面点集

$$E = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \leqslant 2\}$$

满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都不属于 E；满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点，它们都属于 E；满足 $2<x^2+y^2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的外点，满足 $x^2+y^2<1$ 的一切点 (x,y) 也都是 E 的外点；点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

注　点集 E 的孤立的边界点不是 E 的聚点.

根据点集中的点的特征可定义一些重要的平面点集.

如果点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**. 如果点集 E 的边界 $\partial E\subset E$，则称 E 为**闭集**.

例如，集合 $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是开集，集合 $\{(x,y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭集，而集合

$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$既不是开集,也不是闭集.

如果点集 E 内任何两点都可用属于 E 的折线连接起来,则称 E 为**连通集**. 连通的开集称为**区域**(或**开区域**). 开区域连同它的边界一起所构成的点集,称为**闭区域**.

例如,$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$是区域,而$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$是闭区域.

对于平面点集 E,如果存在某一正数 r,使得

$$E\subset U(O,r)$$

其中,O 是坐标原点,则称 E 为**有界点集**. 否则,称 E 为**无界点集**.

例如,集合$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$是有界闭区域;集合$\{(x,y)\mid x+y>1\}$是无界区域,而集合$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$是无界闭区域.

***(2) n 维空间**

设 n 为取定的一个自然数,用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所构成的集合,即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$有时也用单个字母$\vec{x}$或 $\boldsymbol{x}$ 来表示,即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$都为零时,称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.

在解析几何中,通过直角坐标,$\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$)中的元素分别与平面上(或空间中)的点或向量建立一一对应关系,并把有序实数组(x,y)(或(x,y,z)),与平面上(或空间中)的点 P 视为等同的. 因而类似地,$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也可称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**点**或一个 **n 维向量**,x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的**第 i 个坐标**或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的**第 i 个分量**. 特别地,$\mathbf{R}^n$ 中的零元 $\mathbf{0}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量.

为了在集合 $\mathbf{R}^n$ 中建立元素之间的联系,在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算如下:

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素,$\lambda\in\mathbf{R}$,规定:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$$

这样两个线性运算为 $\mathbf{R}^n$ 中向量的加法运算和向量与数的乘法运算,此时,集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 **n 维空间**.

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的**距离**,记作 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,规定

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

显然,$n=1,2,3$ 时,上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致.

特别地,记 $\|\boldsymbol{x}\|=\rho(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$(在 $\mathbf{R},\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 中,通常将 $\|\boldsymbol{x}\|$ 记作 $|\boldsymbol{x}|$),即

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

采用这一记号,结合向量的线性运算,便得

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离以后,就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中变元的极限:

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$. 如果

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \to 0$$

则称**变元 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$**,记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$.

显然,$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是 $x_1\to a_1, x_2\to a_2, \cdots, x_n\to a_n$ 同时成立.

在 $\mathbf{R}^n$ 中线性运算和距离的引入,使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念,可方便地引入到 $n(n\geqslant 3)$ 维空间中来.

例如,设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,$\delta$ 是某一正数,则 n 维空间内的点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \delta\}$$

就定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 a 的 **$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**. 以邻域为基础,可定义点集的内点、外点、边界点和聚点,以及开集、闭集、区域等一系列概念. 在此不再一一叙述.

9.1.2　多元函数

(1) 多元函数的概念

在实际问题中,经常有多个变量相互依赖的情况. 举例如下:

例 1　圆锥的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

当 r,h 在集合 $\{(r,h) \mid r>0, h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时,V 的值就随之确定.

例 2　液体的压强 P、密度 ρ 和深度 h 之间具有关系

$$P = \rho g h$$

其中,g 为常数. 当 ρ,h 在集合 $\{(\rho,h) \mid \rho>0, h>0\}$ 内取定一对值 (ρ,h) 时,P 的对应值就随之确定.

例 3　设 R 是电阻,I 是电流,U 是电压,由电学知道,它们之间具有关系

$$I = \frac{U}{R}$$

当 R,U 在集合 $\{(R,U) \mid R>0, U>0\}$ 内取定一对值 (R,U) 时,I 的值就随之确定.

上述 3 个例子的具体意义虽然各不相同,但却具有共性,抽象出这些共性即可得出二元函数的定义.

定义 9.1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,称映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**二元函数**,通常记为

$$z = f(x,y), (x,y) \in D$$

或

$$z = f(P), P \in D$$

其中,点集 D 称为该函数的**定义域**,x,y 称为**自变量**,z 称为**因变量**.

上述定义中,与自变量 x,y 的一对值 (x,y) 相对应的因变量 z 的值,也称 f 在点 (x,y) 处的**函数值**,记作 $f(x,y)$,即

$$z = f(x,y)$$

集合 $f(D)=\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

二元函数也可用其他符号来表示,如 $z=z(x,y)$,$z=g(x,y)$ 等.

类似地可定义三元函数 $u=f(x,y,z)$,$(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数.

一般地,把定义 9.1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 D,映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 **n 元函数**,即 n 个自变量的函数,通常记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

或简记为

$$u=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

也可记为

$$u=f(P),P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

在 $n=2,3$ 时,习惯上把点 (x_1,x_2) 与点 (x_1,x_2,x_3) 分别写成 (x,y) 与 (x,y,z),而用符号 $P(x,y)$ 或 $M(x,y,z)$ 来表示 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中的点,相应的二元函数和三元函数可简记为 $z=f(P)$ 和 $u=f(M)$.

当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数;当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为**多元函数**.

关于多元函数定义域,约定如下:在讨论用算式表达的多元函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 时,以使这个算式有意义的变元 $\boldsymbol{x}$ 的值所组成的点集为这个**多元函数的自然定义域**.因此,对这类函数,它的定义域不再特别标出.

例如,函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$,这是一个无界区域;函数 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,这是一个有界闭区域.

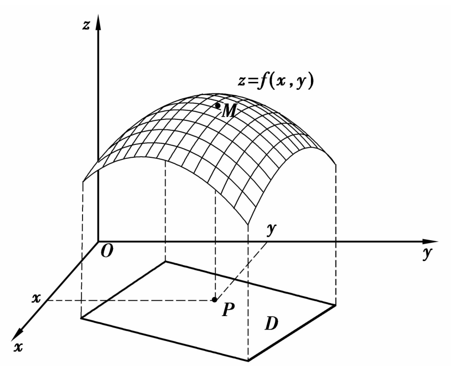

图 9.2

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,称点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为**二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形**.通常情况下,二元函数的图形是一张曲面(见图 9.2).

例如,根据空间解析几何的知识可知,$z=ax^2+by^2+c$ 是一张抛物面,而函数 $z^2=x^2+y^2$ 的图形是锥面.

(2)多元函数的极限

首先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.需要说明的是,这里 $P\to P_0$ 是指点 P 与点 P_0 间的距离趋于零,即 $|PP_0|\to 0$,故点 P 趋向于点 P_0 方式是任意的.

与一元函数的极限概念类似,如果在 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的过程中,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.下面给出严格的定义.

定义 9.2 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点.如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A, \text{或} f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或} f(P)\to A(P\to P_0)$$

上述定义的极限也称**二重极限**.

例 4　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$,求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

分析　在本题中,$(x_0,y_0)=(0,0)$,$A=0$. 证明的关键是对任意给定的 $\varepsilon>0$,找到满足定义 9.2 中要求的正数 δ. 因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$$

所以要使 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,$|f(x,y)-0|<\varepsilon$,只需 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,$x^2+y^2<\varepsilon$. 因此,可取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$.

证　对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,总有

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon$$

成立,因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

注　①二重极限存在是指 P 以任何方式趋于 P_0 时,函数都无限接近于一个确定的常数;

②只是根据"当 P 以若干种特殊方式趋于 P_0 时,函数无限接近于同一个常数",不能肯定函数的极限存在,也不能否定函数的极限存在;

③如果当 P 以两种不同方式趋于 P_0 时,函数趋于不同的值,则函数的极限肯定不存在.

例 5　考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & x^4+y^2\neq 0\\ 0 & x^4+y^2=0\end{cases}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有无极限?

解　当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{x\to 0,y=0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{y\to 0,x=0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

但当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $y=kx^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

当 k 取不同数值时,极限是不同的. 因此,函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限.

以上二元函数的极限概念可类似推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去. 多元函数的极限运算法则与一元函数的情况类似,这里不再一一叙述.

例 6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{1-\sqrt{xy+1}}{\sin(xy)}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{1-\sqrt{xy+1}}{\sin(xy)}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{-xy}{\sin(xy)(1+\sqrt{xy+1})}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{-1}{1+\sqrt{xy+1}}\times\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{xy}{\sin(xy)}=-\frac{1}{2}$$

(3)多元函数的连续性及其性质

利用多元函数的极限,可定义多元函数的连续性及间断点.

1)多元函数的连续性定义

定义 9.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点,且 $P_0\in D$. 如果
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)\tag{9.1}$$
则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **连续**,点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的**连续点**.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 上每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

二元函数的连续性概念可类似推广到 n 元函数 $f(P)$.

2)多元函数间断点的定义

定义 9.4 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续,则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**.

例如,函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & x^4+y^2\neq 0\\ 0 & x^4+y^2=0\end{cases}$$
其定义域 $D=\mathbf{R}^2$,$O(0,0)$ 是 D 的聚点. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限不存在,故点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

又如,函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$,其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$,圆周 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的点都是 D 的聚点,而 $f(x,y)$ 在 C 上没有定义,当然 $f(x,y)$ 在 C 上各点都不连续,故圆周 C 上各点都是该函数的间断点,即该函数的间断点组成一条曲线.

根据多元函数极限的运算法则可以证明,多元连续函数的和、差、积仍为连续函数;连续函数的商在分母不为零处仍连续;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数类似,**多元初等函数**是指可用一个式子所表示的多元函数,这个式子是由常数和具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而得到的.

例如，$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$，$\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$，$e^{x^2+y^2+z^2}$都是多元初等函数.

多元初等函数有与一元初等函数类似的性质，即**一切多元初等函数在其定义区域内是连续的**. 所谓**定义区域**，是指包含在定义域内的区域或闭区域.

例 7　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x^2+y^2}{\sin(xy)}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sin(xy)}$是初等函数，它的定义域为 $D=\{(x,y)\mid xy\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. 由于 $P_0(1,2)$为 D 的内点，存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)\subset D$，而任何邻域都是区域，故 $U(P_0)$是 $f(x,y)$的一个定义区域，因此 $f(x,y)$在点 $P_0(1,2)$连续，于是有

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=f(1,2)=\frac{5}{\sin 2}$$

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$时，如果 $f(P)$是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$的定义域的内点，则 $f(P)$在点 P_0 处连续，于是

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

例 8　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{\sqrt{xy+2}-1}{\ln(xy)}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\sqrt{xy+2}-1}{\ln(xy)}=\frac{\sqrt{1\times2+2}-1}{\ln(1\times2)}=\frac{1}{\ln 2}$$

3）多元连续函数的性质

有界闭区域上多元连续函数的性质与闭区间上一元连续函数的性质类似.

定理 9.1（有界性与最大值和最小值）　有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且有最大值和最小值.

定理 9.1 表明，若 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续，则必定存在常数 $M>0$，使得对一切 $P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$，且存在 $P_1,P_2\in D$，使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}$$

定理 9.2（介值定理）　有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

* **定理 9.3**（一致连续性定理）　有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续.

定理 9.3 表明，若 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得任意两点 $P_1,P_2\in D$，只要 $|P_1P_2|<\delta$ 时，都有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立.

