## Principe de Raisonnement par Récurrence

Pour démontrer que la proposition $(\forall n \in IN)$ ; $P(n)$ est vraie, on utilise généralement un raisonnement par Récurrence, qui est basé sur trois étapes :

**Première étape :** on vérife que la proposition $P(n)$ est vraie pour le première valeur de n .

**Deuxième étape :** on suppose que $P(n)$ est vraie et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.

**Troixième étape :** on donne la conclusion : d'après le principe de récurrence ; on a $(\forall n \in IN)$ ; $P(n)$

| Comment répondre à ces questions ? | Suite minorée | Suite majorée |
|---|---|---|
| Montrer que $(U_n)$ est minorée par $m$ .<br><br>Montrer que $(U_n)$ est majorée par $M$ . | Une suite $(U_n)$ est minorée par $m$ ssi : $(\forall n \in IN)$ ; $m \leq U_n$<br>Pratiquement :<br>On montre par la différence ou par récurrence que : $(\forall n \in IN)$ ; $m \leq U_n$ | Une suite $(U_n)$ est majorée par $M$ ssi : $(\forall n \in IN)$ ; $U_n \leq M$<br>Pratiquement :<br>On montre par la différence ou par récurrence que : $(\forall n \in IN)$ ; $U_n \leq M$ |
| **Comment répondre à ces questions ?** | **Suite croissante** | **Suite décroissante** |
| Montrer que $(U_n)$ est croissante .<br><br>Montrer que $(U_n)$ est décroissante . | Une suite $(U_n)$ est croissnate ssi : $(\forall n \in IN)$ ; $U_n \leq U_{n+1}$<br>Pratiquement :<br>On montre que la différence $U_{n+1} - U_n$ est positive. | Une suite $(U_n)$ est décroissnate ssi : $(\forall n \in IN)$ ; $U_{n+1} \leq U_n$<br>Pratiquement :<br>On montre que la différence $U_{n+1} - U_n$ est négative. |

| Comment répondre à ces questions ? | Suite Aritmétrique | Suite Géométrique |
|---|---|---|
| Montrer que $(U_n)$ est Aritmétrique .<br><br>Montrer que $(U_n)$ est Géométrique . | Une suite $(V_n)$ est Aritmétrique ssi ; il existe un réel r tel que : $(\forall n \in IN)$ ; $V_{n+1} = V_n + r$<br>Pratiquement :<br>On calcul la différence $U_{n+1} - U_n$ | Une suite $(V_n)$ est Géométrique ssi ; il existe un réel $q$ tel que : $(\forall n \in IN)$ ; $V_{n+1} = qV_n$<br>Pratiquement :<br>On montre que $V_{n+1} = \ldots = qV_n$ |
| Calculer $V_n$ en fonction de $V_n$ et $n$ . | $V_n = V_p q^{n-p}$ | $V_n = V_p + (n-p)r$ |
| Calcul de $S_n$ | $S_n = V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n$<br>$S_n = \frac{n-p+1}{2}(V_p + V_n)$ | $S_n = V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n$<br>$S_n = U_p\left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$ |

## Limite d'une Suite

| limite de $a^n$ | Propriétés des limites d'une suite |
|---|---|
| Propriété :1<br>• **Toute suite croissante et majorée est convergente.**<br>• **Toute suite décroissante et minorée est convergente**<br>Propriété :2 $(U_n)$ et $(V_n)$ suites telles que : $(\forall n \in IN)$ ; $U_n \leq V_n$<br>• Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ Alors $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$<br>• Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$<br>Propriété :3 $(a_n)$ et $(V_n)$ et $(V_n)$ suites telles que : $(\forall n \in IN)$ ; $a_n \leq U_n \leq b_n$<br>• Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L$ Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = L$ | • Si $-1 < a < 1$ Alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$<br>• Si $1 < a$ Alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$<br>• Si $a \leq -1$ Alors la suite $a^n$ est Altérnée et n'a pas de limite<br>• Si $a = 1$ Alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 1$ |