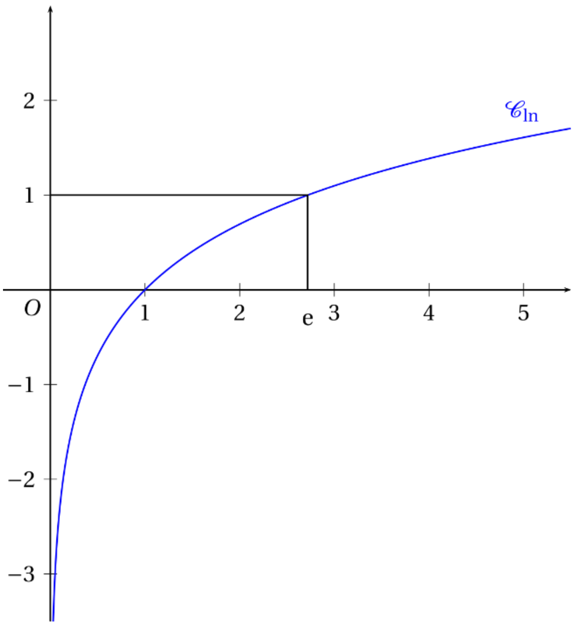
Logarithme népérien = logarithme naturel

I.Logarithme népérien

Le *logarithme népérien* est la fonction f définie par $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$.
Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On a : $\ln e = 1$ $\quad\quad$ $e \approx 2{,}7$
$\ln 1 = 0$



La fonction réciproque du logarithme népérien est l'exponentielle que l'on note e^x, on a :

$$e^{\ln x} = \ln e^x = x$$

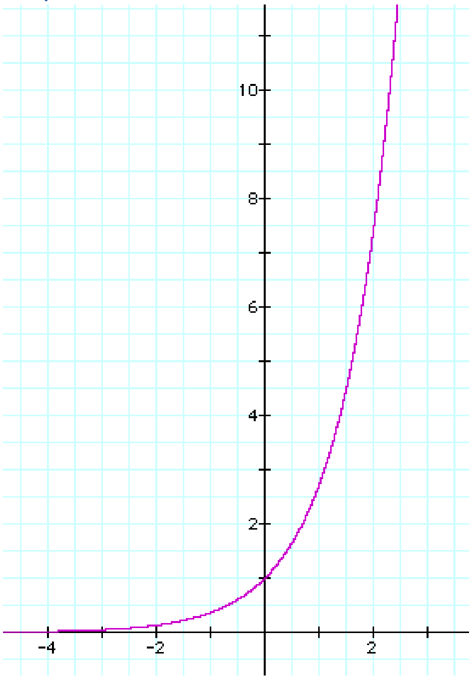
Propriétés :

- $ln\ (a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^b) = b \ln a$

Exercices : Résoudre (Attention aux ensembles utilisables)

- $\ln(3x^2 + 5x) = \ln(x + 2)$
- $\ln(2x^2 + 3x + 1) = 0$
- $\ln(x + 3) = 1$
- $\ln(x + 2) - \ln(x - 3) = \ln x$

II.Exponentielle



On a $e^0 = 1$ et $e = e^1 \approx 2{,}7$. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Propriétés</u> :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(e^a)^b = e^{ab}$

<u>Exercice 1</u> :
Résoudre :
$e^x = 5$
$e^x = 1$
$e^{3x+4} = 1$
$e^{4x^2+2x} = e$

<u>Exercice 2</u> :
Le nombre de milligrammes d'une substance radioactive présent après t années est donné par :

$$Q = 100e^{-0{,}035t}$$

1) Combien de milligrammes sont présents après 0 année.
2) Après combien d'années aura-t-on20 mg ?

Donner l'année entière la plus proche.

III.Logarithme en base quelconque

Définition : la fonction $\log_a$, appelée fonction log de base a,
où $a \in \mathbb{R}_+^*/\{1\}$ est définie par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ $(a \neq 1, et\ a > 0)$

C.P : Si $a = 10$ alors $\log_a$ est appelée logarithme décimal et est noté $\log$ (utilisé en chimie pour exprimer le pH)
Si $a = e$ alors $\log_e$ est appelée logarithme népérien et est noté $\ln$

$$f(x) = \log_a(x) \quad Df = \mathbb{R}^{+*} \quad \text{(comme } ln)$$

Remarque importante :

$$\ln e^x = e^{\ln x}$$
$$\text{Log}_a\, a^x = a^{\log_a x} = x$$

Sens de variation

Si $0 < a < 1$ $\ln a < 0$ Donc $\log_a$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, de même pour les fonctions réciproques qui sont les fonctions exponentielles de base a.

Si $a > 1$ $\ln a > 0$ Donc $\log_a$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, de même pour les fonctions réciproques qui sont les fonctions exponentielles de base a.
On a : $\text{Log}_a\, a^x = a^{\log_a x} = x$

Exemples : résoudre
$\log_2 x < 3$ $\log x \geq -2$

Propriétés

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a y$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a y$$
$$\log_a x^y = y \log_a x$$

Calculs

$$\log_6 6^4 = ?$$
$$\log_2 2^{-9} =$$
$$\log 10^6 =$$
$$\log_{\frac{1}{2}} 8 =$$
$$6^{\log_6 4} =$$
$$10^{\log 6} =$$

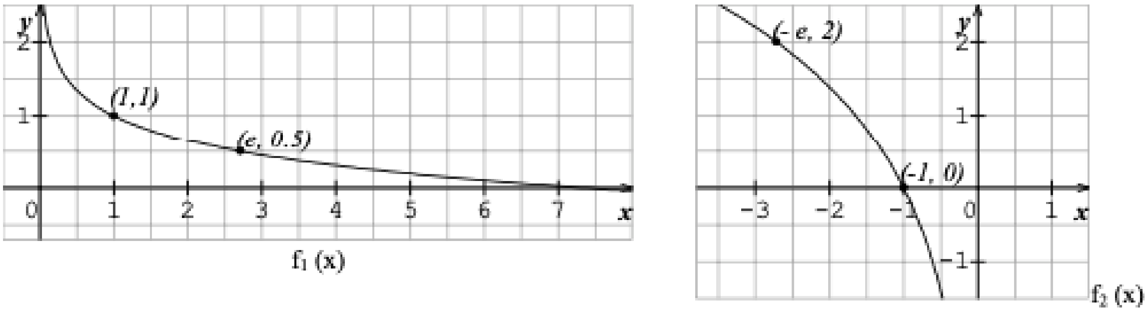
Résoudre

$$log_{\frac{1}{3}} x > -5$$
$$log_4 x > 7$$
$$\ln e^{10}$$

$$\log(0{,}001) =$$

Exercice représentation graphique:

En tenant compte des indications données dans les graphes des fonctions ci-dessous, déterminer la valeur des paramètres a et b sachant que $f_1(x) = a + b \ln(x)$ et $f_2(x) = a \cdot \ln(bx)$



Exercice économique - Équation de la demande

L'équation de la demande pour un produit de consommation est $q = 80 - 2^p$. Exprimez p en fonction de q et calculez p quand q vaut 60 (Arrondissez au 100ème).