

内容提要

本书是根据编者多年来的教学经验编写而成的. 全书分为上下两册, 本书为下册, 主要包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分及无穷级数. 本书力求结构严谨、逻辑清晰, 注重知识点的引入方法. 本书对传统的高等数学内容进行了适当的补充, 利用二维码拓展较难的高等数学理论知识、MATLAB 图形描绘、简单数学模型等知识, 训练学生的解题能力. 本书叙述深入浅出, 理论及计算方法讲述清楚; 每节配置习题, 每章附有总习题, 题型多样, 选题典型, 难易层次分明, 特别是本书配备的 MATLAB 画图的知识介绍, 有利于学生更好地理解和掌握多元函数积分的相关计算, 提升学生的解题能力.

本书可作为高等院校非数学类各专业学生的教材, 也可作为教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 沈世云, 朱伟主编. -- 2 版. -- 重庆: 重庆大学出版社, 2020. 1
新工科系列. 公共课教材
ISBN 978-7-5689-1434-5

I. ①高… II. ①沈… ②朱… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 297272 号

高等数学(第二版)

(下)

主 编 沈世云 朱 伟

副主编 孙春涛 何承春

游晓黔 耿金玲

主 审 郑继明

策划编辑: 范 琪

责任编辑: 范 琪 版式设计: 范 琪

责任校对: 万清菊 责任印制: 张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人: 饶帮华

社址: 重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编: 401331

电话: (023) 88617190 88617185(中小学)

传真: (023) 88617186 88617166

网址: <http://www.cqup.com.cn>

邮箱: fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本: 787mm × 1092mm 1/16 印张: 15.5 字数: 390 千

2020 年 1 月第 2 版 2020 年 1 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5689-1434-5 定价: 39.80 元

本书如有印刷、装订等质量问题, 本社负责调换
版权所有, 请勿擅自翻印和用本书制作
各类出版物及配套用书, 违者必究

前言

本书是在习近平新时代中国特色社会主义思想指导下,落实“新工科”建设的新要求,在教育大众化和“互联网+”的新形势下,集编者多年教学经验编写而成的.编写本书遵循的原则是:在教学内容的深度和广度上与信息类各专业高等数学课程要求一致,并与现行工科院校“高等数学课程教学基本要求”相适应,满足当前教与学的需要,渗透现代数学思想,加强应用能力培养.

本书编写过程中,我们尽可能遵循以下原则:

1. 在理论体系、知识系统与本书的上册能很好地衔接.
2. 以实际问题为引例,注重重积分、曲线积分、曲面积分概念的实际背景介绍,系统讲解空间解析、多元函数微积分和无穷级数等基本概念、理论和方法及应用.
3. 继承和保持经典高等数学类教材的优点,适当降低对解题训练方面的要求,注重对多元函数积分的计算知识和无穷级数理论的应用能力的培养,加强数学思想方法的训练.
4. 加强课程理论与工科专业的融合,在本书中适当加入与通信、计算机、自动化等专业相关的例题,注重学生应用知识分析和解决实际问题的能力以及构建数学建模的能力.
5. 加强数学文化的熏陶,利用二维码介绍数学史和数学家等,力争打造满足新时代要求的大学数学新型教材.
6. 本书注重例题和习题的多样性和层次性.习题按节配置,遵循循序渐进的原则;每章配备有总习题,其中包括一些考研题目.

本书由沈世云、朱伟主编.编写组耿金玲、何承春、游晓黔、孙春涛、沈世云等分别编写了第8章至第12章,刘显全提供附图及MATLAB绘图方法.全书由沈世云、朱伟统稿定稿,由郑继明主审.本书的编写得到了重庆邮电大学理学院领导和同行的支持和帮助.

本书在编写过程中,参考了较多的国内外教材,在此表示感谢.

由于编者水平有限,本书难免有不足和疏漏之处,恳请同行和读者批评指正.

编 者

2018年10月

目 录

第 8 章 向量代数与空间解析几何	1
8.1 向量及其线性运算	1
8.1.1 向量的概念	1
8.1.2 向量的线性运算	2
8.1.3 空间直角坐标系	5
8.1.4 向量的线性运算的坐标表示	6
8.1.5 向量的模、方向角、投影	7
习题 8.1	9
8.2 数量积 向量积 混合积	10
8.2.1 向量的数量积	10
8.2.2 向量的向量积	12
*8.2.3 向量的混合积	14
习题 8.2	16
8.3 曲面及其方程	17
8.3.1 曲面方程的概念	17
8.3.2 旋转曲面	19
8.3.3 柱面	21
8.3.4 二次曲面	22
习题 8.3	24
8.4 空间曲线及其方程	25
8.4.1 空间曲线的一般方程	25
8.4.2 空间曲线的参数方程	26
8.4.3 空间曲线在坐标面上的投影	27
习题 8.4	30
8.5 平面及其方程	30
8.5.1 平面的点法式方程	31
8.5.2 平面的一般式方程	32

* 8.5.3 平面的三点式方程	33
8.5.4 两平面的夹角	33
习题 8.5	34
8.6 空间直线及其方程	35
8.6.1 空间直线的一般方程	35
8.6.2 空间直线的对称式方程与参数方程	35
8.6.3 两直线的夹角	37
8.6.4 直线与平面的夹角	38
8.6.5 平面束	41
习题 8.6	42
总习题 8	43
 第 9 章 多元函数微分法及其应用	46
9.1 多元函数的基本概念	46
9.1.1 平面点集	46
9.1.2 多元函数	49
习题 9.1	54
9.2 偏导数	55
9.2.1 偏导数的定义及其算法	55
9.2.2 高阶偏导数	58
习题 9.2	59
9.3 全微分及其应用	61
9.3.1 全微分的定义	61
* 9.3.2 全微分在近似计算中的应用	63
习题 9.3	65
9.4 多元复合函数的求导法则	66
9.4.1 多元复合函数求导的链式法则	66
9.4.2 全微分形式不变性	70
习题 9.4	71
9.5 隐函数的存在定理及求导公式	72
9.5.1 一个方程的情形	72
9.5.2 方程组的情形	74
习题 9.5	77
9.6 多元函数微分学的几何应用	78
9.6.1 空间曲线的切线与法平面	78
9.6.2 曲面的切平面与法线	80

习题 9.6	82
9.7 方向导数与梯度	83
9.7.1 方向导数	83
9.7.2 梯度	85
习题 9.7	88
9.8 多元函数的极值及其求法	88
9.8.1 多元函数的极值及最大值、最小值	88
9.8.2 条件极值拉格朗日乘数法	92
习题 9.8	97
总习题 9	98
 第 10 章 重积分	101
10.1 二重积分的概念与性质	101
10.1.1 二重积分的概念	101
10.1.2 二重积分的性质	103
习题 10.1	106
10.2 二重积分的计算法	107
10.2.1 利用直角坐标计算二重积分	107
10.2.2 利用极坐标计算二重积分	111
* 10.2.3 二重积分的换元法	115
习题 10.2	116
10.3 三重积分	118
10.3.1 三重积分的概念与性质	118
10.3.2 三重积分的计算	119
习题 10.3	125
10.4 重积分的应用	127
10.4.1 曲面的面积	127
10.4.2 重积分在物理上的应用	129
习题 10.4	134
总习题 10	135
 第 11 章 曲线积分与曲面积分	138
11.1 对弧长的曲线积分	138
11.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质	138
11.1.2 对弧长的曲线积分的计算法	140
习题 11.1	142

11.2 对坐标的曲线积分	142
11.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质	142
11.2.2 对坐标的曲线积分的计算方法	145
习题 11.2	148
11.3 格林公式及其应用	149
11.3.1 格林公式	149
11.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	152
11.3.3 二元函数的全微分求积	154
习题 11.3	156
11.4 对面积的曲面积分	158
11.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质	158
11.4.2 对面积的曲面积分的计算	159
习题 11.4	161
11.5 对坐标的曲面积分	161
11.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质	161
11.5.2 对坐标的曲面积分的计算法	164
11.5.3 两类曲面积分之间的联系	166
习题 11.5	167
11.6 高斯公式 通量与散度	168
11.6.1 高斯公式	168
* 11.6.2 通量与散度	171
习题 11.6	172
11.7 斯托克斯公式 环流量与旋度	173
11.7.1 斯托克斯公式	173
* 11.7.2 环流量与旋度	175
习题 11.7	175
总习题 11	176
 第 12 章 无穷级数	 178
12.1 常数项级数的概念和性质	178
12.1.1 常数项级数的概念	178
12.1.2 收敛级数的基本性质	181
12.1.3 级数收敛的必要条件	182
* 12.1.4 柯西审敛原理	183
习题 12.1	183
12.2 常数项级数的审敛法	185

12.2.1	正项级数及其审敛法	185
12.2.2	交错级数及其审敛法	190
12.2.3	绝对收敛与条件收敛	192
习题 12.2	194
12.3	幂级数	195
12.3.1	函数项级数的概念	195
12.3.2	幂级数及其收敛域	196
12.3.3	幂级数的运算、幂级数的分析性质	200
习题 12.3	203
12.4	函数展开成幂级数	204
12.4.1	泰勒级数	204
12.4.2	函数展开成幂级数	206
习题 12.4	209
* 12.5	函数的幂级数展开式的应用	209
12.5.1	近似计算	209
12.5.2	欧拉公式	212
12.5.3	微分方程的幂级数解法	213
习题 12.5	215
12.6	傅里叶级数	215
12.6.1	三角级数及三角函数系的正交性	215
12.6.2	函数展开成傅里叶级数	217
12.6.3	正弦级数和余弦级数	221
12.6.4	函数展开成正弦级数或余弦级数	223
12.6.5	周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	225
习题 12.6	228
总习题 12	229
附录	常用曲面	233
参考文献	237

第 11 章

曲线积分与曲面积分

前一章已介绍了二重积分和三重积分的知识,可以发现,它们把积分概念从积分范围为数轴上的一个区间情形推广到积分范围为平面或空间的一个闭区域情形.本章将积分概念推广到积分范围为一段曲线或一片曲面的情形(这样的积分称为曲线积分与曲面积分),并介绍有关这两种积分的应用.

