Module : Programmation linéaire

Série d'exercices n°1 : Modélisation d'un PL

Préparée par : Équipe PL
UP Mathématiques

Année Universitaire : 2024-2025

Exercice N°1 : Problème de production

Énoncé

Énoncé

Une usine fabrique des bicyclettes et des scooters ; chaque produit passe à travers deux centres de machines. Le premier centre dispose d'un maximum de 120 heures et le second d'un maximum de 180 heures.

La construction d'une bicyclette nécessite 6 heures dans le premier centre et 3 heures dans le second ; la construction d'un scooter nécessite 4 heures dans le premier centre et 10 heures dans le second.

Le profit par bicyclette est 1500DT et celui d'un scooter 7500DT.

Formuler le programme linéaire associé à ce problème de production.

Exercice N°1 : Problème de production

Solution

Solution

1. Variables de décision :
   - x : le nombre de bicyclettes à fabriquer.
   - y : le nombre de scooters à fabriquer.
   - $x, y \geq 0$.
2. Fonction objectif :

   $$\max Z = 1500x + 7500y$$
3. Contraintes liées au PL :
   - $6x + 4y \leq 120$
   - $3x + 10y \leq 180$.

Exercice N°2 : Problème de déménagement

Énoncé

Énoncé

Une entreprise veut déménager son matériel composé de 450 machines de trois types : M1, M2 et M3. Elle décide de louer des camions. La société de location dispose de trois sortes de camions :
C1, C2 et C3 dont les tarifs sont respectivement de 50, 80 et 120 dinars par voyage.
Chaque camion C1 peut transporter une machine M1, 4 machines M2 et 10 machines M3.
Pour des raisons techniques la place d'une machine d'un type donné ne peut être utilisée pour une machine d'autre type. chaque camion C2 peut transporter 2 machines M1, 6 machines M2 et 20 machines M3. Alors que le camion C3 a pour capacité maximum 4 machines M1, 20 machines M2 et 24 machines M3.
On veut transporter en un seul convoi 30 machines M1, 120 machines M2 et 300 machines M3.
Donner le programme linéaire de ce problème.

Exercice N°2 : Problème de déménagement

Solution

Solution

1. Variables de décision :
   - x_1 : le nombre de camions de type C_1.
   - x_2 : le nombre de camions de type C_2.
   - x_3 : le nombre de camions de type C_3.
   - $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
2. Fonction objectif :
   $$\min Z = 50x_1 + 80x_2 + 120x_3$$
3. Contraintes liées au PL :
   - $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 30$
   - $4x_1 + 6x_2 + 20x_3 = 120$
   - $10x_1 + 20x_2 + 24x_3 = 300.$

Exercice N°3 : Problème de services d'employés

Énoncé

Énoncé

On considère un lieu de travail où il existe des besoins quotidiens en ouvriers. Les besoins en nombre d'ouvriers par jour sont données par le tableau suivant :

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
18	13	16	19	12	16	11

Il faut que tout ouvrier soit engagé plein temps. Chaque ouvrier travaille 5 jours consécutif et il se repose 2 jours. Le travail durant les samedis et les dimanches doit être payé deux fois plus que le travail durant le reste des jours. Le salaire par jour s'élève à 100D.

Déterminer le programme linéaire qui aidera le DRH à prendre les bonnes décisions.

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Exercice N°3 : Problème de services d'employés

Solution

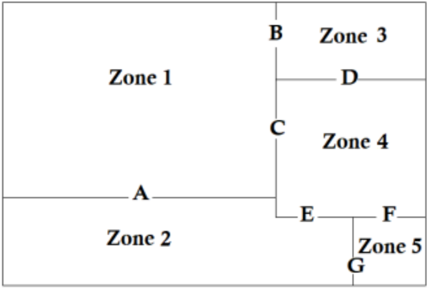
Solution

1. Variables de décision :
   - x_i : le nombre d'ouvriers qui commencent leur travail le i-ème jour de la semaine.
   - $x_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall 1 \leq i \leq 7$.
2. Fonction objectif :

   $$\min Z = 500x_1 + 600(x_2 + x_7) + 700(x_3 + x_4 + x_5 + x_6).$$
3. Contraintes liées au PL :
   - $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 18$
   - $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$
   - $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 16$
   - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19$
   - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 12$
   - $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16$
   - $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$

Énoncé

Un musée est partitionné en 5 zones qu'on désire couvrir par des caméras de surveillance. Le plan du musée est donnée par la figure suivante :



Deux zones voisines peuvent être couvertes par une même caméra si celle-ci est placée sur leur frontière commune.

