Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

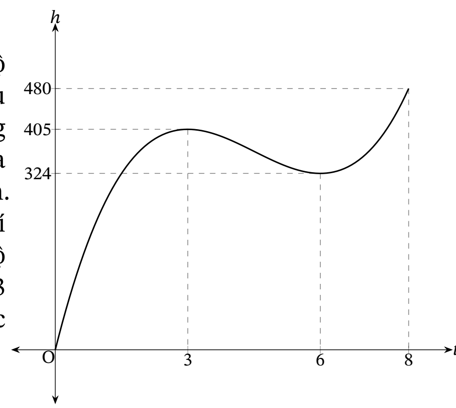
Chương 1 | Chân Trời Sáng Tạo | Toán 12

ZO Math

12-04-2025

Hoạt động khởi động

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao? Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?



Luận giải: Bóng tối

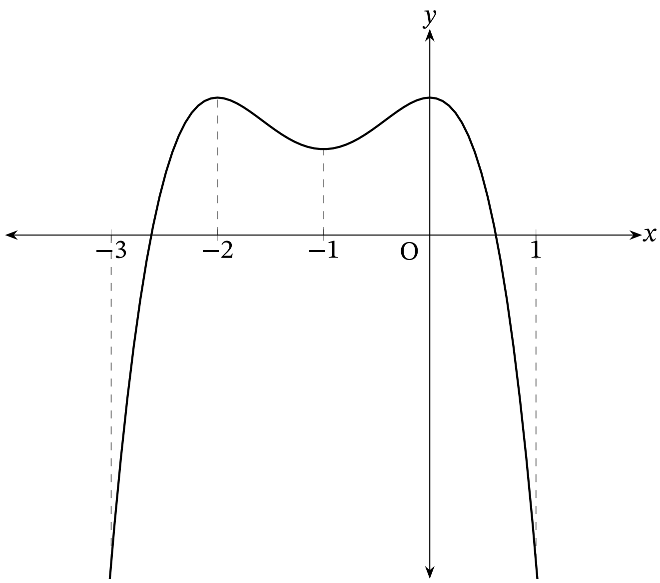
Có những đồ thị không chỉ uốn lượn theo trục tọa độ, mà còn lặng lẽ vẽ nên những chuyển động khiến lòng người nao nao. Không cần lời giải, không cần định lý - chỉ cần ngắm nhìn đường cong ấy thôi cũng đủ thấy tim mình bị kéo theo từng nhịp lên xuống. Khởi đầu nhẹ như một lời thì thầm, rồi bất chợt dâng trào ở phút thứ 3, rơi xuống ở phút thứ 6 như một khoảng lặng giữa bản nhạc, trước khi bật cao lần nữa, cao đến mức tưởng chừng không thể với tới.

Phút thứ 3 và phút thứ 6 không chỉ là những con số - đó là khoảnh khắc. Những điểm dừng để tự hỏi: điều gì đang xảy ra bên trong hàm số ấy? Có phải ở đó, khinh khí cầu đã do dự? Hay chính là lúc mọi thứ chuyển mình, lặng lẽ nhưng quyết liệt?

Muốn nghe được lời thì thầm của đường cong ấy, cần có thứ ngôn ngữ tên gọi là *tính đơn điệu*, là *cực trị* - những khái niệm tưởng khô khan nhưng lại chính là chìa khóa mở cửa cảm xúc của một hàm số. Tạm giữ lấy chút bối rối ấy, để đến phần Vận dụng 1, mọi bí mật sẽ tự nhiên hé lộ - như một lời tỏ tình muộn màng mà thật lòng.

Thực hành 1

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 3.



Hình 1: Hình 3

Luận giải: Tìm đèn

Quan sát đồ thị cho ở Hình 3, ta **phỏng đoán** rằng hàm số $y = f(x)$ *đơn điệu* trên các khoảng $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, và $(0; 1)$. Cụ thể:

- Hàm số **có vẻ** *đồng biến (tăng)* trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-1; 0)$, vì với $x_1 < x_2$, đồ thị cho thấy $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số **có vẻ** *nghịch biến (giảm)* trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, vì đồ thị cho thấy $f(x_1) > f(x_2)$ với $x_1 < x_2$.

Lưu ý rằng đây chỉ là những nhận xét dựa trên trực quan từ đồ thị, không phải kết luận được kiểm chứng từ công thức hàm số.

Tóm lại, các khoảng đơn điệu trên chỉ mang tính phỏng đoán. Để khẳng định chính xác tính đồng biến hay nghịch biến theo định nghĩa toán học, cần biết công thức của hàm số và kiểm tra bằng định nghĩa hoặc đạo hàm nếu có.

