SECTION 2 MAPPING

Zodiac Caulfield

謝辞

前回の命題の証明に関して、$\bigcap_{i\in I} f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

は,やっぱり自明でありました.お詫び申し上げます.

Prop 2.5.2 $f : X \to Y$ を写像とする.

1. $A \subset X$ と $B \subset Y$ について,

$$f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$$

2. f による image について,**(1) - (3)** が成り立つ.

(1) $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(2) $A, A' \subset X, A \subset A' \Rightarrow f(A') \subset f(A)$.

(3) $(A_i)_{i\in I} \in X, f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

3. f による inverse image について,**(1) - (3)** が成り立つ.

(1) $B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B, f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

(2) $B, B' \subset Y, B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

(3) $(B_i)_{i\in I} \in Y, f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Proof. **1**.

Definition2. A point p is called a cluster point of a directed family provided every open set about p intersects each element F of the family.

(p を含む任意の開集合が, どの点族の要素 F とも共通部分を持つとき, p は有向点族の収積点という.)

Definition3. A directed family $\mathcal{F}$ converges to a point p if and only if every open set about p contains some element of the family.

(有向点族 $\mathcal{F}$ が点 p に収束することと, p を含む任意の開集合が点族のある要素を含むことは同値.)

Proof. (十分条件): 有向点族の定義より, 有向点族の二つの要素の共通部分は, 有向点族の要素として含む. また, それが点 p に収束するので, 有向点族 $\mathcal{F}$ の要素 F を番号付けして表したときに, $\epsilon - N$ 論法的に考えて点 p に収束することを考えると,

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \Rightarrow \|F_n - p\| < \epsilon$$

と表せる. また, p の ϵ 近傍を考えてやると, これも p を含む開集合である. 先程の有向点族に関する収束の主張より, F_n は p の ϵ 近傍に含まれる.

(必要条件): p を含む任意の開集合が点族のある要素を含むとすると, p の ϵ 近傍と共通部分を持つ点族の要素が存在することになる. このことから, 有向点族が p に収束するといえる.

よってこの主張は正しい. □

Definition4. If $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ are directed families, then $\mathcal{E}$ is a (directed) underfamily of $\mathcal{F}$ provided each element of $\mathcal{F}$ contains some element of $\mathcal{E}$.

($\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ が有向点族で, $\mathcal{F}$ のどの要素も $\mathcal{E}$ のある要素を含むとき, $\mathcal{E}$ は $\mathcal{F}$ の (directed) underfamily であるという.)

Exercises Ⅲ

1. A point p is a cluster point of a directed family $\mathcal{F}$ provided some underfamily of $\mathcal{F}$ converges to p.

(${\mathcal{F}}$ のある underfamily が点 p に収束するという条件のもとで, p は有向点族 $\mathcal{F}$ の収積点である.)

Proof. $\mathcal{F}$ のある underfamily が点 p に収束すると仮定すると, underfamily も有向点族であるので, p を含む任意の開集合が点族のある要素を含む. p を含む任意の開集合が, どの要素 F とも共通部分を持つような, ある点族を考えたとき, p は有向点族 $\mathcal{F}$ の集積点である. □

2. A topological space X is a Hausdorff space if and only if each directed family of sets in X converges to at most one point in X.

(位相空間 X がハウスドルフであることと, X の集合のどの有向点族も X の高々一つの点に収束することは同値である.)

Proof. (十分条件): ハウスドルフ空間 X の異なる二点は, 交わらない近傍を持つ. このとき, X の集合のどの有向点族も, X の二つ以上の点に収束すると仮定すると矛盾. (必要条件): 位相空間 X の集合のどの有向点族も X の高々一つの点に収束するとき, X の任意の異なる二点が互いに交わらない近傍を持つと言えるので, X はハウスドルフになる.

よってこの主張は正しい.

3. If $\mathcal{F}$ converges to p and X is a Hausdorff space, then no other point of X is a cluster point of $\mathcal{F}$.

($\mathcal{F}$ が点 p に収束し, X がハウスドルフのとき, X で収積点は唯一つである.)

Proof. ハウスドルフ空間 X の異なるニ点は, 交わらない近傍を持つから, いかなる有向点族も異なる二点を収積点として持ち得ない. $\mathcal{F}$ が点 p に収束するとき, これは収積点になり, 唯一つに定まる. □