Feuille 2 : Programmation linéaire - Propriétés des solutions, dualité

Rappel sur les solutions de base. On considère un programme linéaire sous forme standard :

$$\max_{x\in\mathcal{C}} F(x) = c^\top x,\ \mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ et } x \geq 0\}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$ avec $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$. Le vecteur c est donné dans $\mathbb{R}^n$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La matrice A peut se décomposer, à une permutation près des colonnes (cf exercice 4), sous la forme :

$$A = (A_B \mid A_H)$$

où la matrice carrée A_B de taille $m \times m$ est *inversible*. Dans ce cas l'égalité $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalente à $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_H\mathbf{x}_H$ et la *solution de base* $\underline{\mathbf{x}}$ associée est obtenue avec le choix $\underline{\mathbf{x}}_H = 0$, et donc les composantes en base s'obtienne par $\underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$, soit :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} \\ \underline{\mathbf{x}}_H = 0 \end{pmatrix} .$$

Vérifiant par construction $A\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, cette solution de base est réalisable si en plus $\underline{\mathbf{x}} \geq 0$ et donc ($\underline{\mathbf{x}}_H$ étant nulle donc positive ou nulle) si $\underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.

Exercice 1. *Propriétés géométriques des solutions de base réalisables*

On note $\mathcal{D}_R$ l'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire (1) sous forme standard c-à-d l'ensemble des vecteurs vérifiant toutes les contraintes de (1) :

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}.$$

On dit qu'un point $\mathbf{x}$ de $\mathcal{D}_R$ est *sommet* (ou un *point extrême*) s'il n'existe pas de points $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ de $\mathcal{D}_R$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ avec $0 < \lambda < 1$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_R$ est convexe.
2. Montrer que toute solution de base réalisable est un sommet de $\mathcal{D}_R$ (raisonner par l'absurde).
3. (*Question subsidiaire*) Inversement, montrer que tout sommet de $\mathcal{D}_R$ est une solution de base réalisable.
4. On suppose que $\mathcal{D}_R$ est borné et que l'optimum de F existe. Montrer que l'optimum est atteint en un sommet de $\mathcal{D}_R$.
   On admettra le résultat suivant (Théorème de Minkowski) : *Si $\mathcal{D}_R$ est non-vide et borné, tout point de $\mathcal{D}_R$ est combinaison convexe des sommets.*

Exercice 2. *Application de la condition d'optimalité*

On considère le problème de maximiser $F(x_1, x_2) = 18x_1 + 23x_2$ pour $x_1, x_2 \geq 0$ soumis à la condition $2x_1 + 3x_2 \leq 3$. On notera x_3 la variable d'écart associée à la contrainte.

En utilisant la condition suffisante d'optimalité montrer *sans calculer aucune valeur de F*, que $(x_1, x_2, x_3) = (3/2, 0, 0)$ est la solution optimale (unique) de ce PL.

Exercice 3. *Introduction à la dualité en programmation linéaire*

Un restaurateur a constaté que sa clientèle aime les coquillages. Lorsqu'il en propose dans son restaurant, ses clients les consomment jusqu'à épuisement de sa livraison du jour. Sa carte comporte deux plateaux :

— un plateau "riche" à P_r euros qui comporte n_1^r oursins, n_2^r palourdes, n_3^r huîtres
— un plateau "simple" à P_s euros qui comporte n_1^s oursins, n_2^s palourdes, n_3^s huîtres

1. Un jour donné, son fournisseur lui a livré k_1 oursins, k_2 palourdes et k_3 huitres.
   Comment doit-il répartir les coquillages entre les deux sortes de plateaux pour réaliser un chiffre d'affaire maximal ? Modéliser ce problème sous forme de programmation linéaire et l'écrire matriciellement (il s'agit d'une forme canonique pure).
2. En début de soirée, une de ses amies vient le trouver. Elle a plus d'invités que prévu et manque de coquillages alors que les magasins sont fermés. Elle lui propose de lui racheter tous ses coquillages. Quel prix minimum peut-elle proposer pour chaque oursin, chaque palourde et chaque huître afin qu'il ne soit pas tenté d'en conserver une partie pour composer quelques plateaux ? Modéliser ce nouveau problème qui est aussi un PL et l'écrire sous forme matricielle.
3. Cet exercice montre qu'à chaque PL $(\mathcal{P})$:
   $$\max_{x\in\mathcal{C}_\mathcal{P}} f(x) = c^\top x,\ \mathcal{C}_\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \text{ et } x \ge 0\}$$
   (où A est une matrice $m \times n$), on peut lui faire correspondre un autre PL $(\mathcal{D})$:
   $$\min_{y\in\mathcal{C}_\mathcal{D}} g(y) = b^\top y,\ \mathcal{C}_\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \ge c \text{ et } y \ge 0\}$$
   appelé son dual, $(\mathcal{P})$ s'appelant alors le (problème) "primal". Rmq : dans le cas précédent, l'ensemble $\mathcal{C}_\mathcal{P}$ est plus petit puisque les variables doivent être entières, les résultats suivants restent cependant valables.
   (a) On suppose que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ possèdent chacun (au moins) une solution réalisable, c'est à dire que $\mathcal{C}_\mathcal{P} \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}_\mathcal{D} \neq \emptyset$. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathcal{C}_\mathcal{P}, \forall y \in \mathcal{C}_\mathcal{D},\ f(x) \le g(y)$$
   Aide : poser $\xi = A^\top y - c$ et $\mu = b - Ax$ (toutes deux positives !) et calculer $\mu^\top y + x^\top \xi$.
   (b) En déduire que s'il existe $x^* \in \mathcal{C}_\mathcal{P}$ et $y^* \in \mathcal{C}_\mathcal{D}$ telles que $f(x^*) = g(y^*)$ alors x^* est optimale pour $(\mathcal{P})$ et y^* est optimale pour $(\mathcal{D})$. Remarque : l'hypothèse $\mathcal{C}_\mathcal{P} \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}_\mathcal{D} \neq \emptyset$ suffit à montrer que chacun des deux PL possède une solution optimale et dans le cas où les variables sont continues, on a effectivement que $f(x^*) = g(y^*)$. Dans le cas du problème du restaurateur les variables étant restreintes à être entières, on aura bien $f(x^*) \le g(y^*)$ mais pas (en général) l'égalité.
   (c) (Question subsidiaire). Montrer que la dualité est involutive, c'est à dire que le dual de $(\mathcal{D})$ est $(\mathcal{P})$.
   (d) (Question subsidiaire). En passant par la forme canonique pure, montrer que le dual d'un PL sous forme standard :
   $$\max_{x\in\mathcal{C}_\mathcal{P}} f(x) = c^\top x,\ \mathcal{C}_\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ et } x \ge 0\}$$
   s'écrit :
   $$\min_{y\in\mathcal{C}_\mathcal{D}} g(y) = b^\top y,\ \mathcal{C}_\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \ge c\}$$

Exercice 4. *Action d'une matrice de permutation (à faire en travail personnel)*

Soit σ une permutation sur $I_n = \{1, 2, \dots n\}$. Un tel objet permet de représenter le changement d'ordre des composantes d'un n-uplet d'éléments quelconques $(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Une permutation est souvent représentée par un tableau à deux lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

signifiant que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4$, etc. On définit la matrice de permutation P associée à σ par : $P^j = e^{\sigma(j)}, j = 1, \dots, n$, où P^j désigne la j-ème colonne de P, et e^i le i-ème vecteur de la base canonique.

1. Montrer que $p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ et que $P^{-1} = P^\top$.
2. Soit A une matrice (n, m). Montrer que $B = PA$ est une matrice qui s'obtient en permutant les lignes de A suivant σ, i.e. la i-ème ligne de A devient la ligne $\sigma(i)$ de B : $A_i = B_{\sigma(i)}$.
3. Soit A une matrice (m, n). Montrer que $B = AP$ est une matrice qui s'obtient en permutant les colonnes de A suivant σ^{-1}, i.e. la i-ème colonne de A devient la colonne $\sigma^{-1}(i)$ de B : $A^i = B^{\sigma^{-1}(i)}$.
4. Soit $Ax = b$ les contraintes d'un P.L. en forme standard avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n$ et une base B (au sens de la P.L.). Souvent on réordonne les colonnes de A et les lignes de x pour écrire $Ax = b$ sous la forme :
$$(A_B|A_H)\begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix} = b \iff A_B x_B + A_H x_H = b$$
Montrer que cette écriture peut s'obtenir via $Ax = b \iff AP^{-1}Px = b$ où P est la matrice de permutation qui envoie les indices de B sur $[\![1, m]\!]$ et les indices de H sur $[\![m + 1, n]\!]$. On remarquera que les m premières composantes de $y = Px$ correspondent aux variables de base et les $n - m$ dernières aux variables hors-base et idem pour les colonnes de AP^{-1} qui prend donc la forme $(A_B|A_H)$.

Exercice 5. *Équivalence des sommets d'un PL sous forme canonique pure et sous forme standard (à faire en travail personnel)*

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et les ensembles :
$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \text{ et } x \ge 0\} \text{ et } \mathcal{D} = \{(x, e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Ax + e = b,\ (x, e) \ge 0\}.$$
Montrer que si x^* est un point extrémal de $\mathcal{B}$ alors $(x^*, e^* := b - Ax^*)$ est un point extrémal de $\mathcal{D}$ et inversement montrer que si (x^*, e^*) est un point extrémal de $\mathcal{D}$ alors x^* est un point extrémal de $\mathcal{B}$.

Exercices vus en cours

Exercice A. *Construction des solutions de base réalisables d'un PL simple*

Soit le PL suivant : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R} \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ avec $\mathcal{D}_R = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \le 5,\ x_2 \le 5,\ \mathbf{x} \ge 0\right\}$ et $\mathbf{c} = (1, 3)^\top$.

1. Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}_R$.
2. Mettre ce PL sous la forme standard : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4} \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ avec $A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.
3. Déterminer toutes les solutions de base ; dessiner la projection des solutions de base réalisables dans le plan (x_1, x_2).

Exercice B. *Condition suffisante d'optimalité*

Soit $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*_B \\ \mathbf{x}^*_H \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{x}^*_H = 0$ une solution de base réalisable du programme linéaire (PL).

1. Pour toute solution réalisable $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$, montrer que
$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + \left(\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H\right)\mathbf{x}_H.$$
Le vecteur $L_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H$ est appelé vecteur des coûts réduits (associée à la base B).
2. En déduire que $L_H^\top \le 0$ est une condition suffisante - dite condition d'optimalité - pour que $\mathbf{x}^*$ soit une solution optimale (c'est à dire que $F(\mathbf{x}) \le F(\mathbf{x}^*), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$). Rmq : dans le cas d'un min la condition suffisante d'optimalité est $L_H^\top \ge 0$.
3. Montrer que si $L_H^\top < 0$, alors l'optimum $\mathbf{x}^*$ est unique (c'est à dire que $F(\mathbf{x}) < F(\mathbf{x}^*), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_R, \mathbf{x} \ne \mathbf{x}^*$).