Kết quả

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-1; 0)$, vì đồ thị cho thấy $f(x_1) < f(x_2)$ với $x_1 < x_2$ trên từng khoảng.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, vì đồ thị cho thấy $f(x_1) > f(x_2)$ với $x_1 < x_2$ trên từng khoảng.

Hoạt động khám phá 1

Ghi chú sư phạm

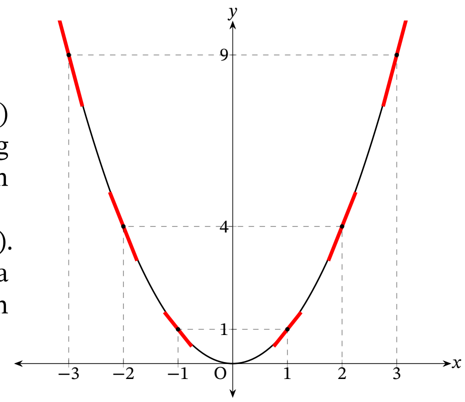
Trong bài toán này, học sinh được yêu cầu xác định các khoảng đồng biến - nghịch biến từ đồ thị mà không có công thức hàm số. Việc sử

Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a. Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (Hình 4), hãy chỉ ra các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.

b. Tính đạo hàm $f'(x)$ và xét dấu $f'(x)$.

c. Từ đó, nhận xét về mối liên hệ giữa các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số với dấu của $f'(x)$.



(a) Hình 4

Luận giải

a. Quan sát đồ thị ở Hình 4 cho thấy:

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, vì với mọi $x_1 < x_2$ trong khoảng này, đều có $f(x_1) > f(x_2)$. Khẳng định này có thể kiểm bằng công thức của hàm số. Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ và $x_1 < x_2$, theo quy tắc nhân với số âm, xét thấy
$$x_1^2 > x_1 \cdot x_2$$
và
$$x_1 \cdot x_2 > x_2^2.$$
Suy ra $x_1^2 > x_2^2$, tức là $f(x_1) > f(x_2)$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, vì với mọi $x_1 < x_2$ trong khoảng này, đều có $f(x_1) < f(x_2)$. Khẳng định này có thể kiểm lại bằng công thức của hàm số. Kiểm chứng tương tự bằng cách xét các công thức:
$$x_1^2 < x_1 \cdot x_2$$
và
$$x_1 \cdot x_2 < x_2^2.$$
Suy ra $x_1^2 < x_2^2$, tức là $f(x_1) < f(x_2)$.

b. Đạo hàm của $f(x) = x^2$ là $f'(x) = 2x$.

- Với $x = 0$, rõ ràng $f'(x) = 0$.
- Với mọi $x < 0$, khi nhân 2 với một số âm thì $f'(x) = 2x < 0$.
- Với mọi $x > 0$, khi nhân 2 với một số dương thì $f'(x) = 2x > 0$.

Có thể lập *bảng xét dấu* như dưới đây để trình bày một cách trực quan hơn về dấu của đạo hàm.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Hình 3: Bảng xét dấu $f'(x) = 2x$.

> Khi xét dấu của đạo hàm, việc đầu tiên là giải phương trình $f'(x) = 0$. Vì sao? Vì nghiệm của phương trình này chính là những điểm mà đạo hàm chuyển dấu - hay nói cách khác, là những điểm có thể xảy ra sự thay đổi về chiều biến thiên. Những điểm ấy thường gắn với cực trị hoặc là ranh giới của khoảng đơn điệu. Không tìm chúng, tức là đang dò đường trong sương mù mà chưa biết ngã rẽ.

c. Từ kết quả xét dấu của đạo hàm, có thể thấy $f'(x) < 0$ trên khoảng nghịch biến và $f'(x) > 0$ trên khoảng đồng biến.

Kết quả

a. Theo đồ thị Hình 4:
   - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
   - Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
b. Đạo hàm của $f(x) = x^2$ là $f'(x) = 2x$.
   - Với $x = 0$: $f'(x) = 0$.
   - Với $x < 0$: $f'(x) < 0$.
   - Với $x > 0$: $f'(x) > 0$.
c. Đạo hàm $f'(x)$ âm trên khoảng nghịch biến, dương trên khoảng đồng biến.

Thực hành 2

Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$;
b. $g(x) = \frac{1}{x}$.

a. Hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm của hàm số này là

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

Lập bảng biến thiên như dưới đây.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

b. Hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Đạo hàm của hàm số này là

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Vì $x^2 > 0$ với mọi $x \in D$, nên suy ra $f'(x) < 0$ với mọi $x \in D$.

