# Opérations sur les réels

## 1.1 Addition et multiplication

En mathématiques, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

L'ensemble des entiers relatifs est

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme quotient $\dfrac{a}{b}$ d'un entier relatif $a$ par un entier non nul $b$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + ba'}{bb'} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}.$$

Des quantités, souvent rencontrées en géométrie élémentaire, ne s'expriment pas comme rapports d'entiers. La plus simple est la diagonale d'un carré de côté 1, à savoir $\sqrt{2}$. On construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels pour compléter les trous de l'ensemble $\mathbb{Q}$. Il est muni de deux opérations $+$ et $\times$ qui étendent celles de $\mathbb{Q}$.

1. L'addition $+$ vérifie les propriétés suivantes :

$$. \; x + y = y + x \qquad . \; (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$. \; x + 0 = x \qquad . \; x + (-x) = x - x = 0.$$

2. La multiplication $\times$ vérifie les propriétés suivantes :

$$. \; x \times y = y \times x \qquad . \; (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

$$. \; 1 \times x = x \qquad . \; x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

. Tout $x \in \mathbb{R}^*$ admet un inverse $x^{-1} = \frac{1}{x}$

. pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \; x \times y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Ce sont des propriétés que nous avons toujours pratiquées. Nous noterons parfois $xy$ à la place de $x \times y$, et, en particulier, $x^2 = x \times x$. Comme conséquence de la distributivité, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 1.1.** *Soient $a, b, c$ et $d$ des réels. Alors*

1. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
4. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$

Ces propriétés sont utilisées pour développer et réduire des produits ou factoriser des expressions littérales.

**Exemple 1.**

1. $A = (2x - 3)(x + 7) = 2x \times x + 2x \times 7 - 3 \times x - 3 \times 7 = 2x^2 + 11x - 21.$
2. $B = -3(x + 1) + 7(x - 2) = -3x - 3 + 7x - 14 = 4x - 17.$
3. $C = 7x - 21y = 7x - 7 \times 3y = 7(x - 3y).$
4. $D = (x+2)(2x-1) + (2x-2)(x+2) = (x+2)\left[(2x - 1) + (2x - 2)\right] = (x+2)(4x-3).$

## 1.2 Les puissances

Soit $x$ un réel non nul. On pose $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$ et, pour tout entier $n$ non nul,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n\,\text{fois}}.$$

On rappelle que $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ est l'inverse de $x$. On peut donc calculer des puissances entières négatives :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

**Proposition 1.2 (Propriétés des puissances).** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ et pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\begin{cases} (xy)^n = x^n y^n & x^n x^m = x^{n+m} \\ (x^n)^m = x^{nm} & \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}. \end{cases}$$

**Exemple 2.** D'aprés les règles ci-dessus, on a :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3, \qquad (3x)^2 = 3^2 x^2 = 9x^2,$$

$$\left(\frac{5}{4^2}\right)^3 = (5 \times 4^{-2})^3 = 5^3 (4^{-2})^3 = 5^3 4^{-6}.$$

**Définition 1.1 (La racine carrée).** *Soit $A$ un réel positif. L'unique réel positif $a$ tel que $a^2 = A$ est appelé la racine carrée de $A$. On le note $a = \sqrt{A}$. Ainsi*

$$\left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{A} \\ \text{ et} \\ A \geq 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a^2 = A \\ \text{ et} \\ a \geq 0. \end{array}\right.$$

On a les règles suivantes, valables pour tous réels positifs $x$ et $y$,

$$\sqrt{x \times y} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \text{ ( si } y \neq 0).$$

## 1.3 Exercices

**Exercice 1.** Effectuer les calculs suivants en donnant les étapes intermédiaires :

$$A = (-1+4) \times (5-2), \qquad B = 1 - 3(5-4), \qquad C = 2 - 2(3-5),$$

$$D = \frac{-2}{3} + \frac{5}{7}, \qquad E = -\frac{4}{3} + \frac{5}{6}, \qquad F = \frac{7}{5} - \frac{5}{4}$$

$$G = \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \frac{2}{7}, \qquad H = \left(\frac{-2}{3} + \frac{5}{-2}\right) \times \frac{6}{19}, \qquad I = \frac{-2}{3} \times \frac{5}{-2} - \frac{5}{4}.$$

**Exercice 2.** Effectuer les calculs suivants en donnant les étapes intermédiaires :

$$A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(3 + \frac{1}{2}\right), \qquad B = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \times \frac{15}{4}, \qquad C = \frac{\frac{11}{3} - 7}{\frac{25}{6}},$$

$$D = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(5 - \frac{1}{3}\right), \qquad E = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right), \qquad F = \frac{\frac{7}{2} - 3}{\frac{3}{5}}.$$

**Exercice 3.** Effectuer les calculs suivants en donnant les étapes intermédiaires :

$$A = \frac{\frac{11}{3} - \frac{7}{2}}{\frac{25}{6}}, \qquad B = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}}{-1 - \frac{3}{4}}, \qquad C = \frac{-\frac{4}{5} + 4}{\frac{2}{7} + 2},$$

$$D = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}, \qquad E = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{4}}, \qquad F = \frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{7} + \frac{1}{2}}.$$

