复变函数综合练习题及答案

第一部分　习题

一.　判断下列命题是否正确,如正确, 在题后括号内填√， 否则填×.(共 20 题)

1.　在复数范围内 $\sqrt[3]{1}$ 有唯一值 1.　(　)

2.　设 $z=x+iy$,　则　$z\bar{z}=\ x^2+y^2$.　(　)

3.　设 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\arg z=\frac{2\pi}{3}$.　(　)

4.　$\omega=\cos z$ 是有界函数.　(　)

5.　方程 $e^z=1$ 有唯一解 $z=0$.　(　)

6.　设函数 $f(z),g(z)$ 在 z_0 处可导,则 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 在点 z_0 处必可导.　(　)

7.　设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导，则 $f'(z_0)=(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y})_{(x_0,y_0)}$.　(　)

8.　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内一阶可导,则 $f(z)$ 在 D 内二阶导数必存在.　(　)

9.　设函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 处必解析.　(　)

10.　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导, 则 $f(z)$ 在 D 内必解析.　(　)

11.　设 $u(x,y),v(x,y)$ 都是区域 D 内的调和函数,则 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是 D 内的解析函数.　(　)

12.　设 n 为自然数,r 为正实数,则 $\oint_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=0$.　(　)

13.　设 $f(z)$ 为连续函数,则 $\int_c f(z)dz=\int_{t_0}^{t_1}f[z(t)]z'(t)dt$,其中 $z=z(t),t_0,t_1$ 分别为曲线 c 的起点,终点对应的 t 值.　(　)

14. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析,c 是 D 内的任意闭曲线,则 $\oint_c f(z)dz = 0$. ( )

15. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, c 是 D 内的闭曲线,则对于 $z_0 \in D_c$ 有

$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$. ( )

16. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $|z| \le R$ (R 为正实数)内收敛,则 R 为此级数的收敛半径. ( )

17. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D$,则 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$. ( )

18. 设级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在园环域 $r < |z - z_0| < R(r < R)$ 内收敛于函数 $f(z)$,则它

是 $f(z)$ 在此环域内的罗朗级数. ( )

19. 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点,如果 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$,则 z_0 是 $f(z)$ 的极点. ( )

20. 设 函 数 $f(z)$ 在 圆 周 $|z| < 1$ 内 解 析 , $z = 0$ 为 其 唯 一 零 点 , 则

$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \operatorname{Re} s[f(z), 0]$. ( )

二. 单项选择题.(请把题后结果中唯一正确的答案题号填入空白处,共 20 题)

1. 设复数 $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$,则 z 的模和幅角的主值分别为____________.

A. $8, \frac{5\pi}{4}$ B. $4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$ C. $2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}$

2. $|z| < 1 - \operatorname{Re}(z)$ 是__________区域.

A. 有界区域 B. 单连通区域 C. 多连通区域

3. 下列命题中, 正确的是______________.

A. 零的幅角为零 B. 仅存在一个 z 使 $\frac{1}{z} = -z$ C. $\frac{1}{i}\bar{z} = \overline{iz}$

4. 在复数域内,下列数中为实数的是__________.

A. $\cos i$ B. $(1-i)^2$ C. $\sqrt[3]{-8}$

5.设 $z=1+i$,则 $\operatorname{Im}(\sin z)=$________.

A. sin1ch1　　B. cos1sh1　　C. cos1ch1

6.函数 $f(z)=z^2$ 将区域 Re(z)<1 映射成__________.

A. $u<1-\dfrac{v^2}{4}$　　B. $u\le 1-\dfrac{v^2}{4}$　　C. $4u<1-v^2$

7.函数 $f(z)=\bar{z}$ 在 $z=0$ 处___________.

A. 连续　　B. 可导　　C. 解析

8. 下列函数中为解析函数的是____________.

A. $f(z)=x^2-iy$　　B. $f(z)=\sin xchy+i\cos xshy$　　C. $f(z)=2x^3-i3y^3$

9. 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 且 $u(x,y)$ 是区域D内的调和函数,则当 $v(x,y)$ 在 D 内是____________时, $f(z)$ 在 D 内解析.

A. 可导函数　　B. 调和函数　　C. 共轭调和函数

10. 设 z_0 是闭曲线 c 内一点, n 为自然数,则 $\oint_c \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}=$_______________.

A. 0　　B. $2\pi i$　　C. 0 或 $2\pi i$

11. 积分 $\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin z}{(1-z)^2}dz=$______________.

A. $\cos 1$　　B. $2\pi i\cos 1$　　C. $2\pi i\sin 1$

12. 下列积分中,其积分值不为零的是_________________.