Trong trường hợp này, đến đây đã có thể kết luận hàm số đã cho nghịch biến trên toàn tập xác định của nó. Tuy nhiên, vẫn có thể lập bảng biến thiên như dưới đây.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Luận giải: Tìm đèn

Kết quả

Thực hành 3

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vận dụng 1

Hãy trả lời câu hỏi trong Hoạt động khởi động bằng cách xét dấu đạo hàm của hàm số $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ với $0 \leq t \leq 8$.

Lời giải

Đạo hàm của $h(t)$ là $h'(t) = 18t^2 - 162t + 324$. Để xét dấu $h'(t)$ với $0 \leq t \leq 8$, trước tiên, cần giải phương trình $h'(t) = 0$ với $0 \leq t \leq 8$. Phương trình này có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện là $t = 3$ và $t = 6$. Bảng xét dấu đạo hàm:

t	0		3		6		8
$h'(t)$	|	+	0	−	0	+	|

Hình 4: Bảng xét dấu $h'(t)$.

- Khinh khí cầu *tăng* độ cao trong các khoảng $(0; 3)$ và $(6; 8)$.
- Khinh khí cầu *giảm* độ cao trong khoảng $(3; 6)$.
- Tại $t = 3$ phút, *đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm*. Điều này có nghĩa là độ cao tại thời điểm 3 phút là lớn nhất so với các thời điểm xung quanh, ít nhất là với tất cả $t \in (0; 6)\backslash\{3\}$.
- Tại $t = 6$ phút, *đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương*. Điều này có nghĩa là độ cao tại thời điểm 6 phút là nhỏ nhất so với các thời điểm xung quanh, ít nhất là với tất cả $t \in (3; 8)\backslash\{6\}$.

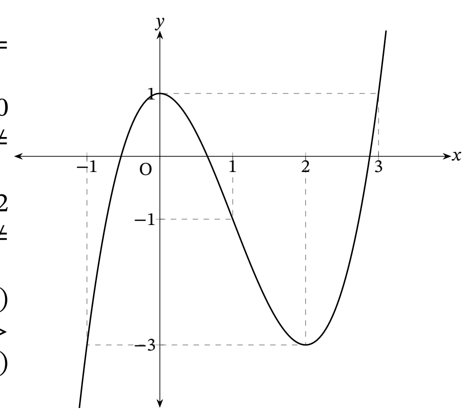
Hoạt động khám phá 2

Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trong Hình 5.

a. Tìm khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 0$ mà trên đó $f(x) < f(0)$ với mọi $x \neq 0$.

b. Tìm khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 2$ mà trên đó $f(x) > f(2)$ với mọi $x \neq 2$.

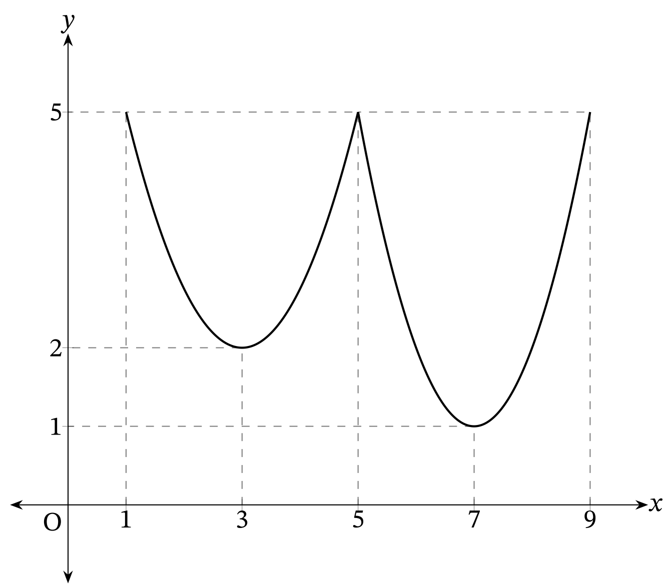
c. Tồn tại hay không khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 1$ mà trên đó $f(x) > f(1)$ với mọi $x \neq 1$ hoặc $f(x) < f(1)$ với mọi $x \neq 1$?



(a) Hình 5

Thực hành 4

Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 8.



Hình 6: Hình 8

Hoạt động khám phá 3

Thực hành 5

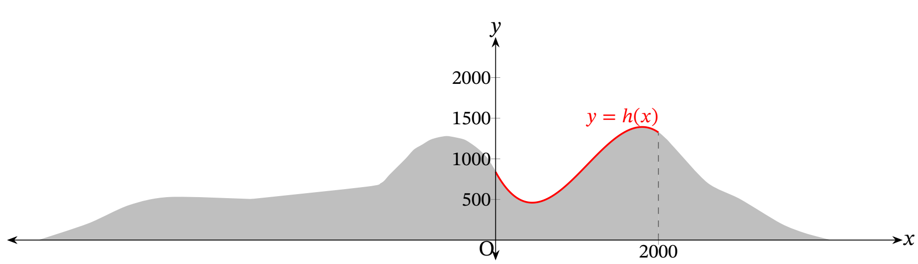
Tìm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$.