11.1 对弧长的曲线积分

11.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

引例 曲线形构件的质量.

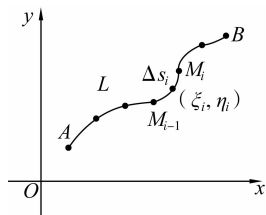


图 11.1

如图 11.1 所示,设一曲线形构件所占的位置对应于 xOy 面内的一段曲线弧 L ,已知曲线形构件在点 (x, y) 处的线密度为 $\mu(x, y)$,求曲线形构件的质量 M .

首先把曲线弧分成 n 小段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$),分别记为 $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ (同时也用 Δs_i 表示第 i 小段的弧长, $i = 1, 2, \dots, n$),然后任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta s_i$,得第 i 小段质量的近似值 $\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$.

于是,曲线形构件的质量近似为

$$M \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

令 $\lambda = \max \{ \Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n \} \rightarrow 0$, 则整个曲线形构件的质量为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

这种和的极限在研究其他问题时也会遇到. 下面介绍对弧长的曲线积分的定义:

定义 11.1 设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧, 函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界. 在 L 上任意插入一点列 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , 把 L 分成 n 个小段. 设第 i 个小段的长度为 Δs_i , 又 (ξ_i, η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点, 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, 如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这的和的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y) ds$, 即

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (11.1)$$

其中, $f(x, y)$ 称为被积函数, L 称为积分弧段.

注 ①根据对弧长的曲线积分的定义, 如果曲线形构件 L 的线密度为 $f(x, y)$, 则曲线形构件 L 的质量为 $\int_L f(x, y) ds$.

②如果 L 是闭曲线, 函数 $f(x, y)$ 在闭曲线 L 上对弧长的曲线积分也可记作 $\oint_L f(x, y) ds$.

③如果考虑空间上的曲线弧 Γ , 假设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上有界, 定义它在 Γ 上对弧长的曲线积分为

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

如果 L (或 Γ) 是分段光滑的, 则规定函数在 L (或 Γ) 上对弧长的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分的和. 例如, 设 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 及 L_2 , 则规定

$$\int_{L_1+L_2} f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$$

曲线积分的存在性: 当 $f(x, y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续时, 对弧长的曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$ 是存在的. 以后总假定 $f(x, y)$ 在 L 上是连续的.

对弧长的曲线积分具有以下性质:

性质 1 设 c_1, c_2 为常数, 则

$$\int_L [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] ds = c_1 \int_L f(x, y) ds + c_2 \int_L g(x, y) ds \quad (11.2)$$

性质 2 若积分弧段 L 可分成两段曲线弧 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds \quad (11.3)$$

性质 3 设在积分弧段 L 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds$$

特别地, 有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds$$

11.1.2 对弧长的曲线积分的计算法

定理 11.1 设 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

其中, $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$, 则对弧长的曲线积分

$\int_L f(x, y) ds$ 存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (11.4)$$

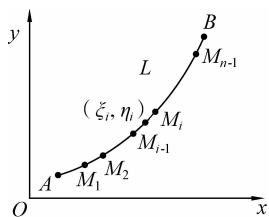


图 11.2

证 如图 11.2 所示, 假设当参数 t 由 α 变至 β 时, L 上的点 $M(x, y)$ 依点 A 至点 B 的方向描出曲线弧 L . 在 L 上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B$$

它们分别对应于一列单调增加的参数值

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

根据对弧长的曲线积分的定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

设点 (ξ_i, η_i) 对应于参数值 τ_i , 即 $\xi_i = \varphi(\tau_i), \eta_i = \psi(\tau_i)$, 这里 $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. 由于

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

故应用积分中值定理, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\mu_i) + \psi'^2(\mu_i)} \Delta t_i$$

其中, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, t_{i-1} \leq \mu_i \leq t_i$. 于是

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \sqrt{\varphi'^2(\mu_i) + \psi'^2(\mu_i)} \Delta t_i$$

由于 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 可以证明上式中的 μ_i 换成 τ_i 是成立的 (详细证明过程可参考文献[6], 这里从略), 从而

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \Delta t_i$$

由于上式右边就是函数 $f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的定积分, 由定理条件可知, 该函数在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是连续的, 因此, 这个定积分存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta)$$

式(11.4)表明, 对弧长的曲线积分可转化为对参数方程的参数 t 作定积分. 根据推导过程中 Δs_i 的非负性可知, Δt_i 也要具有非负性, 因此必须注意, 式(11.4)右边定积分的下限 α 必须小于上限 β . 另外, 在计算过程中, 可利用上册定积分计算平面曲线的弧长元素公式

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

特别地,有:

①若曲线 L 的方程为 $y = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

②若曲线 L 的方程为 $x = \varphi(y)$ ($c \leq y \leq d$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f[\varphi(y), y] \sqrt{\varphi'^2(y) + 1} dy$$

③若曲线 L 的方程表示为极坐标 $\rho = \rho(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) 时, 可得

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f[\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta] \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

④若空间曲线 Γ 的方程为 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 则

$$\int_\Gamma f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt \quad (11.5)$$

例 1 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中, L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O(0, 0)$ 与点 $B(2, 4)$ 之间的一段弧.

解 曲线弧 L 的方程为 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$), 因此

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^2 \sqrt{x^2} \sqrt{1 + (x^2)'}^2 dx \\ &= \int_0^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 1) \end{aligned}$$

例 2 计算半径为 R 、中心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度为 1).

解 取坐标系如图 11.3 所示, 利用元素法可得

$$I = \int_L y^2 ds$$

又曲线 L 的参数方程为

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \right)$$

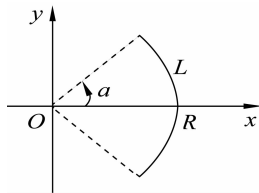


图 11.3

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L y^2 ds \\ &= R^3 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin^2 \theta d\theta = R^3 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = R^3 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

例 3 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中, Γ 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = t$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧.

解 在曲线 Γ 上有

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + t^2 = a^2 + t^2$$

并且

$$ds = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + 1^2} dt = \sqrt{a^2 + 1} dt$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 + t^2) \sqrt{a^2 + 1} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + 1} (3a^2 + 4\pi^2)\end{aligned}$$

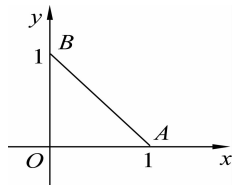


图 11.4

例 4 计算 $\oint_L (x + y) ds$, 其中, L 为折线 $OABO$, 如图 11.4 所示.

解

$$\begin{aligned}\oint_L (x + y) ds &= \int_{OA} (x + y) ds + \int_{AB} (x + y) ds + \int_{OB} (x + y) ds \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 [x + (1 - x)] \sqrt{1 + (-1)^2} dx + \int_0^1 y dy \\ &= 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

习题 11.1

1. 计算 $\int_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中, $L: x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$.
2. 计算 $\oint_L x ds$, 其中, L 为由 $y = x$ 及 $y = x^2$ 围成的闭区域的整个边界曲线.
3. 计算 $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, 其中, Γ 为曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 相应于 t 从 0 到 2 的一段弧.
4. 计算 $\int_{\Gamma} x^2 y z ds$, 其中, Γ 为折线 $ABCD$, 坐标 $A(0,0,0), B(0,0,2), C(1,0,2), D(1,3,2)$.
5. 计算 $\oint_L xy ds$, 其中, L 是正方形 $|x| + |y| = a (a > 0)$ 的边界.
6. 求 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中, L 为曲线段 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq \pi)$.
7. 若椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < a)$ 上任一点 (x, y) 处的线密度为 $|y|$, 求该椭圆周构件的质量.

11.2 对坐标的曲线积分

11.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质

引例 变力沿曲线所做的功.

设一个质点在 xOy 面内在变力 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 的作用下从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B , 试求变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 所做的功.

如图 11.5 所示, 用曲线 L 上的点 $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ 把 L 分成 n 个小弧段 L_1, L_2, \dots, L_n , 用 $\Delta s_i = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ 表示从 L_i 的起点到其终点的向量. 同时, 用 Δs_i 表示该向量的模.