习题9.1

1. 填空题:

(1)设$f(x,y)=\dfrac{x-3y}{x^2+y^2}$,则$f(-1,2)=$________;

(2)设$f(x,y)=x^2+2y$,则$f(\sqrt{xy},x-y)=$________;

(3)设$f\left(x-y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,则$f(x,y)=$________;

(4)$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)}\ln(|x|+e^y)=$________;

(5)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\left[\dfrac{\sin(2xy)}{x}+1\right]=$________;

(6)函数$f(x,y)=\dfrac{1}{\sin(x^2+y^2-1)}$在____处间断.

2. 求下列函数的定义域,并作出定义域的草图:

(1)$z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

(2)$z=\dfrac{\arcsin y}{\sqrt{x}}$.

3. 求下列各极限:

(1)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(2)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{-1}{xy}}$;

(3)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x+y^2)}{x+y^2}$;

(4)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\sin\dfrac{1}{x}\sin y$;

(5)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)}\dfrac{2+xy}{x^2+y^2}$;

(6)$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(3x-e^y)}{\sqrt{x^2-y^2}}$;

(7)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3-\sqrt{x^2y+9}}{6x^2y}$;

(8)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3xy^2}{\sqrt{2-e^{xy^2}}-1}$;

(9)$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\dfrac{\arctan(xy)}{y}$;

(10)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-\cos(x^2y^2)}{x^2e^{x^2+y^2}}$;

(11)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$;

(12)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{x+y}{xy}$.

4. 函数$z=\dfrac{y^3-3x}{x^3+2y}$在何处是间断的?

5. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{xy}$不存在.

6. 设圆锥的高为h,母线长为l,试将圆锥的体积V表示为h,l的二元函数.

7. 下列函数在点(0,0)是否连续?并说明原因.

(1)$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(2)$f(x,y)=\begin{cases}1 & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$.

9.2　偏导数

9.2.1　偏导数的定义及其计算法

(1) 偏导数的定义

一元函数的导数概念是在研究其变化率时引入的. 类似地,多元函数同样需要讨论它的变化率,但由于多元函数的自变量不止一个,因此,引入的概念是偏导数. 对于二元函数 $z=f(x,y)$,如果只有自变量 x 变化,而自变量 y 固定,这时它就是 x 的一元函数,这函数对 x 的导数,就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数. 具体定义如下:

定义 9.5　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0,而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{9.2}$$

存在,则称此极限为**函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数**,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad 或\quad f_x(x_0,y_0)$$

类似地,**函数 $z=f(x,y)$** 在点 (x_0,y_0) **处对 y 的偏导数定义为**

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{9.3}$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad 或\quad f_y(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么,这个偏导数就是 x,y 的函数. 将这个函数称为**函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数**,并记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x,\quad 或\quad f_x(x,y)$$

类似地,可定义**函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数**,并记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y,\quad 或\quad f_y(x,y)$$

两个偏导函数的定义式

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{9.4}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{9.5}$$

(2)偏导数的计算法

由偏导函数的概念易知,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值;函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 就是函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 在不至于引起混淆的情况下,偏导函数简称偏导数.

根据定义,偏导数可认为是当 x(或 y)固定时关于 y(或 x)的一元函数对 y(或 x)的导数. 因此,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时,只要把 y 暂时看成常量而对 x 求导数;求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时,只要把 x 暂时看成常量而对 y 求导数.

至此可得,求 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数的计算方法有下列 3 种:

①利用定义求,即

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

②首先求偏导函数,然后将 $x=x_0$, $y=y_0$ 代入偏导函数,即

$$f_x(x_0,y_0) = f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad f_y(x_0,y_0) = f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

③首先将 $x=x_0$(或 $y=y_0$)代入函数,然后对 y(或 x)求导数,最后代入 $y=y_0$(或 $x=x_0$)即可,即

$$f_x(x_0,y_0) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y_0)\right]\Big|_{x=x_0}, \quad f_y(x_0,y_0) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0,y)\right]\Big|_{y=y_0}$$

偏导数的概念还可推广到二元以上的函数. 例如,三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \tag{9.6}$$

其中,(x,y,z) 是函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域的内点. 它们的求法与二元函数的偏导数的求法类似.

一般地,求多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,对 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数 f_{x_i},只需把除 x_i 之外的其他自变量暂时看成常量而对自变量 x_i 求导数.

例 1 求 $z=3x^2+xy+4y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=6x+y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+8y$,因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 6\times 1+2 = 8, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 1+8\times 2 = 17$$

例 2 求 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin 2y$ 的偏导数.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin 2y,\frac{\partial z}{\partial y}=2\mathrm{e}^{-x}\cos 2y$$

例3　求 $r=\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

分析　在本例的函数中,3 个自变量 x,y,z 具有相同的地位. 这种情况称为函数关于自变量具有对称性. 以后将会更多地看到,在某些情况下,利用对称性解题是方便的.

解
$$\frac{\partial r}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}=2rx$$

由函数关于自变量的对称性得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=2ry,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=2rz$$

例4　已知欧姆定律为 $U=IR$,求证:$\frac{\partial I}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial I}=-1$.

证　因为

$$I=\frac{U}{R},\frac{\partial I}{\partial R}=-\frac{U}{R^2}=-\frac{I}{R}$$

$$R=\frac{U}{I},\frac{\partial R}{\partial U}=\frac{1}{I}$$

$$U=IR,\frac{\partial U}{\partial I}=R$$

所以

$$\frac{\partial I}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial I}=-\frac{I}{R}\cdot\frac{1}{I}\cdot R=-1$$

注　①例 4 表明,偏导数的记号是一个整体记号,不能看成分子与分母之商. 这与一元函数导数的记号不同.

②求偏导数关键是要弄清求偏导时哪些量可看成常量.

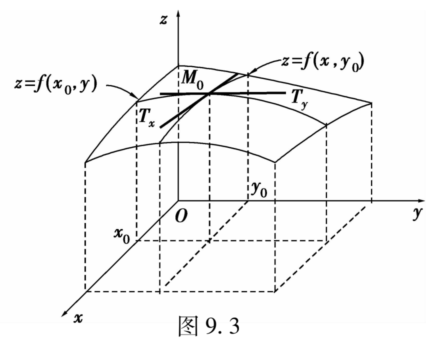

图 9.3

(3)偏导数的几何意义

根据一元函数导数的几何意义,可推出二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数的几何意义.

如图9.3所示,设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点,则过点 M_0 的平面 $y=y_0$ 与该曲面的交线是一条曲线. 该曲线在平面 $y=y_0$ 内的方程为 $z=f(x,y_0)$,则导数 $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right]\Big|_{x=x_0}$,即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是这条曲线在 M_0 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率. 同样地,偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 就是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率.

(4)多元函数的偏导数与其连续性之间的关系

对于一元函数来说,函数在某一点处的导数存在,则函数在该点必然连续. 但对于多元函数来说,即使各偏导数在某点 P_0 都存在,也不能保证函数在该点 P_0 连续. 这是因为各偏导数

在该点 P_0 都存在,只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时,函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$. 但不能保证点 P 按任何方式趋于 P_0 时,函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$.

例如,在 9.1 节中已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & x^4+y^2\neq 0\\ 0 & x^4+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)并不连续,即点(0,0)是函数 $f(x,y)$ 的间断点. 但由偏导数的定义可推得 $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$,即各偏导数在点(0,0)都存在.

9.2.2 高阶偏导数

定义 9.6 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

那么,在 D 内 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 按照对变量求偏导顺序的不同有 4 个二阶偏导数,即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)\qquad(9.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)\qquad(9.8)$$

其中, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 称为**混合偏导数**. 同样,可得三阶、四阶……以及 n 阶偏导数. 二阶和二阶以上的偏导数,统称为**高阶偏导数**.

例 5 设 $z=yx^4+xy^4-xy$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4yx^3+y^4-y,\frac{\partial z}{\partial y}=4xy^3+x^4-x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2y,\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=24xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3+4y^3-1,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4y^3+4x^3-1$$

在例 5 中,有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,即两个二阶混合偏导数相等. 一般地,有以下结果:

定理 9.4 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续,那么,在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

该定理表明,二阶混合偏导数在连续的条件下与求偏导的顺序无关. 该定理的证明略去.

类似地,可定义二元以上函数的高阶偏导数,而且高阶混合偏导数在其连续的条件下也是与求偏导的顺序无关的.

例 6 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证　因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

例 7　证明函数 $u=\dfrac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由于函数 u 关于自变量 x,y,z 具有对称性，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}&=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\right)\\&=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0\end{aligned}$$

例 6 和例 7 中的方程是数学物理方程中一种很重要的方程，称为**拉普拉斯(Laplace)方程**.

习题 9.2

1. 判断题：

(1) 设 $z=x^2+\ln y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{y}$；　(　　)

(2) 若函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 均存在，则该函数在 P 点处一定连续；　(　　)

(3) 函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处一定有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$；　(　　)

(4)函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)处有$f_x(0,0)=0$及$f_y(0,0)=0$；

(　　)

(5)函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)处连续,但该函数在(0,0)处的两个偏导数$z_x(0,0)$,$z_y(0,0)$均不存在.　(　　)

2. 填空题：

(1)设$z=\dfrac{\ln x}{y^2}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________；$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=$________；

(2)设$f(x,y)$在点(a,b)的偏导数$f_x(a,b)$和$f_y(a,b)$均存在,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b-2h)}{h}=$________.

3. 求下列函数的偏导数：

(1)$z=x^2y-y^4x+1$；　(2)$z=\mathrm{e}^{xy}\tan y$；

(3)$z=(1+xy)^{\sin y}$；　(4)$z=\ln\sin\dfrac{y}{x}$；

(5)$u=xy^2+yz^2+zx^2$；　(6)$u=\arcsin(2+y)^{-x}$；

(7)$z=\ln\sqrt{xy}$；　(8)$z=\arctan(xy)+\cos^2(xy)$；

(9)$u=x^{\frac{z}{y}}$.

4. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1)$z=x^3+3x^2y+y^4+2$；　(2)$z=\arctan\dfrac{x}{y}$.

5. 设$z=x^3\mathrm{e}^{xy}$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

6. 计算下列各题：

(1)设$f(x,y)=\mathrm{e}^{-\sin x(x+2y)}$,求$f_x(0,1)$,$f_y(0,1)$；

(2)设$z=x\ln(x+y)$,求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$,$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$,$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$.

7. 验证：

(1)$y=\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$满足$\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2)$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

8. 设$z=\ln\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$,证明$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{3}$.

9.3　全微分及其应用

9.3.1　全微分的定义

当二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数都存在时,根据一元函数微分学中增量与微分的关系,有

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x$$
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_y(x,y)\Delta y$$

将上面二式的左端分别称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x,y 的**偏增量**,而右端分别称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x,y 的**偏微分**.

与偏增量相对应,称 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对应于自变量增量 $\Delta x,\Delta y$ 的**全增量**,记作 Δz,即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

由于全增量 Δz 的计算一般来说是较复杂的,因此,会产生希望用 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数来近似代替全增量 Δz 的想法,这就是全微分概念的由来.

定义 9.7　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \tag{9.9}$$

其中,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,$A,B$ 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$,仅与 x,y 有关,则称函数 $z=f(x,y)$ **在点 (x,y) 可微分**,$A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**,记作 $\mathrm{d}z$,即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分,则称这函数**在 D 内可微分**.

在 9.2 节已知,函数在某一点的偏导数存在,并不能保证函数在该点连续. 但是,如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,那么,函数 $z=f(x,y)$ 在该点必然连续.

这是因为,如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

于是,$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$,从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y)$$

因此,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续.

下面讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分的条件.

