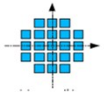
Pré-traitements : Filtres Non linéaires

➢Non-linéarité :
  - ✎Les coefficients du masque ne sont pas indépendants de l'image

➢Filtres d'ordre
  - ✎Médian
  - ✎Erosion Morphologique - Dilatation Morphologique

➢Les filtres d'ordres procèdent en remplaçant les valeurs de chaque pixel par la valeur qui occupe un certain rang lorsqu'on trie les valeurs observées dans un certain voisinage du pixel.



les valeurs dans le voisinage de (x,y) : $V(x,y) = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$
Soit $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ permutation de $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ telle que $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_N$
alors le filtre d'ordre de rang k est défini par : $\rho_k[x,y] = b_k$
Pour k=N/2, on parle de filtre médian, pour k=1, d'érosion morphologique, pour k=N, de dilatation morphologique.

La forme qui définit le voisinage est appelé élément structurant.

Pré-traitements : Filtre Non linéaire


Image initiale


Bruit Poivre & Sel


Moyenne V8


Min V8


Max V8


Médian V8

Pré-traitements : Filtre Non linéaire : Médian

➢Principe de calcul :

30	10	20
10	250	25
20	25	30

→ 10, 10, 20, 20, 25, 25, 30, 30, 250

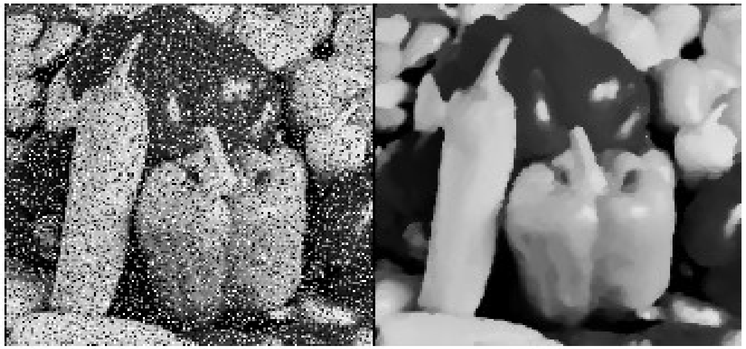
médiane = 25

moyenne autour de la médiane = 24

Moyenne: 47 à cause du 250

✎Particulièrement utile pour un bruit de type Poivre & Sel (0 et 255)

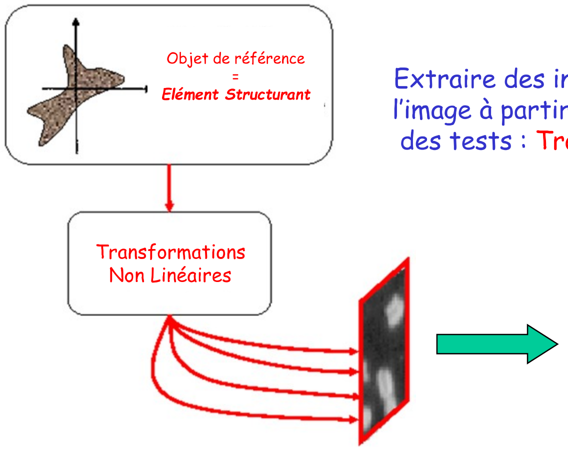
Pré-traitements : Filtre Non linéaire : Médian



Pré-traitements : Morphologie Mathématique

- Généralités :
  - La Morphologie Mathématique a été développée à l'origine à l'École des Mines de Paris. Elle repose essentiellement sur les travaux de G. Matheron effectués dans les années 60-70, puis sur ceux de J. Serra (1980) et de son équipe.
  - La Morphologie Mathématique est une théorie essentiellement non linéaire, utilisée en particulier en analyse d'images, dont le but est l'étude des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur.
  - Par les transformations qu'elle propose, elle se situe à différents niveaux du traitement d'images (filtrage, segmentation, mesures, analyse de texture)
  - Contrairement aux traitements linéaires des images, la Morphologie Mathématique ne s'appuie pas sur le traitement du signal, mais repose sur la «*Théorie des Ensembles*».
  - Les transformations de la Morphologie Mathématique sont faites pour travailler sur des images binaires (0: noir ; 1 : Blanc) avec des objets blancs sur fond noir

Pré-traitements : Morpho Math : Principes



Extraire des informations de l'image à partir de réponses à des tests : Transformations

-Taille
-Forme
-Orientation
-Connexité
-...

