Différents types de raisonnement

Exercice 1

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}=0$, alors $a=b=0$.
2. En déduire que si m,n,p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m+n\sqrt{2}=p+q\sqrt{2} \iff (m=p \text{ et } n=q).$$

Exercice 2

Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 3

Soit $n>0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 4

Soit $n\geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0,x_1,\dots,x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0\leq x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n\leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs x_i-x_{i-1} une formule logique équivalente à la propriété.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n-x_0>1$).
4. Donnez-en une preuve en utilisant le principe des tiroirs.

Exercice 5

Que dire d'une fonction $f:I\to\mathbb{R}$, où I est un intervalle, continue, et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs?

Exercice 6

Démontrer que l'équation $9x^5-12x^4+6x-5=0$ n'admet pas de solution entière.

Exercice 7

Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

A-t-on démontré la proposition initiale?

Exercice 8

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

> Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé?

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon \implies a = 0.$$

Exercice 10

Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante : si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition?
2. Démontrer la proposition.
3. Est-ce que la réciproque de cette proposition est toujours vraie?

Exercice 11

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 12

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 6 divise $7^n - 1$.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$P_n : \; 2^n > n^2.$$

1. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est vraie?

Exercice 14

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > -1$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

1. La récurrence porte-t-elle sur n? Sur x? Sur les deux?
2. Énoncer l'hypothèse de récurrence.
3. Vérifier que $(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2$.
4. Rédiger la démonstration.

Exercice 15

Démontrer par récurrence que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp(x) \geq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 16

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on peut trouver n entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux distincts, tels que

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 18

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) (suite de Fibonacci) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Démontrer que la suite (u_n) vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

Avez-vous utilisé une récurrence simple ou une récurrence double?

Exercice 20

1. Démontrer qu'on peut partager un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, en 7 carrés, en 8 carrés.
2. Démontrer que si on peut partager un carré en n carrés, alors on peut le partager en $n+3$ carrés.
3. Démontrer qu'on ne peut pas partager un carré en 2 carrés, en 3 carrés, en 5 carrés.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de n peut-on partager un carré en n carrés?

Exercice 21

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 30

Démontrer que, pour tout entier relatif n, $n(n-5)(n+5)$ est divisible par 3.

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$|-3x+4|+|x-5|=10.$$

Exercice 32

Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x-1|\leq x^2-x+1$.

Exercice 33

Résoudre l'inéquation $x-1\leq\sqrt{x+2}$.

Exercice 36

Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x}=x$.

Exercice 37

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+xf(1-x)=1+x.$$

1. On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente. Que vaut $f(0)$? $f(1)$?
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. En substituant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
3. Quelles sont les fonctions f solution du problème?

Exercice 38

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\forall z\in\mathbb{R},\ f(z)=z$.
2. $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\ f(z+z')=f(z)+f(z')$.
3. $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\ f(z\times z')=f(z)\times f(z')$.