定理 9.5(必要条件)　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,则函数在该点的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在,且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \tag{9.10}$$

证 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分. 于是,对于点 P 的某个邻域内的任意一点 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$,有 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$. 其中,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 特别当 $\Delta y=0$ 时,有

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

上式两边同除以 Δx,再令 $\Delta x\to 0$,则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A$$

从而偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$存在,并且$\frac{\partial z}{\partial x}=A$. 同理,可证偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$存在,并且$\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 因此

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

注 偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$存在是 $z=f(x,y)$ 可微分的必要条件,但不是充分条件.

例如,函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处,虽然有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$,当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于(0,0)时

$$\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}$$

这个比值当 $\rho\to 0$ 时不可能趋于零. 这表明 $\rho\to 0$ 时

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$

不是 ρ 的高阶无穷小. 根据定义,函数在(0,0)处是不可微分的.

定理 9.6(充分条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点 (x,y) 连续,则函数在该点可微分.

证 由假定,函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点 $P(x,y)$ 的某邻域内存在. 设点 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点,于是根据拉格朗日中值定理,有

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= [f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\\ &= f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y \qquad (0<\theta_1,\theta_2<1)\end{aligned}$$

由于 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 连续,因此

$$\begin{aligned}\Delta z &= [f_x(x,y)+\varepsilon_1]\Delta x+[f_y(x,y)+\varepsilon_2]\Delta y\\ &= f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\end{aligned}$$

其中,ε_1 是 $\Delta x,\Delta y$ 的函数,而 ε_2 只是 Δy 的函数,并且当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时

$$\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0$$

于是，当$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$时，即当$\rho\to 0$时，$\left|\dfrac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right|<|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0$，从而有

$$\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=o(\rho)$$

所以函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分.

注　关于二元函数全微分的定义、定理 9.5 和定理 9.6 的结论，可完全类似地推广到三元及三元以上函数.

将$\Delta x,\Delta y$分别记作$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$，并分别称为自变量x,y的微分，则函数$z=f(x,y)$的全微分可写作

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{9.11}$$

即二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和. 这个规律称为二元函数微分的**叠加原理**.

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形. 例如，当函数$u=f(x,y,z)$可微分时，它的全微分等于它的 3 个偏微分之和，即

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{9.12}$$

例 1　计算函数$z=x^2\cos(4y)$的全微分，并求函数z在点$(1,1)$处的全微分.

解　因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(4y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-4x^2\sin(4y)$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\cos 4,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-4\sin 4$$

$$\mathrm{d}z|_{(1,1)}=2\cos 4\,\mathrm{d}x-4\sin 4\,\mathrm{d}y$$

例 2　计算函数$u=x^2\sin y+\mathrm{e}^{xyz}$的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\sin y+yz\mathrm{e}^{xyz},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2\cos y+xz\mathrm{e}^{xyz},\ \frac{\partial u}{\partial z}=xy\mathrm{e}^{xyz}$$

所以

$$\mathrm{d}u=(2x\sin y+yz\mathrm{e}^{xyz})\mathrm{d}x+(x^2\cos y+xz\mathrm{e}^{xyz})\mathrm{d}y+xy\mathrm{e}^{xyz}\mathrm{d}z$$

*9.3.2　全微分在近似计算中的应用

当二元函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的两个偏导数$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$连续，并且$|\Delta x|$，$|\Delta y|$都较小时，有近似等式

$$\Delta z\approx\mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \tag{9.13}$$

这个近似等式也可写成

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \tag{9.14}$$

类似于一元函数的情形，可利用上述两个近似等式对二元函数作近似计算和误差估计，现举例如下：

例 3　有一圆柱体在受压后发生形变，它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm，高度由100 cm 减少到 99 cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解　设圆柱体的半径、高和体积依次为 r,h 和 V,则有

$$V = \pi r^2 h$$

已知 $r=20$ cm,$h=100$ cm,$\Delta r=0.05$ cm,$\Delta h=-1$ cm. 根据式(9.13),有

$$\begin{aligned}\Delta V \approx \mathrm{d}V &= V_r\Delta r + V_h\Delta h = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2\Delta h\\ &= [2\pi\times 20\times 100\times 0.05 + \pi\times 20^2\times(-1)]\mathrm{cm}^3\\ &= -200\pi\ \mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

即此圆柱体在受压后体积大约减少了 $200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例 4　计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解　令函数 $f(x,y)=x^y$,则要求的值就是当 $x=1.04,y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04,2.02)$. 由于

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x,y+\Delta y) &\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y\\ &= x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y\ln x\Delta y\end{aligned}$$

因此,取 $x=1,y=2,\Delta x=0.04,\Delta y=0.02$,并代入上式,则得

$$(1.04)^{2.02} \approx 1^2 + 2\times 1^{2-1}\times 0.04 + 1^2\times\ln 1\times 0.02 = 1.08$$

例 5　利用单摆摆动测定重力加速度 g 的公式为

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

现测得单摆摆长 l 与振动周期 T 分别为 $l=(100\pm 0.1)$cm,$T=(2\pm 0.004)$s. 问由于测定 l 与 T 的误差而引起 g 的**绝对误差**和**相对误差**各为多少?

解　如果把测量 l 与 T 所产生的误差当成 $|\Delta l|$ 与 $|\Delta T|$,则利用上述近似计算公式所产生的误差就是二元函数 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$ 的全增量的绝对值 $|\Delta g|$. 由于 $|\Delta l|,|\Delta T|$ 都很小,因此,可用 $\mathrm{d}g$ 来近似地代替 Δg. 这样,可得到 g 的误差为

$$\begin{aligned}|\Delta g| \approx |\mathrm{d}g| &= \left|\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right| \leqslant \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\cdot\delta_l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\cdot\delta_T\\ &= 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\delta_l + \frac{2l}{T^3}\delta_T\right)\end{aligned}$$

其中,δ_l 与 δ_T 为 l 与 T 的绝对误差. 把 $l=100,T=2,\delta_l=0.1,\delta_T=0.004$ 代入上式,得 g 的绝对误差为

$$\delta_g \approx 4\pi^2\left(\frac{0.1}{2^2} + \frac{2\times 100}{2^3}\times 0.004\right)\ \mathrm{cm/s^2} = 0.5\pi^2\ \mathrm{cm/s^2} = 4.93\ \mathrm{cm/s^2}$$

于是,g 的相对误差为

$$\frac{\delta_g}{g} = \frac{0.5\pi^2}{\frac{4\pi^2\times 100}{2^2}} = 0.5\%$$

从例 5 可知,对于一般的二元函数 $z=f(x,y)$,如果自变量 x,y 的绝对误差分别为 δ_x,δ_y,即

$$|\Delta x| \leqslant \delta_x,\ |\Delta y| \leqslant \delta_y$$

则 z 的误差

$$|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot \delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot \delta_y$$

从而得到 z 的绝对误差为

$$\delta_z \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot \delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot \delta_y$$

z 的相对误差为

$$\frac{\delta_z}{|z|} \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot \frac{\delta_x}{|z|} + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot \frac{\delta_y}{|z|}$$

习题 9.3

1. 填空题：

(1) $z = x^2 y + \mathrm{e}^{xy}$ 在点 (x, y) 处的全微分________；

(2) $z = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点 $(0,1)$ 处的全微分________；

(3) 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量为 Δz，全微分为 $\mathrm{d}z$，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量与全微分的关系式是________.

2. 选择题：

(1) 在点 P 处函数 $f(x, y)$ 的全微分 $\mathrm{d}f$ 存在的充分条件为（　　）.

A. f 的全部二阶偏导数均存在　　B. f 连续

C. f 的全部一阶偏导数均连续　　D. f 连续且 f_x, f_y 均存在

(2) 下面使 $\mathrm{d}f = \Delta f$ 成立的函数为（　　）.

A. $f = ax + by + c$　(a, b, c 为常数)　　B. $f = \sin xy$

C. $f = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$　　D. $f = x^2 + y^2$

3. 设 $z = x^2 y$，求当 $\Delta x = 0.1$，$\Delta y = 0.2$ 时，z 在 $(1,2)$ 点处的全增量和全微分.

4. 求下列函数的全微分：

(1) $z = 2x^2 - 3xy + y^2 + 1$；　　(2) $z = \sin \dfrac{y}{x}$；

(3) $z = xy^3 + \dfrac{y}{x}$；　　(4) $z = \mathrm{e}^{\tan \frac{y}{x}}$；

(5) $z = \dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$；　　(6) $u = x^{\cos(yz)}$.

5. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$，证明 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但

不可微.

*6. 计算$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$的近似值.

*7. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$).

*8. 测得一块三角形土地的两边边长分别为(63 ± 0.1) m 和(78 ± 0.1) m,这两边的夹角为$(60\pm1)°$. 试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

9.4 多元复合函数的求导法则

在本节,要将一元复合函数的求导法则推广到多元复合函数的情形. 多元复合函数的求导法则在多元函数的微分学中有重要的作用. 作为多元复合函数的求导法则的应用,在本节的最后,将讨论全微分的形式不变性.

9.4.1 多元复合函数求导的链式法则

按照多元复合函数不同的复合情形,细分为以下 4 种情形进行讨论:

(1)复合函数的中间变量均为一元函数的情形

定理 9.7 如果函数$u=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$都在点t可导,函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,则复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$在点t可导,且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{9.15}$$

证 当t取得增量Δt时,u,v及z相应地也取得增量$\Delta u,\Delta v$及Δz. 因为函数$u=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$都在点t可导,所以函数$u=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$都在点t可微分;又因为$z=f(u,v)$具有连续的偏导数,所以$z=f(u,v)$在对应点(u,v)可微分,于是有

$$\begin{aligned}\Delta z&=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Delta t+o(\Delta t)\right]+\frac{\partial z}{\partial v}\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Delta t+o(\Delta t)\right]+o(\rho)\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Delta t+\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)o(\Delta t)+o(\rho)\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

由于

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{o(\rho)}{|\Delta t|}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{|\Delta t|}=0$$

于是，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\Delta t}=0$.

令 $\Delta t\to 0$，则得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

这表明复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，并且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

用同样的方法，可把定理 9.7 推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如，设

$$z=f(u,v,w),u=\varphi(t),v=\psi(t),w=\omega(t)$$

则在与定理 9.7 相类似的条件下，$z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 对 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\tag{9.16}$$

式(9.15)及式(9.16)中的导数$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$称为**全导数**.

(2)复合函数的中间变量均为多元函数的情形

定理 9.8　如果函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 和对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\tag{9.17}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\tag{9.18}$$

证　由于在求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$时，可将 y 看成常数，则 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 就可看成 x 的一元函数. 因此，可应用定理 9.7，但此时 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 对 x 的导数事实上是 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 对 x 的偏导数，所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

类似地，可得关于$\dfrac{\partial z}{\partial y}$的结论.

注　从严格的意义上讲，上面给出的证明只是证明定理 9.8 的思想.

定理 9.8 的结论可推广到复合函数的中间变量多于两个的情形 . 例如，设 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=\omega(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，并且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\tag{9.19}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\tag{9.20}$$

(3)复合函数的中间变量既有一元函数又有多元函数的情形

定理 9.9 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数,函数 $v=\psi(y)$ 在点 y 可导,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.21}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{9.22}$$

这是情形 2 的一种特例,即在定理 9.8 的变量 v 与 x 无关的情形. 此时,$\frac{\partial v}{\partial x}=0$,并且$\frac{\partial v}{\partial y}$事实上就是导数$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$,由定理 9.8 可得上述结论.