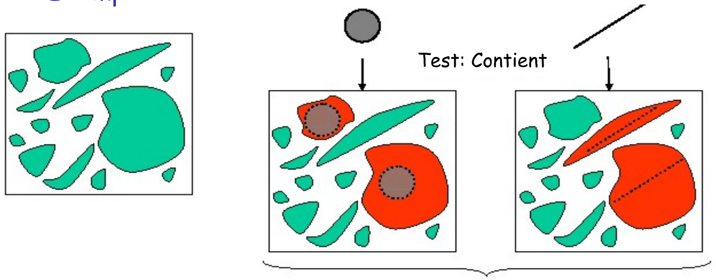
Pré-traitements : Morpho Math : Principes

Exemple

Elément Structurant1

Elément Structurant2

Test: Contient



Taille, Forme, Orientation, …

Analyse Quantitative, Spatiale, …

Pré-traitements : Morpho Math : Structure Fondamentale

- Dans le cas des traitements linéaires :
  - la structure fondamentale est ***l'Espace Vectoriel E***
  - Les opérateurs de base sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base
    - Isomorphismes d'espace vectoriel : Convolutions

$$\boxed{\forall \lambda \in K, \forall (x,y) \in E^2 : f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

- Dans le cas de la Morphologie Mathématique:
  - la structure fondamentale est ***le Treillis Complet***

(1) Ensemble ordonné $(E, \leq)$

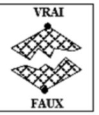
$$\leq \begin{cases} \textit{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \textit{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \textit{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet : $\begin{cases} \bullet \text{ une borne sup} \\ \bullet \text{ une borne inf} \end{cases}$

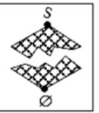
Sup (Supremum) :
plus petit des majorants : $\vee P$
Inf (Infimum) :
plus grand des minorants : $\wedge P$

Pré-traitements : Exemple de Treillis

Treillis des formules booléennes
- *éléments :* formules booléennes *f,g,h*
- *relation d'ordre :* implication $f \rightarrow g$
- ***sup :*** OU logique
- ***inf :*** ET logique
- *éléments extrêmes :*



Treillis ensembliste
- *éléments :* les parties d'un ensemble *S*
- *relation d'ordre :* inclusion $\subset$
- ***sup :*** Union $\cup$
- ***inf :*** Intersection $\cap$
- *éléments extrêmes :*



Treillis des nombres
- *éléments :* nombres réels (ou nombres entiers)
- *relation d'ordre :* $\leq$ (ordre total)
- ***sup :*** max
- ***inf :*** min
- *éléments extrêmes :*

Pré-traitements : Propriétés des opérateurs morphologiques

- **Croissance :**
  - Une transformation Φ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est
    - croissante si : $\forall (X,Y) \in E^2 \;\; X \leq Y \Rightarrow \Phi(X) \leq \Phi(Y)$
- **Extensivité et anti-extensivité :**
  - Une transformation Φ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est
    - Extensive si : $\forall X \in E \;\Rightarrow X \leq \Phi(X)$
    - Anti-extensive si : $\forall X \in E \;\Rightarrow X \geq \Phi(X)$
- **Idempotence :**
  - Une transformation Φ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est
    - idempotente si : $\forall X \in E \;\Rightarrow \Phi(\Phi(X)) = \Phi(X)$
- **Dualité :**
  - Deux transformations Φ et Ψ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ sont
    - duales si : $\forall X \in E \;\Rightarrow \Psi(X^C) = [\Phi(X)]^C$

  où X^C désigne le complémentaire de X dans E soit $X^C = E \setminus X$
  avec \ la Différence Ensembliste Symétrique : $E \setminus X = (E \cup X) - (E \cap X)$

