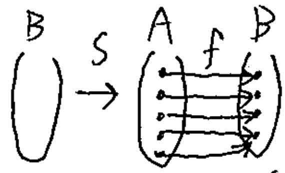
Th1.(Bernsteinの定理). AからBへの単射が存在し, BからAへの単射も存在すれば、AとBとは対等である.

「単射: $a, a' \in A,\ f(a)=f(a') \Rightarrow a=a'$　$f: A \hookrightarrow B$
全射: $\forall b \in B$ s.t. $\exists a \in A \Rightarrow f(a)=b$. 」$f: A \twoheadrightarrow B$

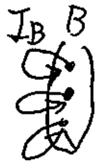
Lem1. fをAからBへの写像とする. 「A if and only if B : $A \Leftrightarrow B$」

- (a) fが全射であるとき、またそのときに限り, $f \circ s = I_B$ となるような写像 $s: B \to A$ が存在
- (b) fが単射であるとき、またそのときに限り, $r \circ f = I_A$ となるような写像 $r: B \to A$ が存在.

Proof. (a): $f \circ s = I_B$ となるような写像 $s: B \to A$ が存在する場合, fは全射である.



fはBの任意の要素を値域としてもたなければならない.



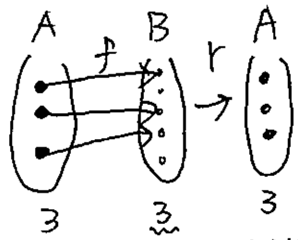
逆に、$f: A \to B$が全射であるとしよう. その場合, Bのどの元bに対しても, その原像$f^{-1}(b)$は空でない. (∵全射だから) したがって, $f^{-1}(b)=A_b$とおけば, $(A_b)_{b \in B}$は空でない集合から成る集合族となる. ゆえに,

$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$: $\forall \lambda \in \Lambda\ (a(\lambda)=a_\lambda \in A_\lambda)$ をみたす族 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 全体の集合.

$$(AC): \forall \lambda \in \Lambda\ (A_\lambda \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

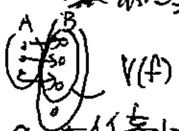
により, Bで定義された写像sで任意の$b \in B$に対し, $s(b) \in A_b$となるものが存在する.
$s(b) \in A_b \subset A$ であるから, $s: B \to A$ で, $f \circ s = I_B$ が成り立つ. ∎

(b): $r \circ f = I_A$ となるような $r: B \to A$ が存在するとき, fは単射である.



写像の定義から, 1つの点から1つの矢しか出てこれない. 仮に, fが単射でないとすると, Aの点3つに対して, ~~定義域~~ 値域 Bの点は2点以下となったりする. すると, Bの定義域からまたAの値域へとばすときに, Aの点3つだが, Bの点2つから Id_A であるのに, ~~2つから3つ~~ 2つから3つに対応させることはできないのでマズいことになる.

逆に, $f: A \to B$が単射であるとしよう. そのとき, fの~~像~~終集合を$V(f)$に変えた写像をf'とすれば, $f': A \to V(f)$は全単射である.



その逆写像を$r': V(f) \to A$とする. そこで, Aの一つの点a_0を任意に決めておき, BからAへの写像rを

$$r(b) = \begin{cases} r'(b) & (b \in V(f)\text{のとき}) \\ a_0 & (b \in B - V(f)\text{のとき}) \end{cases}$$

によって定義すれば $r \circ f = I_A$ となる. ∎

Cor1. A,B: Set, AからBへの単射が存在する $\Longleftrightarrow$ BからAへの全射が存在する.

Proof. $\varphi: A \hookrightarrow B$ が存在すれば、Lem1.の(b)より、$\psi \circ \varphi = I_A$ となるような $\psi: B \twoheadrightarrow A$ が存在して、Lem1.の(a)より ψ は全射.
逆に、$\psi: B \twoheadrightarrow A$ が存在すれば、Lem1.の(a)より、$\psi \circ \varphi = I_A$ となる $\varphi: A \to B$ が存在して、Lem1.の(b)より φ は単射. ▨

Th1. を書きかえたい。Cor1. より、Set X から Set Y への単射が存在することと、YからXへの全射が存在することは同等であるから、Th1. は Th1′ または Th1″ のように述べかえられる.