A. $\oint_{|z|=2} \dfrac{z}{z-3}dz$　　B. $\oint_{|z|=1} \dfrac{\sin z}{z}dz$　　C. $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^5}dz$

13. 复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n^3}$ 的收敛范围是_______________.

A. $|z|\le 1$　　B. $|z|<1$　　C. $|z|>1$

14. 设函数 $f(z)$ 在多连域D内解析, c_0,c_1,c_2 均为D内闭曲线且 $c_0\cup c_1\cup c_2$ 组成

复合闭路Γ且$D_\Gamma \subset D$,则__________________.

A. $\oint_{c_0} f(z)dz + \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz = 0$

B. $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$

C. $\oint_{c_0} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz - \oint_{c_2} f(z)dz$

15.函数$f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^2}$在 z=0 的展开式是______________________.

A. 泰勒级数　　B. 罗朗级数　　C. 都不是

16. $z=0$是$f(z)=\dfrac{shz}{z^4}$的极点的阶数是_____________.

A. 1　　B. 3　　C. 4

17. $z=0$是$f(z)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{z}}}{z^4}$的___________________.

A. 本性奇点　　B. 极点　　C. 可去奇点

18. 设$f(z)$在环域$r<|z-z_0|<R(0<r<R)$内解析,则$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$,

其中系数c_n=_____________________.

A. $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,　$n=0,1,2,\cdots$

B. $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,　$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

C. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, c 为环域内绕$z_0$的任意闭曲线.

19. 设函数$f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$,则$\mathrm{Re}s[f(z),2\pi i]$=_________________.

A. 0　　B. 1　　C. $2\pi i$

20. 设函数$f(z)=\dfrac{\cos z}{z(e^z-1)}$,则积分$\oint_{|z|=1} f(z)dz$=________________.

A. $2\pi i$　　B. $2\pi i \operatorname{Re}s[f(z),0]$　　C. $2\pi i\sum_{k=1}^{3}[f(z),z_k], z_k=0,\pm 2\pi i.$

三. 填空题　(共 14 题)

1. 复数方程 $e^z=1-i\sqrt{3}$ 的解为________________.

2. 设 $z=2-2i$,则 $\arg z=$________, $\ln z=$________________.

3. $|z-1|+|z+1|<4$ 表示的区域是________________.

4. 设 $f(z)=z\sin z$, 则由 $f(z)$ 所确定的 $u(x,y)=$____________,

$v(x,y)=$______________.

5. 设函数 $f(z)=\begin{cases}\sin z-e^z+A, z\neq 0\\ 0, z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 处连续,则常数 A=________.

6. 设函数 $f(z)=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$,则 $f'(i+1)=$______________.

若 $f(z)=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{3\zeta^3+5\zeta}{\zeta-z}d\zeta$,则 $f''(i)=$______________.

7. 设函数 $f(z)$ 在单连域 D 内解析,*G(z)*是它的一个原函数,且 $z_0,z_1\in D$,则

$\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz=$______________.

8. 当 *a*=______时, $f(z)=a\ln(x^2+y^2)+iarctg\dfrac{y}{x}$ 在区域 x>0 内解析.

9. 若 *z=a* 为 *f(z)* 的 *m* 阶极点,为 *g(z)* 的 *n* 阶极点(*m*>*n*),则 *z=a* 为 *f(z)g(z)* 的

________阶极点,为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的________阶极点.

10. 函数 $f(z)$=*tgz* 在 *z=0* 处的泰勒展开式的收敛半经为__________.

11. 函数 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$ 在 *z=0* 处的罗朗展开式的最小成立范围为________.

12. 设 $\dfrac{\sin z}{z^3}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n$,则 $c_{-2}=$ _________, $c_0=$ ________________ .

13. 积分 $\oint_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}}dz=$_________________________.

14. 留数 $\mathrm{Re}\,s[\dfrac{e^{\sin z}-1}{z},0]=$ ____________, $\mathrm{Re}\,s[\dfrac{e^{\sin z}-1}{z^2},0]=$ ___________ .

四. 求解下列各题　　(共 6 题)

1. 设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 在复平面可导,试确定常数 m,n,l 并求 $f'(z)$.

2. 已知 $u(x,y)=3x^2-3y^2$, 试求 $v(x,y)$ 使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数且满足 $f(0)=i$.

3. 试讨论定义于复平面内的函数 $f(z)=|z|^2$ 的可导性.

4. 试证 $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 是在不包含原点的复平面内的调和函数, 并求 $v(x,y)$ 使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数且满足 $f(i)=1$.

5. 证明 $f(z)=e^z$ 在复平面内可导且 $(e^z)'=e^z$.