  L'opérateur de complémentation réalise une involution

Pré-traitements : Exemple d'Involutions

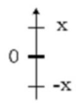
Treillis des formules booléennes

NON logique :

g	¬g
0	1
1	0

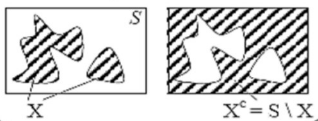
Treillis des nombres

opposé :



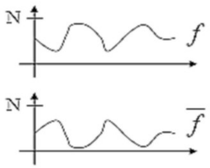
Treillis ensembliste

Complémentaire :



Treillis des fonctions dans [0,N]

$\overline{f} = N - f$:



Pré-traitements : Morpho Math : Opérateurs de base

X   Y

X^C (NOT X) $X \cap Y$ (X ET Y) $X \cup Y$ (X OU Y)

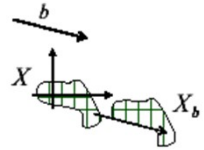
Pré-traitements : Morpho Math : Différence Symétrique

- Définition : $Y \backslash X = (Y \cup X) - (Y \cap X)$

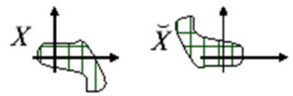
- Propriétés :
  - Associative, possède un élément neutre ($\varnothing$) et commutative $Y \backslash X = X \backslash Y$
  - Pas le cas de la différence ensembliste classique :

Pré-traitements : Morpho Math : algèbre de Minkowski

- **Translaté :**
  - Pour $X \subset \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^n$:
    - $X_b = \{x + b\ ;\ x \in X\}$

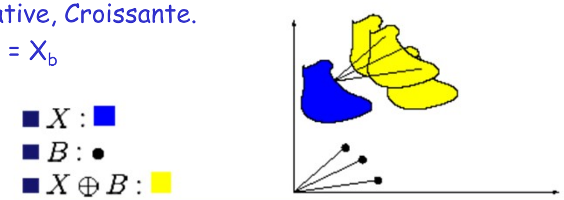


- **Transposé :**
  - Pour $X \subset \mathbb{R}^n$:
    - $\breve{X} = \{- x\ ;\ x \in X\}$



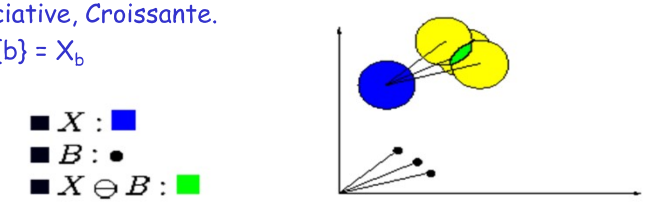
Pré-traitements : Morpho Math : algèbre de Minkowski

- **Addition de Minkowski:**
  - Pour $(X,B) \subset \mathbb{R}^n$:
    - $X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$ = **Union des translatés de X par les éléments de B**
  - Propriétés :
    - Commutative : $X \oplus B = B \oplus X$
    - Associative, Croissante.
    - $X \oplus \{b\} = X_b$



Pré-traitements : Morpho Math : algèbre de Minkowski

- **Soustraction de Minkowski:**
  - Pour $(X,B) \subset \mathbb{R}^n$:
    - $X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b$ = **Intersection des translatés de X par les éléments de B**
  - Propriétés :
    - Non Commutative : $X \ominus B \neq B \ominus X$
    - Associative, Croissante.
    - $X \ominus \{b\} = X_b$