(4)复合函数的某些中间变量本身又是自变量的情形

定理 9.10 设 $z=f(u,x,y)$ 在对应点 (u,x,y) 具有连续偏导数,且 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 和对 y 的偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x} \tag{9.23}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y} \tag{9.24}$$

这种情形也是情形 2 的一种特例,即函数 $z=f(u,x,y)$ 可看成情形 2 中的函数 $z=f(u,v,w)$ 在 $v=x,w=y$ 特殊情形,于是,$\frac{\partial v}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial w}{\partial x}=0,\frac{\partial w}{\partial y}=1$,由定理 9.8 可得上述结论.

注 ①定理 9.10 中,$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$是不同的,$\frac{\partial z}{\partial x}$是把复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 中的除 x 外的其他自变量 y 看成不变而只对自变量 x 的偏导数,$\frac{\partial f}{\partial x}$是把 $f(u,x,y)$ 中的同层次的中间变量 u 及 y 看成不变而对同层次中间变量 x 的偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$也有类似的区别.

②上述 4 个定理并没有将所有具体情形完全归纳进来,因此,对这 4 个定理的学习要起到举一反三的作用.

③多元复合函数的求偏导关键要清楚函数复合的层次结构以及求偏导时哪些变量看成常量.

例 1 设 $z=u^2\mathrm{e}^v,u=xy,v=x+y$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\&=2u\mathrm{e}^v\cdot y+u^2\mathrm{e}^v\cdot 1=(2xy^2+x^2y^2)\mathrm{e}^{x+y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=2u\mathrm{e}^v\cdot x+u^2\mathrm{e}^v\cdot 1=(2x^2y+x^2y^2)\mathrm{e}^{x+y}\end{aligned}$$

例 2　设 $u=f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$，而 $z=x^2\sin y$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\\&=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y\\&=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}(1+2x^2\sin^2 y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\\&=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y\\&=\frac{2y+x^4\sin 2y}{x^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

例 3　设 $z=f(u,v,t)=\mathrm{e}^{u+v}+\ln t$，而 $u=t,v=\cos t$，求全导数$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial t}\\&=\mathrm{e}^{u+v}\cdot 1+\mathrm{e}^{u+v}(-\sin t)+\frac{1}{t}\\&=\mathrm{e}^{t+\cos t}(1-\sin t)+\frac{1}{t}\end{aligned}$$

例 4　设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

为了方便，引入记号$f'_1=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}$，$f''_{12}=\dfrac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}$. 同理，有$f'_2$，$f''_{11}$，$f''_{21}$，$f''_{22}$等. 对于 n 元函数也有类似的记号.

解　令 $u=x+y+z,v=xyz$，则 $w=f(u,v)$，并且

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1+yzf'_2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f'_1+yzf'_2)=\frac{\partial f'_1}{\partial z}+yf'_2+yz\frac{\partial f'_2}{\partial z}$$

根据复合函数的求导法则有

$$\frac{\partial f'_1}{\partial z}=\frac{\partial f'_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f'_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=f''_{11}+xyf''_{12}$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial z}=\frac{\partial f'_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f'_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=f''_{21}+xyf''_{22}$$

由于 f 具有二阶连续偏导数，因此

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+xyf''_{12}+yf'_2+yzf''_{21}+xy^2zf''_{22}$$

$$=f''_{11}+y(x+z)f''_{12}+yf'_2+xy^2zf''_{22}$$

例 5 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续,把下列表达式转换成极坐标系中的形式:

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 由直角坐标与极坐标间的关系式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,得

$$u=f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=F(\rho,\theta)$$

并且函数 $u=f(x,y)$ 可看成由函数 $u=F(\rho,\theta)$ 与函数 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 复合而得到的. 应用复合函数求导法则,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\rho}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{y}{\rho^2}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\partial\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\rho}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{x}{\rho^2}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

将两式平方后相加,得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

再求二阶偏导数,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\\&=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\cdot\cos\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\sin^2\theta}{\rho}\end{aligned}$$

同理,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\cos^2\theta}{\rho}$$

两式相加,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$

9.4.2 全微分形式不变性

设 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数,则 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 的全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \tag{9.25}$$

如果 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数,而 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 也具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\varphi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的全微分

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

由此可知,无论 z 是自变量 u,v 的函数或中间变量 u,v 的函数,它的全微分形式是一样的. 这个性质称为**全微分形式不变性**.

例 6 设 $z=u^2\mathrm{e}^v, u=xy, v=x+y$,利用全微分形式不变性求 z 的全微分及偏导数.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v = 2u\mathrm{e}^v\mathrm{d}u + u^2\mathrm{e}^v\mathrm{d}v \\ &= 2u\mathrm{e}^v(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + u^2\mathrm{e}^v(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) \\ &= (2xy^2 + x^2y^2)\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x + (2x^2y + x^2y^2)\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

于是,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2xy^2 + x^2y^2)\mathrm{e}^{x+y}, \frac{\partial z}{\partial y} = (2x^2y + x^2y^2)\mathrm{e}^{x+y}$$

习题 9.4

1. 填空题:

(1) $z=\arctan(x-y), x=t^3, y=2t$,则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=$________;

(2) $z=u^2v, u=x\cos y, v=x\sin y$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________,$\frac{\partial z}{\partial y}=$________;

(3) 设 $z=f(u,v,\omega)=u^2+v\omega$,而 $u=x+y, v=x, \omega=xy$,则 $\mathrm{d}z=$________;

(4) 设 $z=f(xy, \mathrm{e}^{x^2+y^2})$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________,$\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

2. 设 $z=\frac{y}{x}$,而 $x=\mathrm{e}^t, y=1-\mathrm{e}^{2t}$,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

3. 设 $z=\arcsin xy$,而 $x=t, y=3t^2$,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

4. 设 $z=\mathrm{e}^{2u}\ln v$,而 $u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 求下列函数的一阶偏导数(其中,f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u=f\left(\frac{x+z}{y}, \frac{y}{z}\right)$; (2) $u=f(\ln x, x^2\cos y, 3xyz+1)$.

6. 设 $z=f(y^x, x^2\mathrm{e}^y)$(其中,$f$ 具有二阶连续偏导数),求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 设 $z=xy+xF(u)$,其中,$u=\frac{y}{x}$,$F(u)$ 为可导函数,证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

8. 设 $z=\mathrm{e}^{u}\sin v, u=xy, v=x+y$,利用全微分形式不变性求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中,$f(u)$为可导的函数,验证$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

9.5 隐函数的存在定理及求导公式

隐函数的概念在前面的章节中已经介绍过了,而且给出了在不显化隐函数的情况下,直接由方程 $F(x,y)=0$ 求该方程所确定隐函数的导数的方法. 在本节将介绍隐函数的存在定理及根据多元复合函数求导法导出隐函数的导数公式.

按照确定隐函数的方程个数的不同情形,分成以下两种情形进行讨论:

9.5.1 一个方程的情形

定理 9.11(隐函数存在定理) 设函数 $F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内具有连续偏导数,$F(x_0,y_0)=0$,$F_y(x_0,y_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y)=0$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个具有连续导数的函数 $y=f(x)$,它满足条件 $y_0=f(x_0)$,并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y} \tag{9.26}$$

在这里并不给出定理中隐函数存在性的证明. 下面只给出隐函数导数公式的推导过程.

将方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$代入 $F(x,y)=0$ 中,得恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0$$

这个等式的左端可看成 x 的一个复合函数,于是,在等式的两端同时对 x 求导得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

由于 F_y 连续,且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,因此存在点(x_0,y_0)的一个邻域,在这个邻域内 $F_y\neq 0$,于是得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

隐函数存在定理的几何解释

例 1 验证方程 $\sin y+\mathrm{e}^{x}-xy^2-1=0$ 在点$(0,0)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$,并求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

证 设 $F(x,y)=\sin y+\mathrm{e}^{x}-xy^2-1$,则 $F_x=\mathrm{e}^{x}-y^2$,$F_y=\cos y-2xy$,$F(0,0)=0$,$F_y(0,0)=1\neq 0$. 因此,由定理 9.11 可知,方程 $\sin y+\mathrm{e}^{x}-xy^2-1=0$ 在点$(0,0)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$.

下面求 $y=f(x)$的一阶导数.

方法1(代公式):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\mathrm{e}^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法2(用公式的推导法):方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2-1=0$ 两边同时对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos y+\mathrm{e}^x-y^2-2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^x-y^2}{2xy-\cos y}$$

隐函数存在定理9.11可推广到方程确定的多元隐函数.

既然一个二元方程 $F(x,y)=0$ 可确定一个一元隐函数,那么一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 也有可能确定一个二元隐函数,于是有:

定理9.12(隐函数存在定理)　设函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内具有连续的偏导数,且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$,$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$,并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\tag{9.27}$$

这里也不给出定理中隐函数存在性的证明.下面只给出隐函数导数公式的推导过程.

将方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 代入 $F(x,y,z)=0$ 中,得恒等式

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$$

将上式两端分别对 x 和 y 求导,得

$$F_x+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad F_y+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

因为 F_z 连续且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,所以存在点 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域,在这个邻域内 $F_z\neq 0$,于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例2　设 $\mathrm{e}^x-xyz=0$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　方法1:设 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^x-xyz$,则

$$F_x=\mathrm{e}^x-yz,F_z=-xy,F_y=-xz$$

由式(9.27)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\mathrm{e}^x-yz}{xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-xz}{xy}=\frac{-z}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\left(-z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)xy-x(\mathrm{e}^x-yz)}{(xy)^2}=\frac{-x\mathrm{e}^x-xy^2\left(\dfrac{-z}{y}\right)}{(xy)^2}=\frac{-xz+z}{xy}$$

方法2:方程 $\mathrm{e}^x-xyz=0$ 两边同时对 x 求导,得

$$\mathrm{e}^x-yz-xy\frac{\partial z}{\partial x}=0\tag{9.28}$$

于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{e}^x-yz}{xy}=\frac{xyz-yz}{xy}=z-\frac{z}{x}$$

方程 $\mathrm{e}^x-xyz=0$ 两边同时再对 y 求导,得

$$-xz-xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

故得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{y}$.

对式(9.28)方程两边同时再对 y 求导,得

$$-z-y\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-z-y\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}}{xy}=\frac{-z-y\frac{-z}{y}-x\left(z-\frac{z}{x}\right)}{xy}=\frac{z-xz}{xy}$$

9.5.2 方程组的情形

在一定条件下,由两个方程组 $F(x,y,u,v)=0$,$G(x,y,u,v)=0$ 可确定一对二元函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$. 例如,方程 $xu-yv=0$ 和 $yu+xv=1$ 可确定两个二元函数

$$u=\frac{y}{x^2+y^2},v=\frac{x}{x^2+y^2}$$

一个具有一般性的问题是:在不显化或无法显化 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 的条件下,只根据方程组 $F(x,y,u,v)=0$,$G(x,y,u,v)=0$,如何求 u,v 的偏导数? 关于这个问题,有下面的定理.

定理 9.13(隐函数存在定理) 设 $F(x,y,u,v)$,$G(x,y,u,v)$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数,又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,且偏导数所组成的函数行列式(称为雅可比(Jacobi)行列式)

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

数学家雅可比

在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 不等于零,则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一组具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$,$v_0=v(x_0,y_0)$,并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}} \tag{9.29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad(9.30)$$

同前面一样,在这里也不给出定理中隐函数存在性的证明. 下面只简要介绍推导隐函数的偏导数的方法.

将由方程组 $F(x,y,u,v)=0,G(x,y,u,v)=0$ 确定的,具有连续偏导数的两个连续隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 代入方程组,在得到的两个恒等式的两边分别对 x,y 求导,则得到 4 个等式,并可组成下面两个方程组

$$\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases},\begin{cases}F_y+F_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ G_y+G_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

则偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$由前一个方程组确定并解得,而偏导数$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$由后一个方程组确定并解得.

