

# Khám phá không gian đa chiều: Xu hướng 90°

Nguyễn Tấn Nhựt

Cho  $u$  và  $u_j$  là các véc-tơ đơn vị, hỏi kích thước trung bình của các tích vô hướng  $|u \cdot u_j|$  là gì. Theo giải tích, trung bình là  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(\theta)| d\theta = \frac{2}{\pi}$ .

Bên trên là bài toán 28 ở trang 17 trong sách Introduction to Linear Algebra (ấn bản thứ 6) của Gilbert Strang xuất bản năm 2023. Nguyên văn: Using  $v = \text{randn}(3, 1)$  in MATLAB, create a random unit vector  $u = v/\|v\|$ . Using  $V = \text{randn}(3, 30)$  create 30 more random unit vectors  $U_j$ . What is the average size of the dot products  $|u \cdot U_j|$ ? In calculus, the average is  $\int_0^\pi |\cos \theta| d\theta / \pi = 2/\pi$ .

Hiểu bài toán trên:

- Hàm  $\text{randn}(3,1)$  sinh ra một véc-tơ 3 thành phần theo phân phối chuẩn.
- Véc-tơ  $u = v/\|v\|$  là véc-tơ đơn vị, nó được xem là có phân phối đều trên hình cầu đơn vị.
- Các véc-tơ đơn vị được hiểu là lấy ngẫu nhiên trên hình cầu đơn vị.
- Trung bình của  $|u \cdot u_j|$  hội tụ về  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(\theta)| d\theta = \frac{2}{\pi}$ .
- Trung bình lí thuyết của  $|\cos(\theta)|$  khi góc  $\theta$  phân bố đều từ 0 đến  $\pi$  là  $\frac{2}{\pi}$ .

Khi giải bài toán này tôi buộc phải nghĩ về:

- Thay vì các véc-tơ 3D, có thể thử với 2D, 4D, 5D, và vân vân.
- Số chiều cao thì tốt hay thấp thì tốt?
- Trong không gian nhiều chiều các véc-tơ ngẫu nhiên có xu hướng gần như vuông góc với nhau do độ phân tán tăng lên. Điều này xuất phát từ sự tăng trưởng nhanh chóng của không gian các véc-tơ có thể chiếm. Điều này làm giảm giá trị trung bình của  $|u \cdot U_j|$  khi số chiều tăng, khác với kết quả lí thuyết  $\frac{2}{\pi}$ .
- Góc  $\theta$  trong trường hợp 2D hay 3D là quen thuộc với chúng ta. Với số chiều cao hơn, tuy chúng ta không thể hình dung ra được, nhưng qua bài toán này chúng ta có thể hiểu thêm ý nghĩa của nó trong không gian đa chiều nói chung.

---

Hai véc-tơ ngẫu nhiên được lấy ra từ không gian có xu hướng vuông góc nhau khi số chiều tăng lên. Đây là một hiện tượng thú vị có liên quan đến lí thuyết xác suất và hình học trong không gian đa chiều.

Khi làm việc trong các không gian có số chiều lớn, một hiện tượng đáng chú ý xuất hiện: hai véc-tơ được chọn ngẫu nhiên có xu hướng vuông góc nhau khi số chiều tăng.

Đây không chỉ là hệ quả của cách chúng ta định nghĩa vuông góc trong không gian nhiều chiều, mà còn phản ánh bản chất hình học của không gian khi số chiều tăng lên.

Trong không gian 2 hay 3 chiều chúng ta dễ dàng hình dung hai véc-tơ có thể tạo ra một góc bất kì. Tuy nhiên khi số chiều của không gian tăng lên, góc của 2 véc-tơ ngẫu nhiên có xu hướng tiến gần đến  $90^\circ$ . Điều này có nghĩa là 2 véc-tơ gần như vuông góc nhau khi số chiều rất lớn.

Khi số chiều tăng lên, xác suất tích vô hướng của 2 véc-tơ ngẫu nhiên tiến dần về 0, dẫn đến  $\cos(\theta)$  gần bằng 0, tức là góc  $\theta$  gần bằng  $90^\circ$ . Hiện tượng này xảy ra do sự phân bố của các véc-tơ trong không gian cao chiều, nơi mà phần lớn không gian nằm gần các mặt phẳng vuông góc.

”Hiệu ứng tập chung khối lượng” trong không gian  $n$  chiều.

$n = 4$

[0.12753114 0.80740502 0.52795282 0.27456068 0.54539886 0.88011085 0.45093717 0.47791611  
0.35881778 0.2611181]

$n = 5$

[0.10332762 0.28315885 0.52423106 0.77848733 0.29068516 0.07151115 0.46362643 0.20022192  
0.17443497 0.34728237]