设 A_k 的坐标为 (x_k, y_k) , 有向线段 $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ 的长度为 Δs_k , 它与 x 轴的夹角为 τ_k , 则

$$\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = (\cos \tau_k, \sin \tau_k) \Delta s_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

显然, 变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 沿有向小弧段 $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ 所做的功可近似为

$$\mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot \overrightarrow{A_k A_{k+1}} = [P(x_k, y_k) \cos \tau_k + Q(x_k, y_k) \sin \tau_k] \Delta s_k$$

于是, 变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 所做的功

$$W \approx \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot \overrightarrow{A_k A_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_k, y_k) \cos \tau_k + Q(x_k, y_k) \sin \tau_k] \Delta s_k$$

从而

$$W = \int_L [P(x, y) \cos \tau + Q(x, y) \sin \tau] ds$$

这里 $\tau = \tau(x, y)$, $(\cos \tau, \sin \tau)$ 是曲线 L 在点 (x, y) 处的与曲线方向一致的单位切向量.

倘若换个角度, 把 L 分成 n 个小弧段: L_1, L_2, \dots, L_n ; (ξ_i, η_i) 是 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ 上任意取定的一点.

变力在 L_i 上所做的功也可近似为

$$\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i = P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

变力在 L 上所做的功近似为

$$\sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

那么, 变力在 L 上所做的功的精确值为

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

其中, λ 是各小弧段长度的最大值.

定义 11.2 设函数 $f(x, y)$ 在有向光滑曲线 L 上有界. 把 L 分成 n 个有向小弧段 L_1, L_2, \dots, L_n , 小弧段 L_i 的起点为 $A_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, 终点为 $A_i(x_i, y_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, (ξ_i, η_i) 为 L_i 上任意一点, 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ ($1 \leq i \leq n$). 设 λ 为各小弧段长度的最大值.

如果极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y) dx$, 即

$$\int_L f(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \quad (11.6)$$

如果极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 y 的曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y) dy$, 即

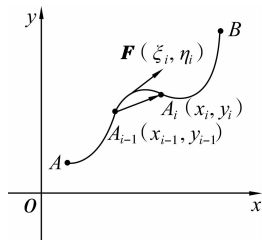


图 11.5

$$\int_L f(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \quad (11.7)$$

式(11.6)称为 $f(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的曲线积分,式(11.7)称为 $f(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 y 的曲线积分,对坐标的曲线积分也称第二类曲线积分.

设 L 为 xOy 面上一条光滑有向曲线, $(\cos \tau, \sin \tau)$ 是与曲线方向一致的单位切向量,设函数 $P = P(x, y), Q = Q(x, y)$ 在 L 上有定义.如果下列两式右端的积分存在,可得

$$\int_L P(x, y) dx = \int_L P(x, y) \cos \tau ds$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_L Q(x, y) \sin \tau ds$$

设 Γ 为空间内一条光滑有向曲线, $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是曲线在点 (x, y, z) 处的与曲线方向一致的单位切向量,函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Γ 上有定义.定义(假如各式右端的积分存在)

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \int_{\Gamma} P(x, y, z) \cos \alpha ds$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy = \int_{\Gamma} Q(x, y, z) \cos \beta ds$$

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) dz = \int_{\Gamma} R(x, y, z) \cos \gamma ds$$

也可通过下式定义

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i$$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i$$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i$$

对坐标的曲线积分的简写形式为

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy + \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

记 $P = P(x, y), Q = Q(x, y)$,总假设 $\int_L P dx + Q dy$ 可积(下文同略),对坐标的曲线积分有如下性质:

性质 1 设 c_1, c_2 为常数,则

$$\int_L c_1 P dx + c_2 Q dy = c_1 \int_L P dx + c_2 \int_L Q dy$$

性质 2 如果把 L 分成 L_1 和 L_2 ,则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{L_1} P dx + Q dy + \int_{L_2} P dx + Q dy \quad (11.8)$$

性质 3 设 L 是有向曲线弧, $-L$ 或 L^- 表示与 L 方向相反的有向曲线弧,则

$$\int_{-L} P dx + Q dy = - \int_L P dx + Q dy \quad (11.9)$$

两类曲线积分之间的关系: 设 $(\cos \tau_i, \sin \tau_i)$ 为与 Δs_i 同向的单位向量, 由于 $\Delta s_i = (\Delta x_i, \Delta y_i)$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \cos \tau_i \cdot \Delta s_i, \Delta y_i = \sin \tau_i \cdot \Delta s_i \\ \int_L f(x, y) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cos \tau_i \Delta s_i = \int_L f(x, y) \cos \tau ds \\ \int_L f(x, y) dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \sin \tau_i \Delta s_i = \int_L f(x, y) \sin \tau ds \end{aligned}$$

即

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \tau + Q \sin \tau) ds$$

或写为

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$

其中, $\mathbf{A} = (P, Q)$, $\mathbf{t} = (\cos \tau, \sin \tau)$ 为有向曲线弧 L 上点 (x, y) 处的单位切向量, 即

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds = (dx, dy)$$

类似地有

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

或

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{\Gamma} A_t ds$$

其中, $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, $\mathbf{t} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲线弧 Γ 上点 (x, y, z) 处的单位切向量, $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds = (dx, dy, dz)$, A_t 为向量 \mathbf{A} 在向量 \mathbf{t} 上的投影.

11.2.2 对坐标的曲线积分的计算方法

定理 11.2 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 是定义在光滑有向曲线 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 上的连续函数, 当参数 t 单调地由 α 变到 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B , 则有

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt \\ \int_L Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt \\ \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt \end{aligned} \quad (11.10)$$

证 不妨设 $\alpha \leq \beta$. 对应于 t 点与曲线 L 的方向一致的切向量为 $(\varphi'(t), \psi'(t))$, 所以

$$\cos \tau = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx &= \int_L P(x, y) \cos \tau ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

其余两式同理可证.

注 ① 下限 α 对应于 L 的起点坐标对应的参数的值, 即 L 的起点的坐标为 $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$;

② 上限 β 对应于 L 的终点坐标对应的参数的值, α 不一定小于 β ;

③ 若空间曲线 Γ 由参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$ 给出, 则曲线积分

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \omega'(t) \} dt \end{aligned} \quad (11.11)$$

其中, α 为 Γ 的起点坐标对应的参数的值, β 为 Γ 的终点坐标对应的参数的值.

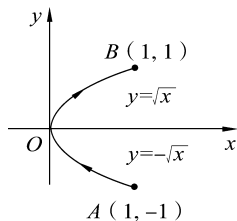


图 11.6

例 1 计算 $\int_L xy dx$, 其中, 如图 11.6 所示, L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.

解 方法 1: 以 x 为参数. L 分为 \widehat{AO} 和 \widehat{OB} 两部分:

\widehat{AO} 的方程为 $y = -\sqrt{x}$, x 从 1 变到 0; \widehat{OB} 的方程为 $y = \sqrt{x}$, x 从 0 变到 1.

因此

$$\begin{aligned} \int_L xy dx &= \int_{\widehat{AO}} xy dx + \int_{\widehat{OB}} xy dx \\ &= \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

方法 2: 以 y 为积分变量. L 的方程为 $x = y^2$, y 从 -1 变到 1 . 因此

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y (y^2)' dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}$$

例 2 计算 $\int_L y^2 dx$, L 如图 11.7 所示.

(1) L 为按逆时针方向绕行的上半圆周 $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$;

(2) L 是从点 $A(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a, 0)$ 的直线段.

解 (1) L 的参数方程为

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$$

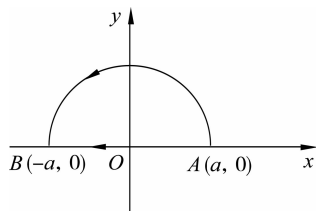


图 11.7

θ 从 0 变到 π , 因此

$$\begin{aligned}\int_L y^2 dx &= \int_0^\pi a^2 \sin^2 \theta (-a \sin \theta) d\theta \\ &= a^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = -\frac{4}{3} a^3\end{aligned}$$

(2) L 的方程为 $y=0$, x 从 a 变到 $-a$, 因此

$$\int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0 dx = 0$$

例 3 计算 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$.

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧;

(2) 抛物线 $x=y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧;

(3) 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,0)$, 再到 $B(1,1)$ 的有向折线.

解 (1) $L: y=x^2$, x 从 0 变到 1, 所以

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 1$$

(2) $L: x=y^2$, y 从 0 变到 1, 所以

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4) dy = 5 \int_0^1 y^4 dy = 1$$

(3) $OA: y=0$, x 从 0 变到 1; $AB: x=1$, y 从 0 变到 1, 所以

$$\begin{aligned}\int_L 2xy dx + x^2 dy &= \int_{OA} 2xy dx + x^2 dy + \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy \\ &= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0) dx + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1) dy \\ &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

例 4 计算 $I = \oint_\Gamma xy dx + yz dy + xz dz$, 其中, Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - \cos t - \sin t \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 2\pi$$

解 由式(11.11)可知

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi} [\cos t \sin t (-\sin t) + \sin t (1 - \cos t - \sin t) \cos t + \\ &\quad (1 - \cos t - \sin t) \cos t (\sin t - \cos t)] dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi\end{aligned}$$

例 5 设一个质点在 $M(x, y)$ 处受到力 \boldsymbol{F} 的作用, \boldsymbol{F} 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比, \boldsymbol{F} 的方向恒指向原点. 此质点由点 $A(a, 0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中, $a > 0, b > 0$) 按逆时针方向移动到点 $B(0, b)$, 求力 \boldsymbol{F} 所做的功 W .

