ENIGMA

Les nombres complexes

1 Définitions et opérations

Définition 1. *On note par* i *un nombre "imaginaire" tel que* $\mathrm{i}^2 = -1$. *Un nombre complexe est un nombre* z *s'écrivant sous la forme* $z = a + \mathrm{i}b$ *avec* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Dans cette écriture, appelée forme algébrique de* z,

- . a *est la partie réelle de* z, *notée* $\mathrm{Re}(z)$,
- . b *est la partie imaginaire de* z, *notée* $\mathrm{Im}(z)$.

Le nombre complexe z *est dit réel si* $\mathrm{Im}(z) = 0$ *et il est dit imaginaire pur si* $\mathrm{Re}(z) = 0$. *Enfin, on note* $\mathbb{C}$ *l'ensemble des nombres complexes.*

Remarque.

1. Il ne faut pas remplacer i par une quelconque valeur numérique ou autre symbole. Bien que imaginaire, i a le statut de nombre à part entière.
2. Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Définition 2. *Soient* $z = a + \mathrm{i}b$ *et* $z' = a' + \mathrm{i}b'$ *deux nombres complexes où* a, a', b, b' *sont des réels. On pose*

$$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b') \quad \textit{et} \quad zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b).$$

Remarque. L'addition et la multiplication des complexes suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication des réels. On suppose que celles ci sont connues.

Définition 3 (Conjugué d'un complexe). *Soit* $z = a + \mathrm{i}b$ *un nombre complexe avec* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Le conjugué de* z *est le nombre complexe* $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Propriétés. Soit z et z' deux nombres complexes. Alors

$$1.\ \overline{(z + z')} = \overline{z} + \overline{z'}\ , \qquad 2.\ \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'} \qquad 3.\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \text{ si } z' \neq 0.$$

2 La forme trigonométrique d'un complexe

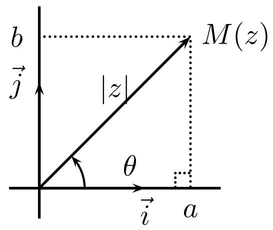
Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (a, b) dans $\mathscr{R}$ on associe le complexe $z = a + \mathrm{i}b$. On dit que M est le point d'affixe z et on note $M(z)$.

Définition 4. *Le module de $z = a + \mathrm{i}b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, est le réel positif :* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 1 (Propriétés). *Pour tous complexes z et z', on a :*

1. $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.
2. $|zz'| = |z||z'|$ *et* $|z^n| = |z|^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ *si* $z' \neq 0$.

Définition 5. *Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z. Un argument de z est une mesure θ de l'angle orienté de $\vec{i}$ à $\overrightarrow{OM}$:* $\theta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.



On retiendra que, si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On traduit ceci en écrivant : $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

Définition 6. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'exponentielle imaginaire est définie par* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Proposition 2. *Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme*

$$z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad \textit{ou} \quad z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

où θ est un argument de z. Ces écritures s'appellent forme trigonométrique ou exponentielle de z.

Méthode. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe non nul.

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. On écrit z sous la forme $z = |z|\left(\dfrac{a}{|z|} + \mathrm{i}\dfrac{b}{|z|}\right)$.
3. On détermine un argument θ en résolvant, dans $[0, 2\pi[$, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin\theta & = & \dfrac{b}{|z|}. \end{array}\right.$$

4. On obtient ainsi une forme trigonométrique de z : $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Exemple. Déterminons une forme trigonométrique de $z = 1 - \mathrm{i}$. On a :

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \text{et donc} \quad z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right).$$

Or

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ & & \\ \sin\theta & = & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right. \Rightarrow \ \theta = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Donc $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.

Proposition 3. *L'exponnentielle imaginaire vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$; 2. $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$;

3. $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$; 4. $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

On en déduit les propriétés suivantes satisfaites par les arguments.

Corollaire 1. *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors*

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ 2. $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$

3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$, 4. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

La propriété 2 de la proposition ci-dessus donne la formule de Moivre et en prenant les parties rélle et imaginaire de l'exponentielle, on obtient les formules d'Euler.

Proposition 4. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Formule de Moivre :* $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.
2. *Formules d'Euler :*

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Remarque. Retour sur la trigonométrie

1. La propriété $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ permet de retrouver les formules d'addition.
2. La formule De Moivre avec $n = 2$ permet de retrouver les formules de duplication.

3 Equation du second degré à coefficients réels

Proposition 5. *Tout réel a non nul admet exactement deux racines carrées opposées. Si a est positif, il s'agit de $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ et si a est négatif, il s'agit de $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.*

Exemple. Les racines carrées de 4 sont 2 et -2. Cependant, les racines carrées de -9 sont $3\mathrm{i}$ et $-3\mathrm{i}$.

On considère l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Proposition 6. *Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$, et c'est un réel.*

- *Si $\Delta = 0$, (E) admet une solution double : $z = \dfrac{-b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles :*

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- *Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

4 Exercices

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}, \qquad z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{2+7\mathrm{i}}, \qquad z_3 = \frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{3-\mathrm{i}},$$

$$z_4 = \frac{4+\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\mathrm{i}}, \qquad z_5 = \frac{2-\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}}, \qquad z_6 = \frac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},$$

$$z_7 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2, \qquad z_8 = \left(\frac{2+\mathrm{i}^5}{1-\mathrm{i}^{15}}\right)^2, \qquad z_9 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}.$$

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation : $(1+\mathrm{i})z = 3 - 2\mathrm{i}$, donner la solution sous la forme algébrique.
2. Le nombre complexe $2 - \mathrm{i}$ est-il solution de l'équation : $(1-\mathrm{i})z + 1 + 3\mathrm{i} = 0$?
3. Le nombre complexe $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{5}$ est-il solution de l'équation : $5z^2 - 2z + 2 = 0$?

Exercice 3. Déterminer les modules et arguments des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + \sqrt{3}\mathrm{i}, \qquad z_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad z_3 = \sqrt{3} + \mathrm{i},$$

$$z_4 = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right), \qquad z_5 = \frac{\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}, \qquad z_6 = \frac{5+11\sqrt{3}\mathrm{i}}{7-4\sqrt{3}\mathrm{i}},$$

$$z_7 = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^6}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^4}, \qquad z_8 = \frac{(1+\mathrm{i})^8}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6}, \qquad z_9 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{19}.$$

On donnera une forme trigonométrique (ou exponentielle) de chacun de ces complexes.

Exercice 4.

1. Déterminer une forme trigonométrique de
$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right).$$
2. Soit $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Calculer zz'.
3. Calculer $(1+\mathrm{i})^{14}$.

Exercice 5. Soient $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Donner les formes trigonométriques de z_1 et de z_2.
2. En déduire les formes trigonométriques de $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$, $\dfrac{(z_1)^2}{\overline{z}_2}$.

Exercice 6. On pose $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2 et $z_1 z_2$.
2. Donner la forme algébrique de $z_1 z_2$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7. Soient $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme exponentielle de z.
2. Déterminer les formes algébriques z_1 et z_2. En déduire la forme algébrique de z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 8. On donne $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z = z_1\overline{z_2}$.

1. Donner les formes trigonométriques de z_1, z_2 et z.
2. Donner la forme algébrique du nombre complexe z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 9. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Utiliser les formules d'Euler pour exprimer $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Linéariser $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos^3 x$, $\sin^3 x$ et $\cos^2(3x)\sin^3(2x)$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 2 = 0$, 2. $z^2 + 3z - 4 = 0$, 3. $4z^2 - 4z + 1 = 0$,

4. $2z^2 - 5z + 7 = 0$, 5. $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$, 6. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$.