6. 证明 $\oint_c \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, n=1\\ 0, n>1\end{cases}$,其中 n 为正整数,c 是以 z_0 为圆心,半径为 r 的圆周.

五. 求下列积分　(共 24 题)

1. 计算 $\oint_c \sin\bar{z}dz$,其中 c 是从原点沿 x 轴至 $z_0(1,0)$,然后由 z_0 沿直线 x=1 至 $z_1(1,1)$ 的折线段.

2. $\int_c [2z+\mathrm{Re}(z)]dz$,其中 c 是从点 A(1,0)到点 B(-1,0)的上半个圆周.

3. $\int_c (2z^2 - 5z + 6)dz$, 其中 c 为连接 A(1,-1),B(0,0)的任意曲线.

4. $\int_1^{1+\pi i} ze^z dz$.

5. $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$

6. $\oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=\pi} \frac{\cos^2 z}{z(z-1)}dz$.

7. $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}dz$.

8. $I = \oint_c \frac{dz}{(z+1)^2(z-2)}$,其中 c 为$|z| = r, r$ 为不等于 1,2 的正常数.

9. $I = \oint_c \frac{dz}{(2z+1)(1+z^2)}$,其中曲线 c 分别为

1) $|z-i| = 1$　　　　2) $|z+i| = \frac{3}{2}$

10. 设 c 为任意不通过 z=0 和 z=1 的闭曲线,求$\oint_c \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$.

11. $I = \oint_{|z|=3} [\frac{e^{|z|}\cos z}{z} + \frac{\sin e^z}{z(z-2)^2}]dz$.

12. $\oint_{|z|=2} \frac{2z-1}{z(z-1)}dz$.

用留数定理计算下列各题.

13. $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{(z-z_0)^3}dz$,其中 z_0 为$|z_0| \neq 1$ 的任意复数.

14. $\oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}dz$.

15. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4} dz$.

16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(z+2)(2z-1)^2} dz$.

17. $\oint\limits_{|z|=1} tg\pi z dz$.

18. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{\sin^2 z} dz$.

19. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z^2-5z+2} dz$.

20. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^4-4z+1} dz$.

21. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5iz-2} dz$.

22. $\oint\limits_{c} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$,其中 c 为实轴与上半圆周 $|z| = 3(y > 0)$ 所围的闭曲线.

23. $\oint\limits_{c} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$,其中 c 同上.

24. $\oint\limits_{c} \frac{1}{(z^2+9)(z^2+1)} dz$,其中 c 为实轴与上半圆周 $|z| = 4(y > 0)$ 所围的闭曲线.

六. 求下列函数在奇点处的留数 (共 8 题)

1. $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$.

2. $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$.

3. $f(z) = \frac{\sin z}{(1+z)^3}$.

4. $f(z)=\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^2}$.

5. $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$.

6. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$.

7. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$.

8. $f(z)=\dfrac{1+z}{\sin z}$.

七. 将下列函数在指定区域内展成泰勒级数或罗朗级数 (共 10 题)

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(2z-z^2)}$ $\quad 0<|z-1|<1$

2. $f(z)=\dfrac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ $\quad |z+1|<\dfrac{3}{2}$

3. $f(z)=\dfrac{e^z}{z-1}$ $\quad 0<|z-1|<+\infty$

4. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2}$

1) $|z|<1$, 2). $1<|z|<2$, 3). $2<|z|<\infty$

5. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$ $\quad 0<|z-1|<1$

6. $f(z)=\cos z$ $\quad |z-\pi|<+\infty$

7. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^2}$ $\quad |z|<1$

8. $f(z)=\dfrac{1+z}{\sin z}$ $\quad 0<|z|<\pi$ (写出不为零的前四项)

9. $f(z)=\dfrac{\cos z^2}{z(e^z-1)}$ $\quad 0<|z|<+\infty$ (写出不为零的前三项)

10. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$ $\qquad 0<|z|<\pi$ (写出不为零的前三项)

第二部分　解答

一、判断题.(共 20 题)

1. × 2. √ 3. × 4. × 5. × 6. × 7. √ 8. √ 9. × 10. √

11. × 12. × 13. √ 14. × 15. √ 16. × 17. × 18. √ 19. √ 20. √

二、单项选择题.(共 20 题)

1. A. 2. B. 3. C. 4. A. 5. B. 6. A. 7. A. 8. B. 9. C. 10. C.

11. B. 12. C. 13. A. 14. B. 15. B. 16. B. 17. A. 18. C. 19. C. 20. B.

三、填空题

1. $\underline{\ln 2 + i(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$)