解 椭圆的参数方程为 $x = a \cos t, y = b \sin t, t$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$.

由于 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, F = k \cdot |\mathbf{r}| \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

其中, $k > 0$ 是比例常数.

于是

$$\begin{aligned} W &= \int_{AB} -kx dx - ky dy = -k \int_{AB} x dx + y dy \\ &= -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t) dt \\ &= k(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{k}{2}(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

习题 11.2

1. 计算 $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中, L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,4)$ 的一段弧.
2. 计算 $\int_L x dy + y dx$, 其中, L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,2)$ 的直线段.
3. 计算 $\int_L xy dx$, 其中, L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行).
4. 计算 $\int_{\Gamma} dx - dy + y dz$, 其中, Γ 为有向闭曲线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.
5. 计算 $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$, 其中, L 是:
 - (1) 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;
 - (2) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段;
 - (3) 首先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$, 然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;
 - (4) 曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.
6. 设 Γ 为曲线 $x = t, y = t^2, z = t$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧, 把对坐标的曲线积分 $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ 化为对弧长的曲线积分.
7. 计算 $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y) dy$, 其中, L 是曲线 $y = |x|$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(2,2)$ 的一段弧.
8. 计算 $\oint_L x^2 dy - y^2 dx$, 其中, 积分路径为椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 按逆时针方向.

9. 设力 $\mathbf{F} = (y - x^2, z - y^2, x - z^2)$ 作用下, 一质点沿曲线

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

从点 $A(0,0,0)$ 移动到点 $B(1,1,1)$, 求 \mathbf{F} 所做的功.

11.3 格林公式及其应用

11.3.1 格林公式

首先介绍单连通与复连通区域的概念.

设 D 为平面区域, 如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D , 则称 D 为平面单连通区域, 否则称为复连通区域.

对平面区域 D 的边界曲线 L , 规定 L 的正向如下: 当观察者沿 L 的这个方向行走时, D 内在他近处的那一部分总在他的左边.

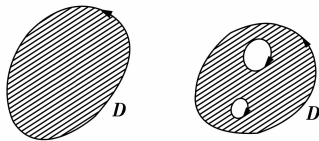


图 11.8

如图 11.8 所示, 箭头方向为边界曲线的正向.

定理 11.3 (格林公式) 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad (11.12)$$

其中, L 是 D 的取正向的边界曲线.

证 ①当 D 既是 X 型的, 又是 Y 型的区域时, 设

$$D = \{ (x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \}$$

用 L_1 表示 $y = \varphi_1(x)$, $x: a \rightarrow b$, 用 L_2 表示 $y = \varphi_2(x)$, $x: b \rightarrow a$.

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 所以由二重积分的计算法有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right\} dx = \int_a^b \{ P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)] \} dx$$

另一方面, 由对坐标的曲线积分的性质及计算法有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx = \int_a^b P[x, \varphi_1(x)] dx + \int_b^a P[x, \varphi_2(x)] dx \\ &= \int_a^b \{ P[x, \varphi_1(x)] - P[x, \varphi_2(x)] \} dx \end{aligned}$$

因此

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx$$

设 $D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$. 类似地, 可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dy$$

由于 D 是 X 型的又是 Y 型的, 因此, 以上两式同时成立, 两式合并即得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

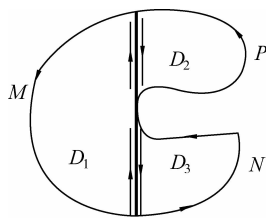


图 11.9

②对于不满足既是 X 型的又是 Y 型的单连通区域 D , 如图 11.9 所示.

这时, 可引一些辅助线将 D 分成有限个小区域, 使得每个小区域是①的区域. 在每个小区域上利用①已证得的公式, 然后再将所得的结果相加. 因为所引的辅助线上, 两次使用公式时曲线积分方向正好相反, 因而在这些辅助线上的曲线积分值相互抵消. 于是, 就推出式 (11.12) 对整个区域是成立的, 用 L^+ 表示闭曲线 L 所围闭区域的正向边界曲线, 则有

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^3 \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^3 \int_{L_i^+} P dx = \oint_{L^+} P dx$$

③对复连通区域 D , 这时仍然可通过作辅助线的方法将 D 分作若干小区域. 对于每个小区域使用上述公式, 然后相加, 即得出对于整个区域式 (11.12) 都是成立的.

特别地, 设区域 D 的边界曲线为 L , D 的面积为 A . 取 $P = -y, Q = x$, 则由格林公式可得

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L x dy - y dx = 2A$$

于是

$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \quad (11.13)$$

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0)$ 的面积 A .

解 设 D 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 易知, D 是由光滑椭圆曲线 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 所围成的区域.

令 $P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x$, 显然 P 及 Q 在平面上具有一阶连续偏导数. 而且 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

于是, 由格林公式可得

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \oint_L -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy = \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 \theta + ab \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

例2 计算 $\iint_D e^{-y^2} dx dy$, 其中, D 是以 $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域.

分析 要使 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$, 可取 $P=0, Q=xe^{-y^2}$.

解 令 $P=0, Q=xe^{-y^2}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$. 显然 P 及 Q 在平面上具有一阶连续偏导数, 由格林公式可得

$$\iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2} dy = \int_{OA} xe^{-y^2} dy + \int_{AB} xe^{-y^2} dy + \int_{BO} xe^{-y^2} dy$$

又因为

$$OA: \begin{cases} y=x \\ x:0 \rightarrow 1 \end{cases}, AB: \begin{cases} y=1 \\ x:1 \rightarrow 0 \end{cases}, BO: \begin{cases} x=0 \\ y:1 \rightarrow 0 \end{cases}$$

所以

$$\iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2} dy = \int_0^1 xe^{-x^2} dx + 0 + 0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

例3 计算 $\int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy$, 其中, L 为逆时针方向的上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$.

解 用 L_1 表示点 $(0,0)$ 到点 $(2a,0)$ 的直线段, 则有

$$\begin{aligned} & \int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\ &= \int_L e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 2) dy + \int_L (-2y) dx \\ &= \oint_{L+L_1} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 2) dy - \int_{L_1} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 2) dy + \int_L (-2y) dx \end{aligned}$$

应用格林公式可知

$$\oint_{L+L_1} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 2) dy = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y) d\sigma = 0$$

显然在 L_1 上, $y \equiv 0$, 故

$$\int_{L_1} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 2) dy = 0$$

L 的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a + a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} \quad (\theta: 0 \rightarrow \pi)$$

于是

$$\int_L (-2y) dx = \int_0^\pi -2a \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta = a^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi = \pi a^2$$

从而

$$\text{原式} = 0 - 0 + \pi a^2 = \pi a^2$$

例4 计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中, L 为一条无重点、分段光滑且经过原点的连续闭曲线, L

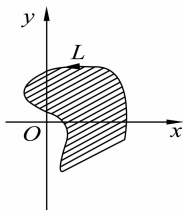


图 11.10

的方向为逆时针方向.

解 令 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 则当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

记 L 所围成的闭区域为 D . 当 $(0,0) \notin D$ 时如图 11.10 所示, 则由格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

当 $(0,0) \in D$ 时, 如图 11.11 所示在 D 内取一圆周 $l: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$. 由 L 及 l 围成了一个复连通区域 D_1 , 应用格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

其中, l 的方向取逆时针方向.

于是

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = 2\pi$$

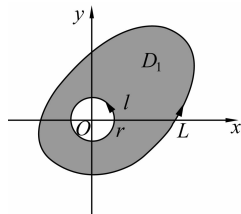


图 11.11

11.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

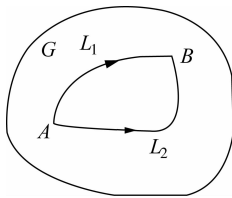


图 11.12

首先介绍曲线积分与路径无关的概念.

设 G 是一个区域如图 11.12 所示, $P(x,y), Q(x,y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数. 如果对于 G 内任意指定的两个点 A, B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1, L_2 , 等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立, 就称曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关, 否则称与路径有关.

设曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关, L_1 和 L_2 是 G 内任意两条从点 A 到点 B 的曲线, 则有

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

显然

$$\begin{aligned} \int_{L_1} Pdx + Qdy &= \int_{L_2} Pdx + Qdy \Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy = 0 \Leftrightarrow \oint_{L_1 + (L_2^-)} Pdx + Qdy = 0 \end{aligned}$$

第二类曲线积分与路径无关的问题上, 进一步地有以下结论:

定理 11.4 设 G 是单连通域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则以下 4 个条件等价:

①对 G 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$;

②对 G 中任一分段光滑曲线 L , 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关;

③ $Pdx + Qdy$ 在 G 内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即 $du(x, y) = Pdx + Qdy$;

④在 G 内每一点都有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

证 ① \Rightarrow ②

设 L_1, L_2 为 G 内任意两条由起点 A 到终点 B 的有向分段光滑曲线, 则

$$\begin{aligned} \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy &= \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy \\ &= \int_{L_1 + L_2^-} Pdx + Qdy = 0 \end{aligned}$$

故

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

② \Rightarrow ③

在 G 内取定点 (x_0, y_0) , 再任取点 (x, y) 和 $(x + \Delta x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 不妨令函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

则

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy \\ &= \int_x^{x + \Delta x} Pdx = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x \quad (\text{积分中值定理}, 0 \leq \theta \leq 1) \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y)$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

因此有

$$du = Pdx + Qdy$$

③ \Rightarrow ④

设存在函数 $u(x, y)$, 使得

$$du = Pdx + Qdy$$

那么

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

而 P, Q 在 G 内具有连续的偏导数, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 从而在 G 内每一点都有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

④ \Rightarrow ①

设 L 为 G 中任一段光滑闭曲线, 所围区域为 $D \subset G$.

注意到, 在 D 上

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D 0 d\sigma = 0$$

由此可得定理中的任意两个条件都是等价的.

注意到定理要求区域 G 是单连通区域, 且函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数.

例 5 计算 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中, L 为曲线 $y = e^{\sin x}(x-1)+1$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ 在整个 xOy 面内都成立, 所以在整个 xOy 面内, 积分 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ 与路径无关. 记 A 为点 $(1,0)$, 则

$$\begin{aligned} \int_L 2xy dx + x^2 dy &= \int_{OA} 2xy dx + x^2 dy + \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy \\ &= \int_0^1 1^2 dy = 1 \end{aligned}$$

11.3.3 二元函数的全微分求积

曲线积分在 G 内与路径无关, 表明曲线积分的值只与起点 (x_0, y_0) 与终点 (x, y) 有关.

如果 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关, 可把它记为

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

即

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

若起点 (x_0, y_0) 为 G 内的一定点, 终点 (x, y) 为 G 内的动点, 则

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

为 G 内的函数.

二元函数 $u(x, y)$ 的全微分为

$$du(x, y) = u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy$$

表达式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 与函数的全微分有相同的结构, 但它未必就是某个函数的全微分.

由定理 11.5 已得表达式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分的等价条件, 并且由证明过程可知, 一个这样的函数可表示为

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

于是, 原函数 $u(x, y)$ 可通过下列公式求算

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy \\ u(x, y) &= \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx \end{aligned} \quad (11.14)$$

例 6 验证 $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 在右半平面 ($x > 0$) 内是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解 这里

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

因为 P, Q 在右半平面内具有一阶连续偏导数, 且有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以在右半平面内, $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 是某个函数的全微分.

考虑到 P, Q 在原点没有定义, 如图 11.13 所示. 取积分路线为从 $A(1, 0)$ 到 $B(x, 0)$ 再到 $C(x, y)$ 的折线, 可得所求函数

$$u(x, y) = \int_{(1, 0)}^{(x, y)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 + \int_0^y \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$$

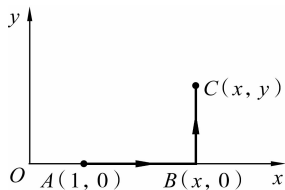


图 11.13

例 7 设 $P(x, y) = x^4 + 4xy^3, Q(x, y) = 6x^2y^2 + 5y^4$.

(1) 对平面上任意两点 A, B , 证明 $\int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关;

(2) 求 $Pdx + Qdy$ 的一个原函数 $u(x, y)$;

(3) 求曲线积分 $\int_{(-2, -1)}^{(3, 1)} Pdx + Qdy$.

解 (1) 由于 $P(x, y) = x^4 + 4xy^3, Q(x, y) = 6x^2y^2 + 5y^4$ 在全平面有一阶连续偏导数, 且

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以曲线积分与路径无关.

(2) 方法 1: 用曲线积分法. 用坐标原点为曲线积分的起点. 对平面上任意一点 $B(x, y)$. 由式(11.14)可知

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_0^x x^4 dx + \int_0^y (6x^2 y^2 + 5y^4) dy \\ &= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3 + y^5 \end{aligned}$$

方法 2: 固定 y , 关于 $x^4 + 4xy^3$ 对 x 求不定积分, 得其一个原函数

$$u_1(x, y) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3$$

从而, $Pdx + Qdy$ 的原函数可表示为

$$u(x, y) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3 + \varphi(y)$$

其中, $\varphi(y)$ 是一待定函数, 再由 $\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 y^2 + \varphi'(y) = 6x^2 y^2 + 5y^4$, 得 $\varphi'(y) = 5y^4$, 于是, $\varphi(y) = y^5 + C$, 其中, C 为任意常数, 所以

$$u(x, y) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3 + y^5$$

方法 3: 由于

$$\begin{aligned} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2 y^2 + 5y^4) dy &= x^4 dx + (4xy^3 dx + 6x^2 y^2 dy) + 5y^4 dy \\ &= d\left(\frac{1}{5}x^5\right) + d(2x^2 y^3) + d(y^5) \\ &= d\left(\frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3 + y^5\right) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3 + y^5 \\ (3) \int_{(-2,-1)}^{(3,1)} Pdx + Qdy &= u(x, y) \Big|_{(-2,-1)}^{(3,1)} \\ &= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 y^3 + y^5 \Big|_{(-2,-1)}^{(3,1)} = 83 \end{aligned}$$

习题 11.3

1. 在单连通区域 G 内, 如果 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 问:

(1) 在 G 内的曲线积分 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 是否与路径无关?

(2) 在 G 内的闭曲线积分 $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 是否为零?

(3) 在 G 内 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 是否是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分?

2. 在区域 G 内除 M_0 点外, 如果 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,

G_1 是 G 内不含 M_0 的单连通区域, 试问:

(1) 在 G_1 内的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 是否与路径无关?

(2) 在 G_1 内的闭曲线积分 $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 是否为零?

(3) 在 G_1 内 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 是否是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分?

3. 在单连通区域 G 内, 如果 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 但 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

非常简单, 试问:

(1) 如何计算 G 内的闭曲线积分?

(2) 如何计算 G 内的非闭曲线积分?

4. 计算 $\int_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中, L 是 4 个顶点分别为 $(0,0), (2,0), (2,2),$

$(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

5. 计算 $\oint_L (2xy - x^3)dx + (x + y^2)dy$, 其中, L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线.

6. 利用曲线积分, 计算星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 所围成的图形的面积.

7. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$;

(2) $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$.

8. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$, 其中, L 为 3 顶点分别为 $(0,0), (3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界;

(2) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$, 其中, L 为抛物线 $y^2 = \frac{2}{\pi}x$ 由点 $(0,0)$ 到点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

(3) $\oint_{ABOA} (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - 1)dy$, 其中, $ABOA$ 是以 $A(0,a), B(a,0), O(0,0)$ 为顶点的闭折线.

9. 计算 $\int_L (x^2 - y)dx + (x + \sin^2 y)dy$, 其中, L 是圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$ 的一段弧.

10. 验证下列 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在整个平面内是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分, 并求这

样一个 $u(x, y)$.

$$(1) 2xydx + x^2dy;$$

$$(2) (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy.$$

11.4 对面积的曲面积分

11.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质

引例 曲面形物体的质量.

设有一面密度非均匀的曲面形物体, 对应的空间图形为曲面 Σ , 其面密度为 $\rho(x, y, z)$, 求其质量.

可把曲面分成 n 个小块:

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n \quad (\Delta S_i \text{ 也表示曲面的面积})$$

得质量的近似值

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \quad ((\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{ 是 } \Delta S_i \text{ 上任意一点})$$

然后取极限求精确值

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \quad (\lambda \text{ 为各小块曲面的直径的最大值})$$

下面介绍对面积的曲面积分的定义.

定义 11.3 设曲面 Σ 是光滑的, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 小块: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (ΔS_i 也表示曲面的面积), 在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面

Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \quad (11.15)$$

其中, $f(x, y, z)$ 称为被积函数, Σ 称为积分曲面.

对面积的曲面积分的存在性有结论: 当 $f(x, y, z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续时, 对面积的曲面积分是存在的. 以后总假定 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续.

根据上述定义, 面密度为连续函数 $\rho(x, y, z)$ 的光滑曲面 Σ 的质量 M 可表示为 $\rho(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分

$$M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$$

如果 Σ 是分片光滑的, 则规定函数在 Σ 上对面积的曲面积分等于函数在光滑的各片曲面

上对面积的曲面积分之和.例如,设 Σ 可分成两片光滑曲面 Σ_1 及 Σ_2 (记作 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$)就规定

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS \quad (11.16)$$

对面积的曲面积分有以下的性质:

性质1 设 c_1, c_2 为常数,则

$$\iint_{\Sigma} [c_1 f(x, y, z) + c_2 g(x, y, z)] dS = c_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS + c_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS \quad (11.17)$$

性质2 若曲面 Σ 可分成两片光滑曲面 Σ_1 及 Σ_2 ,则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS \quad (11.18)$$

性质3 设在曲面 Σ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$,则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

性质4 $\iint_{\Sigma} dS = A$, 其中 A 为曲面 Σ 的面积.

11.4.2 对面积的曲面积分的计算

定理 11.5 设曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} ,函数 $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数,被积函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续,则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy \quad (11.19)$$

证 由题意可知, $f(x, y, z)$ 为定义在曲面 Σ 上的连续函数. 曲面 Σ 的方程为 $z = z(x, y)$,它在 xOy 面上的投影为一块可求面积区域 D_{xy} ,将区域 D_{xy} 划分为若干可求面积的小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \dots, \Delta\sigma_n$,令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}\}$,在这一划分之下,相应的曲面 Σ 也被划分为若干可求面积的小块 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$,并把它们的面积仍记为 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$,那么,按定义就有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

这里,点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 为 ΔS_i 上的任意一点,也就是说 (ξ_i, η_i) 为 $\Delta\sigma_i$ 上的任意一点,而且 $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$.再按照曲面面积的表达式及中值定理可知

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= \iint_{\Delta\sigma_i} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + [z_x(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2 + [z_y(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2} \Delta\sigma_i \end{aligned}$$

这里,点 (ξ_i^*, η_i^*) 为 $\Delta\sigma_i$ 上的某一点. 于是

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sqrt{1 + [z_x(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2 + [z_y(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2} \Delta\sigma_i$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sqrt{1 + [z_x(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2 + [z_y(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2} \Delta \sigma_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{1 + [z_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [z_y(\xi_i, \eta_i)]^2} \Delta \sigma_i \\ &= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy\end{aligned}$$

该等号的详细证明过程可参考文献[6], 这里从略.

类似地, 如果积分曲面 Σ 的方程表示为 $y = y(z, x)$, D_{zx} 为 Σ 在 zOx 面上的投影区域, 则函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{zx}} f[x, y(z, x), z] \sqrt{1 + y_z^2(z, x) + y_x^2(z, x)} dz dx$$

如果积分曲面 Σ 的方程表示为 $x = x(y, z)$, D_{yz} 为 Σ 在 yOz 面上的投影区域, 则函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + x_y^2(y, z) + x_z^2(y, z)} dy dz$$

例 1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中, Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h (0 < h < a)$ 截出的顶部.

解 Σ 的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$$

因为

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{r dr}{a^2 - r^2} = 2\pi a \left[-\frac{1}{2} \ln(a^2 - r^2) \right]_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}\end{aligned}$$

例 2 计算 $\oint_{\Sigma} xyz dS$, 其中, Σ 是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.

解 整个边界曲面 Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 上的部分依次记为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 及 Σ_4 . 其中

$$\Sigma_4: z = 1 - x - y, dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

将 Σ_4 在 xOy 面的投影记为 D_{xy} , 于是

$$\begin{aligned}
\oint_{\Sigma} xyz dS &= \iint_{\Sigma_1} xyz dS + \iint_{\Sigma_2} xyz dS + \iint_{\Sigma_3} xyz dS + \iint_{\Sigma_4} xyz dS \\
&= 0 + 0 + 0 + \iint_{\Sigma_4} xyz dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} xy(1-x-y) dx dy \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) dy = \sqrt{3} \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{\sqrt{3}}{120}
\end{aligned}$$

习题 11.4

1. 计算 $\iint_{\Sigma} (2x + \frac{4}{3}y + z) dS$, 其中, Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限的部分.
2. 计算 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中, Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.
3. 计算 $\oint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中, Σ 为由上半圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 围成的立体的表面.
4. 计算 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
5. 计算 $\iint_{\Sigma} (xy + z)^2 dS$, 其中, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
6. 求面密度为 $\rho = 1 + x + y + z$ 的抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量.
7. 求位于第一卦限中的均匀球面壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的质心坐标.
8. 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS$, 其中, Σ 为上半球面: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

11.5 对坐标的曲面积分

11.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质

(1) 有向曲面

通常遇到的许多曲面都是双侧的, 这里假设曲面是光滑的. 例如, 由方程 $z = z(x, y)$ 表示的曲面分为上侧与下侧. 设 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为曲面上的法向量, 在曲面的上侧 $\cos \gamma > 0$, 在曲面的下侧 $\cos \gamma < 0$. 闭曲面可为分内侧和外侧.

类似地, 如果曲面的方程表示为 $y = y(z, x)$, 则曲面分为左侧和右侧, 在曲面的右侧 $\cos \beta > 0$, 在曲面的左侧 $\cos \beta < 0$. 如果曲面的方程表示为 $x = x(y, z)$, 则曲面分为前侧和后

侧,在曲面的前侧 $\cos \alpha > 0$,在曲面的后侧 $\cos \alpha < 0$.

设 Σ 是有向曲面.在 Σ 上取一小块曲面 ΔS ,把 ΔS 投影到 xOy 面上得一投影区域,这投影区域的面积记为 $(\Delta \sigma)_{xy}$.假定 ΔS 上各点处的法向量与 z 轴的夹角 γ 的余弦 $\cos \gamma$ 有相同的符号(即 $\cos \gamma$ 都是正的或都是负的).规定 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy} & \cos \gamma > 0 \\ -(\Delta \sigma)_{xy} & \cos \gamma < 0 \\ 0 & \cos \gamma \equiv 0 \end{cases}$$

其中, $\cos \gamma \equiv 0$,也就是 $(\Delta \sigma)_{xy} = 0$ 的情形.类似地,可定义 ΔS 在 yOz 面及在 zOx 面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$ 及 $(\Delta S)_{zx}$.

首先讨论下面的例子,然后引入对坐标的曲面积分的概念.

(2) 流向曲面一侧的流量

设稳定流动的不可压缩流体的速度场由

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

给出, Σ 是速度场中的一片有向曲面,函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 都在 Σ 上连续,求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量,即流量 Φ .

首先假设流体流过平面一侧面积为 A 的一个闭区域,且流体在这闭区域上各点处的流速为常向量 \mathbf{v} ,又设 \mathbf{n} 为该平面的单位法向量,那么,在单位时间内流过这闭区域的流体组成一个底面积为 A ,斜高为 $|\mathbf{v}|$ 的斜柱体.

当 $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \theta < \frac{\pi}{2}$ 时,这斜柱体的体积为

$$A |\mathbf{v}| \cos \theta = A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

当 $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{2}$ 时,显然流体通过闭区域 A 的流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量 Φ 为零,而 $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$,

故 $\Phi = A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$;

当 $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) > \frac{\pi}{2}$ 时, $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$,这时仍把 $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 称为流体通过闭区域 A 流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量,它表示流体通过闭区域 A 实际上流向 $-\mathbf{n}$ 所指一侧,且流向 $-\mathbf{n}$ 所指一侧的流量为 $-A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.因此,不论 (\mathbf{v}, \mathbf{n}) 为何值,流体通过闭区域 A 流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量均为 $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.

然后讨论一般情况,即 Σ 不是平面闭区域而是一片曲面,速度 \mathbf{v} 也不看成常向量.把曲面 Σ 分成 n 小块: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (ΔS_i 同时也表示第 i 小块曲面的面积).在 Σ 是光滑的和 \mathbf{v} 是连续的前提下,只要 ΔS_i 的直径很小,就可用 ΔS_i 上任一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的流速

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \mathbf{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \mathbf{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的流速.以该点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处曲面 Σ 的单位法向量

$$\mathbf{n}_i = \cos \alpha_i \mathbf{i} + \cos \beta_i \mathbf{j} + \cos \gamma_i \mathbf{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的单位法向量,从而得到通过 ΔS_i 流向指定侧的流量的近似值为

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

于是,通过 Σ 流向指定侧的流量

$$\begin{aligned}\Phi &\approx \sum_{i=1}^n v_i \cdot n_i \Delta S_i \\ &= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i\end{aligned}$$

由于

$$\cos \alpha_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}, \cos \beta_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}, \cos \gamma_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy}$$

因此,上式可写为

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}]$$

用 λ 表示 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ 的直径的最大值. 令 $\lambda \rightarrow 0$ 取上述和的极限, 就得到流量 Φ 的精确值. 这样的极限还会在其他问题中遇到. 抽去它们的具体意义, 就得出下列对坐标的曲面积分的概念.

定义 11.4 设 Σ 为光滑的有向曲面, 函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时也表示第 i 小块曲面的面积). 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$, (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

存在, 则称此极限为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分, 记作

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

即

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx}\end{aligned} \quad (11.20)$$

其中, $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 称为被积函数, Σ 称为积分曲面.

以上 3 个曲面积分也称第二类曲面积分.

在应用上出现较多对坐标的曲面积分的简记形式有

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy\end{aligned}$$

流向 Σ 指定侧的流量 Φ 可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \quad (11.21)$$

如果 Σ 是分片光滑的有向曲面, 规定函数在 Σ 上对坐标的曲面积分等于函数在各片光滑

曲面上对坐标的曲面积分之和.