例 3　设$\begin{cases}e^u-v\sin y=x\\ u\sin x+e^v=y\end{cases}$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$.

解　方法 1:将方程两边分别对 x 求偏导,得关于$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial x}$的方程组

$$\begin{cases}e^u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial v}{\partial x}=1\\ \sin x\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u\cos x\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^v-u\sin y\cos x}{e^{u+v}+\sin x\sin y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u\cos xe^u+\sin x}{e^{u+v}+\sin x\sin y}$$

将两个方程两边分别对 y 求偏导,用同样的方法,解得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v\cos ye^v+\sin y}{e^{u+v}+\sin x\sin y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u-v\sin x\cos y}{e^{u+v}+\sin x\sin y}$$

此题还可直接用公式求解.

方法 2:由隐函数存在定理 9.13 可知,方程组 $e^u-v\sin y=x,u\sin x+e^v=y$ 确定的两个隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是可微分的. 因此,将两个方程的两端微分,可得

$$\begin{cases}e^u du-\sin y dv-v\cos y dy=dx\\ \sin x du+u\cos x dx+e^v dv=dy\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}e^u du-\sin y dv=dx+v\cos y dy\\ \sin x du+e^v dv=-u\cos x dx+dy\end{cases}$$

解得

$$du = \frac{e^v - u\cos x\sin y}{e^{u+v} + \sin x\sin y}dx + \frac{v\cos y\, e^v + \sin y}{e^{u+v} + \sin x\sin y}dy$$

$$dv = -\frac{u\cos x e^u + \sin x}{e^{u+v} + \sin x\sin y}dx + \frac{e^u - v\sin x\cos y}{e^{u+v} + \sin x\sin y}dy$$

于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^v - u\sin y\cos x}{e^{u+v} + \sin x\sin y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v\cos y e^v + \sin y}{e^{u+v} + \sin x\sin y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u\cos x e^u + \sin x}{e^{u+v} + \sin x\sin y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u - v\sin x\cos y}{e^{u+v} + \sin x\sin y}$$

例 4 设函数 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某一邻域内有连续偏导数,又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

(1)证明方程组

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

在点 (x,y,u,v) 的某一邻域内唯一确定一组有连续偏导数的反函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$;

(2)求反函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 对 x, y 的偏导数.

解 (1)将方程组改写为

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) \equiv x - x(u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) \equiv y - y(u,v) = 0 \end{cases}$$

按假设条件

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

由隐函数存在定理 9.13,即得所要证的结论.

(2)将(1)中方程组所确定的反函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 代回方程组中,则得

$$\begin{cases} x \equiv x[u(x,y), v(x,y)] \\ y \equiv y[u(x,y), v(x,y)] \end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对 x 求偏导数,得

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

由于 $J \neq 0$,故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理,可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

注 隐函数求导要分清哪几个变量是函数,哪几个变量是自变量.

习题 9.5

1. 求由下列方程确定的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $x^2+y^2-1=0$;　　(2) $\arctan\sqrt{x^2+y^2}=\ln\frac{y}{x}$.

2. 求由下列方程确定的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$:

(1) $\frac{x}{y}=\ln\frac{z}{y}$;　　(2) $x^2+4y^3+2z-4\sqrt{xyz}=0$.

3. 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$,其中,f 可微,证明 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x$.

4. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$,证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

5. 设 $\varphi(u,v)$具有连续偏导数,证明由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

6. 设 $x^2+y^2+z^2-2z=0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 设 $4z^3+3x^2z\tan y=\mathrm{e}^5$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. 求由下列方程组所确定的函数导数或偏导数:

(1) 设$\begin{cases}z=x^3-y^2\\3x^2+5y^2-3z^3=15\end{cases}$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) 设$\begin{cases}u=f(u^2-\cos x,v\mathrm{e}^y)\\v=g(ux,v^3-\sin y)\end{cases}$,其中,$f,g$ 具有一阶连续偏导数,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$;

(3) 设$\begin{cases}xu-yv=0\\yu+xv=1\end{cases}$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. 设 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$,其中 $F(u,v)$可微,求 $\mathrm{d}z$.

10. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$:

(1) 用隐函数求导公式求$\frac{\partial z}{\partial x}$;

(2) 用复合函数求偏导数的方法求$\frac{\partial z}{\partial x}$;

(3) 利用全微分形式不变性,求出$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

9.6　多元函数微分学的几何应用

9.6.1　空间曲线的切线与法平面

(1)设空间曲线 Γ 的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta] \tag{9.31}$$

这里,假定 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$都在$[\alpha,\beta]$上可导,并且 $\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$不同时为零.

在曲线 Γ 上取对应于 $t=t_0$ 的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$和邻近的对应于 $t=t_0+\Delta t$ 的一点 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$作曲线的割线 MM_0,则其方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

并且当点 M 沿着 Γ 趋于点 M_0 时,割线 MM_0 的极限位置就变成曲线在点 M_0 处的切线. 由于当 $\Delta t\neq 0$ 时,割线 MM_0 的方程可改写为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

令 $M\to M_0$,即 $\Delta t\to 0$,则得曲线在点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)} \tag{9.32}$$

将切线的方向向量 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$称为曲线的**切向量**,通过点 M_0 而与切线垂直的平面称为曲线 Γ 在点 M_0 处的**法平面**. 所以曲线 Γ 在点 M_0 处的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0 \tag{9.33}$$

例 1　求曲线 $x=2\cos t,y=4\sin t,z=6t$ 在点$(\sqrt{3},2,\pi)$处的切线方程及法平面方程.

解　因为 $x'=-2\sin t,y'=4\cos t,z'=6$,而点$(\sqrt{3},2,\pi)$所对应的参数 $t=\frac{\pi}{6}$,所以切向量

$$\boldsymbol{T}=(-1,2\sqrt{3},6)$$

于是,切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{3}}{-1}=\frac{y-2}{2\sqrt{3}}=\frac{z-\pi}{6}$$

法平面方程为

$$-(x-\sqrt{3})+2\sqrt{3}(y-2)+6(z-\pi)=0$$

即

$$x-2\sqrt{3}y-6z+3\sqrt{3}+6\pi=0$$

(2) 曲线 Γ 的方程

$$y=\varphi(x), z=\psi(x)$$

此时,曲线方程可看成参数方程 $x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x)$,因而**切向量**为

$$\boldsymbol{T}=(1,\varphi'(x),\psi'(x))$$

曲线 Γ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)} \tag{9.34}$$

在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的法平面方程为

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0 \tag{9.35}$$

(3) 曲线 Γ 的方程

$$F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$$

在满足隐函数存在定理的条件下,这两个方程可唯一地确定两个隐函数 $y=\varphi(x), z=\psi(x)$,因而曲线的参数方程可看成

$$x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x)$$

由方程组 $\begin{cases} F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ G_x+G_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$,可解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$,从而**切向量**为

$$\boldsymbol{T}=\left(1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \tag{9.36}$$

注　此种情况下,也可由隐函数的求导公式推得切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right\} \tag{9.37}$$

曲线 Γ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M} \tag{9.38}$$

曲线 Γ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 点的法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M(z-z_0)=0 \tag{9.39}$$

例 2　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$,在点(1,1,1)处的切线及法平面方程.

解　为求切向量,在所给方程的两边对 x 求导数,得方程组

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0\\2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-10x+4z+15}{10y+6z},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{-6x-4y+9}{10y+6z}$$

在点(1,1,1)处,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{9}{16},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-1}{16}$,从而切向量 $\boldsymbol{T}=\left(1,\dfrac{9}{16},\dfrac{-1}{16}\right)$. 所求切线方程为

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面方程为

$$(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)+\frac{-1}{16}(z-1)=0$$

即

$$16x+9y-z-24=0$$

9.6.2 曲面的切平面与法线

(1)由隐式给出曲面方程的情形

设曲面 Σ 的方程为

$$F(x,y,z)=0 \tag{9.40}$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 Σ 上的一点,并设函数 $F(x,y,z)$ 的偏导数在该点连续且不同时为零.

在曲面 Σ 上,通过点 M_0 任意引一条曲线 Γ(见图9.4),假定曲线 Γ 的参数方程式为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)$$

$t=t_0$ 对应于点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为零. 曲线在点 M_0 的**切向量**为

$$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

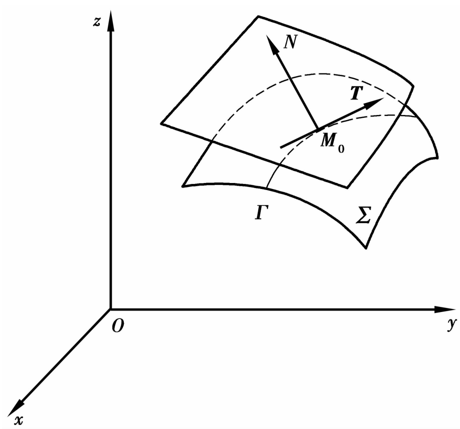

图9.4

由于曲线 Γ 完全在曲面 Σ 上,因此,有恒等式

$$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$$

根据给定的条件,上式左端的复合函数在 $t=t_0$ 时存在全导数,并且这个全导数等于零,即有

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0$$

引入向量

$$\boldsymbol{N}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

因此,$\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 是垂直的. 因为曲线 Γ 是曲面 Σ 上通过点 M_0 的任意一条曲线,它们在点 M_0 的切线都与同一向量 $\boldsymbol{N}$ 垂直,所以曲面上通过点 M_0 的一切曲线在点 M_0 的切线都在同一个平面

上,将这个平面称为曲面 Σ 在点 M_0 的**切平面**,并且将通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 垂直于切平面的直线称为曲面在 M_0 的**法线**,垂直于曲面的切平面的向量称为曲面的**法向量**. 于是,曲面 Σ 在点 M_0 的切平面的方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \tag{9.41}$$

曲面 Σ 在 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{9.42}$$

曲面 Σ 在点 M_0 处的一个**法向量**为

$$\boldsymbol{N}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)) \tag{9.43}$$

例 3 求椭球面 $3x^2+4y^2+2z^2=9$ 在点$(1,1,1)$处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+4y^2+2z^2-9$,则有

$$F_x(x,y,z)=6x,\ F_y(x,y,z)=8y,\ F_z(x,y,z)=4z$$

$$F_x(1,1,1)=6,\ F_y(1,1,1)=8,\ F_z(1,1,1)=4$$

于是,在点$(1,1,1)$处的法向量为 $\boldsymbol{N}=(6,8,4)$,故所求切平面方程为

$$6(x-1)+8(y-1)+4(z-1)=0$$

即

$$3x+4y+2z-9=0$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{4}$$

即

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2}$$

(2)考虑由显式给出曲面方程的情形

设曲面 Σ 的方程为

$$z=f(x,y) \tag{9.44}$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面 Σ 上, 函数$f(x,y)$的偏导数$f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$,则有

$$F_x(x,y,z)=f_x(x,y),F_y(x,y,z)=f_y(x,y),F_z(x,y,z)=-1$$

所以曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的一个**法向量**为

$$\boldsymbol{N}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$$

曲面 Σ 在 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \tag{9.45}$$

曲面 Σ 在点 M_0 的切平面的方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

或

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-z_0 \tag{9.46}$$

式(9.46)的左端恰好是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分,而右端是切平面上点的竖坐标的增量. 因此,得到**全微分的几何意义**为:曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面上点的竖坐标的增量.