Th1′. AからBへの単射および全射が存在すれば、AからBへの全単射が存在する.

Th1″. AからBへの全射が存在し、BからAへの全射も存在すれば、AとBは対等である。

また、$\varphi: X \hookrightarrow Y$ が存在するとき、$\varphi(X) = V(\varphi) = Y_1$ とおけば、φ の終集合を Y_1 に変えた写像 φ_1 は X から Y_1 への全単射である. したがって $X \sim Y_1$, $Y_1 \subset Y$ となる. 逆に、$X \sim Y_1$ であるような $Y_1 \subset Y$ が存在するとき、X から Y_1 への全単射 φ_1 の終集合を Y に変えた写像 φ は X から Y への単射となる.
ゆえにTh1.はTh1‴にかきかえられる.

Th1‴. A, B: Set, Aと対等であるような $B_1 \subset B$ およびBと対等であるような $A_1 \subset A$ が存在する. そのときAとBは対等

Proof.(Th1) $f: A \hookrightarrow B$, $g: B \hookrightarrow A$. このとき、AからBへの全単射Fが存在することを示したい. $f(A) = V(f) \subset B$ と $f(A)$ のBに対する補集合を $B - f(A) = B_0$ とする. 次に、

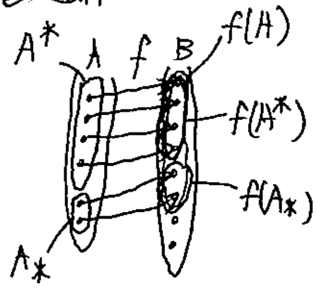
$$g(B_0) = A_1,\ f(A_1) = B_1, \ldots, g(B_{n-1}) = A_n,\ f(A_n) = B_n, \ldots$$

として、Aの部分集合族 $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$, Bの部分集合族 $(B_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ を定め、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_*,\ \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = B_*,\ A - A_* = A^*,\ B - B_* = B^*$$

とおく. このとき、

$$f(A^*) = B^*,\quad g(B_*) = A_*$$



であることが次のように示される. まずfは単射なので、

$$f(A^*) = f(A) - f(A_*) = (B - B_0) - f(A_*) = B - (B_0 \cup f(A_*)).$$

Lem2. $f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(P_\lambda)$.

Proof. $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset A_\lambda$ だから、$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \supset f(A_\lambda)$ よって $f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$.
$\forall y \in f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ で $y = f(x)$ $(x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$. $x \in A_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する. よって $y = f(x) \in f(A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$
したがって、$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. 結果、$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. ▨

したがって、

$$f(A_*) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

したがって $B_0 \cup f(A_*) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = B_*$, ゆえに

$$f(A^*) = B - B_* = B^*.$$

また、

$$g(B_*) = g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n-1}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(B_{n-1}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_*.$$

さて，f は単射で，f の定義域を A^* に縮小し，かつ終集合を ~~A^*~~ B^* に変えた写像を ~~G_*~~ F^* とすれば，

~~$G_*: B_* \to A^*$~~

$$F^*: A^* \to B^*$$

は全単射である．同様に g が単射で，g の定義域を B_* に縮小し，かつ終集合を A_* に変えた写像を G_* とすれば，$G_*: B_* \to A_*$ も全単射である．この逆写像で決まる A_* から B_* への全単射を

$$F_*: A_* \to B_*$$

とする。そこで，A から B への写像 F を

$$F(a) = \begin{cases} F^*(a) & (a \in A^* \text{のとき}) \\ F_*(a) & (a \in A_* \text{のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば，$F: A \to B$ は全単射となる．