Pré-traitements : Morpho Math : Elément structurant

- La Morphologie Mathématique correspond à la transformation d'une image binaire par un ensemble fixé, appelé :
  Elément Structurant
- Pour une transformation donnée, l'image finale est obtenue en translatant l'élément structurant sur l'image origine contenant un objet et en examinant si la relation entre l'objet et l'élément structurant est vérifiée.
  ➷ Mise en évidence de propriétés locales
- L'élément structurant élémentaire dépend de la maille utilisée. Sur une maille carrée, on trouve deux éléments structurant élémentaire en fonction du voisinage choisi :

	1	
1	1	1
	1	

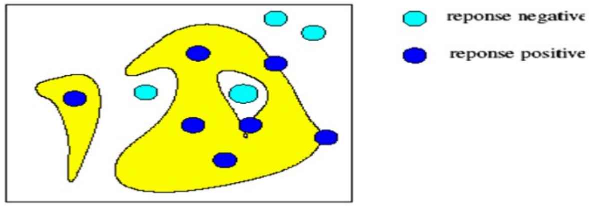
1	1	1
1	1	1
1	1	1

- L'élément Structurant a une Taille : λ et une origine **o**. L'origine de l'élément structurant est appelé **Centre**.
- Effectuer une transformation de **Taille n** correspond à utiliser un élément structurant de taille n ou à appliquer n fois la même transformation de taille 1

Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

- La dilation morphologique d'un ensemble X par B est définie comme l'addition de Minkowski de X avec le Transposé de B par rapport à son centre :

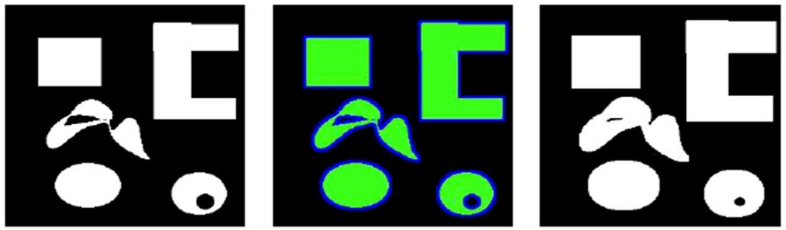
$$\delta_B(X) = X \oplus \breve{B} = \{x + y \,/\, x \in X, y \in \breve{B}\}$$
$$= \bigcup_{x \in X} \breve{B}_X$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, B_X \cap X \neq \varnothing\}$$



Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

- Exemple :
  ➷ Si l'élément structurant est symétrique, la dilatation revient à l'addition de Minkowski

$B = $



X $\quad$ $\delta_B(X)$ (+) et X ( ) $\quad$ $\delta_B(X)$

Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

- Exemples d'application:
  ➷ Dilaté :
  Pour chaque position de B, est-ce que l'intersection entre B et l'objet A est non vide ? Si oui, x l'origine de B appartient à l'image dilatée
  ➷ Elément structurant de centre et de taille $\lambda = 1$

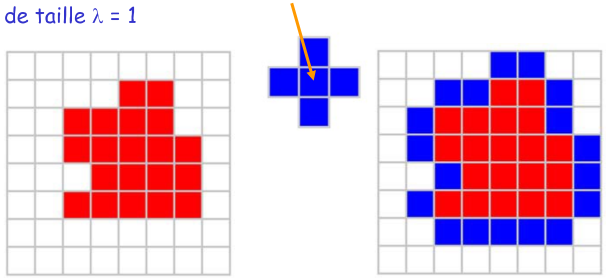
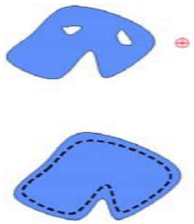
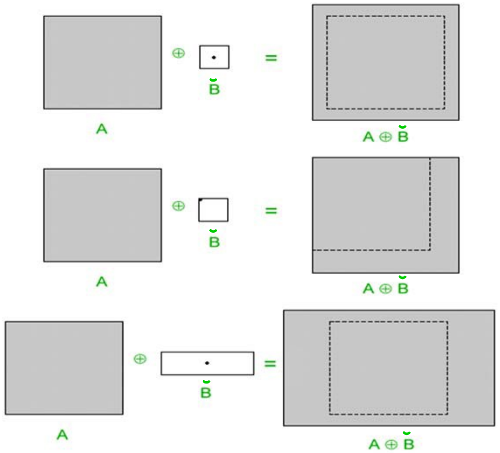