2. $\underline{\frac{7\pi}{4}}$ ，$\underline{\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{7\pi}{4} i}$

3. $\underline{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} < 1}$

4. $\underline{x\sin x\,ch y - y\cos x\,sh y}$ ， $\underline{x\cos x\,ch y + y\sin x\,ch y}$

5. $\underline{1}$

6. $\underline{-12\pi + 26\pi i}$ ，$\underline{-36\pi}$

7. $\underline{G(z_1) - G(z_0)}$

8. $\underline{\frac{1}{2}}$

9. $\underline{m+n}$ ，$\underline{m-n}$

10. $\underline{\frac{\pi}{2}}$

11. $\underline{0 < |z| < \pi}$

12. $\underline{1}$ ， $-\dfrac{1}{6}$

13. $\underline{\pi i}$

14. $\underline{0}$ ， $\underline{1}$

四、求解下列各题

1. 由题意得 $\begin{cases} u(x,y) = my^3 + nx^2 y \\ v(x,y) = x^3 + lxy^2 \end{cases}$

利用 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2nxy = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ ，得 $n = l$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3my^2 + nx^2 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 - ly^2$，得 $n = -3$， $l = -3$， $m = 1$

则 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = -6xy + i(3x^2 - 3y^2)$

$= 3iz^2$

2. 由于 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x$ 所以

$v(x,y) = \int 6xdy = 6xy + \varphi(x)$， $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6y + \varphi'(x)$

又由 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$，即 $6y + \varphi'(x) = 6y$

所以 $\varphi'(x) = 0$， $\varphi(x) = C$（C 为常数）

故 $v(x,y) = 6xy + c$， $f(z) = 3x^2 - 3y^2 + (6xy + c)i = 3z^2 + ci$

将条件 $f(0) = i$ 代入可得 $C = 1$，因此，满足条件 $f(0) = i$ 的函数 $f(z) = 3z^2 + i$

3. 由题意知 $\begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$ ，由于

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2y=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$ 可得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

由函数可导条件知，$f(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导。

4. 由于 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$ $(x^2+y^2\neq 0)$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$

即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ 所以 $u(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ 是调和函数 $(x^2+y^2\neq 0)$

$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}dy=\frac{x}{(x^2+y^2)}+g(x)$，

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

故有 $g'(x)=0$，$g(x)=C$ （C 为常数）

所以 $v(x,y)=\frac{x}{(x^2+y^2)}+C$

$f(z)=\frac{y}{(x^2+y^2)}+i(\frac{x}{(x^2+y^2)}+c)=\frac{i}{z}+ci$

由于 $f(i)=1$ 代入上式可求得 $C=0$，故满足条件 $f(i)=1$ 的函数 $f(z)=\frac{i}{z}$

5. 因为 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$，有

$u(x,y)=e^x\cos y$，$v(x,y)=e^x\sin y$ 且可微， 同时有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}，\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以， e^z 在全平面处处可导且

$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$$

6. 设 C 的复数方程为 $z=z_0+re^{it}$，不妨设 C 的起点对应的参数值为 0，有终点对应的参数值为 2π，则

$$\oint_C\frac{1}{(z-z_o)^n}dz=\int_0^{2\pi}\frac{(z_o+re^{it})'_t}{(z_o+re^{it}-z_o)^n}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^{n-1}}e^{-i(n-1)t}dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{r^{n-1}(1-n)}e^{-i(n-1)t}\ |_0^{2\pi}=0，\ n>1\\ it\ |_0^{2\pi}=2\pi i，\ n=1\end{cases}$$

即 $\oint_C\frac{dz}{(z-z_o)^n}=\begin{cases}2\pi i，\ n=1\\0，\ n>1\end{cases}$

五、求下列积分

1. $I=\int_{\overline{OZ_1}}\sin\bar{z}dz=\int_{\overline{OZ_0}}\sin\bar{z}dz+\int_{\overline{Z_0Z_1}}\sin\bar{z}dz$

$=I_1+I_2$ 其中

$\overline{OZ_0}$： $z=t$ $(0\le t\le 1)$ $I_1=\int_0^1\sin tdt=-\cos t\,|_0^1=1-\cos 1$

$\overline{Z_0Z_1}$： $z=1+it$ $(0\le t\le 1)$

$$I_2=\int_0^1\sin(1-it)d(1+it)=-\int_0^1\sin(1-it)d(1-it)=\cos(1-it)\,|_0^1=\cos(1-i)-\cos 1$$
$$=\cos 1ch1-\cos 1-i\sin 1sh1$$

