

《大学物理》作业 No.10 简谐振动的能量 合成

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

基本要求:

1. 理解简谐振动的能量特征。
2. 理解同方向、同频率的两个简谐振动的合成规律。了解垂直方向的简谐振动的合成。
3. 了解阻尼振动、受迫振动和共振发生的条件和规律。

内容提要:

1. 弹簧振子动能: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$.
2. 弹簧振子势能: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$.
3. 弹簧振子的总能量: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$, 与振幅的平方成正比。
4. 同方向, 同频率简谐振动的合成, 仍是谐振动。

合振动的振幅 A: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$.

5. 振动方向互相垂直, 振动频率相同的谐振动的合成, 一般情况是一个椭圆。

$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$; 其具体轨迹依赖于两分振动

的振幅和相位差。

6. 运用旋转矢量法分析两个谐振动的合成。

一、选择题

1. 一质点作简谐振动, 已知振动周期为 T , 则其振动动能变化的周期是

[]

- (A) $T/4$.
- (B) $T/2$.
- (C) T .
- (D) $2T$.

2. 一弹簧振子作简谐振动, 当其偏离平衡位置的位移的大小为振幅的 $1/4$ 时, 其动能为振动总能量的

[]

- (A) $7/16$.
- (B) $9/16$.
- (C) $11/16$.
- (D) $15/16$.

3. 有两个振动: $x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \sin \omega t$, 且 $A_2 < A_1$. 则合成振动的振幅为

[]

(A) $A_1 + A_2$.

(B) $A_1 - A_2$.

(C) $(A_1^2 + A_2^2)^{1/2}$.

(D) $(A_1^2 - A_2^2)^{1/2}$.

4. 一弹簧振子作简谐振动, 总能量为 E_1 , 如果简谐振动振幅增加为原来的两倍, 重物的质量增加为原来的四倍, 则它的总能量 E 变为

[] (A) $E_1/4$ (B) $E_1/2$ (C) $2E_1$ (D) $4E_1$

二. 填空题

1. 一物体同时参与同一直线上的两个简谐振动:

$$x_1 = 0.03 \cos(4\pi t + \pi/3) \text{ (SI)} \text{ 与 } x_2 = 0.05 \cos(4\pi t - 2\pi/3) \text{ (SI)}$$

合成振动的振动方程为_____.

2. 质量为 m 的物体和一个轻弹簧组成弹簧振子, 其固有振动周期为 T , 当它作振幅为 A 的自由简谐振动时, 其振动能量 $E =$ _____.

三. 计算题

1. 已知两谐振动的运动方程:

$$x_1 = 5 \times 10^{-2} \cos(10t + 3\pi/4)$$

$$x_2 = 6 \times 10^{-2} \cos(10t + \pi/4)$$

式中各物理量都用 SI 制。求:

(1) 合成振动的振幅和初位相;

(2) 如另有第三个谐振动 $x_3 = 7 \times 10^{-2} \cos(10t + \alpha)$, 则 α 应为何值, 才能使 $x_2 + x_1$

的合振动振幅最大? 又 α 应为何值, 才能使 $x_2 + x_3$ 的合振动振幅最小?

2.一物体质量为 0.25kg ，在弹性力作用下作简谐振动，弹簧的劲度系数 $k = 25\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ 。如果该系统起始振动时具有势能 0.06J 和动能 0.02J ，求

- (1) 振幅 A ；
- (2) 动能恰等于势能时的位移；
- (3) 经过平衡位置时物体的速度。

No. 10 参考答案

一、选择题

1. (B);

提示: 由 $v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$, $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ 。可知动能的振动周期为谐振动周期的一半, 为 $T/2$ 。

2. (D);

提示: 振动位置 $x = A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{4} A$; 所以, $\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{4}$;

振动总能量 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2$, 振动势能为

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2; \text{ 因此, 动能 } E_k = \frac{1}{2} k A^2 \times \frac{15}{16};$$

3. (C);

提示: $x_2 = A_2 \sin \omega t = A_2 \cos(\omega t + \frac{3}{2} \pi)$, 合振动振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(0 - \frac{3}{2} \pi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

4. (D); 提示: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2$.

二. 填空题

1. $x = 0.02 \cos(4\pi t - 2\pi/3)$.

提示: 同方向同频率谐振动的合成, $x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$; $\omega = 4\pi$,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \\ = \sqrt{(0.03)^2 + (0.05)^2 + 2 \times 0.03 \times 0.05 \cos(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = 0.02;$$

方法二, 由旋转矢量法, 为两个在同一直线上方向相反的两个旋转矢量的合成。

$$2. E = \frac{2\pi^2 m A^2}{T^2}.$$

$$\text{提示: } \frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad k = \frac{4m\pi^2}{T^2}, \quad E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{2\pi^2 m A^2}{T^2}.$$

三. 计算题

1. 解 (1) 合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

代入有关数据计算得:

$$A \approx 7.81 \times 10^{-2} (m)$$

合振动的初位相 ϕ 满足

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

代入有关数据计算得:

$$\tan \phi = 11$$

因为

$$\pi/4 < \phi < 3\pi/4$$

所以 $\phi = 84.8^\circ$

(2) 要使 $x_1 + x_3$ 的合振动振幅最大, 两分振动 x_1, x_3 必须同位相, 即

$$\alpha - 3\pi/4 = 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

所以

$$\alpha = 2n\pi + 3\pi/4$$

要使 $x_2 + x_3$ 的合振动振幅最小, 两分振动 x_2, x_3 必须反位相, 即

$$\alpha - \pi/4 = (2n+1)\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

所以

$$\alpha = (2n+1)\pi + 1\pi/4$$

2. 解: 能量守恒得到, $E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$

$$\text{即,} \quad 0.08 = 12.5 \cdot A^2$$

所以, 振幅 $A = 0.08m$

当动能恰等于势能时的位移

$$\text{有,} \quad 0.04 = \frac{1}{2}kA_1^2, \quad \text{所以, 物体的位移, } A_1 = 5.66cm$$

当经过平衡位置时物体的速度

$$\text{有,} \quad E_p + E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{得到} \quad v = 0.8m/s$$