设 α,β,γ 是曲面的法向量的方向角,并假定法向量的方向是向上的,即法向量与 z 轴的正向的夹角 γ 是锐角,则法向量的方向余弦为

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{-f_x(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}\\ \cos\beta &= \frac{-f_y(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}\\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}\end{aligned} \tag{9.47}$$

例 4 证明曲面 $z=xy$ 在点(1,2,2)处的切平面与平面 $x-3y-z+9=0$ 相互垂直.

解 令 $f(x,y)=xy$,曲面 $z=xy$ 在点(1,2,2)处切平面的法向量 $\boldsymbol{N}_1\big|_{(1,2,2)}=(f_x,f_y,-1)\big|_{(1,2,2)}=(y,x,-1)\big|_{(1,2,2)}=(2,1,-1)$. 平面 $x-3y-z+9=0$ 的法向量

$$\boldsymbol{N}_2=(1,-3,-1),\ \boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2=(2,1,-1)\cdot(1,-3,-1)=0$$

故 $\boldsymbol{N}_1$ 垂直 $\boldsymbol{N}_2$,因此,曲面 $z=xy$ 在点(1,2,2)处的切平面与平面 $x-3y-z+9=0$ 相互垂直.

习题 9.6

1. 填空题:

(1)曲线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t, z=4\sin\frac{t}{2}$,在对应 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程为________,法平面方程为________;

(2)曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点(1,1,5)处的切平面方程为________,法线方程为________.

2. 求曲线 $\begin{cases}y=2x^2\\ z=3x+1\end{cases}$ 在点 $M(0,0,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

3. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点(1,-2,1)处的切线方程及法平面方程.

4. 求螺旋线 $x=a\sin\theta, y=a\cos\theta, z=b\theta$ 在点 $(a,0,\frac{\pi b}{2})$ 处的切线方程和法平面方程,并证明其上任一点的切向量与 z 轴成一定角.

5. 求曲面 $e^{3z}-2z+3xy=7$ 在点(2,1,0)处的切平面方程及法线方程.

6. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出该法线方程.

7. 求椭球面 $3x^2+2y^2+5z^2=4$ 平行于平面 $x-2y+3z=1$ 的切平面方程.

8. 求旋转椭球面 $x^2+y^2+3z^2=8$ 上点$(-1,-2,-1)$处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

9. 试证曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

10. 证明球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上任一点处的法线均通过球心.

11. 证明锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}+3$ 上任意一点处的切平面都通过点$(0,0,3)$.

9.7　方向导数与梯度

9.7.1　方向导数

一元函数的导数以及二元函数与三元函数的偏导数反映的都是函数沿坐标轴方向的变化率. 但在物理学中,只考虑函数沿坐标轴方向的变化率是不够的. 例如,大气要从温度低的地方流向温度高的地方. 因此,在气象学中就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率. 反映到数学上,这就是方向导数的问题.

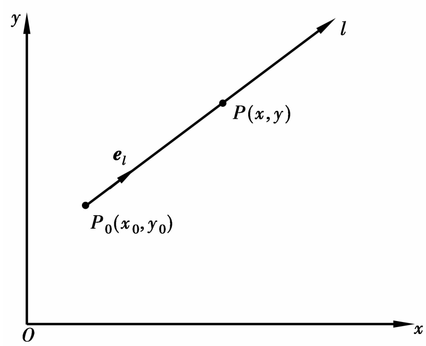

图 9.5

首先来讨论函数 $z=f(x,y)$在一点 P 沿某一方向的变化率问题.

定义 9.8　设 l 是 xOy 平面上以 $P_0(x_0,y_0)$为始点的一条射线,$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与 l 同方向的单位向量(见图 9.5),则射线 l 的参数方程为

$$x=x_0+t\cos\alpha,y=y_0+t\cos\beta\qquad(|\overrightarrow{P_0P}|=t\geqslant 0)$$

设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某一邻域$U(P_0)$内有定义,$P(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$为 l 上另一点,且 $P\in U(P_0)$. 如果函数增量$f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)$与 P 到 P_0 的距离$|\overrightarrow{PP_0}|=t$ 的比值

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

当 P 沿着 l 趋于 P_0 时(即 $t\to 0^+$时)的极限存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点 P_0 处沿方向 l 的**方向导数**,记作$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$,即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}\tag{9.48}$$

从方向导数的定义可知,方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$就是函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处沿方向 l 的变化率.

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 存在时,$z=f(x,y)$ 在点 P_0 沿 x 轴正向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$;沿 x 轴负向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{\partial f}{\partial x}$. 这说明偏导数存在时,沿该坐标轴方向的方向导数存在;反之,则不一定成立.

例如,函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 沿 x 轴正向的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1$,但偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 不存在.

关于方向导数的存在性和计算,有下列定理:

定理 9.14 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,那么,函数在该点处沿任一方向 l 的方向导数都存在,且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta \tag{9.49}$$

其中,$\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦.

证 由于函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,故有等式

$$f(x_0,\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

由于点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 在以点 (x_0,y_0) 为起点的射线 l 上,因此,可设 $\Delta x=t\cos\alpha$,$\Delta y=t\cos\beta$,代入上式则有

$$f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(t)$$

所以

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

这就证明了方向导数的存在,且其值为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

例 1 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $P(1,2)$ 处沿从点 $P(1,2)$ 到点 $Q(1,2+\sqrt{3})$ 的方向导数.

解 向量 $\overrightarrow{PQ}=(0,\sqrt{3})$ 的方向就是射线 l 的方向,故与 l 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=(0,1)$. 因为函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $P(1,2)$ 可微分,并且 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.2x\right|_{(1,2)}=2$,$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.2y\right|_{(1,2)}=4$,所以所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=2\times0+4\times1=4$$

对于三元函数,有与二元函数相似的方向导数定义与结论. $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

如果函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 可微分,则 $f(x,y,z)$ 在该点处沿着方向 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

例 2　求 $f(x,y,z)=xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 l 的方向导数,其中,l 的方向角分别为 $\frac{\pi}{3}$,$\frac{\pi}{4}$,$\frac{\pi}{3}$.

解　与 l 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_l = \left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

因为函数 $f(x,y,z)$ 可微分,并且

$$f_x(1,1,1) = (yz)\big|_{(1,1,1)} = 1$$
$$f_y(1,1,1) = (xz)\big|_{(1,1,1)} = 1$$
$$f_z(1,1,1) = (yx)\big|_{(1,1,1)} = 1$$

所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)} = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

9.7.2　梯度

既然方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 刻画了函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 l 的变化情况,那么,函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿哪个方向增加最快呢? 为此,介绍一个与方向导数相关联的概念——梯度.

定义 9.9　设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P_0(x_0,y_0)\in D$,都可确定一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$$

这个向量称为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的**梯度**,记作 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$,即

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j} \tag{9.50}$$

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 l 同方向的单位向量,则有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta \\ &= \mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)\boldsymbol{e}_l = |\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)|\cos\theta\end{aligned} \tag{9.51}$$

其中,θ 是 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 与 $\boldsymbol{e}_l$ 的夹角.

式(9.51)表明了函数在一点的梯度与函数在这点的方向导数间的关系. 由此可知:

①当 $\theta=0$ 时,即 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向与梯度的方向相同时,即沿梯度方向时,函数值增加最快. 此时,方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 取得最大值 $=|\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)|$;

②当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,即 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向与梯度的方向垂直时,函数的变化率为零. 此时,方向导

数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=0$;

③当 $\theta=\pi$ 时,即 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向与梯度的方向相反时,函数值减少最快. 此时,方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 取得最小值 $=-|\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)|$.

至此可知,函数在一点的梯度是这样一个向量,它的方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向,它的模就等于方向导数的最大值.

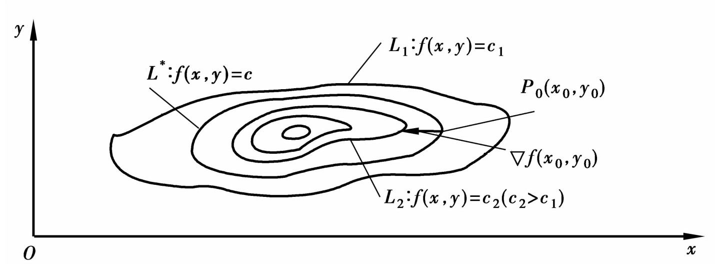

图 9.6

一般来说,二元函数 $z=f(x,y)$ 在几何上表示一个曲面,这曲面被平面 $z=c$(c 是常数)所截得的曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$$

曲线 L 在 xOy 面上的投影是一条平面曲线 L^*(见图 9.6),L^* 在 xOy 平面上的方向为

$$f(x,y)=c$$

对于曲线 L^* 上的一切点,函数 $z=f(x,y)$ 的值都是 c,故称平面曲线 L^* 为函数 $z=f(x,y)$ 的**等值线**.

若 $f_x(x_0,y_0)$,$f_y(x_0,y_0)$ 不同时为零,则等值线 $f(x,y)=c$ 上任一点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的一个单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))=\frac{\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0)|}$$

这表明,函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 的方向与等值线 $f(x,y)=c$ 上这点的一个法线方向相同,而沿这个法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ 就等于 $|\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)|$,于是有

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}$$

这个关系式表明了函数在一点的梯度与过这点的等值线、方向导数间的关系. 这就是说,函数在一点的梯度方向与等值线在这点的一个法线方向相同,它的指向为从数值较低的等值线指向数值较高的等值线,梯度的模就等于函数在这个法线方向的方向导数.

梯度概念可推广到三元函数的情形.

定义 9.10 设函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in G$,都可定出一个向量.

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$$

这向量称为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的**梯度**,记为 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$,即

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$$

与二元函数的梯度一样,三元函数的梯度的方向与取得最大方向导数的方向一致,而它的模为方向导数的最大值.

称曲面

$$f(x,y,z)=c$$

为函数 $f(x,y,z)$ 的**等量面**,则函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ 的方向与过点 P_0 的等量面 $f(x,y,z)=c$ 在这点的法线的方向 $\boldsymbol{n}$ 相同,且从数值较低的等量面指向数值较高的等量面,而梯度的模 $|\nabla f(x_0,y_0,z_0)|$ 等于函数在这个法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial n}$.

例 3　求 $\mathbf{grad}(x^2+3xy)$.

解　这里 $f(x,y)=x^2+3xy$. 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y,\frac{\partial f}{\partial y}=3x$$

所以

$$\mathbf{grad}\,(x^2+3xy)=(2x+3y)\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}$$

例 4　设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$,求 $\mathbf{grad}\, f(1,-1,2)$.

解　$\mathbf{grad}\, f(x,y,z)=(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,1)$,于是

$$\mathbf{grad}\, f(1,-1,2)=(2,-2,1)$$

例 5　求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿着曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在该点的切线正方向(t 增大的方向)的方向导数,并指出 u 在该点沿哪个方向的方向导数最大?

解　曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 的切线正方向为 $\boldsymbol{T}=(1,2,3)$,与其同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_T=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$. 又由于

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2$$

于是,所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{(1,1,1)}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+2\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}$$

由于函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度为

$$\mathbf{grad}\, f(1,1,1)=(2,2,2)$$

同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(2,2,2)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,所以函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿着方向 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数最大.

习题9.7

1. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

2. 求 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向 l 的方向导数,其中,l 的方向角分别为 $60°,45°,60°$.

3. 求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法线方向的方向导数.

4. 求函数 $u=3y^2+2xz^3-x^2yz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

5. 求函数 $u=3x^2yz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数.

6. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

7. 设 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2+4xy+3x-2yz-6z$,求 $\mathbf{grad}\,f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}\,f(2,1,1)$.