所以 $I=1+\cos 1(ch1-2)-i\sin 1sh1$

2. $\int_C [2z+\mathrm{Re}(z)]dz \qquad (令\, z=\cos t + i\sin t, 0\le t\le \pi)$

$$=\int_0^{\pi}(3\cos t+2\sin ti)(-\sin t+\cos ti)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(-5\sin t\cos t)dt+i\int_0^{\pi}(3\cos^2 t-2\sin^2 t)dt$$

$$=\frac{5}{4}\cos 2t\,|_0^{\pi}\ +i[\frac{t}{2}+\frac{5}{4}\sin 2t]_0^{\pi}\ =\frac{\pi}{2}i$$

3. 由于被积函数在全平面处处解析，积分仅与起、终点有关，

所以，原式$=\int_{(1,-1)}^{(0,0)}(2z^2-5z+6)dz$

$$=[\frac{2}{3}z^3-\frac{5}{2}z^2+6z]_{(1,-1)}^{(0,0)}$$

$$=-[\frac{2}{3}(1-i)^3-\frac{5}{2}(1-i)^2+6(1-i)]$$

$$=-(\frac{-4}{3}(1+i)+5i+6-6i)=-\frac{7}{3}(2-i)$$

4. $\int_1^{1+\pi i} ze^z dz = e^z(z-1)\,|_1^{1+\pi i}\ =-e\pi i$

5. 根据柯西积分公式，原式$=\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}dz$

$$=2\pi i\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\,|_{z=i}=\frac{\pi}{3}$$

6. 原式$=\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\pi}\frac{\cos^2 z}{z-1}dz-\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\pi}\frac{\cos^2 z}{z}dz$

$$=2\pi i[\cos^2 z\,|_{z=1}-\cos^2 z\,|_{z=0}]$$

$$=2\pi i(\cos^2 1-1)$$

7. 由于$z=\frac{\pi}{2}$为被积函数的三阶极点，所以由高阶导数公式有

原式$=\frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''|_{z=\frac{\pi}{2}}=-\pi i$

8. 当$0<r<1$时，$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2(z-2)}$在C内解析，$I=0$；

当$1<r<2$时，$z=-1$在C内，由高阶导数公式可知

$$I=2\pi i(\frac{1}{z-2})'|_{x=-1}=-\frac{2}{9}\pi i$$

当$r>2$时，$z=-1$，$z=2$均在C内，根据柯西积分定理

$$I=\oint_{|z+1|=\frac{1}{4}}f(z)dz+\oint_{|z-2|=\frac{1}{4}}f(z)dz$$

$$=2\pi i(\frac{1}{z-2})_{z=-1}+2\pi i\frac{1}{(z+1)^2}|_{z=2}=-\frac{2}{9}\pi i+\frac{2}{9}\pi i=0$$

9. 1) 当C为$|z-i|=1$时

I$=2\pi i\frac{1}{(2z+1)(z+i)}|_{z=i}=\frac{\pi}{5}(1-2i)$

2) 当C为$|z+i|=\frac{3}{2}$时

I$=\oint_{c_1}f(z)dz+\oint_{c_2}f(z)dz$ (其中c_1,c_2分别以$-i,-\frac{1}{2}$为圆心,r_1,r_2为半径且互不相交的两个圆)

$=2\pi i[\frac{1}{(2z+1)(z-i)}|_{z=-i}+\frac{1}{2(z+i)(z-i)}|_{z=-\frac{1}{2}}]$

$=\frac{\pi}{5}(-1-2i)+\frac{8\pi i}{5}=\frac{\pi}{5}(-1+6i)$

10. 1). 若$z=0,z=1$均不在C内,则I=0

2). 若$z=0$在C内，$z=1$在C外,则

I$=2\pi i\frac{e^z}{(1-z)^3}|_{z=0}=2\pi i$

3). 若 $z=1$ 在C内，$z=0$ 在C外,则

$$\mathrm{I}=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)'\Big|_{z=1}=e\pi i$$

4). 若 $z=0, z=1$ 均在C内,则

$$\mathrm{I}=\oint_{c_1}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz+\oint_{c_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz\ (\text{其中 } c_1,|z|=\frac{1}{4};c_2,|z-1|=\frac{1}{4})$$

$$=2\pi i+e\pi i=(2+\mathrm{e})\pi i$$

11. $$I=\oint_{|z|=3}\frac{e^{|z|}\cos z}{z}dz+\oint_{|z|=3}\frac{\sin e^z}{z(z-2)^2}dz$$

$$=2\pi i[e^3\cos z\,|_{z=0}+\frac{\sin e^z}{(z-2)^2}\,|_{z=0}+\left(\frac{\sin e^z}{z}\right)'\,|_{z=2}$$

$$=2\pi i[e^3+\frac{1}{4}\sin 1+\frac{e^2}{2}\cos e^2-\frac{1}{4}\sin e^2]$$

12. $$\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz=\oint_{|z|=2}\left(\frac{2z-1}{z-1}-\frac{2z-1}{z}\right)dz$$

$$=2\pi i[(2z-1)_{z=1}-(2z-1)_{z=0}]$$

$$=4\pi i$$

13. 由于 z_0 为 $|z_0|\neq 1$ 的任意复数,所以当 $z_0\in|z|=1$ 内时, z_0 为被积函数的三阶极点.

