

# Mathématiques Financières

## Chapitre 5: Emprunts Indivis

Année universitaire 2023-2024

# Introduction

On parle d'un emprunt indivis (indivisible) quand l'emprunteur s'adresse à un seul prêteur (créancier). Quand il s'agit de plusieurs créanciers, on parle d'un emprunt obligataire.

**L'objectif de ce cours est d'étudier les principaux modes de remboursement d'un emprunt indivis.**

# Introduction

Un emprunt indivis peut être remboursé :

- en une seule fois (*in fine* ou en bloc)
- par annuités constantes
- par amortissements constants

## Notations

**C** : Capital emprunté

**i** : Taux d'intérêts

**I** : Montant des intérêts

**n** : Durée de l'emprunt

**a** : Annuité

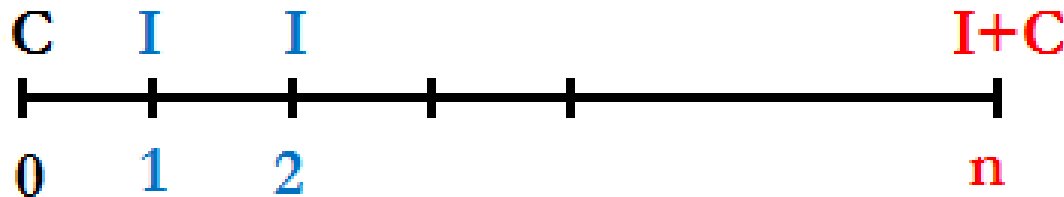
# Tableau de remboursement

On présente les détails des paiements liés à un emprunt dans « le tableau de remboursement » qui décrit, pour chaque période, le capital restant dû, la part de capital remboursé, les intérêts et l'annuité.

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités

# Remboursement en une seule fois

Ce premier mode de remboursement consiste à payer le capital emprunté *en bloc* à la fin de la dernière période. Entre temps, l'emprunteur ne paye que les intérêts.



L'équivalence est toujours vérifiée:

A la date 0: 
$$C = I \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} + C(1 + i)^{-n}$$

A la date n: 
$$C(1 + i)^n = I \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} + C$$

# Exemple

Tableau de remboursement (*en bloc*) d'un emprunt de 80.000DTN au taux annuel de 6% sur 4 ans.

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuité(s)
1	80.000	$\times 0,06$ 4800	0	4800
2	80.000	4800	0	4800
3	80.000	4800	0	4800
4	80.000	4800	80.000	84.800

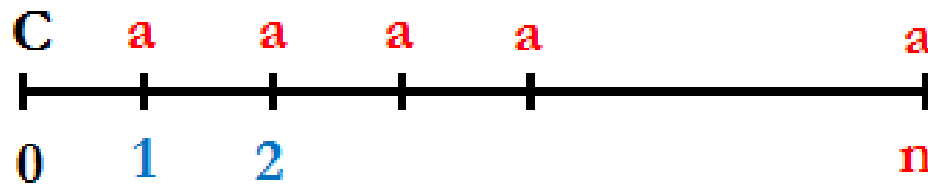
$$\text{Intérêts} = C_r \times i = 80.000 \times 0,06 = 4800$$

$$\text{Coût de l'emprunt} = I \times n = 4800 \times 4 = 19.200$$

$$\text{Annuité} = \text{Intérêts} + \text{part de capital remboursé}$$

# Remboursement par annuités constantes

Dans ce cas, l'emprunteur s'engage à payer la même annuité chaque fin de période. C'est la formule la plus utilisée en pratique.



Les annuités 'a' de fin de périodes permettent de rembourser le capital emprunté C et les intérêts dus. Ainsi, C est égal à la valeur actuelle des différentes annuités au taux i, soit :

$$C = a \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Par conséquent:

$$a = C \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

# Exemple

Remboursement d'un emprunt de 80.000DTN au taux annuel de 6% sur 4 ans par annuités constantes.

On commence par le calcul de l'annuité 'a':

$$a = C. \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$a = 80000. \frac{0,06}{1 - (1 + 0,06)^{-4}}$$

$$a = 23087,3$$



# Exemple

Tableau de remboursement :

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités
1				23087,3
2				23087,3
3				23087,3
4				23087,3

L'emprunteur paye la même annuité chaque fin de période soit 23087,3 DTN.

# Exemple

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités
1	80.000	$\times 0,06$ 4800	18287,3	23087,3
2				23087,3
3				23087,3
4				23087,3

**Annuité** = Intérêts + Capital remboursé

Annuité – Intérêts = **Capital remboursé**

23087,3 – 4800 = **18287,3**

# Exemple

En remboursant 18287,3 DTN, le capital restant dû au début de la deuxième période est  $80000 - 18287,3 = 61712,7$  DTN.

**Capital restant de l'année 'n' =**

**Capital restant de l'année 'n -1' – Capital remboursé de l'année 'n-1'**

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités
1	80000	$\times 0,06$ 4800	18287,3	23087,3
2	61712,7	$\times 0,06$ 3702,7	19384,5	23087,3
3	42328,2	2539,7	20547,6	23087,3
4	<u>21780,6</u>	1306,8	<u>21780,6</u>	23087,3

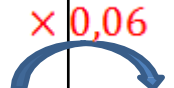

# Vérification

Dans un tableau de remboursement, il faut s'assurer que :

**-La somme des amortissements = Capital emprunté**

$$18287,3 + 19384,5 + 20547,6 + 21780,6 = 80000$$

**- Le capital restant de la dernière période = Amortissement**

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (part de capital remboursé)	Annuités
1	80000	 4800	18287,3	23087,3
2	61712,7	 3702,7	19384,5	23087,3
3	42328,2	2539,7	20547,6	23087,3
4	<u>21780,6</u>	1306,8	<u>21780,6</u>	23087,3

# Remboursement par amortissements constants

- Dans ce cas, c'est la part de capital remboursé à chaque période qui est constante.
- Comme pour les annuités, on commence par le calcul de l'amortissement constant :  $A = C/n$

## *Exemple:*

Pour rembourser un emprunt de 80000DTN sur 4 ans par amortissements constants, il faut payer  $80000/4$  soit 20000 DTN chaque année.

# Exemple

Remboursement d'un emprunt de 80.000DTN au taux annuel de 6% sur 4 ans par amortissements constants.

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités
1				
2				
3				
4				

# Exemple

Le capital restant de la première période est toujours égal à la somme empruntée.

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_r$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités
1	80000	$\times 0,06$ 4800	$+$ 20000	$=$ 24800
2			20000	
3			20000	
4			20000	

$$1^{\text{ère}} \text{ Annuité} = \text{intérêts} + \text{amortissement} = 24800$$

# Exemple

En remboursant 20000 DTN, le capital restant dû en début de la deuxième période est  $80000 - 20000 = 60000$  DTN.

Période	Capital restant dû en début de période ( $C_p$ )	Intérêts de la période (I)	Amortissement (capital remboursé)	Annuités
1	80000	4800	20000	24800
2	60000	3600	20000	23600
3	40000	2400	20000	22400
4	<u>20000</u>	1200	<u>20000</u>	21200

Le coût de cet emprunt (somme des intérêts) est de 12000 DTN.