Image Origine $\quad$ **Image Finale**

Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

Note: **Max (si l'objet est blanc (1 ou 255) et le fond est noir (0)**
C-à-d que si un seul pixel de l'objet est sous l'élément structurant alors le centre de ES devient élément de l'objet





119

Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

- Dilatation avec des éléments de taille croissante :
  - La taille des objets augmente,
  - Les trous et les concavités peuvent être bouchés,
  - Les objets voisins peuvent se connecter,
  - Des petits détails disparaissent.

■ $B =$■

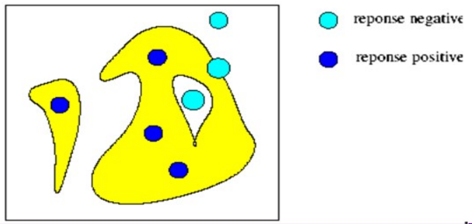
X $\delta_{5B}(X)$ $\delta_{10B}(X)$ $\delta_{15B}(X)$

122

Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

- L'érosion morphologique d'un ensemble X par B est définie comme la soustraction de Minkowski de X avec le Transposé de B par rapport à son centre :

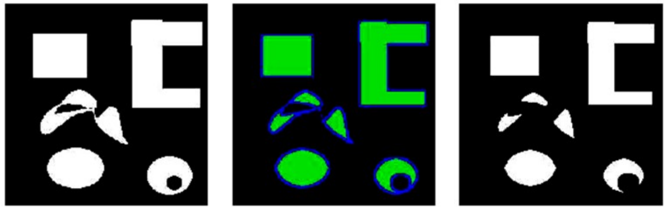
$$\varepsilon_B(X) = X \ominus \breve{B} = \{x \,/\, \forall y \in B,\ x + y \in X\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, B_x \subset X\}$$
$$= [\delta_B(X^c)]^c$$



123

Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

■ $B =$■ (rayon 3)



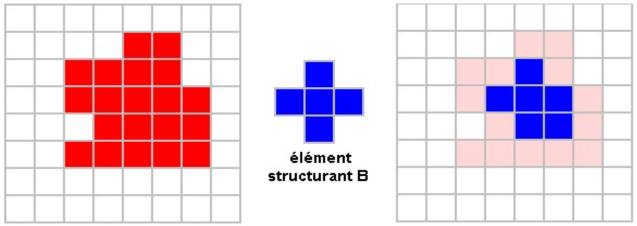
X X(■+■) et $\mathcal{E}_B(X)$(■) $\mathcal{E}_B(X)$

124

Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

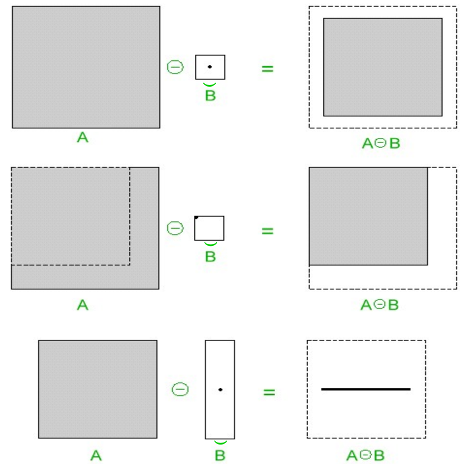
- Soit B un élément structurant
  Bx ➔ élément centré en un pixel x
- Erodé = On positionne l'origine de B en chaque pixel x de l'objet A : Si tous les pixels de B font partie de l'objet A, alors l'origine de B appartient à l'érodé