此时原式$=\frac{2\pi i}{2!}(e^{2z})''|_{z=z_0}=4e^{2z_0}\pi i$, 当 $z_0\notin|z|=1$ 内时，被积函数在 $|z|=1$ 内为解析函数，所以原式=0.即

$$\oint\frac{e^{2z}}{(z-z_0)^3}dz=\begin{cases}4e^{2z_0}\pi i, z_0\in|z|<1\\ 0, z_0\notin|z|<1\end{cases}$$

14. 原式$=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]\}$,其中 $i,-i$ 均为二阶极点.

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),i]=\lim_{z\to i}\left[\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right]'=\lim_{z\to i}\frac{e^{\pi z}(\pi z+\pi i-2)}{(z+i)^3}=\frac{\pi}{4}+\frac{i}{4}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),-i]=\lim_{z\to -i}[\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}]'=\lim_{z\to -i}\frac{e^{\pi z}(\pi z-\pi i-2)}{(z-i)^3}=\frac{\pi}{4}-\frac{i}{4}$$

所以,原式$=2\pi i(\frac{\pi}{4}+\frac{i}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{i}{4})=\pi^2 i$

15. $z=1$为$f(z)$的三阶极点,将$f(z)$在$z=1$处展开可得

$$f(z)=\frac{\sin(\pi z-\pi+\pi)}{(z-1)^4}=-\frac{\sin\pi(z-1)}{(z-1)^4}$$

$$=\frac{-1}{(z-1)^4}[\pi(z-1)-\frac{\pi^3(z-1)^3}{3!}+\frac{\pi^5(z-1)^5}{5!}-\cdots$$

$$=\frac{-\pi}{(z-1)^3}+\frac{\pi^3}{3!(z-1)}-\frac{\pi^5(z-1)}{5!}+\cdots$$

所以 $\operatorname{Re}s[f(z),1]=\frac{\pi^3}{3!}$,原式$2\pi i\frac{\pi^3}{3!}=\frac{\pi^4}{3}i$

16. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin\pi z}{(z+2)(2z-1)^2}dz=2\pi i\operatorname{Re}s[f(z),\frac{1}{2}]$

$$=2\pi i\lim_{z\to\frac{1}{2}}[\frac{\sin\pi z}{4(z+2)}]'$$

$$=\frac{\pi i}{2}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{\pi\sin\pi z(z+2)-\sin\pi z}{(z+2)^2}=-\frac{2}{25}\pi i$$

17. 令$\cos\pi z=0$得$\pi z=Arc\cos 0=-iLn(\pm i)$

求得 $z=k+\frac{1}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$在$|z|=1$内仅有奇点$z=\pm\frac{1}{2}$且均为简单极点

$\oint\limits_{|z|=1}tg\pi z dz=2\pi i[\operatorname{Re}s(tg\pi z,\frac{1}{2})+\operatorname{Re}s(tg\pi z,-\frac{1}{2})]$,其中

$$\operatorname{Re}s(tg\pi z,\frac{1}{2})=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}|_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\operatorname{Re}s(tg\pi z,-\frac{1}{2})=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

故有 $$\oint_{|z|=1} tg\pi z dz=2\pi i(-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi})=-4i$$

18. 被积函数 $f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$ 在 $|z|=2$ 内仅有奇点 $z=0$ 且为简单极点,故有

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{\sin^2 z}dz=2\pi i\operatorname{Re}s(\frac{z}{\sin^2 z},0)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin^2 z}=2\pi i$$

19. $$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5z+2}=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{(2z-1)(z-2)},\frac{1}{2}]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2(z-2)}=-\frac{2\pi}{3}i$$

20. $$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-4z+1}=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{z^2-4z+1},(2-\sqrt{3})]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 2-\sqrt{3}}\frac{1}{z-(2+\sqrt{3})}=\frac{-\pi i}{\sqrt{3}}$$

21. $$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2+5iz-2}=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{(z+2i)(2z+i),}-\frac{i}{2}]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\frac{1}{2(z+2i)}=\frac{2\pi}{3}$$