Vận dụng 2

Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \le x \le 2000.$$

Tìm toạ độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn [0; 2000].

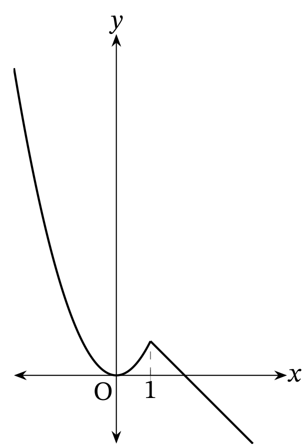


Hình 9: Hình 10 (*Theo:* Tập bản đồ bài tập và bài thực hành Địa lí 8, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011)

Đồ thị của hàm số dưới đây được cho như ở Hình 9:

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1, \\ 2 - x & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

a. Tìm điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số.
b. Tại $x = 1$, hàm số có đạo hàm không?
c. Thay mỗi dấu ? bằng kí hiệu (+, –) thích hợp để hoàn thành bảng biến thiên dưới đây. Nhận xét về dấu của y' khi x đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.



(a) Hình 9

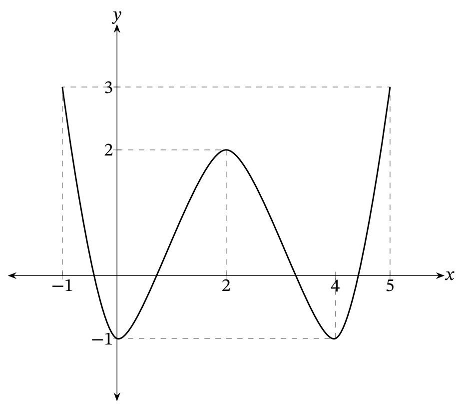
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		?	0	?	$\Vert$	?	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(a) Bảng biến thiên đồ thị Hình 9.

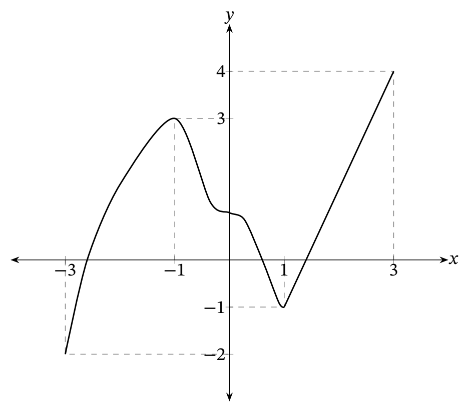
0.1 Bài tập

Bài tập 1

Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở Hình 11.



(a) Hình 11-a



(a) Hình 11-b

Bài tập 2

Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$

b. $y = \frac{x^2-2x-7}{x-4}$

Bài tập 3

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

b. $y = \frac{x^2-8x+10}{x-2}$

c. $y = \sqrt{-x^2 + 4}$

Lời giải

Bài tập 4

Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải

Bài tập 5

Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3$–$0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

(*Theo*: https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quadu- bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna)

a. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.
b. Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

Bài tập 7

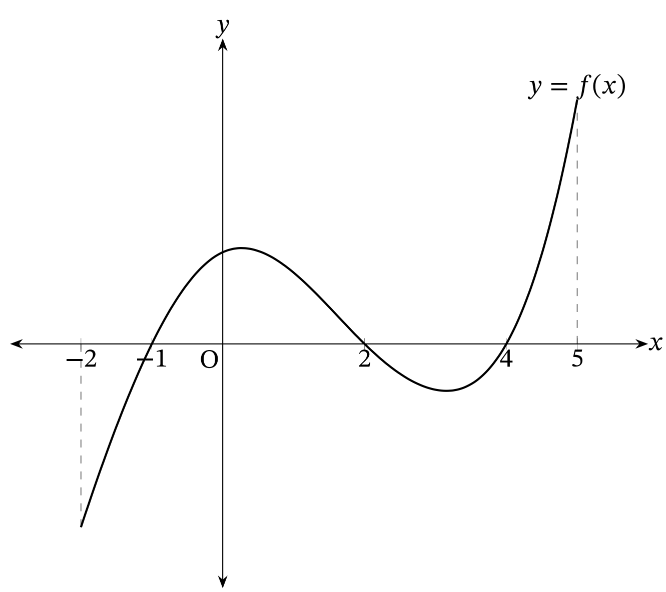
Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 – 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a. Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.
b. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

Bài tập 8

Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 12. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.



Hình 12: Hình 12

Luận giải