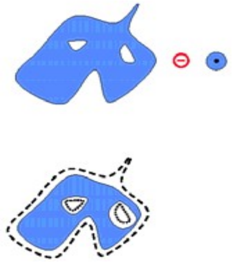
Image X **Erodé : $X \ominus \breve{B}$**



Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

Note: **Min (si l'objet est blanc (1 ou 255) et le fond est noir (0)**
C-à-d que si un seul pixel du fond est sous l'élément structurant alors le centre de ES devient élément du fond





Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

- Erosion avec des éléments de taille croissante :
  - La taille des objets décroît,
  - Un objet avec des concavités ou des trous peut être divisés en plusieurs,
  - Les petits objets et les détails disparaissent.

X $\mathcal{E}_{5B}(X)$ $\mathcal{E}_{10B}(X)$ $\mathcal{E}_{15B}(X)$

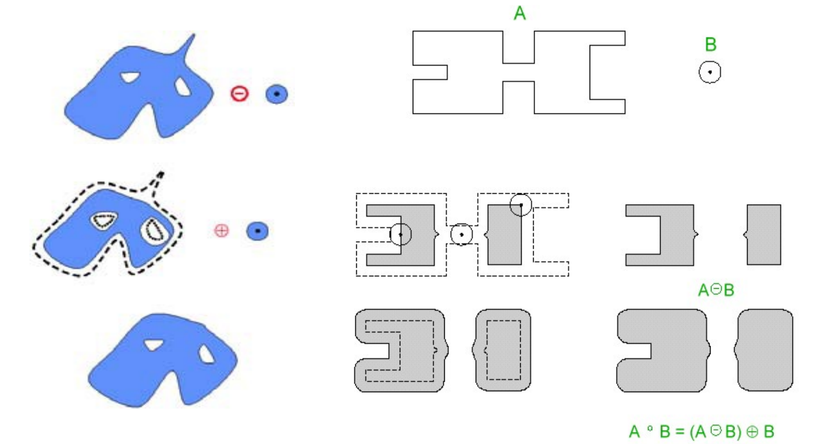
Pré-traitements : Morpho Math : Ouverture

- L'ouverture morphologique d'un ensemble X par B est définie comme composition d'une érosion et d'une dilatation :

$$\gamma_B(X) = (X \ominus \breve{B}) \oplus \breve{B}$$

- L'ouverture est:
  - anti-extensive, Croissante, Idempotente
  - Filtre morphologique

Pré-traitements : Morpho Math : Ouverture



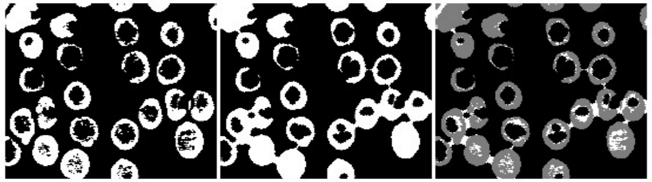
130

Pré-traitements : Morpho Math : Fermeture

- La fermeture morphologique d'un ensemble X par B est définie comme composition d'une dilatation et d'une érosion :