22. $$\oint_c\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz=2\pi i\{\operatorname{Re}s[f(z),i]+\operatorname{Re}s[f(z),2i]\}$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}+\lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}]=2\pi i(-\frac{1}{6i}+\frac{1}{3i})=\frac{\pi}{3}$$

23. $$\oint_c \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = 2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),e^{\frac{\pi}{4}i}] + \mathrm{Re}\,s[f(z),e^{\frac{3\pi i}{4}}]\}$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{z^2+1}{(z-e^{\frac{5\pi}{4}i})(z^2+i)} + \lim_{z\to e^{\frac{3\pi}{4}i}} \frac{z^2+1}{(z-e^{\frac{7\pi}{4}i})(z^2-i)}]$$

$$=2\pi i(\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}) = \sqrt{2}\pi$$

24. $$\oint_c \frac{dz}{(z^2+9)(z^2+1)} = 2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),i] + \mathrm{Re}\,s[f(z),3i]\}$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to i}\frac{1}{(z^2+9)(z+i)} + \lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z^2+1)(z+3i)}]$$

$$=2\pi i(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i}) = \frac{\pi}{12}$$

六. 求下列函数在奇点处的留数 (共8题)

1. $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的奇点为 0 ,且 $z=0$ 为其三阶极点.

$$\mathrm{Re}\,s(\frac{1-e^{2z}}{z^4},0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(\frac{1-e^{2z}}{z})'' = -\frac{4}{3}$$

或 $$f(z)=\frac{1}{z^4}[1-(1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots]$$

$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3z}-\cdots$$

有 $$\mathrm{Re}\,s(\frac{1-e^{2z}}{z^4},0) = c_{-1} = -\frac{4}{3}$$

2. $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 的奇点为 $z=1$,且

$$\sin\frac{z}{z-1} = \sin(1+\frac{1}{z-1}) = \sin 1\cos\frac{1}{z-1} + \cos 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots] + \cos 1[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots]$$

$$=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}+\cdots$$

所以 $\mathrm{Re}\,s(\sin\frac{z}{z-1},1)=\cos 1$

3. $f(z)=\frac{\sin z}{(1+z)^3}$ 的奇点为 $z=-1$ 且为三阶极点,所以

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}(\sin z)''=\frac{\sin 1}{2}$$

或 $f(z)=\frac{1}{(1+z)^3}[\sin(z+1)\cos 1-\cos(z+1)\sin 1]$

$$=-\frac{\sin 1}{(1+z)^3}+\frac{\cos 1}{(1+z)^2}+\frac{\sin 1}{2(1+z)}-\frac{\cos 1}{3!}-\cdots$$

故有 $\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]=\frac{\sin 1}{2}$

4. $f(z)=\frac{1+z^4}{(z^2+1)^2}$ 的奇点为 $z=\pm i$ 且均为二阶极点, 故有

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),i]=\lim_{z\to i}[\frac{1+z^4}{(z+i)^2}]'=\frac{i}{2}$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]=\lim_{z\to -i}[\frac{1+z^4}{(z-i)^2}]'=-\frac{i}{2}$$

5. 当 $e^z-1=0$ 时, $z=2k\pi i(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的奇点,其中

$z=0$ 是 $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ 的可去奇点 $(\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{e^z}=1)$,所以

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=0$$

$z=2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 均是 $f(z)$ 的一阶极点,所以

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),2k\pi i]=\frac{z}{(e^z-1)'}\Big|_{z=2k\pi i}=2k\pi i,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

6.　显然,z=0,z=1是 $f(z)$ 的奇点且z=0为一阶极点, z=1为二阶极点, 所以

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(\frac{e^z}{z})'=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0$$

7.　$z=\pm 1$ 是 $f(z)$ 的奇点且z=1为二阶极点, z=-1为一阶极点, 所以

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(\frac{1}{z+1})'=-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{4}$$

8.　当　$\sin z=0$ 时,函数无意义,则 $z=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为被积函数的奇点且均为 $f(z)$ 的一阶极点,其中

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{1+z}{(\sin z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{1+z}{\cos z}=1$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}\frac{1+z}{\cos z}=(-1)^{|k|}(1+k\pi).(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

七.　将下列函数在指定区域内展成泰勒级数或罗朗级数　　(共10题)

1.　$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}\dfrac{1}{1-(z-1)^2}$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{2n}\qquad 0<|z-1|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{2n-2}\qquad 0<|z-1|<1$$

