

# Examen du mercredi 17/01/2024

Enigma I

## Exercice 1

Montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

## Exercice 2

Soit  $a$  et  $b$  deux réels. On considère la proposition suivante : si  $a + b$  est irrationnel, alors  $a$  ou  $b$  sont irrationnels.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
2. Démontrer la proposition.
3. Est-ce que la réciproque de cette proposition est toujours vraie ?

## Exercice 3

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la propriété suivante :

$$P_n : 2^n > n^2.$$

1. Montrer que l'implication  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$  est vraie pour  $n \geq 3$ .
2. Pour quelles valeurs de  $n$  la propriété  $P_n$  est vraie ?

## Exercice 4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$|-3x + 4| + |x - 5| = 10$$

## Exercice 5

Soit  $z_1 = 2 + 2i$      $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

- a) Déterminer la forme exponentielle complexe de  $z_1$  et celle de  $z_2$ .
- b) Donner la forme exponentielle complexe de  $Z = \frac{z_1}{z_2}$

## Exercice 6

Soit

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

- a) Donner  $D_f$
- b) Etudier les variations de  $f$  (tableau)

## Exercice 7

Soit  $n_1 = 78$      $n_2 = 356$

- a) Donner tous les diviseurs de  $n_1$  et  $n_2$ .

- b) En déduire le pgcd de  $n_1$  et  $n_2$ .
- c) Donner la décomposition sous forme de nombres premiers de  $n_1$  et  $n_2$ . Retrouver le pgcd de  $n_1$  et  $n_2$ .
- d) Donner le ppcm de  $n_1$  et  $n_2$ .

## Exercice 8

Calculer

$$\log_7 49 \ ; \ \log 0,01 \ ; \ \log_8 \frac{1}{8} \ ; \ \log_{11} 121$$