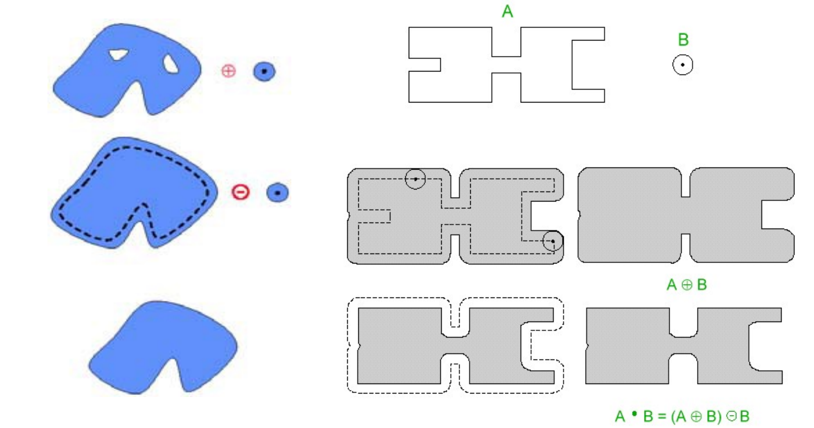
$$\phi_B(X) = (X \oplus \breve{B}) \ominus \breve{B} = [\gamma_B(X^C)]^C$$

- La Fermeture est:
  - Extensive, Croissante, Idempotente
  - Filtre morphologique



131

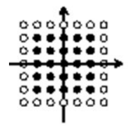
Pré-traitements : Morpho Math : Fermeture



132

Pré-traitements : Morpho Math : Fermeture vs Ouverture

Elément Structurant carré de coté C

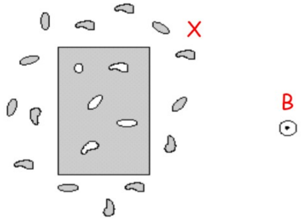


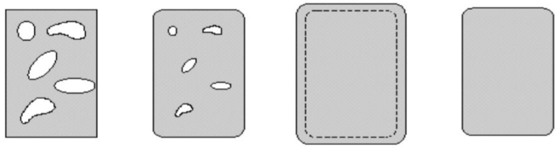
- L'ouverture élimine les petites composantes et ouvre les petits isthmes.
- La fermeture bouche les petits trous et ferme les petits détroits.

X $\gamma_B(X)$ $\varphi_B(X)$

133

Pré-traitements : Filtrage Morphologique





$X \ominus B$ $(X\ominus B)\oplus B = \gamma_B(X)$ $\gamma_B(X) \oplus B$ $\gamma_B(X) \oplus B \ominus B = \phi_B(\gamma_B(X))$

134

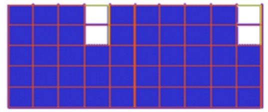
Pré-traitements : Gradient Morphologique

- Le gradient morphologique est défini comme la différence :
  - Gradient interne: $\nabla_B^- = X - \varepsilon_B(X)$
  - Gradient externe: $\nabla_B^+ = \delta_B(X) - X$
  - Gradient morphologique : $\nabla_B^+ + \nabla_B^- = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$

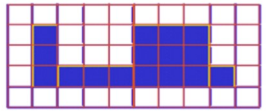
Exemple :

$\nabla_B^- = X - \varepsilon_B(X)$

X

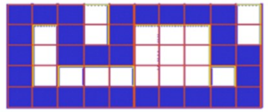


$\varepsilon_B(X)$



B

$X - \varepsilon_B(X)$



135

Pré-traitements : Gradient Morphologique

- Gradient interne : contour intérieur: $\nabla_B^- = X - \varepsilon_B(X)$

Image originale - Image érodée = Contour intérieur

- Gradient externe : contour extérieur: $\nabla_B^+ = \delta_B(X) - X$

Image dilatée - Image originale = Contour extérieur

136

Pré-traitements : Gradient Morphologique

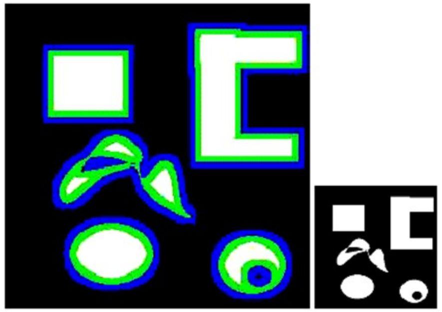
- Gradient Morphologique : $\nabla_B = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$