2.　$f(z)=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-2z}$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}(z+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z+1}{2})^n+\frac{1}{3}\sum\frac{2^n(z+1)^n}{3^n} \qquad |z+1|<\frac{3}{2}$$

$$=\sum(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{3^{n+1}})(z+1)^n \qquad |z+1|<\frac{3}{2}$$

3. $f(z)=\frac{1}{z-1}(e^{z-1+1})=\frac{e}{z-1}e^{z-1}$

$$=\frac{e}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} \qquad 0<|z-1|<+\infty$$

$$=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{n!} \qquad 0<|z-1|<+\infty$$

4. $f(z)=\frac{1}{3}(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1})$

1). 当$|z|<1$时，$f(z)=\frac{1}{3}[\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{1-(-z)}]$

$$=\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})(\frac{z}{2})^n-\sum(-1)^nz^n]$$

$$=\frac{1}{3}\sum[\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n]z^n$$

2). 当$1<|z|<2$时，$f(z)=\frac{1}{3}[\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}]$

$$=\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}]$$

$$=-\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n]$$

3). 当 $2<|z|<+\infty$ 时, $f(z)=\frac{1}{3}[\frac{1}{z}\frac{1}{(1-\frac{2}{z})}-\frac{1}{z}\frac{1}{(1+\frac{1}{z})}]$

$$=\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+\sum\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n+1}}$$

5. $f(z)=\frac{1}{1-z}\frac{1}{z(1+z)}$

$$=\frac{1}{z-1}[\frac{1}{2+(z-1)}-\frac{1}{1+(z-1)}]$$

$$=\frac{1}{z-1}[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n] \quad 0<|z-1|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}}-1)(z-1)^{n-1} \qquad 0<|z-1|<1$$

6. $f(z)=\cos[\pi+(z-\pi)]=-\cos(z-\pi)$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!} \qquad |z-\pi|<+\infty$$

$$=\sum\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n)!} \qquad |z-\pi|<+\infty$$

7. 因为 $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n \qquad |z|<1$ 有

有 $(\frac{1}{1+z})'=\frac{-1}{(1+z)^2}=\sum(-1)^n nz^{n-1}$

所以 $\frac{1}{(1+z)^2}=\sum(-1)^{n+1}nz^{n-1} \qquad |z|<1$

8. $$f(z)=\frac{1+z}{z(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots)}=\frac{1}{z}g(z)$$

由于 $g(z)$ 在 $z=0$ 处解析,可设 $g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$

可得 $$1+z=a_0+a_1z+(a_2-\frac{a_0}{6})z^2+(a_3-\frac{a_1}{6})z^3+\cdots$$

所以 $$f(z)=\frac{1}{z}(1+z+\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots)\qquad 0<|z|<\pi$$

$$=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{6}+\cdots\qquad 0<|z|<\pi$$

9. $$f(z)=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots}{z^2(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)}=\frac{1}{z^2}g(z)$$

令 $g(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ 可得

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots=(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)$$

$$=c_0+(c_1+\frac{c_0}{2!})z+(c_2+\frac{c_1}{2!}+\frac{c_0}{3!})z^2+\cdots$$

$$\begin{cases}c_0=1\\ c_1+\frac{c_0}{2}=0\\ c_2+\frac{c_1}{2}+\frac{c_0}{6}=-\frac{1}{2}\\ \cdots\end{cases}\qquad \text{解得}\qquad \begin{cases}c_0=1\\ c_1=-\frac{1}{2}\\ c_3=-\frac{5}{12}\\ \cdots\end{cases}$$

$$g(z)=1-\frac{z}{2}-\frac{5z^2}{12}+\cdots\qquad |z|<+\infty$$

则 $$f(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}-\frac{5}{12}+\cdots\qquad 0<|z|<+\infty$$

10. $f(z)=\dfrac{z}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots}$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\cdots}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

即 $1=(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\cdots)$

$$=c_0+c_1z+(c_2-\frac{c_0}{3!})z^2+(c_3-\frac{c_1}{3!})z^3+(c_4-\frac{c_2}{3!}+\frac{c_0}{5!})z^4+\cdots$$

得 $\begin{cases} c_0=1 \\ c_1=0 \\ c_2-\dfrac{c_0}{6}=0 \\ c_3-\dfrac{c_1}{6}=0 \\ c_4-\dfrac{c_2}{6}+\dfrac{c_0}{120}=0 \\ \cdots \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} c_1=1 \\ c_1=0 \\ c_2=\dfrac{1}{6} \\ c_3=0 \\ c_4=\dfrac{7}{360} \\ \cdots \end{cases}$

即 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}=1+\dfrac{z^2}{6}+\dfrac{7z^4}{360}+\cdots \qquad 0<|z|<\pi$