(3) 对坐标的曲面积分的性质

对坐标的曲面积分具有与对坐标的曲线积分类似的一些性质. 为书写简洁, 记

$$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$$

性质 1 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iint_{\Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dxdy + \iint_{\Sigma_2} P dydz + Q dzdx + R dxdy \end{aligned} \quad (11.22)$$

性质 2 设 Σ 是有向曲面, $-\Sigma$ 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{-\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \quad (11.23)$$

11.5.2 对坐标的曲面积分的算法

将曲面积分化为二重积分: 设积分曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} , 函数 $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy \quad (11.24)$$

其中, 当 Σ 取上侧时, 积分前取“+”; 当 Σ 取下侧时, 积分前取“-”.

这是因为按对坐标的曲面积分的定义, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

当 Σ 取上侧时, $\cos \gamma > 0$, 所以 $(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$.

又因 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 Σ 上的一点, 故 $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$, 从而有

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^n R[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] (\Delta \sigma_i)_{xy}$$

令 $\lambda \rightarrow 0$ 取上式两端的极限, 就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy$$

同理, 当 Σ 取下侧时, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy$$

也可由

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \{-z_x, -z_y, 1\}, \cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \\ dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy \end{aligned}$$

于是

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy$$

类似地, 如果 Σ 由 $x = x(y, z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz \quad (11.25)$$

其中, 当 Σ 取前侧时, 积分前取“+”; 当 Σ 取后侧时, 积分前取“-”.

如果 Σ 由 $y = y(z, x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx \quad (11.26)$$

其中, 当 Σ 取右侧时, 积分前取“+”; 当 Σ 取左侧时, 积分前取“-”.

例 1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中, Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$.

解 把 Ω 的上下面分别记为 Σ_1 和 Σ_2 ; 前后面分别记为 Σ_3 和 Σ_4 ; 左右面分别记为 Σ_5 和 Σ_6 , 即

Σ_1 : $z = c (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ 的上侧;

Σ_2 : $z = 0 (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ 的下侧;

Σ_3 : $x = a (0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$ 的前侧;

Σ_4 : $x = 0 (0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$ 的后侧;

Σ_5 : $y = 0 (0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c)$ 的左侧;

Σ_6 : $y = b (0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c)$ 的右侧.

除 Σ_3, Σ_4 外, 其余 4 片曲面在 yOz 面上的投影为零, 因此

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma_3} x^2 dy dz + \iint_{\Sigma_4} x^2 dy dz = \iint_{D_{yz}} a^2 dy dz - \iint_{D_{yz}} 0 dy dz = a^2 bc$$

类似地, 可得

$$\iint_{\Sigma} y^2 dz dx = b^2 ac, \quad \iint_{\Sigma} z^2 dx dy = c^2 ab$$

于是, 所求曲面积为

$$a^2 bc + b^2 ac + c^2 ab = (a + b + c) abc$$

例 2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中, Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.

解 把有向曲面 Σ 分成以下两部分:

Σ_1 : $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的上侧;

Σ_2 : $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的下侧.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域都是

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{4-x^2-y^2}) dx dy \\
 &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{4-r^2} r dr \\
 &= \frac{64}{15}
 \end{aligned}$$

11.5.3 两类曲面积分之间的联系

设积分曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} , 函数 $z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续.

如果 Σ 取上侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)] dx dy$$

另外, 因上述有向曲面 Σ 的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z) \cos \gamma dS = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)] dx dy$$

由此可知, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z) \cos \gamma dS$$

如果 Σ 取下侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)] dx dy$$

但这时 $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, 因此仍有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z) \cos \gamma dS$$

类似地, 可推得

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z) \cos \alpha dS$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z) \cos \beta dS$$

综合起来,有

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (11.27)$$

其中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可写成向量的形式

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ 或 } \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} A_n dS$$

其中, $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量, $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy)$ 称为有向曲面元, A_n 为向量 \mathbf{A} 在向量 \mathbf{n} 上的投影.

例 3 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy$, 其中, Σ 是曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间部分的下侧.

解 此题若采用投影法, 较为烦琐. 利用两类曲面积分之间的关系比较简便.

因为已知曲面上向下的法向量为 $(x, y, -1)$, 所以

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy$$

其中

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, dS = \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy &= \iint_{\Sigma} [(z^2 + x) \cos \alpha - z \cos \gamma] dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right] \cdot x - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \cdot (-1) \right\} dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{x}{4}(x^2 + y^2)^2 dxdy + \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left[x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}r^2 \right) r dr = 8\pi \end{aligned}$$

习题 11.5

1. 计算 $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dxdy$, 其中, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 的下半部分的下侧.
2. 计算 $\iint_{\Sigma} z dxdy + x dydz + y dzdx$, 其中, Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限部分的前侧.
3. 计算 $\oint_{\Sigma} xz dxdy + xy dydz + yz dzdx$, 其中, Σ 是三坐标面与平面 $x + y + z = 1$ 所围成的空间

区域的整个边界曲面的外侧.

4. 计算 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中, Σ 为半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

5. 将对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx$ 化成对面积的曲面积分, 其中:

(1) Σ 是平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限部分的上侧;

(2) Σ 是抛物面 $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方部分的上侧.

6. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (2x + z) dy dz + z dx dy$, 其中, Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的封闭曲面的内侧.

11.6 高斯公式 通量与散度

11.6.1 高斯公式

高斯公式也称散量定理. 这一定理是由俄国数学家奥斯特洛格拉德斯基(1801—1862)首先登文发表的, 但高斯更早发明了此定理, 只是没有及时发表. 有些书上也称此定理为奥氏定理.

定理 11.6 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (11.28)$$

也可写为

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

其中, Σ 取外侧.

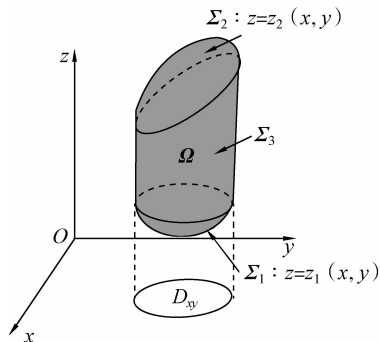


图 11.14

证 首先考虑 Ω 是如图 11.14 所示的情形, 上边界曲面为 $\Sigma_2: z = z_2(x, y)$, 下边界曲面为 $\Sigma_1: z = z_1(x, y)$, 侧面为柱面 Σ_3 . Σ_1 取下侧, Σ_2 取上侧, Σ_3 取外侧.

根据三重积分的计算法, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} \left\{ R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)] \right\} dx dy \end{aligned}$$

另外, 有

$$\iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_1(x, y)] dx dy$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_2(x, y)] dx dy$$

$$\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) dx dy = 0$$

以上 3 式相加, 得

$$\oiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} \{ R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)] \} dx dy$$

所以

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \oiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

类似地, 有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \oiint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \oiint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx$$

把以上 3 式两端分别相加, 即得

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (11.29)$$

对一般的区域 Ω , 可作一些辅助曲面将 Ω 分成若干个如图 11.14 所示的小区域, 则在每个小区域上式 (11.29) 成立. 然后将各小区域上的等式相加就可推出整个 Ω 上, 式 (11.28) 是成立的.

例 1 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z) x dy dz$, 其中, Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $z = 0, z = 5$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解 这里

$$P = (y - z)x, Q = 0, R = x - y$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y - z, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

由高斯公式, 有

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z) x dy dz &= \iiint_{\Omega} (y - z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (\rho \sin \theta - z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^5 (\rho \sin \theta - z) dz \\ &= -50\pi \end{aligned}$$

例 2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, 其中, Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h (h>0)$ 之间部分的下侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

解 设 Σ_1 为 $z=h (x^2 + y^2 \leq h^2)$ 的上侧, 则 Σ 与 Σ_1 一起构成一个闭曲面. 记它们围成的空间闭区域为 Ω , 由高斯公式得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h (x+y+z) dz \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (h^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \pi h^4 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS &= \iint_{\Sigma_1} z^2 dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} h^2 dx dy \\ &= \pi h^4 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS - \iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ &= \frac{1}{2} \pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4 \end{aligned}$$

例 3 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy$, 其中, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解 作辅助曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z=0 \end{cases}$ 取下侧, 记 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy - \\ &\quad \iint_{\Sigma_1} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dv + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} ay^2 dx dy \\
&= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr + a \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \\
&= \frac{6}{5} \pi a^5 + \frac{1}{4} \pi a^5 = \frac{29}{20} \pi a^5
\end{aligned}$$

例 4 设函数 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz$$

其中, Σ 是闭区域 Ω 的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数, 符号

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算子. 这个公式称为格林第一公式.

证 因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma$$

其中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的外法线向量的方向余弦. 于是, 曲面积分

$$\begin{aligned}
\oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \oint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\
&= \oint_{\Sigma} \left[\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS
\end{aligned}$$

利用高斯公式, 即得

$$\begin{aligned}
\oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz
\end{aligned}$$

将上式右端第二个积分移至左端, 便得所要证明的等式.