Formuler un programme linéaire, de façon à ce que chaque zone soit couverte par au moins une caméra et que la zone 4 soit couverte par au moins deux caméras.

Exercice N°4 : Problème de couverture

Solution

Solution

1. Variables de décision :
   - $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si une caméra est placée sur la frontière i} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

     avec i=A,B,C,D,E,F,G.
2. Fonction objectif :

   $$\min Z = x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G.$$
3. Contraintes liées au PL :
   - (Zone 1) $x_A + x_B + x_C \geq 1$
   - (Zone 2) $x_A + x_E + x_G \geq 1$
   - (Zone 3) $x_B + x_D \geq 1$
   - (Zone 4) $x_C + x_D + x_E + x_F \geq 2$
   - (Zone 5) $x_F + x_G \geq 1$

Exercice N°5 : Sélection de Projets

Énoncé

Énoncé

5 projets doivent être évalués sur 3 ans. Étant donnée le coût de chaque projet pour chaque année et le profit obtenu par l'exécution d'un projet.

	Coût par année			Profit
Projet	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Budget	25	25	25	

Formuler le programme linéaire qui aidera le chef de projet à prendre les bonnes décisions.

Exercice N°5 : Sélection de Projets

Solution

Solution

1. Variables de décision :
   - $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le projet i est exécuté, avec } 1 \leq i \leq 5. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. Fonction objectif :

   $$\max Z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$
3. Contraintes liées au PL :
   - $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$
   - $x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$
   - $8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$

Exercice N°6 Problème de couverture

Énoncé

Énoncé

Il y a cinq villes dans la région R. La région doit déterminer où construire les casernes de pompiers. La région veut construire le nombre minimum de casernes de pompiers et s'assurer qu'au moins une caserne de pompiers est près de 20 minutes de chaque ville. Les temps en minute requis, pour conduire entre les 5 villes, sont les suivants :

	1	2	3	4	5
1	0	10	20	30	30
2	10	0	25	35	20
3	20	25	0	15	30
4	30	35	15	0	15
5	30	20	30	15	0

Formuler le programme linéaire qui modélise ce problème.

Exercice N°6 : Problème de couverture

Solution

Solution

1. Variables de décision :
   - $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la caserne est construite dans la ville n°i, avec } 1 \leq i \leq 5. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. Fonction objectif :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{5} x_i.$$

3. Contraintes liées au PL :
   - $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$
   - $x_2 + x_1 + x_5 \geq 1$
   - $x_3 + x_1 + x_4 \geq 1$
   - $x_4 + x_3 + x_5 \geq 1$
   - $x_5 + x_2 + x_4 \geq 1$

Exercice N°7 : Problème de sac à dos

Énoncé

Énoncé

Une personne voudrait remplir son sac à dos (max. 3Kg) pour une randonnée en utilisant les objets du tableau ci-dessous, dont les poids sont exprimés en grammes :

objet	utilité	poids
carte	10	200
gourde A	7	1500
gourde B	3	1500
pull	6	1200
k-way	2	500
tomme	4	800
fruits secs	5	700

Formuler un programme linéaire, qui modélise ce problème.

Exercice N°7 : Problème de sac à dos

Solution

Solution

- $x_i = 1$ si l'objet i est choisi, 0 sinon
- u_i utilité de l'objet i, w_i son poids **(en Kg)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ \text{soumis à} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq 3 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

Objectif du chapitre suivant :

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à étudier les méthodes de la résolution graphique d'un programme linéaire à deux variables de décision.