8. 设函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续,证明:

(1) $\nabla(cu)=c\nabla u$(其中,c 为常数);

(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$;

(3) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$;

(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

9. 求函数 $z=x\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处,沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

10. 求函数 $u=x^2-xy^2+z^2$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处:

(1)增加最快的方向,并求沿这个方向的方向导数;

(2)减少最快的方向,并求沿这个方向的方向导数;

(3)变化率为零的方向.

9.8 多元函数的极值及其求法

9.8.1 多元函数的极值及最大值、最小值

与一元函数相类似,多元函数的最大值与最小值在实际问题中也是经常遇到的,并且也

是与极大值、极小值有着密切联系的.

(1) **多元函数的极值**(以二元函数为例)

定义 9.11　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义,如果对于该邻域内任意的点 (x,y),都有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)\ (\text{或} f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0))$$

则称函数在点 (x_0,y_0) 有**极大值**(或**极小值**)$f(x_0,y_0)$,点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的**极大值点**(或**极小值点**).

极大值、极小值统称为**极值**.极大值点、极小值点统称为**极值点**.

例如,函数 $z=3x^2+4y^2$ 在点 $(0,0)$ 处有极小值;函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处有极大值;函数 $z=xy$ 在点 $(0,0)$ 处既不取得极大值也不取得极小值.

以上关于二元函数的极值概念,可推广到 n 元函数.设 n 元函数 $u=f(P)$ 在点 P_0 的某一邻域内有定义,如果对于该邻域内任意的点 P,都有

$$f(P)\leqslant f(P_0)\ (\text{或} f(P)\geqslant f(P_0))$$

则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极大值(或极小值)$f(P_0)$.

类似于一元函数,可利用偏导数解决二元函数的极值问题.有关的结论反映在下面两个定理中.

定理 9.15(必要条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数,且在点 (x_0,y_0) 处有极值,则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0 \tag{9.52}$$

证　不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值.根据极大值的定义,对于点 (x_0,y_0) 的某邻域内的点 (x,y),都有不等式

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$$

特殊地,在该邻域内取 $y=y_0$ 的点,也应有不等式

$$f(x,y_0)\leqslant f(x_0,y_0)$$

这表明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值,因而必有

$$f_x(x_0,y_0)=0$$

类似地,可证

$$f_y(x_0,y_0)=0$$

从几何上看,这时如果曲面 $z=f(x,y)$ 在极值点 (x_0,y_0,z_0) 处有切平面,则切平面

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

成为平行于 xOy 坐标面的平面 $z=z_0$.

类似地可推得,如果三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 具有偏导数,则它在点 (x_0,y_0,z_0) 具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\ f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\ f_z(x_0,y_0,z_0)=0 \tag{9.53}$$

仿照一元函数,凡是能使对各个变量的偏导数同时为零的点称为函数的**驻点**.于是,从定理 9.15 可知,具有偏导数的函数的极值点必定是驻点.但函数的驻点却不一定是极值点.例

如,点(0,0)是函数 $z=xy$ 驻点,但该函数在(0,0)既不取得极大值也不取得极小值.

如何判定一个驻点是否是极值点?下面介绍一个充分条件.

定理 9.16(充分条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续并且具有一阶及二阶连续偏导数,又 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$,令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下:

①$AC-B^2>0$ 时,具有极值,且当 $A<0$ 时有极大值,当 $A>0$ 时有极小值;

②$AC-B^2<0$ 时,没有极值;

③$AC-B^2=0$ 时,可能有极值,也可能没有极值.

证明见 P. 98 的二维码:极值充分条件的证明.

对于具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,根据上述两个定理可归纳其求极值的步骤如下:

①解方程组

$$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$$

求得一切实数解,即可得一切驻点;

②对于每一个驻点 (x_0,y_0),求出二阶偏导数的值 A,B 和 C;

③定出 $AC-B^2$ 的符号,按定理 9.16 的结论判定 $f(x_0,y_0)$ 是否是极值,是极大值还是极小值.

在举例之前,还需要注意一个现象:如果函数在所讨论的区域内具有偏导数,则其极值只能在驻点取得. 但是,如果函数在有些点的偏导数不存在,则某些偏导数不存在的点(一定不是驻点)也可能是极值点. 例如,函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处有极大值,但(0,0)不是函数的驻点. 因此,在考虑函数的极值问题时,除了考虑函数的驻点外,还要考虑偏导数不存在的点.

注 极值可能点为驻点或一阶偏导数不存在的点.

例 1 求函数 $f(x,y)=6x^3+4y^2-18x-24y+8$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=18x^2-18=0 \\ f_y(x,y)=8y-24=0 \end{cases}$$

解得 $x=1,-1$;$y=3$. 于是,得全部驻点为(1,3),(−1,3).

$f(x,y)$ 的二阶偏导数为

$$f_{xx}(x,y)=36x,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=8$$

在点(1,3)处,$AC-B^2=36\times 8-0^2>0$,又 $A=36>0$,所以函数在(1,3)处有极小值 $f(1,3)=-52$;

在点(−1,3)处,$AC-B^2=-36\times 8-0^2<0$,所以 $f(-1,3)$ 不是极值.

(2)多元函数的最大值、最小值的求法

设 D 是有界闭区域. 首先要注意到下列两点:

①如果 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取得最大值和最小值. 使函数取得最大值或最小值的点既可能在 D 的内部,也可能在 D 的边界上.

②如果函数在 D 内部取得最大值(最小值),那么,这个最大值(最小值)也是函数的极大值(极小值).

因此,在假定函数在 D 上连续、在 D 内可微分并且只有有限个驻点的情况下,求最大值和最小值的一般方法是:将函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 边界上的值相互比较,其中,最大的就是最大值,最小的就是最小值.

在一般情况下,求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值是困难的、复杂的. 因此,在实际问题中,如果根据问题的性质可知,函数 $f(x,y)$ 的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得,而函数在 D 内只有一个驻点,那么,就可肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

注　最值可能点为极值点、边界点.

例 2　某地要用修建一个体积为 8 m^3 的无盖长方体水池,单位面积池底的造价是池壁造价的 2 倍. 问当长、宽、高各取多少时,才能使造价最低.

解　设池壁单位面积的造价为 k,水池的长为 x m,宽为 y m,则其高应为 $\frac{8}{xy}$ m. 此水池的造价为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{8}{xy} + x\cdot\frac{8}{xy}\right)k = 2\left(xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}\right)k \quad (x > 0, y > 0)$$

令 $\begin{cases} A_x = 2\left(y - \dfrac{8}{x^2}\right)k = 0 \\ A_y = 2\left(x - \dfrac{8}{y^2}\right)k = 0 \end{cases}$,则得 $x = 2, y = 2$.

根据题意可知,水池造价的最小值一定存在,并在开区域 $D = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$ 内取得. 又因为函数 A 在 D 内只有一个驻点(2,2). 因此,此驻点一定是 A 的最小值点,即当水池的长为 2 m、宽为 2 m、高为 2 m 时,水池的造价最小.

例 3　设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,该圆板被加热,已知在点 (x,y) 的温度是 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. 求该圆板温度的最高点和最低点.

解

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$

由 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y = 0 \end{cases}$ 得驻点 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$.

在该点的温度为

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$$

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上,温度为

$$f = 2 - x - x^2 \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

由$\dfrac{df}{dx}=-1-2x=0$,得 $x=-\dfrac{1}{2}$,在 $x=-\dfrac{1}{2}$的温度为

$$f\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

而

$$f(-1,0)=2,f(1,0)=0$$

因此,该圆板的最热点$\left(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$和最冷点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

9.8.2 条件极值拉格朗日乘数法

在前面的极值问题中,除了函数定义域的限制外,对自变量没有任何条件限制,这种极值问题称为**无条件极值**. 在某些实际问题中,对函数的自变量需要有附加条件的限制,这类极值问题称为**条件极值**.

例如,求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积问题. 设长方体的三棱的长为 x,y,z,则体积 $V=xyz$. 又因假定表面积为 a^2,所以自变量 x,y,z 还必须满足附加条件 $2(xy+yz+zx)=a^2$. 这个问题就是求函数 $V=xyz$ 在条件 $2(xy+yz+zx)=a^2$ 下的最大值问题,这是一个条件极值问题.

对于某些实际问题,可把条件极值问题转化为无条件极值问题. 例如,在上述问题中,由条件 $2(xy+yz+zx)=a^2$,解得 $z=\dfrac{a^2-2xy}{2(x+y)}$,于是得

$$V=\frac{xy(a^2-2xy)}{2(x+y)}$$

这样,只需要求 V 的无条件极值问题即可.

一般情况下,从附加条件中解出某个变量并不容易,这时无法将条件极值转化为无条件极值. 因此,要寻求一种求条件极值的直接方法,这就是下面介绍的拉格朗日乘数法.

下面分析函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得所求的极值,那么必有

$$\varphi(x_0,y_0)=0$$

假定在 (x_0,y_0) 的某一邻域内 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均有连续的一阶偏导数,而 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$. 由隐函数存在定理可知,方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定了一个具有连续导数的函数 $y=\psi(x)$,并且满足 $y_0=\psi(x_0)$. 将 $y=\psi(x)$ 代入函数 $z=f(x,y)$,得一元函数

$$z=f(x,\psi(x))$$

并且 $x=x_0$ 是 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值点. 由一元可导函数取得极值的必要条件,有

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0$$

利用隐函数的求导公式,即得

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0$$

从而函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下在 (x_0,y_0) 取得极值的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0$$

与

$$\varphi(x_0,y_0)=0$$

同时成立.

设 $\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda$，则上述必要条件变为

$$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

上式中前两式的左端正好是

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

的两个一阶偏导数在点 (x_0,y_0) 处的值，而 λ 是一个待定参数(因为点 (x_0,y_0) 是未知的). 函数 $L(x,y)$ 称为**拉格朗日函数**，参数 λ 称为**拉格朗日乘子**.

因此，函数 $z=f(x,y)$ 在限制条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点 (x_0,y_0) 为拉格朗日函数 $L(x,y)$ 的驻点.

于是，由上面的讨论可得到下面的求条件极值点的方法.

拉格朗日乘数法　要找函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可先构造拉格朗日函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \tag{9.54}$$

其中，λ 为参数. 然后解方程组

$$\begin{cases}L_x(x,y)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\ L_y(x,y)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \tag{9.55}$$

由方程组(9.55)解出 x,y 及 λ，则 (x,y) 就是所要求的可能的极值点.

拉格朗日乘数法可推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形. 例如，要求函数

$$u=f(x,y,z,t)$$

在附加条件

$$\varphi(x,y,z,t)=0,\phi(x,y,z,t)=0$$

下的极值，以先构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\phi(x,y,z,t) \tag{9.56}$$

其中，λ,μ 均为参数. 然后求 $L(x,y,z,t)$ 的 4 个偏导数，并且令它们等于零，再与两个附加条件联立成方程组. 解这个方程组得到的 (x,y,z,t) 就是函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在附加条件 $\varphi(x,y,z,t)=0,\phi(x,y,z,t)=0$ 下的可能的极值点.

至于如何确定用拉格朗日乘数法所求的点是否是极值点，在实际问题中往往可根据问题

本身的性质来判定.

在使用拉格朗日乘数法时,必须要解一个方程组. 一般来说,这个方程组是非线性的,而且是难解的. 因此,以下两点需要特别注意:

①拉格朗日乘子不必求得;

②首先仔细观察拉格朗日函数的偏导数等于零的方程,寻找特殊的方法,找到未知数之间的关系;然后利用这些关系,通过附加条件最后解出函数在附加条件下的可能的极值点.