* 11.6.2 通量与散度

高斯公式是矢量分析的重要定理之一.

将高斯公式

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

改写为

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oint_{\Sigma} v_n dS$$

其中, $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$, $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量.

公式的右端可解释为单位时间内离开闭区域 Ω 的流体的总质量, 左端可解释为分布在 Ω

内的流体的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.

设 Ω 的体积为 V , 由高斯公式得

$$\frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} v_n dS$$

其左端表示 Ω 内流体的源头在单位时间单位体积内所产生的流体质量的平均值.

由积分中值定理得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} v_n dS$$

令 Ω 缩向一点 $M(x, y, z)$, 得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} v_n dS$$

上式左端称为 v 在点 M 的散度, 记为 $\operatorname{div} \mathbf{v}$, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

一般地, 设某向量场由

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

给出, 其中 P, Q, R 具有一阶连续偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面, \mathbf{n} 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量, 则 $\oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ 称为向量场 \mathbf{A} 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量(或流量), 而

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 称为向量场 \mathbf{A} 的散度, 记作 $\operatorname{div} \mathbf{A}$.

高斯公式也可写为

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ 或 } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} A_n dS$$

其中, Σ 是空间闭区域 Ω 的边界曲面, 而

$$A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

是向量 \mathbf{A} 在曲面 Σ 的外侧法向量上的投影.

习题 11.6

1. 计算 $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中, Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$

所围成的立体的表面的外侧.

2. 计算 $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 外侧.

3. 计算 $\oiint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$, 其中, Σ 为介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$

的整个表面的外侧.

4. 计算 $\oint_{\Sigma} 4xyz dydz - y^2 dzdx + yz dx dy$, 其中, Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的表面的外侧.

5. 求下列向量 \mathbf{A} 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量:

(1) $\mathbf{A} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, 其中, Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2 (0 \leq z \leq h)$ 的整个表面, 流向外侧;

(2) $\mathbf{A} = (2x-z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$, 其中, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的整个表面, 流向外侧.

6. 计算 $\oint_{\Sigma} (x^2 - yz) dydz + (y^2 - zx) dzdx + (z^2 - xy) dx dy$, 其中, Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成的立方体的表面的外侧.

7. 计算 $\iint_{\Sigma} 4xz dydz - y^2 dzdx + 2yz dx dy$, 其中, Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 外侧的上半部分.

8. 计算 $\oint_{\Sigma} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dydz + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dzdx + z dx dy$, 其中, $f(u)$ 具有一阶连续的导数, Σ 为柱面 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ 及平面 $z=0, z=1 (a > 0)$ 所围成立体的表面外侧.

9. 计算 $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$, 其中, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧.

10. 计算 $\iint_{\Sigma} yz dydz + (x^2 + z^2) dzdx + xy dx dy$, 其中, Σ 为曲面 $4-y = z^2 + x^2$ 在平面 xOz 右侧部分的外侧.

11.7 斯托克斯公式 环流量与旋度

11.7.1 斯托克斯公式

斯托克斯公式是格林公式的一种推广. 它把格林公式中的平面区域推广到空间曲面, 格林公式中的区域的边界曲线推广到空间曲线. 也就是说, 斯托克斯公式是联系空间曲面上的第二类曲面积分与该曲面边界曲线上的第二类曲线积分的关系式.

定理 11.7 (斯托克斯公式) 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则 (图 11.15), 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲面 Σ (连同边界) 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \quad (11.30)$$

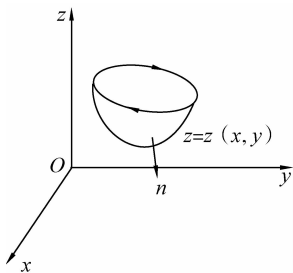


图 11.15

记忆方式为

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

或

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

其中, $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲面 Σ 的单位法向量.

证明过程可扫描本章二维码.

例 1 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$, 其中, Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被 3 个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.

解 设 Σ 为闭曲线 Γ 所围成的三角形平面, Σ 在 yOz 面, zOx 面和 xOy 面上的投影区域分别为 D_{yz} , D_{zx} 和 D_{xy} . 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy = \iint_{D_{yz}} dydz + \iint_{D_{zx}} dzdx + \iint_{D_{xy}} dxdy = 3 \iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

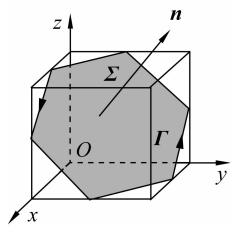


图 11.16

例 2 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I = \oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$$

其中, Γ 是用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 截立方体: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面所得的截痕, 若从 x 轴的正向看, 取逆时针方向如图 11.16 所示.

解 取 Σ 为平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

即

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS \\
 &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Sigma} dS = -2\sqrt{3} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} dx dy = -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

* 11.7.2 环流量与旋度

向量场 $\mathbf{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 所确定的向量场

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

称为向量场 \mathbf{A} 的旋度, 记为 $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ (或 $\mathbf{curl} \mathbf{A}$), 即

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

旋度的记忆法为

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

斯托克斯公式的另一形式为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds, \text{ 或 } \iint_{\Sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{A})_n dS = \oint_{\Gamma} A_{\tau} ds$$

其中, \mathbf{n} 是曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量, $\boldsymbol{\tau}$ 是 Σ 的正向边界曲线 Γ 上点 (x, y, z) 处的单位切向量.

沿有向闭曲线 Γ 的曲线积分

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} A_{\tau} ds$$

称为向量场 \mathbf{A} 沿有向闭曲线 Γ 的环流量.

上述斯托克斯公式可叙述为: 向量场 \mathbf{A} 沿有向闭曲线 Γ 的环流量等于向量场 \mathbf{A} 的旋度场通过 Γ 所张成的曲面 Σ 的通量.

习题 11.7

1. 计算 $I = \oint_L y^2 dx + xy dy + xz dz$, 其中, L 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与平面 $y = z$ 的交线, 沿逆时针方向.

2. 计算 $I = \oint_L (y - z + x) dx + (z - x + y) dy + (x - y + z) dz$, 其中, L 为椭圆: $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, 沿顺时针方向.

3. 计算 $I = \oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, 其中, L 为椭圆: $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$, 从 x 轴看去的逆时针闭曲线.

4. 设 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 计算:

(1) $\text{grad } u$;

(2) $\text{div}(\text{grad } u)$;

(3) $\text{rot}(\text{grad } u)$.

5. 求向量场 $\mathbf{F} = xyz(\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ 在点 $(1, 3, 2)$ 处的旋度.

6. 求下列向量场的旋度:

(1) $\mathbf{F} = (y^2 + x^2, z^2 + y^2, x^2 + z^2)$;

(2) $\mathbf{F} = (yz, zx, xy)$.

7. 设对空间区域 $x > 0$ 内任意光滑有向闭曲面 S 都有 $\oint_S xyf(x) dydz - xyf(x) dzdx - e^{2x} z dx dy = 0$. 其中, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有一阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 求 $f(x)$.

总习题 11

1. 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中, $f(x)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于().

A. $\frac{e^{-x} - e^x}{2}$

B. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

C. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$

D. $1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的上半部分上侧, 则下述积分不为零的是().

A. $\iint_{\Sigma} x^2 dydz$

B. $\iint_{\Sigma} y^2 dydz$

C. $\iint_{\Sigma} x dydz$

D. $\iint_{\Sigma} y dydz$

3. 设 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则 $\oint_{\Sigma} z^2 dS = ()$.

A. $\frac{4}{3}\pi R^4$

B. πR^4

C. $2\pi R^2$

D. $\frac{1}{2}\pi R^4$

4. 计算 $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 沿不通过坐标原点的积分路径.

5. 计算 $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} f(x) dx + g(y) dy$, 其中, $f(x), g(y)$ 为连续函数.

6. 计算 $\int_{(1, 2\pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$, 沿不与 y 轴相交的积分路径.

7. 设 $f(t)$ 为连续函数, L 为分段光滑的闭曲线, 证明:

$$\oint_L f(xy)(ydx + xdy) = 0$$

8. 估计积分

$$I = \oint_{x^2+y^2=1} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

之值的范围.

9. 求曲线积分

$$I = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$$

其中, L 为圆周: $x^2 + y^2 = a^2$, 取顺时针方向.

10. 设有向量函数

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

证明: $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

11. 求函数 $u = u(x, y)$, 使得 du 分别等于:

$$(1) (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy;$$

$$(2) e^x [e^y(x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y(x - y) + 1] dy.$$

12. 求 $I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + 2x - z - 4) ds$, 其中, $\Gamma: z = \sqrt{x^2 + 5y^2}, z = 1 + 2y$.

13. 求 $\iint_{\Sigma} |xyz| dS$, 其中, Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 介于 $z = 0$ 和 $z = 1$ 之间的部分.

14. 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 求 $\iint_{\Sigma} xy dy dz + x dz dx + x^2 dx dy$.

15. 设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy$$

16. 计算 $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$, 其中, Σ 是

平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧.



线面积分
的对称性



斯托克斯
公式的证明



部分习题
答案