Khai triển lũy thừa $(1+x)^n$ thành đa thức

Nguyễn Tấn Nhựt

Ngày 30 tháng 7 năm 2024

1 Dẫn nhập

Khai triển biểu thức là biến đổi biểu thức từ dạng này sang dạng khác, thường là từ dạng phức tạp sang dạng đơn giản, hoặc từ một dạng trừu tượng sang dạng chứa các thành phần cụ thể. Mục tiêu của việc này là làm cho biểu thức trở nên dễ hiểu hơn và dễ thao tác hơn trong các phép toán. Vấn đề đang xét là khai triển biểu thức $(1+x)^n$ thành đa thức. Ví dụ, $(1+x)^2$ được khai triển thành $1+2x+x^2$.

Biểu thức $(1+x)^2$ là một trường hợp riêng của biểu thức $(x+y)^2$ khi $y=1$, nhưng khi biết dạng khai triển của cái trước vẫn có thể suy ra dạng khai triển của cái sau. Để thấy điều này, với $x \neq 0$, hãy quan sát

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\\ &= x^2\left[1+2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\\ &= x^2+2xy+y^2.\end{aligned}$$

Tương tự như vậy, việc nghiên cứu dạng khai triển của $(1+x)^n$ không làm mất tính tổng quát của bài toán, vì cũng có

$$(x+y)^n = x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n.$$

Để ngắn gọn và đạt hiệu quả truyền đạt cao hơn trong khi lập luận, gọi s_n là dạng khai triển của $(1+x)^n$. Ví dụ, s_2 là $1+2x+x^2$. Khi nói đến s_2, hãy nghĩ đến $1+2x+x^2$, đừng nghĩ đến $(1+x)^2$ hay các dạng trung gian. Để hoàn thiện bài toán, chúng ta cũng cần xác định hai trường hợp đặc biệt, $(1+x)^0=1$ theo qui ước và $(1+x)^1=1+x$ là tầm thường. Kể từ đây, n được hiểu là một số nguyên không âm, $s_0=1$ và $s_1=1+x$.

Vì biểu thức $1+x$ hay $x+y$ có dạng nhị thức, chúng ta gọi việc khai triển biểu thức $(1+x)^n$ hay $(x+y)^n$ là *khai triển nhị thức*. Mục tiêu của chúng ta là xác định s_n và kết quả này được gọi là *định lí nhị thức*.

2 Tiếp cận trực tiếp

Cách trực tiếp nghiên cứu dáng điệu s_n là nhân phân phối. Tôi sẽ bắt đầu với một số trường hợp đơn giản như

$$\begin{aligned}(1+x)^2 &= (1+x)(1+x)\\ &= (1+x)1+(1+x)x\\ &= 1\cdot 1+x\cdot 1+1\cdot x+x\cdot x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + x + x + x^2 \\
&= 1 + 2x + x^2, \\
(1+x)^3 &= (1+x)^2(1+x) \\
&= (1 \cdot 1 + x \cdot 1 + 1 \cdot x + x \cdot x)(1+x) \\
&= (1 \cdot 1 + x \cdot 1 + 1 \cdot x + x \cdot x)1 + (1 \cdot 1 + x \cdot 1 + 1 \cdot x + x \cdot x)x \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot 1 + x \cdot x \cdot 1 \\
&\quad + 1 \cdot 1 \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot x \\
&= 1 + x + x + x^2 + x + x^2 + x^2 + x^3 \\
&= 1 + 3x + 3x^2 + x^3.
\end{aligned}
$$

Hãy quan sát và ghi nhận những điều sau đây.

- Nhân 2 nhị thức với nhau, tổng thu được có 4 hạng tử, mỗi hạng tử có 2 nhân tử. Các hạng tử được thu gọn sẽ có một trong các dạng $1, x, x^2$. Tổng được thu gọn sẽ còn lại 3 hạng tử, $1 + 2x + x^2$, đây chính là s_2.
- Nhân 3 nhị thức với nhau, tổng thu được có 8 hạng tử, mỗi hạng tử có 3 nhân tử, mỗi hạng tử có 3 nhân tử. Các hạng tử được thu gọn sẽ có một trong các dạng $1, x, x^2, x^3$. Tổng được thu gọn sẽ còn lại 4 hạng tử, $1 + 3x + 3x^2 + x^3$, đây chính là s_3.

Trường hợp tổng quát, tích $(1+x)(1+x)\cdots(1+x)$. Việc đó được thực hiện bằng cách, đầu tiên, từ mỗi nhị thức, lấy ra một hạng tử, hoặc là 1 hoặc là x, lập chúng thành một tích, mà trong tích này hạng tử lấy ra từ nhị thức nào sẽ đứng đúng vị trí nhị thức đó như trong tích các nhị thức. Sau đó, lấy tổng tất cả các tích này, nó chính là tích của n nhị thức ban đầu. Dưới đây là công thức hình thức biểu diễn tổng này,

$$
(1+x)_1(1+x)_2\cdots(1+x)_n = \sum_{\substack{b_1 \text{ hoặc là 1 hoặc là } x \text{ từ } (1+x)_1 \\ b_2 \text{ hoặc là 1 hoặc là } x \text{ từ } (1+x)_2 \\ \vdots \\ b_n \text{ hoặc là 1 hoặc là } x \text{ từ } (1+x)_n}} b_1 b_2 \cdots b_n.
$$

Điều trở ngại là tìm phương thức liệt kê hiệu quả, tức không bỏ sót và gây nhầm lẫn, tất cả các hạng tử thu được từ việc nhân n nhị thức đó với nhau.

Nhân n nhị thức với nhau, tổng thu được có 2^n hạng tử, mỗi hạng tử có n nhân tử. Mỗi hạng tử có n nhân tử là hiển nhiên, nhưng vì sao lại có 2^n hạng tử? Hãy hình dung mỗi hạng tử là một dãy n ô vuông, mỗi ô vuông đại diện cho một nhân tử của hạng tử. Có thể đưa vào mỗi ô vuông hoặc 1 hoặc x được lấy ra từ nhị thức $1 + x$. Bây giờ, liệu bạn có thể đếm được có bao nhiêu hạng tử hay không? Số hạng tử chính là số cách tạo nên một hạng tử. Để tạo nên một hạng tử, nhân tử thứ nhất của hạng tử có 2 cách chọn hoặc 1 hoặc x, nhân tử thứ 2 cũng vậy, vân vân, cho đến nhân tử thứ n cũng vậy. Từ đó, suy ra có $2 \cdot 2 \cdots 2$ hay 2^n cách thành lập một hạng tử.

../images/luoi_n_o_vuong/luoi_n_o_vuong.pdf

Hình 1: Minh họa cách thức hình thành một hạng tử.

Khi các hạng tử được viết dưới dạng lũy thừa, các dạng của chúng là $1, x, x^2, \ldots, x^j, \ldots, x^n$. Trong đó, hạng tử 1 là tích của n nhân tử giống nhau 1,

$$
1 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{\text{có } n \text{ nhân tử } 1},
$$

và số hạng x^n là tích của n nhân tử giống nhau x,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{có } n \text{ nhân tử x}}.$$

Hai số hạng này, 1 và x^n, mỗi số hạng xuất hiện một lần. Các số hạng còn lại, mỗi số hạng đều xuất hiện nhiều lần, quan trọng là phải biết số lần xuất hiện đó. Gọi $c(0)$ là số lần xuất hiện của x^0 hay 1, $c(1)$ là số lần xuất hiện x^1, $c(2)$ là số lần xuất hiện x^2, cho đến $c(n)$ là số lần xuất hiện x^n. Lưu ý, $c(0) = c(n) = 1$ đã trình bày. Như vậy, có thể tạm đưa ra công thức

$$s_n = 1 + c(1)x^1 + c(2)x^2 + \dots + x^n$$

hay

$$s_n = c(0)x^0 + c(1)x^1 + c(2)x^2 + \dots + c(n)x^n.$$

Hoặc cũng có thể viết theo dạng tổng xít-mờ là

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} c(j)x^j,$$

ở đây, $c(j)$ là số lần xuất hiện x^j, với j là một trong các số từ 0 đến n.

Nhiệm vụ bày ra là tìm $c(j)$, cần nhấn mạnh nó chính là số lần xuất hiện hạng tử x^j.

../images/hang_tu_cau_truc/hang_tu_cau_truc.pdf

Hình 2: Mô tả việc thực hiện các phép nhân để khai triển tích thành tổng các hạng tử.

Dưới đây là các bước liệt kê tất các hạng tử khi thực hiện phép nhân mà không sợ bỏ sót.

Bước 1 Hạng tử thứ nhất là

$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

Bước 2 Hạng tử thứ hai là

$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot x.$$

Đây là hạng tử thứ nhất mà nhân tử thứ n từ 1 đã được thay thế bởi x.

Bước 3 Hạng tử thứ ba và thứ tư là

$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots 1 \cdot x \cdot 1,$$
$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots 1 \cdot x \cdot x.$$

Hạng tử thứ ba do hạng tử thứ nhất tạo thành bằng cách thay nhân tử thứ $n - 1$ từ 1 bởi x.
Hạng tử thứ tư do hạng tử thứ hai tạo thành bằng cách thay nhân tử thứ $n - 1$ từ 1 bởi x.

Bước 4 Các hạng tử từ thứ năm đến thứ tám là

$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots x \cdot 1 \cdot 1,$$
$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots x \cdot 1 \cdot x,$$
$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots x \cdot x \cdot 1,$$
$$1 \cdot 1 \cdots 1 \cdots x \cdot x \cdot x.$$

Bước n Có thêm 2^{n-2} hạng tử, có tổng cộng 2^{n-1} hạng tử.

$$\begin{gathered}
1 \cdot x \cdots 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot 1, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot x, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots 1 \cdot x \cdot 1, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots 1 \cdot x \cdot x, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots x \cdot 1 \cdot 1, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots x \cdot 1 \cdot x, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots x \cdot x \cdot 1, \\
1 \cdot x \cdots 1 \cdots x \cdot x \cdot x, \\
\dots \\
1 \cdot x \cdots x \cdots x \cdot x \cdot x.
\end{gathered}$$

Bước $n+1$ Có thêm 2^{n-1} hạng tử, có tổng cộng 2^{n} hạng tử.

Hãy viết một chương trình máy tính bằng một ngôn ngữ lập trình phù hợp, khi nhập vào n, chương trình liệt kê cho ta tất cả các hạng tử như trên.