**Exercice 4.** Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x+5)(x+3) \qquad B = (3x-1)(2x+1) \qquad C = (-6x+2)(8x-3)$$

$$D = (2x-5)(-x-3) \qquad E = -(5x-1)(2x-3) \qquad F = (2x-2)(-x-2)$$

$$G = (2x-1)(2x+1) \qquad H = (2x+7)(2x-7) \qquad I = (3-2x)(3+2x).$$

**Exercice 5.** Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x+7)^2 - (2x-7)^2 \qquad B = -(10x-3)^2 + (8x+10)^2$$

$$C = (-x+3)(2x+1) + (-x+3)^2 \qquad D = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2$$

$$E = -(-2x+4)^2 + (3x-2)^2 \qquad F = -(-7x+9)(6x-3) - (5x+10)^2.$$

**Exercice 6.** Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 4x^2 - 9 \qquad B = 16 - (2x-1)^2 \qquad C = (8x-3)^2 - 1$$

$$D = (2x-5)^2 - 4 \qquad E = 16x^2 - 9 \qquad F = 36 - 25x^2$$

$$G = 9 - 81x^2 \qquad H = -9x^2 + 1 \qquad I = x^2 - 2x + 1$$

$$J = 9x^2 - 6x + 1 \qquad K = 4x^2 + 12x + 9 \qquad L = 25x^2 + 10x + 1.$$

**Exercice 7.** Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 2x + 3 + (2x-3)(2x+3) \qquad B = (4x-2)(x+1) - (2x-1)^2$$

$$C = (8x-3)^2 - x^2 + 1 \qquad D = (x-3)(4x+2) - (2x-6)$$

$$E = 4x - 2 + (2x-1)^2 \qquad F = (3x+2)(x-1) - 2(x+1)(6x+4)$$

$$G = (x-3)(4x+2) - (x^2 - 6x + 9) \qquad H = (x-3)(4x+2) + x^2(2x-6)$$

$$I = (x^2+1)(x-2) - (2x-4) \qquad J = 9x^2 - 1 + (3x+1)(2x+3).$$

**Exercice 8.**

1. Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance d'un nombre :

$$7^3 \times 7^6, \quad 8^3 \times 5^3, \quad 4^5 \times 4, \quad 6^2 \times 6^{-5}, \quad \frac{10^5}{10^8}, \quad \frac{10^{-6}}{10^{-5}}.$$

2. Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de 5 :

$$A = 50 + 3 \times 5^2 \ , \qquad B = 125 \times 5^{-2} \ , \qquad C = 5 \times 125 + 4 \times 5^4 \ .$$

**Exercice 9.** Calculer les expressions suivantes et donner l'écriture scientifique du résultat :

$$A = \frac{12 \times 10^{-3}}{16 \times 10^{-4}}, \qquad B = \frac{5 \times 10^{-6}}{20 \times (10^{-2})^5} \qquad C = \frac{1,5.10^{-5}}{4.10^{-3}}$$

$$D = \frac{3.10^{-6}}{4.10^{-3}} \qquad E = \frac{0,5 \times 10^4}{4 \times (10^3)^2} \qquad F = \frac{0,6 \times 10^{-5}}{24 \times (10^8)^3}.$$

**Exercice 10.** Calculer les expressions suivantes et donner l'écriture scientifique du résultat :

$$A = \frac{3 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{5}}{1,2 \times (10^{-4})^2}, \qquad B = \frac{8 \times 10^{8} \times 5 \times 10^{-6}}{20 \times (10^{-2})^5}$$

$$C = \frac{1,5.10^{-5}}{4.10^{-3}} - \frac{3.10^{-6}}{4.10^{-3}} \qquad D = \frac{0,09 \times 10^{-5} \times 20 \times 10^{-1}}{2,4 \times (10^{-9})^4}$$

$$E = \frac{0,5 \times 10 \times 4 \times 10^{4}}{4 \times (10^{3})^2} \qquad F = \frac{0,1 \times 10^{-1} \times 0,6 \times 10^{-5}}{24 \times (10^{8})^3}.$$

**Exercice 11.** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier :

$$A = (2 - 3\sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2}) \qquad B = (3 + 4\sqrt{10})(3 - 4\sqrt{10})$$

$$C = \frac{27\sqrt{40}}{6\sqrt{90}} \qquad D = \frac{8\sqrt{45}}{3\sqrt{80}} \qquad E = \frac{18\sqrt{8}}{4\sqrt{8}}.$$

**Exercice 12.** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ des entiers, $b$ est le plus petit possible :

$$A = \sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{8} \qquad B = \sqrt{54} + \sqrt{96} + \sqrt{24}$$

$$C = 5\sqrt{160} + 2\sqrt{90} + \sqrt{40} \qquad D = \sqrt{48} + \sqrt{27} + \sqrt{12}$$

$$E = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} - \sqrt{48} \qquad F = -5\sqrt{48} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}.$$

**Exercice 13.** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a$, $b$ et $c$ sont des entiers :

$$A = \sqrt{72} + \sqrt{64} - \sqrt{18} - 1 \qquad B = (3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$C = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45} \qquad D = \sqrt{90} + 3\sqrt{40} - 2\sqrt{160} + \sqrt{1000}$$

$$E = \left(4\sqrt{5} - 5\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{60} \qquad F = \left(3\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{40}.$$

**Exercice 14.** On donne

$$A(x) = (2x - 3)(5x + 4) + (2x - 3)^2 \text{ et } B(x) = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3)^2.$$

1. Développer et réduire les expressions $A(x)$ et $B(x)$.
2. Calculer $A(x)$ pour $x = 0\,;\ x = -2,\ x = \dfrac{3}{2}$.
3. Factoriser les expressions $A(x)$ et $B(x)$.
4. Résoudre les équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$.