例 4 求原点到曲面 $xy-z^2+1=0$ 上距离最近的点 $M(x,y,z)$ 及其距离.

解 方法 1:曲面 $xy-z^2+1=0$ 上点 $M(x,y,z)$ 到原点的距离的平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$,即求函数 $f=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $xy-z^2+1=0$ 下的极小值.

由于 $xy+1=z^2$, $f=x^2+y^2+xy+1$,则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+2y=0\end{cases}$$

解得

$$x=y=0$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2,B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1,C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=2$$

由于 $A>0,AC-B^2>0$,则:

当 $x=y=0$ 时,函数 $f=x^2+y^2+xy+1$ 有唯一极小值 $f(0,0)=1$;

当 $x=y=0,z=\pm1$,空间曲面 $xy-z+1=0$ 上离原点最近的点是$(0,0,\pm1)$,最短距离为 1.

方法 2:曲面 $xy-z^2+1=0$ 上 $M(x,y,z)$ 到原点的距离的平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2$$

即求函数 $f=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $xy-z^2+1=0$ 下的极小值.

设

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xy-z^2+1)$$

$$\begin{cases}L_x=2x+\lambda y=0\\ L_y=2y+\lambda x=0\\ L_z=2z-2\lambda z=0\\ L_\lambda=xy-z^2+1=0\end{cases}$$

解得

$$x=y=0,z=\pm1$$

因为只有这两个可能极值点,它们到原点的距离相等. 由问题本身可知最小值一定存在,所以最小值就在这两个点处取得.

于是,当 $x=y=0,z=\pm1$,空间曲面 $xy-z^2+1=0$ 上离原点最近的点是$(0,0,\pm1)$,最短距离为 1.

例 5　将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时,才可使圆柱体的体积为最大?

解　设矩形的一边为 x,则另一边为 y,并且设矩形绕长为 y 的一边旋转成圆柱体,则考虑圆柱体体积函数 $V=\pi x^2 y(x>0,y>0)$ 在条件 $x+y=p$ 下的最值.

拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=\pi x^2 y+\lambda(x+y-p)$$

令 $L_x(x,y,\lambda)=0,L_y(x,y,\lambda)=0,L_\lambda(x,y,\lambda)=0$,则得

$$\begin{cases}2\pi xy+\lambda=0\\ \pi x^2+\lambda=0\\ x+y=p\end{cases}$$

解得

$$x=\frac{2p}{3},\ y=\frac{p}{3}$$

这是唯一可能的极值点. 因为由问题本身可知,最大值一定存在,所以最大值就在这个点处取得.

因此,当矩形的两边分别为$\frac{2p}{3}$,$\frac{p}{3}$时,最大体积 $V=\frac{4\pi p^3}{27}$.

例 6　在曲面 $\Sigma:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上,求该曲面的切平面,使其在三坐标轴上的截距之积为最大.

解　设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面 $\Sigma:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上任意一点,$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1$. 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 在 M_0 处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$$

切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=1$$

该切平面在三坐标轴上的截距分别为$\sqrt{x_0}$,$\sqrt{y_0}$,$\sqrt{z_0}$,即求函数$f=\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}\sqrt{z_0}$在条件$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1$ 下的极值.

设

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}\sqrt{z_0}+\lambda(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}-1)$$

$$\begin{cases} L_{x_0} = \dfrac{\sqrt{y_0 z_0}}{2\sqrt{x_0}} + \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x_0}} = 0 \\ L_{y_0} = \dfrac{\sqrt{x_0 z_0}}{2\sqrt{y_0}} + \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y_0}} = 0 \\ L_{z_0} = \dfrac{\sqrt{x_0 y_0}}{2\sqrt{z_0}} + \dfrac{\lambda}{2\sqrt{z_0}} = 0 \\ L_{\lambda} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{9}$$

由问题本身可知最大值一定存在,所以这唯一可能的极值点就是最大值点. 于是,所求切平面为 $3x+3y+3z=1$.

下面介绍经济学中的一个最优价格模型.

在生产和销售商品的过程中,商品销售量、生产成本和销售价格是相互关联的. 厂家要选择合理的销售价格,才能获得最大利润. 这个价格称为最优价格. 下面举例说明如何确定商品的最优价格.

例 7 某厂家生产一种商品同时在两个市场销售,销售价格分别为 p_1 和 p_2,销售量分别为 q_1 和 q_2,需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$,$q_2=10-0.05p_2$,总成本函数为 $c=35+40(q_1+q_2)$. 试问厂家如何确定两个市场销售价格 p_1 和 p_2,能使厂家获得的总利润最大,其最大总利润为多少?

解 设厂家获得的总利润为 m,则

$$m = p_1 q_1 + p_2 q_2 - c$$

因为 $q_1=24-0.2p_1$,$q_2=10-0.05p_2$,$c=35+40(q_1+q_2)$,代入 m 中,整理得

$$m = -0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 32p_1 + 12p_2 - 1\ 395$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial p_1} = -0.4p_1 + 32 = 0 \\ \dfrac{\partial m}{\partial p_2} = -0.1p_2 + 12 = 0 \end{cases}$$

解得

$$p_1 = 80,\ p_2 = 120$$

由于该商品的最优价格必定存在并且唯一,因此,这个价格就是最优价格.

于是,得最大总利润 $m=605$.

注 因为此题的拉格朗日函数较复杂,所以转化为无条件极值来解决.

习题 9.8

1. 判断题：

(1) 由极值的定义知函数 $z=x^2+4y^2$ 在点 $M(0,0)$ 处取得极小值；（　　）

(2) 函数 $z=x^2y$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值零；（　　）

(3) 二元函数的驻点必为极值点；（　　）

(4) 二元函数的最大值不一定是该函数的极大值.（　　）

2. 填空题：

(1) 设函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值，则常数 $a=$________；

(2) 函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-y+1$ 在________点取得极________值为________.

3. 求 $f(x,y)=e^x(x^2+y^2+2y)$ 的极值.

4. 已知 $f(x,y)=xy$：

(1) 求 $f(x,y)$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极值；

(2) 求 $f(x,y)$ 在闭区域 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}, x+y\leqslant 1$ 的最大值和最小值.

5. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小？

6. 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 位于第一卦限的部分求一点 P，使该点处的切平面在 3 个坐标轴上截距的平方和最小.

7. 某厂要用铁板做成一个体积为 16 m^3 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取多少时，才能使用料最省？

8. 求内接于半径为 a 的球并且有最大体积的长方体.

9. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

10. 有一宽为 24 cm 的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽. 问怎样折才能使断面的面积最大？

11. 形状为椭球 $4x^2+y^2+4z^2\leqslant 16$ 的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 h 后在探测器的点 (x,y,z) 处的温度 $T=8x^2+4yz-16z+600$，求探测器表面最热的点.

12. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

13. 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

14. 求函数 $u=xyz$ 在附加条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\qquad(x>0,y>0,z>0,a>0)$$

下的极值.

15. 设商品 A 的需求量为 x_1，价格为 p_1，需求函数为 $x_1=20-\frac{1}{5}p_1$；商品 B 的需求量为 x_2，

价格为 p_2,需求函数为 $x_2=20-\frac{1}{3}p_2$,生产 A,B 两种商品的总成本函数 $C=x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$,问两种商品各生产多少时,才能获得最大利润?其最大利润是多少?

二元函数的泰勒公式

极值充分条件的证明

总习题9

1. 选择题:

(1)若函数 $f(x,y)$ 在点 $p(x,y)$ 处(　　),则 $f(x,y)$ 在该点处可微;

A. 连续　　B. 偏导数存在

C. 连续且偏导数　　D. 某邻域内存在连续的偏导数

(2)设 $x=\ln\frac{z}{y}$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$(　　);

A. 1　　B. e^x　　C. ye^x　　D. y

(3)对函数 $f(x,y)=xy$,点(0,0)(　　);

A. 不是驻点　　B. 是驻点却非极值点

C. 是极大值点　　D. 是极小值点

(4)二元函数 $z=5-x^2-y^2$ 的极大值点是(　　);

A. (1,0)　　B. (0,1)　　C. (0,0)　　D. (1,1)

(5)函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{4xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点间断,是因为该函数(　　);

A. 在原点无定义　　B. 在原点二重极限不存在

C. 在原点有二重极限,但无定义　　D. 在原点二重极限存在,但不等于函数值

(6)设 $z=2x^2+3xy-y^2$,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$(　　).

A. 6　　B. 3　　C. -2　　D. 2

2. 求二元函数 $z=\sin\frac{1}{(x-\sqrt{y})^2}$的间断点.

3. 计算下列各题:

(1)$z=e^{xy}+yx^2+\ln\frac{y}{x}$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $z=\arctan\sqrt{x^{y}}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(3) 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f,\varphi$ 具有一阶连续导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(4) 设 $z=f(\mathrm{e}^{2}\sin y,\ln(x+y))$，其中，$f(u,v)$ 为可微函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(5) 设 $z=\sqrt{u^{2}+v^{2}}$，$u=\sin x$，$v=\mathrm{e}^{x}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$；

(6) 设 $z=x\mathrm{e}^{y}$，$y=\varphi(x)$，其中，$\varphi(x)$ 可导，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$；

(7) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{xy}-\arctan z+xyz=0$ 所确定隐函数，求 $\mathrm{d}z$；

(8) 设 $z=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}$，求 $\mathrm{d}z$；

(9) 设 $z=\arcsin(xy)$，求$\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}$.

4. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中，f,F 都具有一阶连续偏导数，试证明$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$.

5. 求曲线$\begin{cases}x=2+z\\ y=z^{2}\end{cases}$在点$(1,1,-1)$处的切线方程和法平面方程.

6. 空间曲线 $x=t$，$y=t^{2}$，$z=t^{3}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线与直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2l}=\dfrac{z+1}{k}$平行，求 l,k.

7. 求曲线 $x=2t$，$y=t^{2}-2$，$z=1-t^{2}$ 在对应于 $t=2$ 的点处的切线方程和法平面方程.

8. 试确定正常数 λ，使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面$\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}+\dfrac{z^{2}}{c^{2}}=1$ 在某公共点处有相同的切平面.

9. 求曲面 $\mathrm{e}-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$处的切平面方程和法线方程.

10. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线的方程.

11. 求函数 $z=x^{2}+y^{2}$ 在点$(1,2)$处沿从点$(1,2)$到点$(1,2+\sqrt{3})$的方向导数.

12. 求函数 $f(x,y,z)=x^{2}+2y^{2}+3z^{2}+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}\,f(0,0,0)$.

13. 求下列函数的极值：

(1) $z=4(x-y)-x^{2}-y^{2}$；　　(2) $z=x-2y+\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}-3\arctan\dfrac{y}{x}$.

14. 在平面 $3x+4y-z=26$ 上求一点，它与坐标原点的距离最短.

15. 从斜边长为 l 的一切直角三角中，求有最大周长的直角三角形.

16. 某厂家生产一种商品的成本为 c，该种商品的销售价格为 p，销售量为 x. 假设厂家的

生产处于平衡状态,即产量等于销售量.根据市场预测,销售量 x 与销售价格 p 之间有关系

$$x = M\mathrm{e}^{-ap} \qquad (M > 0, a > 0)$$

其中,M 为市场最大需求量,a 是价格系数.生产部门对该种商品的生产成本 c 有测算

$$c = c_0 - k \ln x \qquad (k > 0, x > 1)$$

其中,c_0 是只生产一个该种商品时的成本,k 是规模系数.

根据上述条件,如何确定该种商品的销售价格 p,才能使厂家获得最大利润?

部分习题答案