第 12 章 部分习题参考解答

习题 12.1

1. (1) $\frac{2+1}{1+1}+\frac{2+2}{1+4}+\frac{2+3}{1+9}+\frac{2+4}{1+16}+\frac{2+5}{1+25}+\frac{2+6}{1+36}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot4}{1\cdot3}+\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}-\frac{1}{4^6}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{1}+\frac{2}{2^2}+\frac{6}{3^3}+\frac{24}{4^4}+\frac{120}{5^5}+\frac{720}{6^6}+\cdots$.

2. (1) $\frac{1}{2n}$；(2) $(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$；(3) $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1\cdot3\cdots(2n-1)}$；(4) $(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n}$.

3. (1)发散；(2)收敛；(3)收敛；(4)收敛.

4. (1)发散；(2)发散；(3)收敛；(4)收敛.

5. (略). 6. (略).

习题 12.2

1. (1)B; (2)C; (3)B; (4)A.

2. (1)发散；(2)发散；(3)收敛；(4)收敛；(5)当 $a>1$ 时收敛，当 $a\le1$ 时发散.

3, (1)发散；(2)收敛；(3)发散；(4)收敛.

4. (1)收敛；(2)收敛；(3)收敛；

(4)当 $a>b$ 时收敛，当 $a<b$ 时发散.当 $a=b$ 时不能确定.

5. (1)收敛；(2)收敛；(3)发散；(4)收敛；(5)发散；(6)发散.

6. (1)条件收敛；(2)条件收敛；(3)绝对收敛；(4)条件收敛；

(5)绝对收敛;(6)条件收敛.

习题 12.3

1. (1)A; (2)B;(3)D.

2. (1) $\sqrt{R}$；(2) $2R$；(3) xe^{-x}；(4) $x\sin x$.

3. (1) $R=1$, $(-1,1)$；　(2) $R=1$, $[-1,1]$；

(3) $R=+\infty$, $(-\infty,+\infty)$；　(4) $R=2$, $[-2,2)$；

(5) $R=\frac{1}{2}$, $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$；　(6) $R=1$, $[-1,1)$；

(7) $R=\sqrt{3}$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$；　(8) $R=1$, $[3,5)$；

(9) $R=\sqrt{2}$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；　(10) $R=1$, $(1,2]$.

4. (1) $\frac{1}{(1-x)^2}$, $(-1<x<1)$；

(2) $-x-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$，$(-1<x<1)$；

(3) $\frac{1}{(2-x)^2}$，$(-1<x<1)$；

(4) $\frac{x}{3-x}+\frac{x}{2-x}$，$(-2<x<2)$.

5. $\frac{39}{4}$.

习题 12.4

1. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}[1-\frac{(-1)^n}{2^n}]x^n$，$(-1,1)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}x^{2n-1}$，$(-\infty,+\infty)$；

(3) $\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n$，$(-a,a)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}$，$(-1,1)$；

(5) $f(x)==\ln(1+x^2)+\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，$(-1,1)$；

2. $\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-3)^n$，$(0,6)$

3. $f(x)=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$，$(0,2]$

4. $f(x)=\cos\frac{\pi(x-2)}{4}$

$$=1-\frac{1}{2!}\cdot\frac{\pi^2}{4^2}(x-2)^2+\frac{1}{4!}\cdot\frac{\pi^4}{4^4}(x-2)^4+\cdots]，\quad(-\infty,+\infty).$$

5. $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n，\quad(-6,-2).$$

习题 12.5.

1. (1) 1.00986；(2) 2.00430；(3) 0.9994.

2. 0.4940.

3(略). 4(略).

习题 12.6.

1. (1) $-\dfrac{4}{9}$； (2) $\dfrac{\pi^3+2}{2}$；

(3) $b_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$，$2l$； (4) 1，$\dfrac{1}{2}$.

2. $f(x)=\pi^2+1+12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$， $(-\infty,+\infty)$.

3. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$， $x\neq 2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

4. (2) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x$， $(-1,0)\cup(0,1)$.

(3) 在(2)中令 $x=0$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\dfrac{\pi}{4}$.

5. $\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx$， $(0,\ \pi)$.

6. $\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$， $[-\pi,\ \pi]$.

7. $\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx$， $(0,\ \pi)$.

$\dfrac{\pi-x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$， $(0,\ \pi)$.

在上式中令 $x=0$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

8. $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\dfrac{6[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{3}+\dfrac{6}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\}$

$(x\neq 3(2k+1),k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

9. $s(x)=\begin{cases}0 & 1<|x|\le 4\\ \dfrac{A}{2} & |x|=1\\ A & |x|<1\end{cases}$

10. $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}+\dfrac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$， $[0,\ 2)$；

$f(x)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}$， $[0,\ 2]$.

总习题 12

1. (1) $(-2,4)$； (2) $(-2,2)$； (3) $(0,\ 4)$； (4) b；

(5) -2； (6) $\dfrac{3}{2}$； (7) $\dfrac{3}{4}$； (8) $\dfrac{2}{3}\pi$.

2. (1)D；(2)B;(3)；(4)C;(5)D;(6)B；(7)B；(8)D；(9)C；(10)B.
3. (1)收敛；(2)发散；(3)收敛；
(4)当 $a<e$ 时收敛，当 $a>e$ 时发散.当 $a=e$ 时不能确定.
(5)收敛；(6)发散.
4. (1)绝对收敛；(2)绝对收敛；
5. 当 $a<1$ 时收敛;当 $a>1$ 时发散;当 $a=1$ 时,若 $s\le 1$ 时发散;若 $s>1$ 时收敛.
6. $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$
7. （略）
8. (1) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $(0,2)$； (2) $\dfrac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}(3x^2+x+9)$, $(-\infty,+\infty)$；

(3) $\ln 4-\ln(4-x)$, $[-4,4)$； (4) $\dfrac{x+1}{(1-x)^3}$, $(-1,1)$.

9. (1) 3； (2) $7e-8$； (3) $\dfrac{3}{4}$； (4) $3e$.
10. $\sqrt[4]{8}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$.
12. $(-3,3)$, 当 $x=-3$ 时收敛;当 $x=3$ 时发散.
13. $f(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\pi x-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$,

$x \neq 2k+1, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

14. $f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\frac{6[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{6}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{3}\}$

$(x \neq 3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.