Image dilatée - Image érodée = Gradient morphologique

137

Pré-traitements : Gradient Morphologique

- Ensembles :
  - $\mathcal{E}_B(X) = \square$
  - $X = \square + \blacksquare$
  - $\delta_B(X) = \square + \blacksquare + \blacksquare$
- Gradients :
  - $\nabla_B(X) = \blacksquare + \blacksquare$
  - $\nabla_B^+(X) = \blacksquare$
  - $\nabla_B^-(X) = \blacksquare$

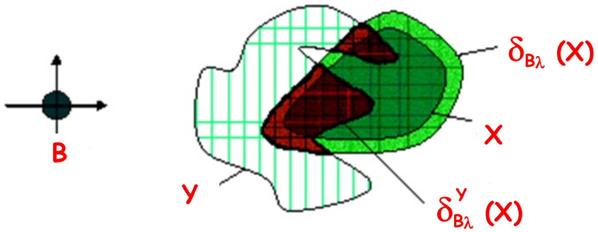


Pré-traitements : Morpho Math : Opérations Géodésiques

- Les opérations géodésiques sont des opérations conditionnées par un élément de référence.
- Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :
  - Dilatation Géodésique (dilatation conditionnelle) :
    - Dilatation de X dans Y par un élément de taille 1
      - $\delta^Y_{B_1}(X) = \delta_{B_1}(X) \cap Y$
    - Dilatation de X dans Y par un élément de taille λ
      - $\delta^Y_{B_\lambda}(X) = [\delta^Y_{B_1}(X) \cap Y]^\lambda$
  - Erosion Géodésique (érosion conditionnelle)
    - Erosion de X dans Y par un élément de taille λ
      - $\varepsilon^Y_{B_\lambda}(X) = X \setminus \delta^Y_{B_\lambda}(X)$

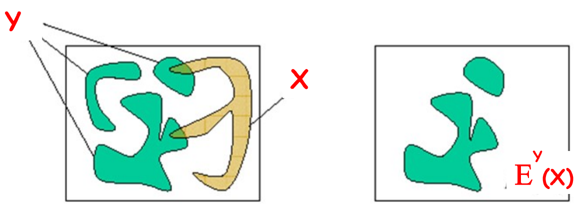
Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation Géodésique

- Dilatation de X dans Y par un élément de taille λ
  - $\delta^Y_{B_\lambda}(X) = [\delta^Y_{B_1}(X) \cap Y]^\lambda$
    $= \{x \in R^n \,/\, (X \oplus \check{B}_\lambda) \cap Y \neq \emptyset\}$



Pré-traitements : Morpho Math: Reconstruction Géodésique

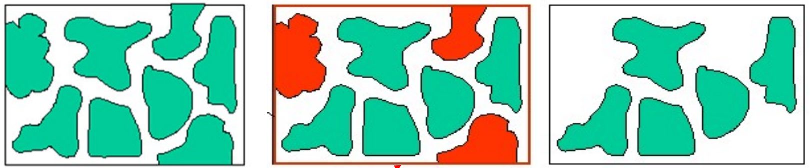
- La Reconstruction Géodésique de X dans Y est la dilatation de X dans Y par un élément de taille infinie
- Elle correspond aux composantes connexes de Y qui ont une intersection non vide avec X
  - $E^Y(X) = [\delta^Y_{B_1}(X) \cap Y]^\infty$
    $= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, (X \oplus \check{B}_\infty) \cap Y \neq \emptyset\}$



Pré-traitements : Morpho Math: Opération Géodésique

- Suppression des objets touchant le bord d'une image binaire :
  - Différence symétrique de X avec la reconstruction du bord Y de l'image dans X

$$X \setminus E^{X}(Y)$$



X Y $X \setminus E^{X}(Y)$

Pré-traitements : Morpho Math: Opération Géodésique

- Border Kill: