

Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik

Methoden der Bildrekonstruktion für das Comptonteleskop MEGA

Diplomarbeit

angefertigt von
Andreas Zoglauer

Zusammenfassung

Als gemeinsamer Nachfolger des Compton-Teleskops COMPTEL und des Paarerzeugungs-teleskops EGRET wird am Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik der Prototyp eines neuen Teleskops namens MEGA (Medium Energy Gamma-ray Astronomy) entwickelt, das beide Funktionsprinzipien vereint. Damit liefert der Detektor eine Vielfalt unterschiedlicher Wechselwirkungsereignisse (Compton-Stöße mit und ohne Elektronen-spur, mehrfache Comptonstöße und Paarereignisse) mit stark variierenden, aber bis zu einem gewissen Grad bestimmbaren, Orts- und Energieunsicherheiten.

In dieser Arbeit wurde mit dem List-Mode Maximum-Likelihood Expectation-Maximization Verfahren eine geeignete Bildrekonstruktionsmethode für den Detektor gefunden. Das aus der Nuklearmedizin stammende Verfahren wurde für die Anforderungen der Astrophysik erweitert.

Für alle Ereignistypen wurden unterschiedliche Näherungen der Instrument-Response implementiert und getestet. Es konnte gezeigt werden, dass durch eine individuelle Modellierung der Einzelereignisse über die Breite der Compton-Ereigniskreise bzw. der Länge der Ereigniskreissegmente eine gute Winkelauflösung (1° - 2° FWHM) und eine gute mittlere Sensitivität erzielt werden kann (mit einem minimalen Punktquellenfluss (5σ) von $3 \cdot 10^{-4} \gamma \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ für 5 Ereignisse pro Sekunde Hintergrund, 10^5 s Beobachtungszeit und ein E^{-2} -Spektrum zwischen 0.5 MeV und 50 MeV für alle Ereignistypen und ohne Selektionen).

Für Eichungen und terrestrische Anwendungen des Detektors wurde das Verfahren für zwei- und dreidimensionale Rekonstruktionen im Nahfeld erweitert.

Mit Hilfe von simulierten und realen Daten wurde der Algorithmus für verschiedene Quell-geometrien, Energiebereiche und Detektorgeometrien getestet. Es konnte gezeigt werden, dass das Rekonstruktionsverfahren für alle denkbaren Anwendungsbereiche des Detektors geeignet ist.

Inhaltsverzeichnis

1 Astronomie mit Gammastrahlung	5
1.1 Compton-Streuung und Paarerzeugung	5
1.1.1 Compton-Effekt	5
1.1.2 Paarerzeugung	8
1.2 Aufbau eines kombinierten Compton- und Paar-Teleskopes	8
1.3 Missionsziele für die nächste Generation von Compton-Teleskopen	9
1.4 Anforderungen an die nächste Generation von Compton-Teleskopen	9
2 Der Gamma-Detektor MEGA	12
2.1 Der Konverter/Tracker	12
2.2 Das Kalorimeter	13
2.3 Detektorversionen für eine Satellitenmission	14
3 Vom γ-Quant zur Himmelskarte	16
3.1 Generierung von Daten durch Monte-Carlo-Simulation	16
3.2 Spurerkennung, Klassifizierung und Sequenzierung	17
3.3 Statistiken der Ereignisse	19
4 Auswahl des Algorithmus zur Bildrekonstruktion	26
4.1 Anforderungen an das Rekonstruktionsverfahren	26
4.2 Auswahl des Rekonstruktionsalgorithmus	27
5 Die Likelihood-Funktion und der List-Mode-Likelihood	30
5.1 Berechnung des Binned-data Log-Likelihood	30
5.2 Der Expectation-Maximization Algorithmus	31
5.3 Übergang vom Binned-Mode zum List-Mode	33
6 Modellierung der Instrument-Response im List-Mode	35
6.1 Definition der Transmissionswahrscheinlichkeiten und Systemsensitivitäten	35
6.2 Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten in sphärischen Koordinaten	38
6.2.1 System-Modell ohne Berücksichtigung der Messfehler	38
6.2.2 System-Modell unter Berücksichtigung der Ungenauigkeit der Elektronenspur	39
6.2.3 System-Modell unter Berücksichtigung aller Messunsicherheiten	41
6.3 Systemsensitivitäten	44
7 Erweiterungen des EM-Algorithmus	45
7.1 Das Viewport-Problem	45
7.2 Regularisierung	47
7.3 Alternative EM-Algorithmen	49

8 Ergebnisse der Simulation von MEGA als Satellitenteleskop	54
8.1 Simulierte astronomische Quellen	54
8.2 Effektive Fläche und Sensitivität	57
8.3 Designoptimierungen	60
9 Abbildung von Quellen im Nahfeld	62
9.1 Anwendungen für MEGA im Nahfeld	62
9.2 Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten in kartesischen Koordinaten	63
10 Erste Ergebnisse des Prototypen	68
11 Ausblick	72
A Berechnung von Brennpunkten	74

Kapitel 1

Astronomie mit Gammastrahlung

Seit Anbeginn der Zeit hat der Blick hinauf zum nächtlichen Sternenhimmel den Menschen mit Ehrfurcht und Neugier erfüllt.

Während die Archäoastronomie der antiken Völker noch darauf abzielte, aus den Beobachtungen des Himmels wiederkehrende jahreszeitliche Ereignisse vorauszusagen (z.B. Sonnenwenden), die Navigation auf Reisen vorzunehmen (z.B. Sternenkarten erstellen) und Kalender aufzustellen, begann mit der Entwicklung des ersten Teleskops durch Galilei die Erforschung des Universums, das jenseits des menschlichen Wahrnehmungsbereichs liegt. Aber es dauerte bis zur Entwicklung von Teleskopen für verschiedene Energiebereiche - vom Infraroten bis zur Gammastrahlung - bis es möglich war, die Natur und den Ursprung des Universums umfassend zu erforschen.

Die Bestrebungen bei der Entwicklung von neuen Teleskopen liegt heute darin, bestehende Telekope mit besserer Winkel- und Energieauflösung, sowie besser Sensitivität zu überflügeln, um damit einen immer tieferen Einblick in das Universum zu erhalten.

Das vom Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik entwickelte kombinierte Compton- und Paar-Teleskop MEGA (*Medium Energy Gamma-ray Astronomy*) wird dazu einen wichtigen Beitrag liefern. Der für den Energiebereich zwischen 500 keV und 50 MeV konzipierte Detektor wird seinem Vorgänger COMPTEL [1], der auf dem Satelliten GRO (1991-2000) installiert war, hinsichtlich Winkelauflösung um mindestens einen Faktor 2 und hinsichtlich Sensitivität um mehr als einen Faktor 10 überlegen sein.

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Algorithmen vorgestellt, mit denen aus den Detektordaten Bilder rekonstruiert werden können.

1.1 Compton-Streuung und Paarerzeugung

Im ersten Abschnitt werden die verschiedenen physikalischen Prozesse vorgestellt, denen die das γ -Teleskop MEGA durchquerenden Photonen vorrangig unterliegen: Compton-Effekt und Paarbildung.

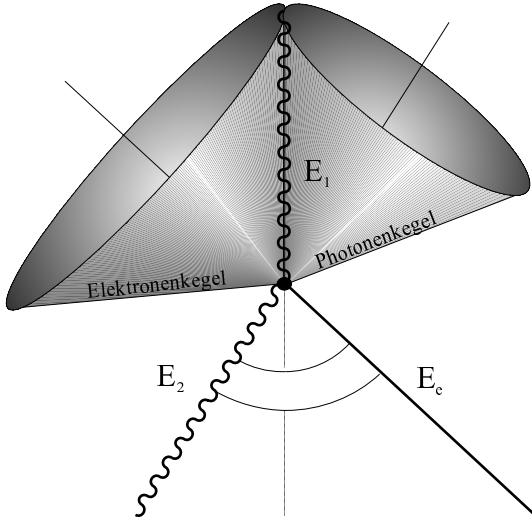
1.1.1 Compton-Effekt

Im Jahre 1922 gelang dem amerikanischen Physiker Arthur H. Compton (*1892, †1962) ein eindeutiger Beweis der Lichtquantenhypothese und der Nachweis der Gültigkeit von Energie- und Impulserhaltung im atomaren Bereich: Bei einem Experiment wurde Röntgenstrahlung während der Durchquerung von Graphit unter Änderung ihrer Wellenlänge gestreut.

Einfache Comptonstreuung

Bei der Comptonstreuung überträgt ein Photon einen Teil seiner Energie auf ein quasi-freies¹ Elektron und wird gegenüber seiner Einfallsrichtung gestreut (vgl. Abb. 1.1).

Abbildung 1.1: Compton-Streuung



Bezeichnungen bei der Comptonstreuung:

E_1	Energie des einfallenden Photons
E_2	Energie des gestreuten Photons
E_0	Ruheenergie des Elektrons
E_e	auf das Elektron übertragene Energie
E_e^{ges}	relativistische Gesamtenergie des Elektrons
\mathbf{p}_1	Impuls des einfallenden Photons
\mathbf{p}_2	Impuls des gestreuten Photons
\mathbf{p}_e	relativistischer Impuls des Elektrons
m_0	Ruhemasse des Elektrons
φ	Streuwinkel des Photons
ϵ	Streuwinkel des Elektrons
α	Winkel zwischen Elektron und gestreutem Photon
\mathbf{e}_1	Richtung des einfallenden Photons
\mathbf{e}_2	Richtung des gestreuten Photons
\mathbf{e}_e	Richtung des gestreuten Elektrons

Dabei gilt die Energie- und Impulserhaltung:

$$E_1 + E_0 = E_2 + E_e^{ges} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_e \quad (1.2)$$

Die relativistische Gesamtenergie E_e^{ges} des gestreuten Elektrons ergibt sich aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung: $E_e^{ges} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p_e^2 c^2}$. Demnach beträgt die gemessene, d.h. die auf das Elektron übertragene Energie²: $E_e = E_e^{ges} - m_0 c^2$.

Für den Streuwinkel des Photons ergibt sich damit:

$$\cos \varphi = 1 - E_0 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \quad (1.3)$$

Sowie für den Streuwinkel des Elektrons:

$$\cos \epsilon = \frac{E_e(E_1 + E_0)}{E_1 \sqrt{E_e^2 + 2E_e E_1}} \quad (1.4)$$

Und für den Winkel zwischen Elektron und gestreutem Photon:

$$\cos \alpha = \frac{E_e(E_2 - E_0)}{E_2 \sqrt{E_e^2 + 2E_e E_0}} \quad (1.5)$$

Für den maximalen Streuwinkel des Elektrons - also den Limes gegen den ungestreuten Fall - folgt damit: $\lim_{E_e \rightarrow 0} \epsilon = \pi/2$, d.h. das Elektron kann nur vorwärts gestreut werden.

¹ Es wird angenommen, dass das Elektron zu Beginn ruht. Vor allem bei guten Energieauflösungen des Detektors ($\sigma < 4\text{keV}$) zeigt sich, dass die Eigenbewegung des Elektrons nicht mehr vernachlässigbar ist. Dies führt zur Doppler-Verbreiterung der gemessenen Elektronenenergie.

² Die Bindungsenergie des Elektrons wird nicht gemessen, da diese dem Si-Kristall über charakteristische Röntgenstrahlung wieder zugeführt wird.

Der Fehler des Streuwinkel ergibt sich nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu:

$$\Delta\varphi = \frac{E_0}{\sin\varphi} \sqrt{\left(\Delta E_2 \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\Delta E_e}{E_1^2}\right)^2} \quad (1.6)$$

Aus den Gleichungen (1.1) und (1.2) folgt für die gemessene Richtung \mathbf{e}_1 des einfallenden Photons:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_e \sqrt{E_e^2 + 2E_0 E_e} + \mathbf{e}_2 E_2}{E_e + E_2} \quad (1.7)$$

Dieser Vektor entspricht der Schnittgerade des Photonen- und des Elektronenkegels in Abbildung 1.1.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Compton-Winkel φ angenommen wird, beschreibt die Klein-Nishina-Gleichung:

$$\frac{d\sigma_c}{d\varphi} = \sin\varphi \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \gamma(1 - \cos\gamma)} \right)^2 \left(1 + \cos^2\gamma + \frac{\gamma^2(1 - \cos\varphi)^2}{1 + \gamma(1 - \cos\varphi)} \right) \quad (1.8)$$

wobei: $\gamma = \frac{E_1}{E_0}$
 $r_e = \frac{e_0^2}{m_0 c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-15} m$ (klassischer Elektronenradius)

Für den totalen Streuquerschnitt folgt:

$$\sigma_c = 2\pi r_e^2 \left[\frac{1 + \gamma}{\gamma} \left(\frac{2 + 2\gamma}{1 + 2\gamma} - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + 2\gamma) \right) + \frac{1}{2\gamma} \ln(1 + 2\gamma) - \frac{1 + 3\gamma}{(1 + 2\gamma)^2} \right] \quad (1.9)$$

Doppelte Compton-Streuung

Die doppelte Compton-Streuung unterscheidet sich von der einfachen durch eine erneute Streuung des gestreuten Photons im ersten Detektor.

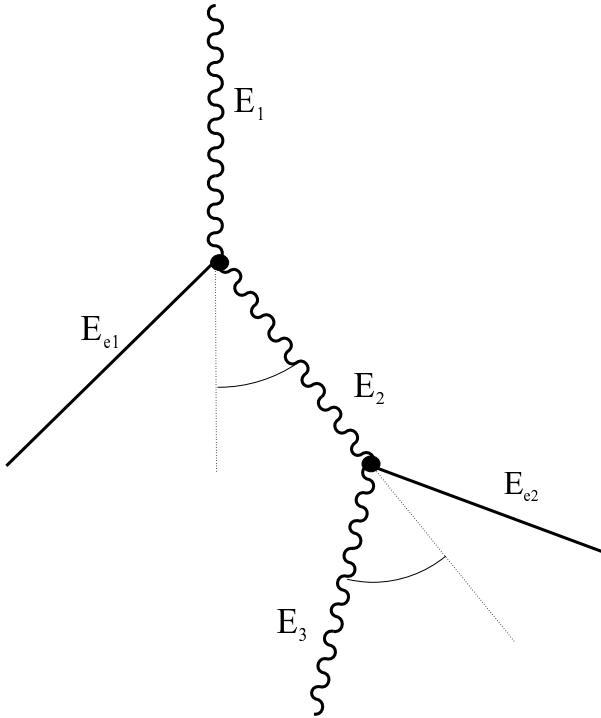


Abbildung 1.2: Bezeichnungen bei der doppelten Compton-Streuung

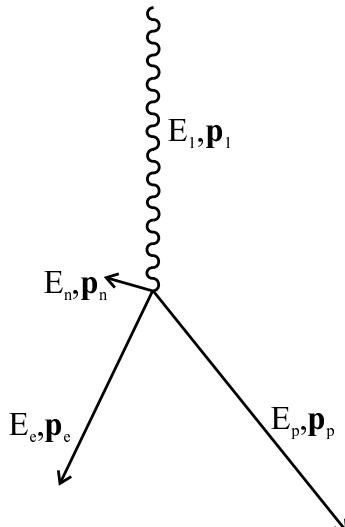


Abbildung 1.3: Bezeichnungen bei der Paarerzeugung

Da für den zweiten Comptonstoß der Streuwinkel des Photons φ_2 (vgl. Abb. 1.2) und die Energie des Elektrons E_{e2} bekannt sind, kann die Energie des gestreuten Photons E_3 aus

Gleichung (1.3) berechnet werden. Damit kann dann auch E_2 ermittelt werden. Somit ist es möglich den ersten Compton-Winkel auch dann zu berechnen, wenn das zweite gestreute Photon nicht vollständig im Detektor gestoppt wird.

1.1.2 Paarerzeugung

Übersteigt die Energie des einfallenden Photons 1.022 MeV, so kann sich dieses Photon beim Durchgang durch Materie in ein Elektron und ein Positron umwandeln (siehe Abb. 1.3). Dabei wird ein Atomkern (u.U. auch ein Elektron) benötigt, um den Impuls des Photons teilweise aufzunehmen.

Für das einfallenden Photons gilt:

$$E_1 = E_e + E_p + E_n \quad (1.10)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_n \quad (1.11)$$

Da es sich bei der Paarerzeugung um ein Drei-Körper-Problem handelt und sowohl der Impuls als auch die Energie des Atomkerns nicht gemessen werden können, muss versucht werden eine Näherungslösung für die Ursprungsrichtung des Photons zu finden.

Geht man als einfachste Annahme davon aus, dass der Energieübertrag auf Elektron und Positron identisch ist und dass der Impulsübertrag auf den Atomkern vernachlässigbar ist, so folgt für die Ursprungsrichtung \mathbf{e}_1 des Photons näherungsweise:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_e + \mathbf{e}_p \quad (1.12)$$

\mathbf{e}_e und \mathbf{e}_p sind die Richtungsvektoren von Elektron und Positron. Berücksichtigt man zusätzlich die ungleichmäßige Verteilung der Energie auf Elektron und Positron, so folgt (siehe z.B. [3]):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_e + \frac{|\mathbf{p}_p|}{|\mathbf{p}_e|} \mathbf{e}_p \quad (1.13)$$

mit: $\mathbf{p}_i = \frac{E_i}{c} \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_i}}$, $i \in \{p, e\}$

Auf den Atomkern wird vor allem bei niedrigen Energien ein nicht unerheblicher Anteil des Photonenimpulses übertragen (etwa 500 keV/c). Da dieser einer Messung nicht zugänglich ist, verfälscht er die Berechnung der Einfallsrichtung des Photons entsprechend. Erst bei höheren Energien (50 MeV) ist dieser Fehler nicht mehr von Bedeutung.

1.2 Aufbau eines kombinierten Compton- und Paar-Teleskopes

Um Compton-Ereignisse zu detektieren muss ein Teleskop mindestens zwei Wechselwirkungsorte und Energien messen können:

1. Den Ort der Compton-Wechselwirkung und die Energie des gestreuten Elektrons.
2. Den Ort der Absorption des gestreuten Photons und seine Energie.

Somit wird ein erster Detektor benötigt, der eine hohe Wahrscheinlichkeit für Compton-Streuung besitzt und ein zweiter der die Compton-gestreuten Teilchen vollständig absorbiert.

Aus den beiden gemessenen Energien kann dann der Compton-Winkel φ über Gleichung (1.3) bestimmt werden und die beiden Wechselwirkungspositionen legen die Achse des Compton-Kegels fest. Allerdings kann damit die Richtung des Photons nicht eindeutig bestimmt werden, sondern nur auf einen Ereigniskegel (vgl. Abb. 1.1) festgelegt werden.

Dies führt zu einem Ereigniskreis (siehe Abb. 1.4 oben) auf der Himmelssphäre. Diese Vieldeutigkeit hat zur Folge, dass ein Photon zur Signatur von verschiedenen Punktquellen gehören könnte. Dies führt zu einer Erhöhung des Hintergrunds und einer Verringerung der Sensitivität des Instruments.

Gelingt es, die Richtung des Elektrons ebenfalls zu bestimmen, so wird diese Mehrdeutigkeit aufgehoben und die genaue Herkunftsrichtung des Photons kann ermittelt werden. Der Ereigniskreis reduziert sich zu einem Segment (siehe Abb. 1.4 Mitte) oder im besten Fall zu einem Punkt. Um die Richtungsbestimmung zu erlauben, muss der erste Detektor aus dünnen Lagen Konversionsmaterial bestehen, das genau so dick ist, dass die Elektronen im ersten Detektor vollständig abgestoppt werden, aber gleichzeitig dünn genug, so dass die Elektronen für die Richtungsbestimmung mehrere Lagen durchqueren können.

Gelingt es die Spuren von Elektronen zu bestimmen, dann gelingt dies auch mit den beiden Spuren der Elektron-Positron-Paare, die während der Paar-Bildung entstehen (siehe Abb. 1.4 unten). Der zweite Detektor muss in diesem Fall die Elektronen und Positronen bzw. die Annihilationsphotonen vollständig abstoppen und ihre Energie messen.

1.3 Missionsziele für die nächste Generation von Compton-Teleskopen

Ein Compton-Teleskop der nächsten Generation sollte primär darauf ausgerichtet sein, einen möglichst großen Ausschnitt des Sternenhimmels beobachten zu können. Damit ist man in der Lage vollständige Himmelskarten zu erstellen und eine hohe Sensitivität zu erzielen.

Im Energie-Bereich zwischen 500 keV und 50 MeV liegen mehrere interessante Linienstrahlungen, die durch Kernzerfälle erzeugt werden und die Indikatoren für bestimmte Vorgänge im Universum sind:

- ^{26}Al wird in Sternentstehungsgebieten während der Nukleosynthese erzeugt.
- ^{56}Co und ^{44}Ti entstehen während Supernovae und können Aufschluss über ihren Verlauf geben.

Weitere interessante Beobachtungsziele sind:

- Untersuchung von AGNs, von denen einige ihr Leuchtkraftmaximum in diesem Energiebereich haben.
- Beobachtung und Lokalisierung von Gamma-Bursts.
- Untersuchung von bislang unidentifizierten Quellen der Teleskope EGRET und COMPTEL.
- Untersuchung von interstellaren Strahlungsfeldern über Bremsstrahlungsemissionen.

und viele mehr.

1.4 Anforderungen an die nächste Generation von Compton-Teleskopen

Die zweite Generation von Compton-Teleskopen sollte der ersten sowohl hinsichtlich Sensitivität als auch hinsichtlich Winkelauflösung deutlich überlegen sein. Dies ist durch Verbesserungen auf mehreren Bereichen erreichbar:

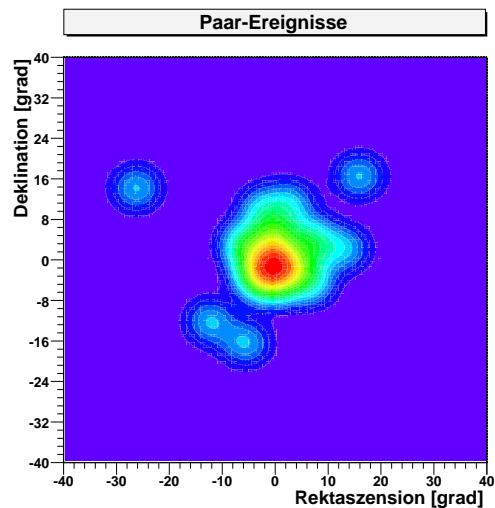
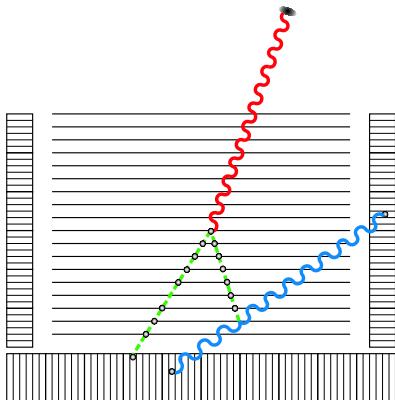
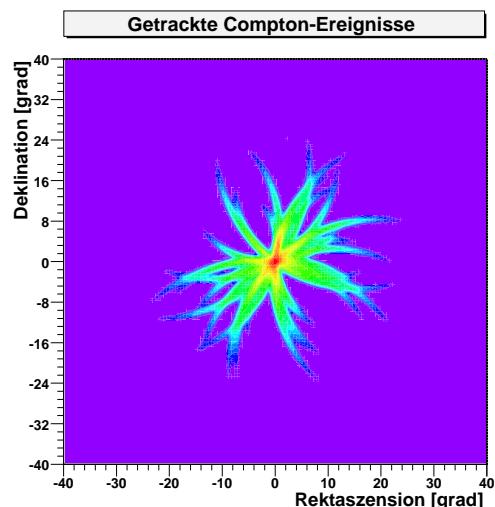
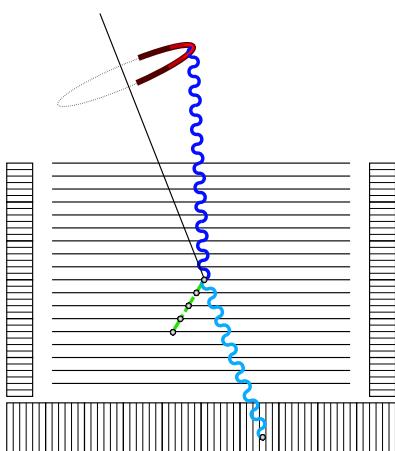
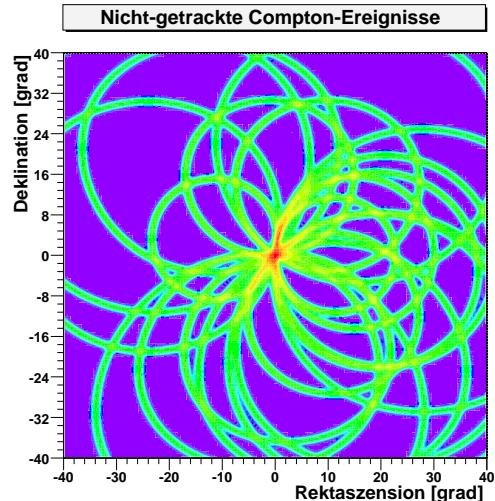
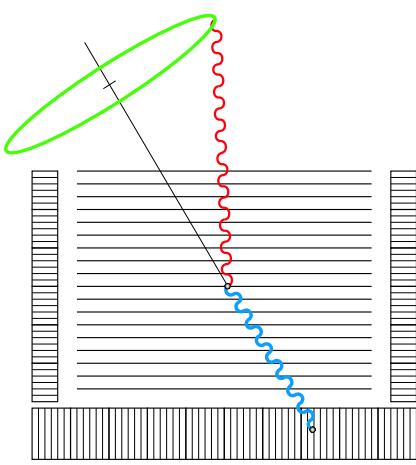


Abbildung 1.4: Vergleich der drei fundamentalen Ereignistypen von MEGA. *Oben:* Nicht getrackte Ereignisse bilden Ereigniskreise, die sich an der Position der Punktquelle überlagern. *Mitte:* Bei Ereignissen mit Elektronenspur reduziert sich der Kreis zu einem Segment des Kreises. *Unten:* Bei Paar-Ereignisse kann die Ursprungsrichtung direkt bestimmt werden.

1. Reduzierung der Breite der Ereigniskreise:

Die Ausdehnung des Ereigniskreises wird durch zwei Faktoren bestimmt: die Energiesmessfehler und die Ortsmessfehler. Die Unsicherheit in der Energiebestimmung führt über Gleichung (1.6) zu einer Unsicherheit in der Bestimmung des Compton-Winkels. Die Unsicherheiten in der Ortsbestimmung führen zu einem Fehler in der Bestimmung der Compton-Achse. Letzteres kann durch eine Verkleinerung der Auflösungselemente der Detektoren oder einen größeren Abstand zwischen den beiden Detektoren erreicht werden.

2. Reduzierung der Ereigniskreise zu Ereigniskreissegmenten:

Der erste Detektor muss in der Lage sein Elektronenspuren zu erkennen. Dazu können sowohl Xenon-Detektoren (siehe [5]) als auch Silizium-Streifenzähler verwendet werden (siehe Kap. 2).

3. Reduzierung des instrumentellen Hintergrunds:

Dieser wird vorwiegend durch Aktivierung von Isotopen über moderierte Neutronen und Protonenreaktionen erzeugt (siehe [6]). Eine Vermeidung von Wasserstoff, Aluminium, Kupfer und anderen Stoffen beim Bau des Satelliten, kann den instrumentellen Hintergrund reduzieren helfen.

Ferner muss das Teleskop in der Lage sein zu erkennen, ob ein Photon von unten (also mit hoher Wahrscheinlichkeit aus dem Satelliten oder aus der Erdatmosphäre) oder oben kam. Dies wird entweder durch eine Flugzeitmessung zwischen den beiden Detektoren oder durch eine Richtungsbestimmung über die Wechselwirkungsmuster der Photonen in den beiden Detektoren erreicht.

4. Erhöhung der effektiven Fläche:

Um eine möglichst hohe Anzahl an Ereignissen zu detektieren, benötigt der Detektor eine möglichst große effektive Fläche. Dies wird vorwiegend über die Menge an sensitivem Material gesteuert.

5. Erweiterung des Gesichtsfelds:

Die Größe des Gesichtsfelds hängt im Wesentlichen von der geometrischen Anordnung der Detektoren ab. Umschließt der zweite Detektor den ersten von fünf Seiten, wird das größte Gesichtsfeld erzielt. Dadurch erhöht sich die Anzahl der gemessenen Ereignisse und eine Durchmusterung des gesamten Himmels wird vereinfacht.

Der im nächsten Abschnitt beschriebene Gamma-Detektor MEGA, weist in den meisten der aufgezählten Punkten Verbesserungen gegenüber seinem Vorgänger COMPTEL auf.

Kapitel 2

Der Gamma-Detektor MEGA

MEGA (*Medium Energy Gamma Astronomy*) ist eine mögliche Realisierung eines Compton-Teleskops der zweiten Generation. Compton-Teleskope der ersten Generation, wie z.B. COMPTEL waren Szintillationsdetektoren ohne bildgebende Messeinrichtung, die nur Compton-Ereignisse nachweisen konnten. Der besondere Aufbau von MEGA ermöglicht es, Gamma-Strahlung auf zweierlei Art und Weise zu detektieren: mittels Compton-Effekt und über Paarbildung.

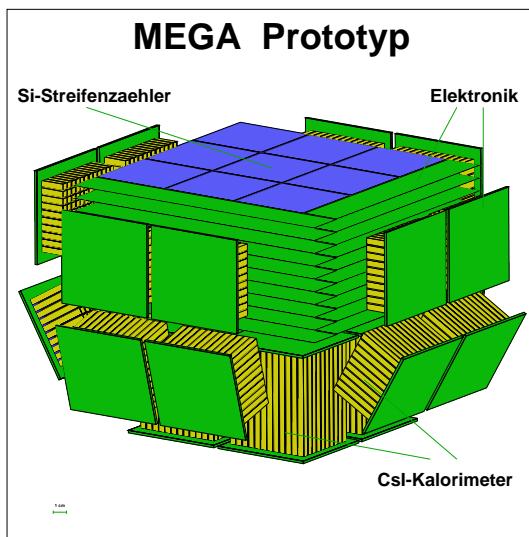


Abbildung 2.1: Simulationsmodell des Prototypen: Er besteht aus zehn Lagen Streifenzählern, die von 20 Kalorimetern umgeben sind.

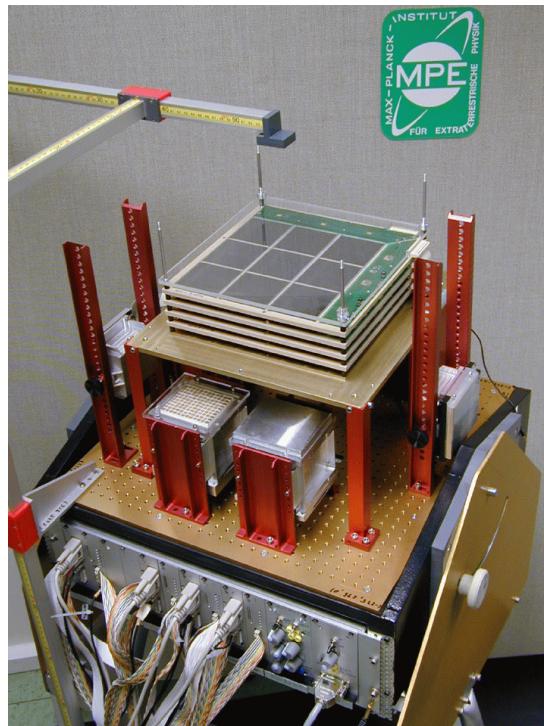


Abbildung 2.2: Laboraufbau des Prototypen: Es sind fünf Lagen Silizium-Streifenzähler zu erkennen, sowie zwei 8cm- und zwei 4cm-Kalorimeter.

Wie jede Compton-Kamera so besteht auch MEGA im Prinzip aus zwei Subsystemen: einem Konverter/Tracker (D1) und einem Kalorimeter (D2).

2.1 Der Konverter/Tracker

Das erste Detektorsystem hat zwei Aufgaben: Zum einen soll dort Compton-Streuung bzw. Paarbildung stattfinden - daher der Name *Konverter*: das einfallende Photon wird in ein langwelligeres Photon und ein Elektron, bzw. in eine Elektron und ein Positron konvertiert.

Die zweite Aufgabe ist die Aufzeichnung der Spuren von Elektronen und Positronen (die Teilchen werden *getrackt*), indem der Energiedeposit der Teilchen in aufeinander folgenden Lagen bestimmt wird.

Um diese beiden Aufgaben erfüllen zu können, muss der Konverter zum einen aus einem Material bestehen, das einen sehr hohen Compton-Wechselwirkungsquerschnitt besitzt. Zum anderen muss das Material sowohl eine sehr gute Ortsauflösung für die Spurerkennung als auch eine gute Energieauflösung für die Energiebestimmung der Elektronen und Positronen bieten.

Deswegen wird der Tracker aus mehreren Ebenen Silizium-Streifenzähler aufgebaut. Eine Lage Streifenzähler ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Sie besteht aus neun, $500 \mu\text{m}$ dicken und $6.3 \times 6.3 \text{ cm}^2$ großen Silizium-Wafern, die auf der Ober- und Unterseite gekreuzt jeweils 128 Auslesestreifen im Abstand von $470 \mu\text{m}$ besitzen. Damit beträgt die Ortsauflösung in etwa $0.5 \times 0.47 \times 0.47 \text{ mm}^3$. Die Energieauflösung beträgt etwa $\sigma = 4 \text{ keV}$ und ist unabhängig von der gemessenen Energie. Umgeben werden die Wafer von Front-End-Elektronik, die eine Verstärkung und analoge Signalverarbeitung durchführt, sowie ein Triggersignal für die weitere Ausleseelektronik generiert.



Abbildung 2.3: Eine Lage des Trackers. Eine Anordnung von 3×3 Silizium-Streifenzählern dient zum Nachweis der Teilchen-Spuren und der Messung der deponierten Energie.

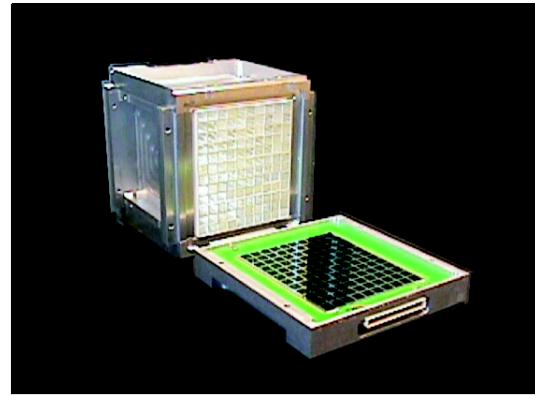


Abbildung 2.4: 8cm CsI-Kalorimeter. Der Block besteht aus 120 CsI-Stäben der Größe $5 \times 5 \times 80 \text{ mm}^3$, die von Millipore-Papier umgeben sind. Davor liegt ein Photodiodenarray, der das Szintillationslicht misst.

2.2 Das Kalorimeter

Die Aufgabe des zweiten Detektorsubsystems ist in erster Linie die vollständige Absorption des gestreuten Photons beim Compton-Effekt bzw. der Elektronen, Positronen und Annihilationsphotonen bei der Paarbildung. Vor allem für die Rekonstruktion von Compton-Ereignissen muss die Energie und Wechselwirkungsposition sehr genau bestimmt werden. Diese Anforderungen werden von Materialien erfüllt, die eine geringe Wechselwirkungslänge sowohl für Photonen als auch Elektronen besitzen, was bei höheren Atommassen und Dichten gegeben ist. Auf der anderen Seite muss sich das Material gut pixelieren lassen, um die gewünschte Ortsauflösung zu erhalten. Von den Materialien, die diese Eigenschaften besitzen und sich zum heutigen Zeitpunkt in genügend großem Umfang und mit überschaubarem Kostenaufwand herstellen lassen, sind thallium-dotierte CsI-Stäbe als Szintillationsmaterial die erste Wahl.

Ein Kalorimeterblock besteht aus 120 CsI-Stäben ($5 \times 5 \times 80 \text{ mm}^3$ oder $5 \times 5 \times 40 \text{ mm}^3$), die von mehreren Lagen Millipore (stark reflektierendes Filterpapier) umgeben sind. In den Stäben wird die deponierte Energie in Szintillationslicht umgewandelt, das in den an

den Kopfenden der Stäbe angebrachten Photodioden gemessen wird. Bei den 8cm-Stäben sind an beiden Seiten Photodioden angebracht. Dies erlaubt eine Tiefenauflösung in den Stäben, die bei den einseitig ausgelesenen 4cm-Stäben nicht gegeben ist. Im Idealfall sollte eine Auflösung entlang der Stäbe von 0.5 cm Halbwertsbreite erzielt werden können. Die erreichbare Energieauflösung ist in Abbildung 2.5 dargestellt: Für hohe Energien beträgt die relative Energieunsicherheit $\Delta E/E$ ca. 5 %. Für geringere Energien steigt sie aufgrund des Rauschens der Elektronik ($\sigma_{RE} \approx 20$ keV) stark an.

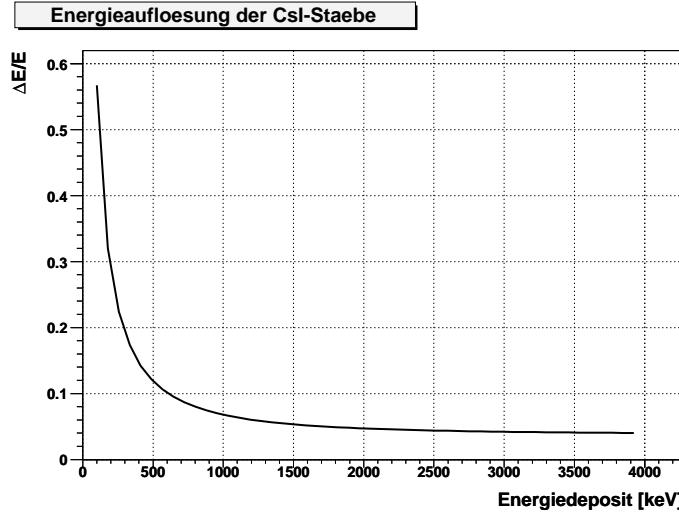


Abbildung 2.5: Energieauflösung der Kalorimeterstäbe. Der deutliche Anstieg zu kleinen Energien hin ist auf das Rauschen der Elektronik zurückzuführen (näheres siehe [3] und [4]).

2.3 Detektorversionen für eine Satellitenmission

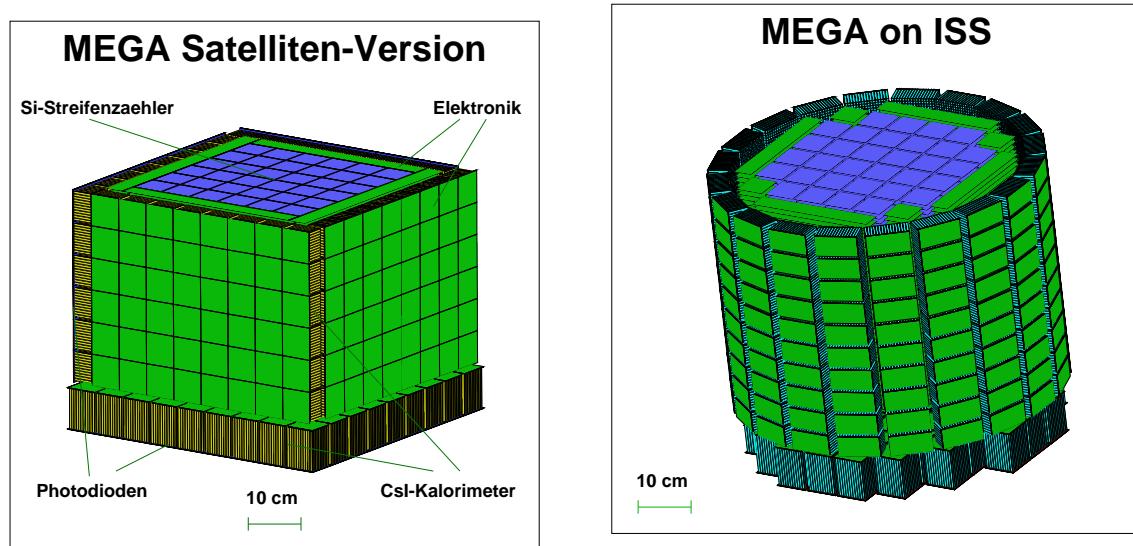


Abbildung 2.6: Geometrie für eine Satelliten-Mission

Abbildung 2.7: Runde Geometrie, wie sie beispielsweise für den Transport auf die Internationale Raumstation ISS benötigt würde.

Um die für eine Satelliten-Mission notwendige Sensitivität zu erreichen, ein möglichst

weites Gesichtfeld zu erhalten und eine gute Richtungsauflösung zu erzielen, müssen an der Prototyp-Geometrie einige Veränderungen vorgenommen werden:

- Der Tracker sollte möglichst vollständig und so dicht wie möglich von Kalorimetern umgeben sein. Damit wird zum einen von unten kommende Strahlung abgeschirmt, und zum anderen wird damit eine hohe Anzahl der im ersten Detektor gestreuten Photonen absorbiert.
- Das Trackervolumen sollte möglichst groß sein, um eine genügend hohe Anzahl von Compton-gestreuten Ereignissen zu erhalten.
- Das Volumen des Kalorimeters sollte groß genug sein, um möglichst viele gestreute Photonen und Elektronen-Positronen-Paare vollständig zu absorbieren, aber gleichzeitig möglichst klein sein, um die Satellitenmasse zu minimieren.

Ein möglicher Kompromiss ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Dabei handelt es sich um die *Satellitengeometrie*, auf der die meisten Simulationen in dieser Arbeit beruhen. Der Tracker besteht aus 30 Lagen Streifenzählern, die aus jeweils 36 Wafer bestehen. Diese sind von 192 Kalorimetern mit der Dicke 4 cm umgeben. Der Bodenblock besteht aus 81 Kalorimetern mit 8 cm Dicke.

Eine weitere Möglichkeit ist in Abbildung 2.7 dargestellt. Durch die runde Geometrie wurde versucht, die Masse des Detektors zu verringen und ihm eine spezielle Form für den Transport auf die Internationale Raumstation zu geben. Da bei der runden Form die Kalorimeter nicht mehr geschlossen angeordnet werden können, verringert sich der Abschirmeffekt der Kalorimeter um ca. 15%.

Kapitel 3

Vom γ -Quant zur Himmelskarte

Dieses Kapitel beschreibt den Weg von der Generierung der Daten über die Mustererkennung und Datenanalyse bis hin zur Bildrekonstruktion.

3.1 Generierung von Daten durch Monte-Carlo-Simulation

Da sich das Detektorsystem bis zur Fertigstellung dieser Arbeit noch im Aufbau befand, beruhen alle Ergebnisse - mit Ausnahme der von Kapitel 10 - auf Monte-Carlo-Simulationen.

Ein ursprünglich von Martin Hoffmann [7] implementiertes Simulationsprogramm, das auf der am CERN entwickelten FORTRAN-Bibliothek Geant 3.21 [8] beruht, wurde für die Generierung der zur Rekonstruktion notwendigen Daten weiterentwickelt. Damit wurden verschiedene Detektor-Geometrien (vgl. Kapitel 2) implementiert und verschiedene Quellverteilungen (Punktquellen, Flächenquellen, diverse Energiespektren, Nahfeld, Fernfeld, etc. - siehe Kap. 6 bis 9) simuliert.

Um den für das Fernfeld typischen parallelen Einfall der Photonen zu simulieren, wurden alle aus einer Richtung stammenden Photonen zufallsgeneratorgesteuert von einer Fläche gestartet, die größer als der Detektor ist. Für Nahfeld-Simulationen wurde isotrope Emission angenommen.

Die aus der Simulation gewonnenen tatsächlichen Wechselwirkungsorte und deponierten Energien wurden entsprechend den „messbaren“ Werten der Realität angepasst:

- Innerhalb eines CsI-Stabes und in den Auflösungselementen des Streifenzählers finden meist mehrere Energiedeposite statt. Diese werden zu einem Deposit am jeweiligen Messpunkt (Kreuzungspunkt der Streifen oder Zentrum der CsI-Stäbe) zusammengefasst. Bei doppelseitig ausgelesenen CsI-Stäben wurde die Koordinate entlang des Stabes in der Form einer Gaußschen Fehlerfunktion verrauscht.
- Alle Energiemessungen sind mit einem Fehler behaftet. Für den Tracker wurde eine gaußförmige Energieunsicherheit von $\sigma = 4 \text{ keV}$ pro Messpunkt angenommen und als Energiemessfehler in den Kalorimeter-Stäben werden die in Kapitel 2.2 angegebenen Werte verwendet.
- Des Weiteren existieren Energieschwellen, unterhalb denen die gemessenen Energien nicht ausgelesen werden, d.h. es muss mindestens ein Treffer vorhanden sein, der mehr als die Schwellenergie deponiert: Im Tracker beträgt diese Schwelle 20 keV und im Kalorimeter 100 keV. Ferner gehen alle Energiedeposite im Kalorimeter, die kleiner als 50 keV sind, im Rauschen unter.

Die Simulations-Bibliothek Geant berücksichtigt alle bekannten physikalischen Effekte, die im Detektor auftreten können, bis auf drei:

- Rückstoßimpuls des Atomkerns bei einer Paarbildung:

Im Mittel beträgt dieser 500 keV/c. Wie in Kapitel 3.3 aufgeführt wird, ist er aber gegenüber dem Fehler in der Bestimmung der Elektronenrichtung von geringer Bedeutung.

- Dopplerverbreiterung der Elektronenenergie in Silizium:

Da die Elektronen, an denen der Compton-Effekt stattfindet, nicht in Ruhe sind, wird ihre Energie doppler-verbreitert gemessen. Mit ca. $\sigma = 1$ keV liegt dieser Messfehler ebenfalls deutlich unter dem Gesamtfehler der Elektronenenergie von $\sigma = 4$ keV.

- Polarisationseffekte:

Manche astronomischen Objekte (z.B. Pulsare) entsenden polarisiertes Licht. Da das Geant-Programm die Ebene des Compton-Stoßes aber zufallsgesteuert festlegt, können polarisierte Quellen nicht ohne weiteres simuliert werden.

Trotz allem beeinflussen diese Effekte die Simulationsergebnisse nur unwesentlich.

Um die Simulation so realistisch wie möglich zu machen, liefert das Simulationsprogramm die Daten in der selben Form wie das Datenerfassungs- und Analyseprogramm des Detektors. Ein Beispiel für einen Compton-Stoß ist in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Schlüsselwort	Detektortyp	x [cm]	y [cm]	z [cm]	Energie [keV]
HT	2;	5.750;	-7.850;	-41.425;	383
HT	2;	5.750;	-8.375;	-39.897;	710
HT	1;	-10.782;	11.944;	-27.000;	121
HT	1;	-10.782;	11.897;	-27.000;	252
HT	1;	-9.701;	12.319;	-28.000;	136
HT	1;	-9.654;	12.319;	-28.000;	122
HT	1;	-10.547;	12.226;	-29.000;	310

Tabelle 3.1: Einzelnes simuliertes Ereignis. Das Schlüsselwort HT kennzeichnet die folgenden Informationen als Daten eines Hits. Es folgen der Detektortyp (1: D1, 2: D2), die Koordinaten des Hits und die dort deponierte Energie.

Im nächsten Schritt wird aus diesen Daten ein Compton- oder Paar-Event zusammengesetzt.

3.2 Spurerkennung, Klassifizierung und Sequenzierung

Für die Identifikation der Wechselwirkungsmuster des einfallenden Photons sowie der Elektronen-Spur kann ein von Christian Nefzger [3] entwickeltes Tracking-Programm verwendet werden. Der Einfluss möglicher Fehlinterpretationen während der Mustererkennung auf die Bildrekonstruktion wird im folgenden kurz vorgestellt.

Tracking:

Der erste Schritt ist die Identifikation von Spuren im Tracker. Die folgenden Probleme haben Einfluss auf die Bildrekonstruktion:

- Molière-Streuung:

Dabei handelt es sich um zahlreiche Klein-Winkelstreuungen (Coulomb-Streuungen an Atomen), denen das Elektron beim Durchqueren des Siliziums unterliegt. Dies hat zur Konsequenz, dass sich der Eintrittswinkel in das Silizium vom Austrittswinkel sehr stark unterscheiden kann (vgl. Kap. 3.3 - SPD). Dadurch ist die Richtungsbestimmung des Elektrons und die Reihenfolge der Treffer im Tracker mit einer hohen Ungenauigkeit versehen. Im ungünstigsten Fall streut das Elektron wieder in bereits durchquerte Lagen zurück.

- Startpunkt der Spur:

Auch die Bestimmung, an welchem Ende der Spur die Compton-Streuung stattgefunden hat, stellt ein Problem dar. Eine falsche Identifikation führt zu einem völlig fehlinterpretierten Ereignis, das die Quellintensität mindert und die Hintergrundsintensität erhöht. Insbesondere ist bei Spuren, die nur aus zwei Treffern bestehen, der Startpunkt nur sehr eingeschränkt bestimmbar.

- Fortsetzung der Elektronenspur in das Kalorimeter:

Die Spurerkennungssoftware muss in der Lage sein zu erkennen, ob ein Elektron den Tracker verlässt und in das Kalorimeter gelangt. In diesem Fall ist es sehr wahrscheinlich, dass auf dem Weg dorthin Energie in nicht-sensitivem Material deponiert wurde. Damit wird nur ein Bruchteil der tatsächlichen Elektronenenergie gemessen und der berechnete Comptonwinkel ist kleiner als der tatsächliche. Bei ungefährer Kenntnis der Gesamtenergie des Elektrons und der Art des durchquerten nicht-sensitiven Materials, sollte eine grobe Abschätzung der Energie aber möglich sein. Dies ist vor allem bei Paarbildungseignissen notwendig, da bei höheren Elektronenenergien zahlreiche Elektronen den Tracker verlassen (vgl. Tab. 3.2).

Klassifizierung:

Als nächstes erfolgt eine einfache Klassifizierung der Events: Ereignisse bei denen keine Spur zu erkennen ist, sind ungetrackte Compton-Ereignisse. Ist eine Spur vorhanden, liegt ein getracktes Compton-Ereignis vor. Bei mehrfacher Compton-Streuung im ersten Detektor werden zwei Tracks identifiziert, die an verschiedenen Stellen beginnen. Bei der Paarbildung gehen zwei Spuren von einem Punkt aus. Ein Fehler in der Klassifizierung führt wiederum zu einem völlig falsch interpretierten Ereignis, das die Hintergrundsintensität erhöht.

Sequenzierung:

Danach muss die Abfolge der verbleibenden Treffer bestimmt werden. Dabei treten folgende Probleme auf:

- Entscheidend ist festzustellen, ob die erste Wechselwirkung des einfallenden Photons tatsächlich im Tracker stattfand oder im Konverter.
- Im Kalorimeter finden meist mehrere Wechselwirkungen statt. Liegen diese in benachbarten Stäben, so ist es beinahe unmöglich festzustellen, in welchem Stab die erste Wechselwirkung stattfand. Als Wechselwirkungsort kann nur der energetische Schwerpunkt gewählt werden. Dies führt zu einer Erhöhung des Ortsmessfehlers. Bei sehr hohen Energien finden sehr viele Treffer im D2 statt, was die Identifikation der richtigen Reihenfolge sehr erschwert.

Ziel des Sequenzierungsalgorithmus muss es sein, jeder möglichen Treffer-Kombination eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen und die wahrscheinlichste davon auszuwählen.

Schlussfolgerungen:

Aus diesen Problemen soll ersichtlich werden, dass die Ereignisidentifikation bei einem modernen Compton-Teleskop eine große Herausforderung darstellt. Deswegen existiert bislang kein Analyse-Programm, das für eine andere Geometrie als den Prototypen den Weg von den Simulationsdaten zu den klassifizierten Ereignissen nachvollziehen könnte.

Für alle in dieser Arbeit verwendeten Geometrien (siehe Kap. 2) wurde eine ideale Spurerkennung, Klassifizierung und Sequenzierung angenommen. Dies wird durch die aus der Simulation bekannten Informationen ermöglicht.

Um Fehler aus der Mustererkennung in Rechnung zu stellen wurde in Simulationen mit Hintergrund die Quellintensität um 20 % reduziert und der Hintergrund um die selbe Anzahl an Ereignissen erhöht.

3.3 Statistiken der Ereignisse

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften von Punktquellen anhand der Satellitengeometrie (Abb. 2.6) näher untersucht.

Begriffs-Definitionen:

Ein Ereignis heißt *getriggert*, wenn mindestens ein Hit im D1 und D2 vorliegt.

Ein getriggertes Ereignis heißt *rekonstruierbar*, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Der erste Treffer liegt im D1.
2. Die deponierten Energien liegen oberhalb der Schwellen.
3. Aus den Energien und Wechselwirkungsorten lässt sich eine Compton-Streuung oder eine Paarbildung rekonstruieren.
4. Bei Paarereignissen müssen zwei Tracks im D1 an einem Punkt beginnen.

Ein Ereignis heißt *getrackt*, wenn das Compton-Elektron im D1 in mindestens drei aufeinander folgenden Lagen Energie deponiert. Ansonsten ist das Ereignis *nicht-getrackt*.

Ereignishäufigkeiten:

In Tabelle 3.2 sind die einzelnen Ereignishäufigkeiten zusammengefasst. Es wurde jeweils eine monoenergetische Punktquelle im Zenit simuliert.

Energie [MeV]	0.5	1	2	5	10	20	50	100	200
Compton-Ereignisse [%]	100	100	98	75	46	25	11	5	3
davon: Doppel-Compton [%]	16	14	13	14	15	14	10	11	9
getrackt [%]	0.1	8	47	77	83	87	87	89	86
Paar-Ereignisse [%]	0	0	2	25	54	75	89	95	97
unvollständig absorbiert [%]	13	34	59	81	98	99	100	100	100
Elektron verläßt den Tracker [%]	6	9	21	47	78	94	97	98	99

Tabelle 3.2: Unterschiedliche Ereignishäufigkeiten in Abhängigkeit von der Gesamtenergie

Die Verteilung von Compton- und Paar-Ereignissen entspricht etwa der aufgrund der Wechselwirkungsquerschnitte in Silizium erwarteten Aufteilung. Da ab ca. 2 MeV mehr als die Hälfte der Ereignisse getrackt sind, kann dann bei der Mehrzahl der Ereignisse die spezielle Fähigkeit von MEGA, Elektronen-Spuren zu bestimmen, ausgenutzt werden. Um die Grenzenergie für getrackte Ereignisse zu niedrigeren Werten zu schieben, wurden auch

Simulationen mit dünnen Streifenzählern durchgeführt (siehe Kap. 8.3). Ab ca. 2 MeV werden mehr als die Hälfte der Photonen im Detektor nicht mehr vollständig gestoppt, d.h. der Verlust der Gesamtenergie ist größer als 1%. Dies führt zu einer falschen Bestimmung des Comptonstreuwinkels. Die Stärke des Energieverlustes macht die Energiedispersion deutlich.

Energiedispersion:

Abbildung 3.1 enthält die Energiedispersionen der Summe aller Deposits für verschiedene Energien.

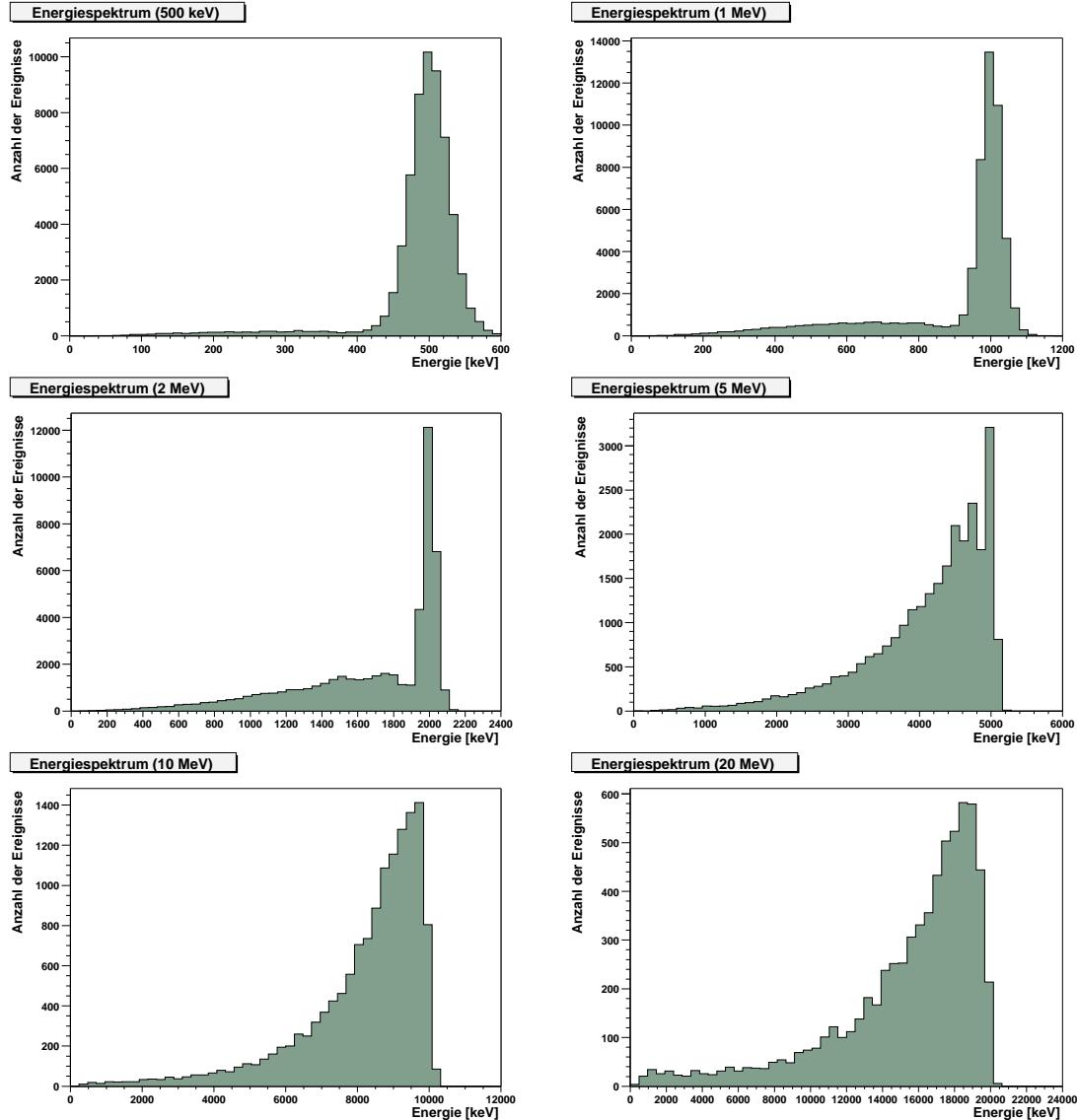


Abbildung 3.1: Energiespektren für Punktquellen im Zenit von 0.5 MeV bis 20 MeV: Mit zunehmender Energie sinkt die Anzahl der unvollständig absorbierten γ -Quanten. Die Anzahl der Ereignisse im Peak nimmt ab, bis schließlich keine Ereignisse mehr vollständig gestoppt werden (siehe auch Tab. 3.2).

Die Anzahl der vollständig absorbierten Photonen nimmt mit zunehmender Energie stark ab. Die Gründe hierfür sind:

- Je höher die Energie des Elektrons ist, desto wahrscheinlicher verlässt es den Tracker und deponiert Energie in nicht-sensitivem Material.

- Je höher die Energie des gestreuten Photons ist, desto höher sind auch die Teilchenenergien nach einer zweiten Wechselwirkung im Kalorimeter und desto wahrscheinlicher wird das zweite gestreute Photon nicht mehr gestoppt.
- Je höher die Gesamtenergie, desto höher ist die Anzahl der sekundären Teilchen. Somit wird die Wahrscheinlichkeit größer, dass eines den Detektor verlässt.

Dies wirft zwei Probleme auf: Zum einen lassen sich Spektren bei höheren Energien nicht mehr auf einfache Art bestimmen und zum anderen wird der Comptonwinkel falsch bestimmt.

Fehler in der Bestimmung des Comptonwinkels:

Bei der **Angular Resolution Measure (ARM)** wird der Differenz-Winkel zwischen dem als bekannt vorausgesetzten tatsächlichen Compton-Winkel und dem aus den Messdaten errechneten bestimmt.

Zunächst wird der Einfluss der einzelnen Messfehler auf die Breite der ARM exemplarisch für eine 2-MeV-Quelle untersucht. Für andere Energien ergeben sich ähnliche Ergebnisse. Die in Kapitel 3.1 beschriebenen Unsicherheiten werden zunächst getrennt betrachtet. In den Abbildungen 3.2 sind ihre ARM-Verteilungen dargestellt und in Tabelle 3.3 ihre Halbwertsbreiten zusammengefasst.

Messunsicherheiten eines 2 MeV Photons	nicht-getrackt	getrackt
Ortsauflösung im D1: FWHM_{O1} [°]	0.08 ± 0.015	0.09 ± 0.015
Energieauflösung im D1: FWHM_{E1} [°]	0.24 ± 0.03	0.24 ± 0.03
Ortsauflösung im D2: FWHM_{O2} [°]	0.8 ± 0.1	1.0 ± 0.1
Energieauflösung im D2: FWHM_{E2} [°]	1.1 ± 0.1	3.2 ± 0.4
Alle Messunsicherheiten: FWHM_{tot} [°]	1.5 ± 0.2	4.6 ± 0.4

Tabelle 3.3: Breite der ARM-Verteilung in Abhängigkeit verschiedener Messunsicherheiten

Diese Daten lassen folgende Schlussfolgerungen zu:

- Die Ortsauflösung im D1 ist - wie nach den geometrischen Auflösungen der Detektoren zu erwarten war - um einen Faktor 10 besser als im Kalorimeter und die Energieauflösung ist um mindestens einen Faktor 4 besser. Darüber hinaus gibt es keine signifikanten Unterschiede zwischen getrackten und nicht-getrackten Ereignissen für den Tracker.
- Die leicht unterschiedlichen Ortsauflösungen im zweiten Detektor zwischen Ereignissen mit und ohne Track lässt sich mit Hilfe der unterschiedlichen Energieverteilung zwischen Elektron und gestreutem Photon und damit mit dem unterschiedlichen mittleren Compton-Winkel erklären (siehe Tab. 3.4). Je höher die Energie des ge-

	ohne Spur	mit Spur
mittlere Energie des gestreuten Photons [keV]	1050 ± 360	590 ± 210
mittlerer Compton-Winkel [°]	41 ± 21	75 ± 21
mittlerer Abstand zwischen 1. und 2. Wechselwirkung [cm]	28 ± 7	26 ± 8
Anteil der 2. Compton-Stöße im Bodenkalorimeter [%]	76 ± 5	28 ± 4

Tabelle 3.4: Unterschiede zwischen Ereignissen mit und ohne Spur hinsichtlich der mittleren Energien des gestreuten Photons, des mittleren Compton-Winkels sowie des Orts und des Abstandes der Wechselwirkungen bei 2 MeV Gesamtenergie.

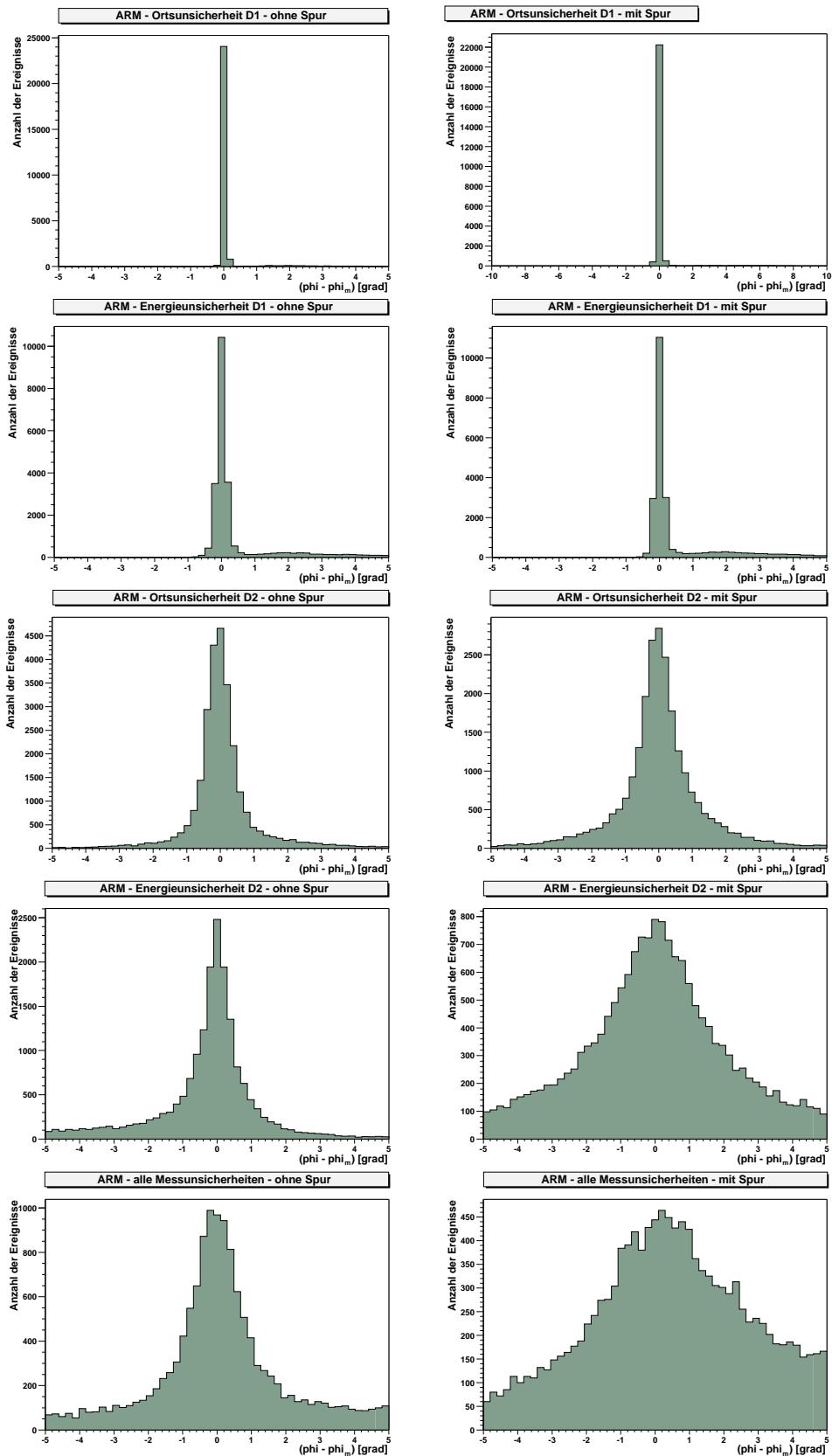


Abbildung 3.2: Auswirkung der einzelnen Messunsicherheiten auf die ARM-Verteilung. Die Unterschiede im Energiemessfehler des D2 sind auf die unterschiedlichen mittleren Energien der gestreuten Photonen der beiden Ereignistypen zurückzuführen.

streutens Elektrons ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass es drei oder mehr Lager durchquert. Damit besitzen die getrackten Ereignisse im Mittel eine geringere Energie des gestreuten Photons als die nicht-getrackten. Das erklärt den Unterschied in der mittleren Energie und im mittleren Comptonwinkel in Tabelle 3.4. Da die Photonen senkrecht auf den Detektor einfallen, findet der zweite Compton-Stoß mit viel höherer Wahrscheinlichkeit in den Seitenwänden des D2 statt. Da diese keine Ortsauflösung entlang des Stabes besitzen, ist die Ortsauflösung etwas schlechter als in den Bodenkalorimetern. Dort wechselwirken die meisten Ereignisse ohne Spur (76 %). Damit ist die Ortsauflösung im zweiten Detektor für getrackte Ereignisse etwas schlechter.

Die Grafiken in Abbildung 3.3 veranschaulichen den Ort des zweiten Compton-Stoßes im D2.

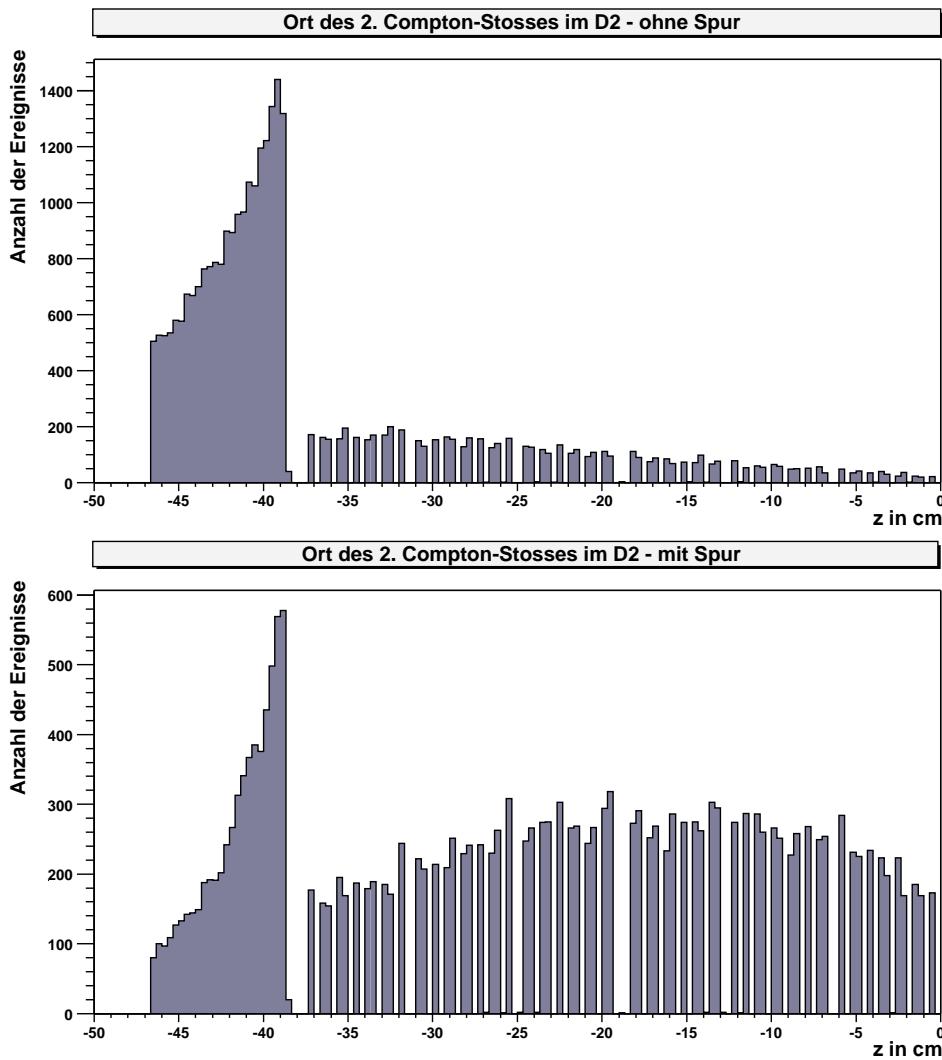


Abbildung 3.3: Ort der zweiten Wechselwirkung im D2 für die Satellitengeometrie. In der Höhe zwischen 0 und -37 cm sind die sechs Kalorimeterblocks mit ihren Stäben zu erkennen. Aufgrund des Binnings werden nicht alle 11 Stäbe pro Block aufgelöst. Am Bodenkalorimeter (von -38.6 cm bis -46.6 cm) ist der Abschirmeffekt von CsI für von oben kommende Photonen zu erkennen.

- Die Ursache für die unterschiedliche Winkelauflösung durch die Energiemessunsicherheit im D2 ist ebenfalls auf die unterschiedliche mittlere Energie des gestreuten Photons zurückzuführen. Zum einen nimmt nach Tabelle 2.5 der relative Energiemessfehler in den einzelnen Kalorimeterstäben mit abnehmender Gesamtenergie

stark zu. Zum anderen nimmt nach Gleichung 1.6 für die Unsicherheit in der Bestimmung des Comptonwinkels bei abnehmender Energie des gestreuten Photons der Energiemessfehler des gestreuten Photons überproportional zu. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.4 veranschaulicht.

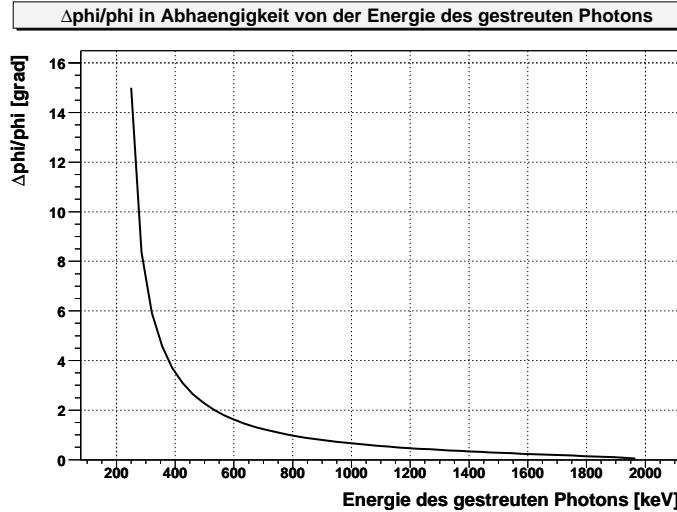


Abbildung 3.4: Berechnete Messunsicherheit des Comptonwinkels aus den Energiefehlern im D2

Tabelle 3.5 enthält die Halbwertsbreiten aller Ereignisse für unterschiedliche Energien der gestreuten Photonen. Die nach Abbildung 3.4 erwarteten Werte werden in etwa reproduziert. Die etwas schlechteren Ergebnisse sind darauf zurückzuführen, dass z.B. ein 600 keV Photon in den seltensten Fällen in einem CsI-Stab vollständig absorbiert wird, sondern das γ -Quant wird Compton-gestreut und danach das Elektron und Photon in verschiedenen Stäben absorbiert. Dadurch erhöht sich der Energiemessfehler entsprechend.

Energie des gestreuten Photons [keV]	ARM-FWHM [$^{\circ}$]
0 - 500	12.2
500 - 750	7.7
750 - 1000	4.3
1000 - 1250	2.2
1250 - 1500	1.0
1500 - 2000	0.5

Tabelle 3.5: Halbwertsbreite der ARM für alle Compton-Ereignisstypen in Abhängigkeit von der Energie des gestreuten Photons für 2MeV-Photonen.

Damit ergibt sich ein Dilemma: Um eine möglichst hohe Sensitivität zu erreichen, benötigt man getrackte Ereignisse mit kleiner ARM. Bei Energien kleiner als 2 MeV sind kaum getrackte Ereignisse vorhanden. Bei 2 MeV erkauft man sich die Elektronenspur mit einer stark verbreiterten ARM. Diese verengt sich zwar zu höheren Energien hin, aber die Gesamtzahl der vollständig absorbierten Ereignisse nimmt dann stark ab (siehe Abb. 3.1).

Tabelle 3.6 enthält die ARM-Verteilungen für alle Ereignisse in Abhängigkeit von der Gesamtenergie. Bis ca. 2 MeV nimmt die Breite der ARM ab um dann aufgrund der zunehmenden unvollständigen Absorption wieder anzusteigen.

Energie [MeV]	ARM-FWHM [°]		
	(alle)	(nicht getrackt)	(getrackt)
0.5	6.3 ± 0.4	6.3 ± 0.4	-
1.0	3.2 ± 0.3	3.2 ± 0.3	-
2.0	1.8 ± 0.2	1.5 ± 0.2	4.6 ± 0.4
5.0	2.9 ± 0.3	1.4 ± 0.2	3.2 ± 0.3
10	2.4 ± 0.2	1.7 ± 0.2	2.8 ± 0.3
20	2.0 ± 0.2	1.8 ± 0.2	2.2 ± 0.2

Tabelle 3.6: Halbwertsbreite der ARM für verschiedene Energien der einfallenden γ -Strahlung: Bis 2 MeV nimmt die Halbwertsbreite für alle Compton-Ereignisse kontinuierlich ab, steigt aber dann stark an. Diese Zunahme ist darauf zurückzuführen, dass bei 5 MeV ca. 77 % der Ereignisse getrackt sind und ihre ARM-Verteilung breiter als die der nicht-getrackten Ereignisse ist.

Fehler in der Bestimmung der Compton-Streuebene:

Bei der Scattering Plane Deviation (SPD) wird der Winkel zwischen der tatsächlichen Comptonstreuebene und der gemessenen Streuebene angegeben, also der Ebene, die von der Richtung des Elektrons und des gestreuten Photons aufgespannt wird. Diese ist in erster Linie vom Fehler in der Bestimmung der Elektronenrichtung abhängig und damit in erster Näherung von der Elektronenenergie. Die Ergebnisse für die 2 MeV Quelle sind in Tabelle 3.7 zusammengefasst. Nähere Informationen sind in [3] zu finden.

Energie des gestreuten Elektrons [keV]	FWHM [°]
0 - 1000	32 ± 3
1000 - 1500	26 ± 3
1500 - 2000	22 ± 2

Tabelle 3.7: Abweichung der gemessenen Streuebene von der tatsächlichen ('SPD') in Abhängigkeit von der Energie des Compton-Elektrons für Photonen mit 2 MeV. Die Ursache für den hohen Fehler ist in erster Linie vom Fehler in der Bestimmung der Elektronenrichtung und damit von der Molière-Streuung abhängig (siehe auch Kap. 3.2).

Fehler in der Richtungsbestimmung von Paaren

Bei Paaren wird die Richtung des einfallenden Photons über Gleichung (1.13) bestimmt. Die Ungenauigkeit in der Richtungsbestimmung ist in Tabelle 3.8 zusammengefasst. Sie wird von den Problemen in der Spurbestimmung, der Molière-Streuung und von der unvollständigen Absorption der Elektronen, Positronen und Annihilationsphotonen geprägt.

Energie des einfallenden Photons [MeV]	FWHM [°]
5	17 ± 1.2
10	10 ± 0.8
20	7 ± 0.4
50	5 ± 0.4

Tabelle 3.8: Fehler in der Bestimmung der Herkunftsrichtung von Paar-Ereignissen.

Der letzte Schritt ist nun die Rekonstruktion von Bildern. Diesem Problem widmen sich die restlichen Kapitel.

Kapitel 4

Auswahl des Algorithmus zur Bildrekonstruktion

“The generation of an image from Compton camera data is a challenging task.”

Jim LeBlanc [9]

4.1 Anforderungen an das Rekonstruktionsverfahren

Sowohl die Komplexität der Wechselwirkungen als auch die verschiedenen Anwendungsbereiche von MEGA stellen hohe Anforderungen an das Rekonstruktionsverfahren:

Integration unterschiedlicher Wechselwirkungen

Der Algorithmus muss gleichzeitig drei verschiedene Ereignistypen zu einem Bild verarbeiten können:

- Nicht-getrackte Compton-Wechselwirkungen
- Getrackte Compton-Wechselwirkungen
- Paar-Ereignisse

Modellierung von Ereignissen unterschiedlicher Qualität

In Kapitel 3.3 wurde festgestellt, dass sich die Ereignisse teilweise stark in ihren Messfehlern voneinander unterscheiden. So bestimmt der Abstand zwischen den ersten beiden Wechselwirkungen des einfallenden Photons die Genauigkeit der Compton-Achse und der Energiemessfehler die Ungenauigkeit des Compton-Winkels. Da die Messunsicherheiten der einzelnen Detektoren bekannt sind, können aus den gemessenen Energiewerten ihre Fehler abgeschätzt und jedes einzelne Event individuell modelliert werden.

Beantwortung verschiedener astrophysikalischer Fragestellungen

- Auflösung von schwachen Quellen auf starkem Hintergrund, wie sie beispielsweise in der galaktischen Scheibe zu finden sind.
- Auflösung von eng nebeneinander liegenden schwachen Quellen oder schwache Quellen neben starken.
- Bestimmung von Energiespektren
- Bestimmung von Flüssen

Wichtigkeit der einzelnen Ereignisse

Nach der Mustererkennung (Kap. 3.2) werden den einzelnen Ereignissen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zugeordnet, z.B. die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon von unten oder aus "Hot-Spots" der Satellitengeometrie kam, oder dass das Photon unvollständig absorbiert wurde. Der Algorithmus muss diese Ereignisse und solche mit höherer Messungenauigkeit entsprechend niedriger gewichten können.

Rekonstruktion in verschiedenen Koordinatensystemen

Der Rekonstruktionsalgorithmus muss sich problemlos auf drei verschiedene Koordinatensysteme anwenden lassen: Für die Rekonstruktion von astronomischen Daten benötigt man sphärische Koordinaten und im zweidimensionalen Nahfeld kartesische. Zudem soll es möglich sein, dreidimensionale Objekte zu rekonstruieren.

Variable Geometrien

Um unterschiedliche Geometrien für mögliche Satelliten-Versionen zu testen und um bei verschiedenen Ausbaustufen des Prototypen Bilder zu generieren, sollte der Algorithmus so weit wie möglich unabhängig von der verwendeten Geometrie sein oder sich zumindest ohne Aufwand anpassen lassen.

Computerkapazität

Das Rekonstruktionsprogramm soll sowohl vom Speicherbedarf als auch von der benötigten Rechenleistung auf einem handelsüblichen Personal Computer ausführbar sein.

4.2 Auswahl des Rekonstruktionsalgorithmus

Die Hauptaufgabe des Rekonstruktionsalgorithmus ist die Lösung folgenden Problems: Eine Quellverteilung emittiert Photonen nach dem Muster λ (Emissionsverteilung) und der Detektor misst die Daten \mathbf{y} . Der Einfluss des Detektors auf die Daten wird mit der System-Matrix \mathcal{T} , der Hintergrund mit \mathbf{b} , das statistische Rauschen wird mit \mathbf{n} beschrieben:

$$\mathbf{y} = \mathcal{T}\lambda + \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (4.1)$$

Die Suche nach einer Lösung λ dieser Gleichung zählt zu den sogenannten Invertierungsproblemen und benötigt aufgrund der Größe der Matrix \mathcal{T} beinahe immer eine iterative Lösung (näheres siehe z.B. [10]).

Hat man die Quellverteilung gefunden, können Energiespektren, Flüsse, Polarisation, zeitvariable Phänomene etc. untersucht werden.

Im Prinzip existieren zwei erfolgreiche Methoden, um aus den Daten eines Compton-Stoßes die Quellverteilung zu bestimmen:

Maximum-Entropie basierte Methoden

Für das Compton-Teleskop COMPTEL wurde ein Rekonstruktionsverfahren entwickelt (siehe z.B. [11]), das den Datenraum auf vier elementare Größen des Compton-Stoßes reduziert: die Richtung des gestreuten Photons, den Compton-Winkel und die Gesamtenergie aus D1 und D2. Bei geeigneter Projektion der Winkel stellt eine Punktquelle in diesem Raum einen Kegel mit einem Öffnungswinkel von 45° dar. Der Rekonstruktionsalgorithmus sucht nun für jeden Ort (ϑ, ϕ) nach den Signaturen einer Punktquelle mittels

einer Maximum-Entropie-Methode, in dem er den möglichen Kegel an (ϑ, ϕ) mit der bekannten Response einer Punktquelle an dieser Stelle vergleicht. Für getrackte Ereignisse kann dieser Datenraum um die Richtung des Elektrons erweitert werden. Dabei werden jedoch nicht mehr beide Komponenten der Richtung benötigt, da ein Winkel bereits über Comptongleichung (1.4) festgelegt ist. Somit wird in dem Datenraum nur die Richtung senkrecht zur Comptonachse zusätzlich eingeführt.

Der wichtigste Vorteil der COMPTEL-Methode ist:

- Die Algorithmen sind an die spezifischen Anforderungen in der Astrophysik bereits angepasst und haben sich bewährt.

Dem stehen speziell für die Anforderungen von MEGA folgende Nachteile gegenüber:

- Der Datenraum kann nicht alle Ereignistypen gleichzeitig aufnehmen, so dass mindestens drei verschiedene Datenräume aufgebaut und anschließend *ein* Bild berechnet werden müsste.
- Der gebinnte Datenraum benötigt sehr viel Speicherkapazität:
 - Richtung des gestreuten Photons Ω_C :
mindestens 0.25° -Bins von 0° bis 360° sowie von 0° bis 180° : 1440×720 Bins
 - Richtung des Elektrons ϵ :
mindestens 0.5° von 0° bis 90° : 180 Bins
 - Energie des einfallenden Photons E_1 :
mindestens 50 keV Schritte von 500 keV - 50 MeV: 1000 Bins
 - schließlich Länge und Breite im Bildraum :
mindestens 64×64 Bins

Dies führt zu einer Systemmatrix mit mindestens $7.6 \cdot 10^{14}$ Einträgen, die anschließend invertiert werden müsste. Damit ist jeder “state-of-the-art”-PC überfordert. Darüberhinaus führt das Binning zu einem Informationsverlust durch Rundungsfehler.

- Die Rekonstruktion von Punktquellen im Nahfeld ist unmöglich, da durch das Binning in (ϑ, ϕ) die Information über den Ort im D1 verloren geht.

Expectation-Maximization basierte Methoden

Für Compton-Kameras im medizinischen Einsatz (z.B. SPECT - Single Photon Emission Computer Tomography, siehe z.B. [12]) wurden ebenfalls geeignete Rekonstruktionsalgorithmen entwickelt. Die notwendigen Voraussetzungen für MEGA scheint der *List-Mode Maximum-Likelihood Expectation-Maximization*-Algorithmus zu erfüllen.

Hierbei steht *List-Mode* für die Art des Aufbaus des Datenraums und der System-Response (näheres siehe unten). Durch die *Maximierung* der *Likelihood*-Funktion wird diejenige Emissionsverteilung λ gefunden, die am ehesten mit dem Datensatz übereinstimmt (vgl. Kap. 5.1) und *Expectation-Maximization* ist die Methode, mit der diese maximiert wird. Es handelt sich dabei um ein iteratives Verfahren (vgl. Kap. 5.2), von dem es viele unterschiedliche Varianten gibt.

Die entscheidenden Vorteile dieses Verfahrens sind:

- Sowohl Datenraum als auch Systemmatrix sind beherrschbar:
Während andere Rekonstruktions-Methoden in der Medizin ebenfalls gebinnte Datenräume ähnlich wie COMPTEL verwenden, also die Einträge in einer mehrdimensionalen Matrix speichern, deren Achsen die verschiedenen Messgrößen darstellen,

geht der List-Mode anders vor: Hierbei werden die Attribute eines jeden gemessenen Ereignisses in einer Liste gespeichert. Damit reduziert sich der Speicherbedarf wie folgt:

$$N_{Bins} = \text{Anzahl der Ereignisse, die den Bildraum beeinflussen} \times \\ \text{Anzahl der Attribute} \times \\ \text{Anzahl der Bild-Bins}$$

Bei einer Million Ereignissen, die den Bildraum schneiden, und 10 Attributen liegt die Anzahl der Einträge um mehr als einen Faktor 10000 unterhalb des absoluten Minimums im Binned-Data-Fall. Der vorgestellte Algorithmus macht es zudem möglich auf die Speicherung der Systemmatrix vollständig zu verzichten - allerdings müssen dann die Werte zweimal pro Iteration berechnet werden.

- Alle Ereignistypen können integriert werden:
Um die Emissionsverteilung zu finden werden für jedes Ereignis die Wahrscheinlichkeiten berechnet, dass es seinen Ursprungsort in den verschiedenen Bild-Bins hat. Diese Transmissionswahrscheinlichkeiten (vgl. Kap 6) bauen die System-Matrix auf. Damit geht die Transmissionswahrscheinlichkeit in die Suche nach der Emissionsverteilung ein und nicht mehr der Ereignistyp.
- Es können verschiedene Koordinaten-Systeme verwendet werden, denn für die Berechnung der Transmissionswahrscheinlichkeit ist es unerheblich, in welchem Koordinatensystem gearbeitet wird.
- Da die Transmissionswahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis berechnet werden, können die einzelnen Messungenauigkeiten exakt modelliert und die Ereignisse ihren Charakteristika entsprechend gewichtet werden.

Die Nachteile dieses Verfahrens sind:

- Die Anwendbarkeit auf astrophysikalische Probleme muss erst noch gezeigt werden.
- Da die Systemmatrix für jedes Ereignis berechnet werden muss, ist der Algorithmus langsam.

Fazit

Während die COMPTEL-Methode ihre Stärken in der Astronomie entfalten kann, liegen die bislang bekannten Vorteile der EM-Methoden in den terrestrischen Anwendungen. Die Komplexität der Ereignisse und die Anwendungsvielfalt von MEGA lassen das hochspezialisierte COMPTEL-Verfahren als Rekonstruktions-Algorithmus nicht in Frage kommen. Im folgenden wird versucht, die List-Mode Maximum-Likelihood Expectation-Maximization-Methode für die Anforderungen von MEGA weiterzuentwickeln.

Kapitel 5

Die Likelihood-Funktion und der List-Mode-Likelihood

In den nächsten drei Kapiteln soll die List-Mode Maximum-Likelihood Expectation-Maximization-Methode, die ursprünglich für die medizinische Bildrekonstruktion im Nahfeld entwickelt wurde, auf astrophysikalische Anwendungen ausgedehnt werden.

5.1 Berechnung des Binned-data Log-Likelihood

Definition der Likelihood-Funktion:

Besitzen die unabhängig gemessenen Größen y_i die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(y_i, \lambda)$, wobei λ ein unbekannter Satz von Parametern ist, der als Hypothese das zugrundeliegende Modell beschreibt, dann heißt $\mathcal{L}(\lambda)$ Likelihood-Funktion:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \prod_i p(y_i, \lambda) \quad (5.1)$$

Diese beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Größen y_i von dem Parametersatz λ erzeugt wurden.

Bei der Maximum-Likelihood-Methode soll nun für diese Likelihood-Funktion ein Satz von Werten $\hat{\lambda}$ gefunden werden, der diese maximiert. Durch diese Maximierung wird dasjenige λ berechnet, welches am besten mit den gemessenen Werten übereinstimmt.

Definition des zugrunde liegenden Problems:

Der Datenraum Y sei in I Bins unterteilt und das Bild (Himmelsausschnitt, Patient) in J Pixel diskretisiert (vgl. Abb. 5.1). Jedes Pixel j besitze die Emissionsrate $\lambda_j \geq 0$ mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_J)^T$. x_{ij} sei die Anzahl der aus dem Objektpixel j emittierten Photonen, die im Event-Bin i gemessen werden. Die Ereignisse seien unabhängig voneinander. Damit unterliegen die Messungen der Poisson-Statistik, wodurch auch die x_{ij} Poisson-verteilt sind mit dem Erwartungswert $t_{ij}\lambda_j$. Die t_{ij} sind nicht-negative Konstanten, die das zugrunde liegende System beschreiben, nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus j emittiertes Photon im Ereignis-Bin i gemessen wird. Man spricht von der sogenannten Transmissionswahrscheinlichkeit oder auch Detektor-Response. Die t_{ij} spannen die Systemmatrix \mathcal{T} auf. Wie in Kapitel 6.1 ausführlich erläutert wird, fliessen in diese Werte alle physikalischen Prozesse ein, denen die Photonen auf dem Weg durch den Detektor unterliegen. Für die Wahrscheinlichkeit, in Bin i x_{ij} Ereignisse aus j zu messen, gilt dann:

$$p(Z = x_{ij}) = \text{Poisson } \{t_{ij}\lambda_j\} \quad (5.2)$$

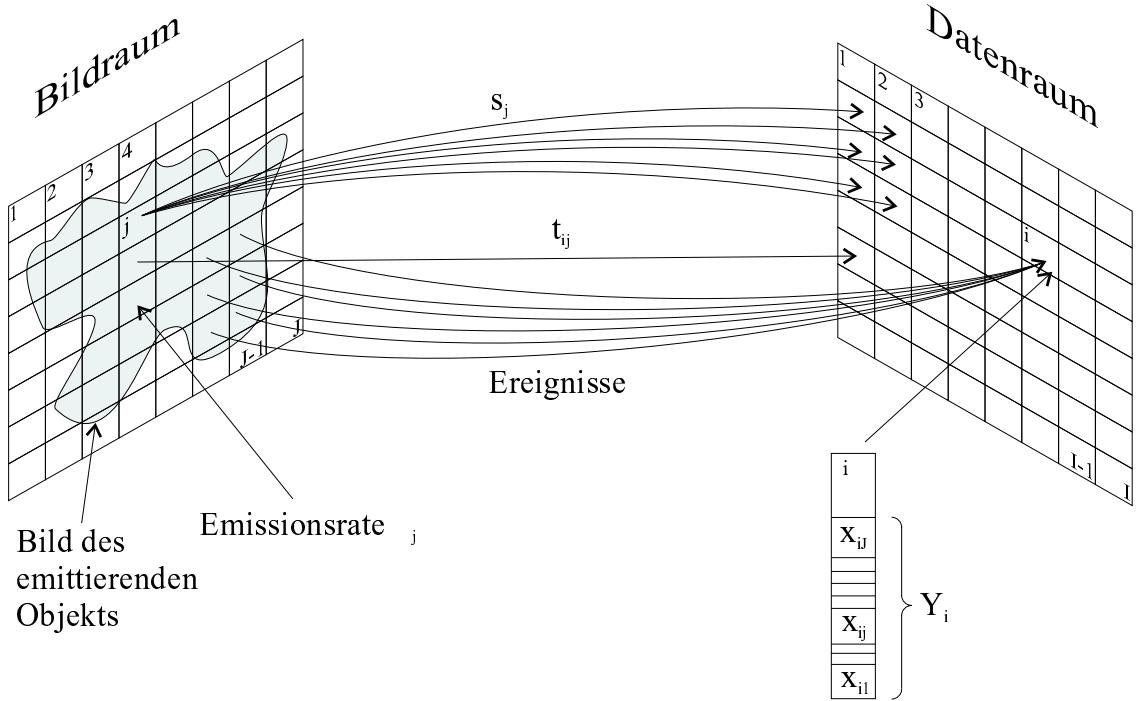


Abbildung 5.1: Bild- und Datenraum des EM-Problems

Es sei Y_i die Anzahl der wiederum statistisch unabhängigen Ereignisse im Bin i mit $Y_i = \sum_j x_{ij}$. Dies ist die eigentliche Messgröße, da die Zuordnung der einzelne Events in Y_i zu ihren Ursprungs-Bins nicht möglich ist. Da die x_{ij} Poisson-verteilt sind, sind dies die Y_i ebenfalls. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit Y_i Ereignisse im Bin i zu messen:

$$p(Z = Y_i) = p(Z = \sum_j x_{ij}) = \text{Poisson} \left\{ \sum_j t_{ij} \lambda_j \right\}$$

Der Erwartungswert dieser Poisson-Verteilung ist $\bar{y}_i = \sum_j t_{ij} \lambda_j$. Nun kann die Likelihood-Funktion gebildet werden: Bei dem zugrundeliegenden astrophysikalischen Problem ist das Ziel, für das Objekt die Emissions-Intensitäten λ_j zu finden, d.h. es soll, ausgehend von den gemessenen Werten y_i , die Likelihood-Funktion für die Parameter λ_j maximiert werden. Für die Likelihoodfunktion \mathcal{L} gilt:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \prod_i p(Y_i, \lambda) = \prod_i \frac{\bar{y}_i^{Y_i} e^{-\bar{y}_i}}{Y_i!}$$

In logarithmischer Darstellung folgt:

$$\ln \mathcal{L}(\lambda) = \sum_i [-\bar{y}_i + Y_i \ln \bar{y}_i - \ln Y_i!] \quad (5.3)$$

Der Term $-\ln Y_i!$ hängt nicht von λ_j ab und spielt deswegen für die weiteren Betrachtungen keine Rolle. Die Log-Likelihood-Funktion ist konkav (Beweis siehe [13]) und hat damit genau ein Maximum.

5.2 Der Expectation-Maximization Algorithmus

Findet man nun einen Satz von Parametern λ_i mit $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_i} = 0$, so hat man die Maximum-Likelihood Schätzung (“maximum likelihood estimate”) $\hat{\lambda}$ gefunden, also diejenige Quellverteilung, die mit höchster Wahrscheinlichkeit mit den Quelldaten übereinstimmt. Im

allgemeinen Fall ist dies für Gleichung 5.3 nicht ohne weiteres zu bewerkstelligen (siehe [13]). Somit muss ein alternativer Lösungsweg gefunden werden.

Eine Möglichkeit zur Lösung des Problems wurde 1984 von Kenneth Lange und Richard Carson [13] vorgeschlagen: Der Expectation-Maximization-Algorithmus, kurz EM-Algorithmus.

Dieser besteht aus zwei Schritten:

1. Berechnung eines Erwartungswertes in einem erweiterten Datenraum auf Basis der aktuellen Parameterschätzung $\lambda^{(l)}$ ("E-Step")
2. Maximierung des Erwartungswertes und Berechnung eines neuen $\lambda^{(l+1)}$ ("M-Step")

E-Step (Expectation-Step)

Um die Lösung des Problems zu ermöglichen, wird der Datenraum Y auf den Datenraum X erweitert:

$$X = \{x_{ij} | i = 1..I, j = 1..J\} \text{ mit } Y_i = \sum_j x_{ij}$$

Damit gehen in die Berechnung der Log-Likelihood-Funktion nun nicht mehr die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Y_i sondern die der bereits in Kapitel 5.1 Gleichung 5.2 definierten x_{ij} ein:

$$\ln \mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_i \sum_j (-t_{ij} \lambda_j + x_{ij} \ln(t_{ij} \lambda_j))$$

Da der Erwartungswert von $\mathcal{L}(Y)$ und nicht von $\mathcal{L}(X)$ bestimmt werden soll, muss der Erwartungswert von $\mathcal{L}(X)$ in Abhängigkeit von Y und dem zu diesem Erwartungswert gehörigen Parameterschätzung $\lambda^{(l)}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\ln \mathcal{L}(X, \lambda) | Y, \lambda^{(l)}) &= \sum_i \sum_j \left(-t_{ij} \lambda_j + \mathcal{E}(x_{ij} | Y_i, \lambda^{(l)}) \ln(t_{ij} \lambda_j) \right) \\ &= \sum_i \sum_j (-t_{ij} \lambda_j + N_{ij} \ln(t_{ij} \lambda_j)) \end{aligned}$$

wobei gilt:

$$N_{ij} = \mathcal{E}(x_{ij} | Y_i, \lambda^{(l)}) = \frac{t_{ij} \lambda_j^{(l)}}{\sum_k t_{ik} \lambda_k^{(l)}} Y_i$$

(Die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Y_i zur Projektion i gehörigen Ereignisse aus dem Objektpixel j stammt, beträgt $\frac{t_{ij} \lambda_j^{(l)}}{\sum_k t_{ik} \lambda_k^{(l)}}$.)

In Kapitel 7.3 wird ein alternativer erweiterter Datenraum vorgestellt.

M-Step (Maximization-Step)

Die Maximierung dieses Erwartungswertes erfolgt durch Bildung von partiellen Ableitungen und Null-Setzen:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mathcal{E}(\ln \mathcal{L}(X, \lambda) | Y, \lambda^{(l)}) = - \sum_i t_{ij} + \sum_i \frac{N_{ij}}{\lambda_j} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.4)$$

λ_j wird damit zur neuen ML-Estimate λ_j^{l+1} :

$$\lambda_j^{l+1} = \frac{\sum_i N_{ij}}{\sum_i t_{ij}} = \frac{\lambda_j^{(l)}}{\sum_i t_{ij}} \sum_i \frac{t_{ij} Y_i}{\sum_k t_{ik} \lambda_k} \quad (5.5)$$

Dieser Algorithmus konvergiert immer und global gegen das Maximum der Likelihood-Funktion (vgl. [13]) mit der Emissionsverteilung $\hat{\lambda}$. Da der Datensatz Y aber begrenzt ist, stellen die $\hat{\lambda}$ nicht immer das *beste* Bild dar. Die Initialisierung des Algorithmus (5.5) kann über jedes beliebige $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ erfolgen, solange gilt: $\lambda_j > 0$. Um eine schnellere Konvergenz zu erzielen, wird in dieser Arbeit stets so initialisiert:

$$\lambda_j = \sum_i t_{ij} \quad \forall j \quad (5.6)$$

Das so erzeugt $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ wird *erste Rückprojektion* genannt.

5.3 Übergang vom Binned-Mode zum List-Mode

Beim Übergang vom Binned-Mode zum List-Mode wird im Prinzip die Bin-Größe so weit verringert, daß maximal nur noch ein Ereignis pro Bin zu finden ist. Für die besetzten Bins wird die System-Matrix berechnet und die anderen werden weggelassen. Während im Binned-Mode die System-Matrix nur einmal bestimmt wird und diese dann für die Berechnung von allen Bildern festgelegt ist, muss im List-Mode diese für jedes Ereignis neu berechnet werden. Dies ist vor allem dann sehr zeitintensiv, wenn nicht genug Speicherkapazität zur Verfügung steht und diese dadurch pro Iterationsschritt zweimal berechnet werden müssen.

Barrett et al. [14] konnten zeigen, dass die Log-Likelihood-Funktion (Gl. 5.5) unter folgender Abwandlung auch im List-mode weiter Bestand hat:

$$\lambda_j^{(l+1)} = \frac{\lambda_j^{(l)}}{s_j} \sum_i \frac{t_{ij}}{\sum_k t_{ik} \lambda_k} \quad (5.7)$$

Der EM-Algorithmus wurde dabei an zwei Stellen abgeändert (vgl. [15]):

1. Da nun jedes Event in einem eigenen Bin gemessen wird, gilt:
 $Y_i \rightarrow 1$ für alle gemessenen Ereignisse (siehe auch Kapitel 7.1)
 $Y_i \rightarrow 0$ für die (unendliche) Anzahl von nicht gemessenen Ereignissen, über deren t_{ij} im folgenden nicht mehr summiert wird.
 Damit wechselt i die Bedeutung: Bin i steht nicht mehr für einen Eintrag in einer Systemmatrix bestehend aus allen möglichen Photonen- und Elektronrichtungen, Energien etc., sondern bezeichnet ein konkretes Ereignis.
2. Im List-Mode werden die t_{ij} nicht mehr für alle möglichen Ereignisse berechnet, sondern nur mehr für die tatsächlich gemessenen. Damit lässt sich der Wert $\sum_i t_{ij}$ aus Gleichung (5.5) im Fall des List-Mode nicht mehr über die t_{ij} berechnen. Bei den einzelnen $\sum_i t_{ij}$ handelt es sich um die System-Sensitivitäten, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus j emittiertes Photon irgendwo im Detektor gemessen wird. Im Fall des List-Mode werden diese mit s_j bezeichnet und müssen gesondert bestimmt werden. Auf verschiedene Möglichkeiten ihrer Bestimmung wird in Kapitel 6.3 eingegangen.

In Abbildung 5.2 ist die Funktionsweise des Algorithmus (5.7) graphisch dargestellt.

Dies ist die einfachste Form des Expectation-Maximization-Algorithmus im List-Mode. Komplexere Fälle werden im Kapitel 7 behandelt.

Der nächste Schritt ist nun die Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten und Systemsensitivitäten.

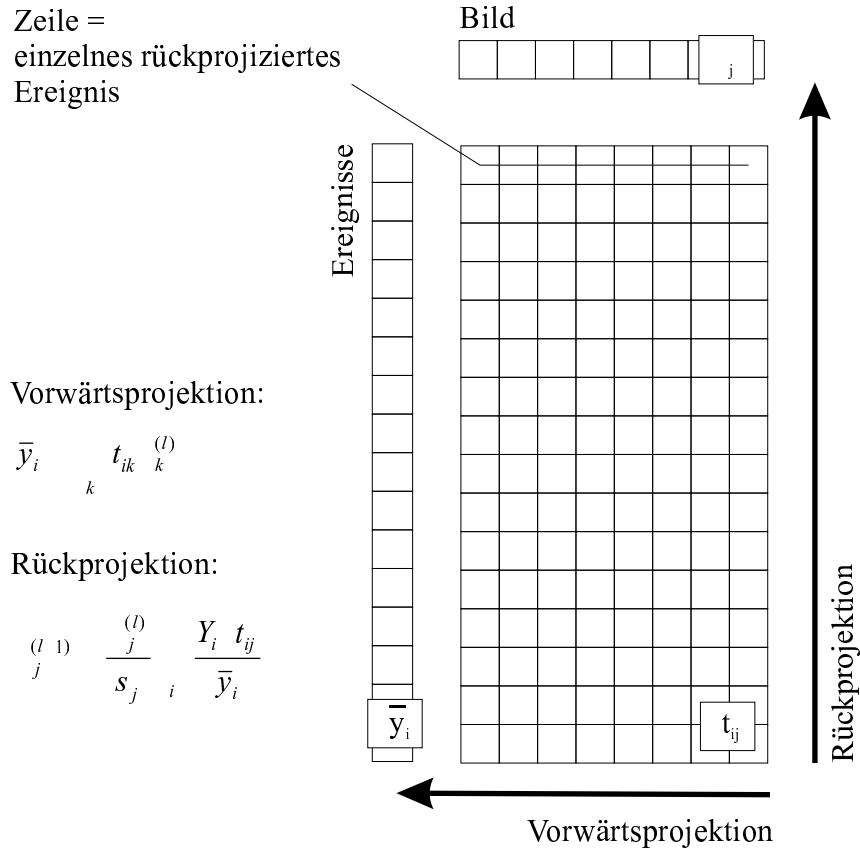


Abbildung 5.2:

Erläuterung des Iterationsalgorithmus im List-Mode:

Der Iterationsalgorithmus besteht aus fünf Parametern: dem Bild λ (Emissionsverteilung), der Systemmatrix bestehend aus den Transmissionswahrscheinlichkeiten $\{t_{ij}\}$, den erwarteten Messwerten \bar{y}_i , der Anzahl der Ereignisse im Ereignis-Bin Y_i (≤ 1 , siehe Kapitel 7.1) und den System-Sensitivitäten s_j .

In den Zeilen der System-Matrix befinden sich die Rückprojektionen der einzelnen Ereignisse, d.h. bei festem Ereignis i stellen die t_{ij} für jedes j die Wahrscheinlichkeit dar, dass dort der Ursprung des Ereignisses liegt. Ein Beispiel ist in Abbildung 6.3 zu finden.

Eine Iteration des Algorithmus besteht aus zwei Schritten: der Vorwärtsprojektion und der Rückprojektion.

Bei der Vorwärtsprojektion werden aus dem aktuellen Bild $\lambda^{(l)}$ und der System-Matrix die erwarteten Messwerte \bar{y}_i gebildet, indem das Bild mit einer Zeile der System-Matrix multipliziert und anschließend aufsummiert wird: $\bar{y}_i = \sum_j t_{ij} \lambda_j$.

Der zweite Schritt ist die Rückprojektion. Dabei wird zunächst eine Gewichtung Y_i mit den erwarteten Messwerten \bar{y}_i vorgenommen. Diese Werte werden mit den Spalten der System-Matrix multipliziert, aufsummiert und mit den System-Sensitivitäten gewichtet. Der so errechnete Wert ist der Korrektur-Term für das ursprüngliche Bild: $\lambda_j^{(l+1)} = \lambda_j^{(l)} \frac{\sum_i \frac{Y_i}{\bar{y}_i} t_{ij}}{s_j}$

Kapitel 6

Modellierung der Instrument-Response im List-Mode

Die Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten t_{ij} und der Systemsensitivitäten s_j stellt die größte Herausforderung bei der Maximum-Likelihood-Methode im List-Mode-Fall dar. Wie im folgenden gezeigt wird, hängt die Qualität der zu berechnenden Bilder entscheidend von der Genauigkeit ihrer Berechnung ab.

6.1 Definition der Transmissionswahrscheinlichkeiten und Systemsensitivitäten

Die Transmissionswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus dem Objektpixel j emittiertes Photon als Ereignis i gemessen wird. Deswegen fließen in die Berechnung der Transmissionswahrscheinlichkeit alle physikalischen Vorgänge ein, denen das Photon bis zu seiner Detektierung unterliegt.

Im folgenden wird der Datenvektor, der das Ereignis i beschreibt, mit \mathbf{A}_i bezeichnet. \mathbf{A}_i enthält somit die gemessene Energie des gestreuten Photons E_2 und des Elektrons E_e sowie den gemessenen Ort der Comptonwechselwirkung im ersten Detektor \mathbf{z}_1 , den ersten Wechselwirkungsort des gestreuten Photons \mathbf{z}_2 sowie die Elektronenrichtung Ω_e . Bei den \mathbf{A}_i handelt es sich also um aufbereitete Messwerte. Das *wahre* Ereignis wird im folgenden als \mathbf{A}'_i bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Werten ist in Abbildung 6.1 zusammengefasst.

Der Messprozess kann mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{A}_i|\mathbf{A}'_i)$ beschrieben werden. Unter der Annahme separierbarer Messfehler folgt (vgl. [9]):

$$p(\mathbf{A}_i|\mathbf{A}'_i) = p(\mathbf{z}_1|\mathbf{z}'_1) p(\mathbf{z}_2|\mathbf{z}'_2) p(E_2|E'_2) p(E_e|E'_e) p(\Omega_e|\Omega'_e)$$

Die Ursachen und das Ausmaß dieser Messfehler wurden bereits ausführlich in Kapitel 3 erläutert.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{A}'_i|\mathbf{z}_0)$ (bzw. $p(\mathbf{A}'_i|\Omega_0)$ im sphärischen Fall) beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Emission vom Ort \mathbf{z}_0 in Richtung Ω_0 zum wahren Ereignis \mathbf{A}'_i führt.

In die Bestimmung von $p(\mathbf{A}'_i|\Omega_0)$ gehen alle physikalischen Prozesse ein, denen das einfallende Photon unterliegen kann. Im allgemeinsten Fall sind das die folgenden Wahrscheinlichkeiten (näheres siehe [15]):

1. Das Photon wird bei \mathbf{z}_0 emittiert:

$$p(\mathbf{z}_0)d\mathbf{z}_0 \approx \text{const} \cdot d\mathbf{z}_0$$

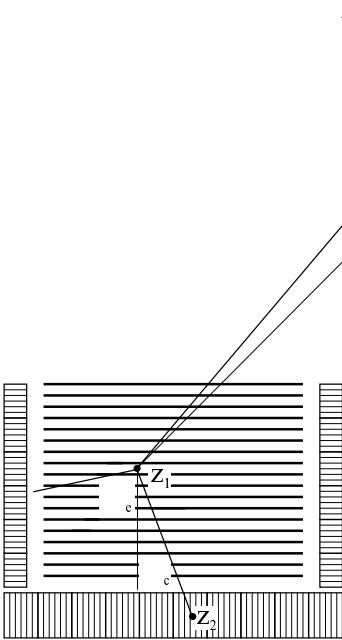


Abbildung 6.1:

Beschreibung der einzelnen Größen:

\mathbf{z}_0	Ursprungspunkt des γ -Quants in Bin j
\mathbf{z}_j	Zentrum des Ursprungsbins j
Ω_0	Richtung des ursprünglichen γ -Quants
Ω_j	Richtung zwischen \mathbf{z}_j und \mathbf{z}_1
\mathbf{z}_1	Ort der ersten Wechselwirkung im D1
Ω_c	Richtung des gestreuten γ -Quants
Ω_e	Richtung des Elektrons
\mathbf{z}_2	Ort der ersten Wechselwirkung im D2

Im folgenden sei angenommen, dass im sphärischen Fall in alle Raumrichtungen $d\Omega_0$ isotrop emittiert wird. Im astrophysikalischen Fall sei das Objekt so weit entfernt, dass nur noch die Einfallsrichtung des Gamma-Photons eine Rolle spielt, nicht mehr aber die Entfernung des Objekts. Dann gilt:

$$p(\Omega_0)d\Omega_0 \approx \text{const} \cdot d\Omega_0$$

2. Das Photon verlässt das Objekt ungestreut und erreicht den Detektor:

$$P_{esc}^{Obj} = \int dl_0 e^{-\mu_{tot}^{Obj}(E_1, l_0)l_0}$$

Dabei ist l_0 der Weg vom Ort \mathbf{z}_0 des emittierenden Objekts in Richtung Ω_0 und $\mu_{tot}^{Obj}(E_1, l_0)$ der totale Absorptionskoeffizient durch das Objekt auf dem Pfad l_0 mit der Energie E_1 . Dabei seien die unterschiedlichen durchquerten Materialien mitberücksichtigt.

Für astrophysikalische Objekte ist die Wahrscheinlichkeit vom emittierenden Objekt wieder absorbiert zu werden oder im Raum zwischen Emissionsort und Satellit absorbiert, gestreut oder vernichtet zu werden nur in den seltensten Fällen bestimmbar. Deswegen wird die Wahrscheinlichkeit den Detektor zu erreichen für alle Photonen gleich eins gesetzt:

$$P_{esc}^{Obj} \approx 1$$

3. Das Photon durchquert den Detektor ungestreut bis zum ersten Wechselwirkungspunkt, um dort in dr_1 Compton-gestreut zu werden¹:

$$p_{Comp}^{D1} dr_1 = \mu_{Comp}^{D1}(E_1, \mathbf{z}_1) dr_1 \int dl_1 e^{-\mu_{tot}^{D1}(E_1, l_1)l_1}$$

¹Die Wahrscheinlichkeit im Intervall dr_1 Compton-gestreut zu werden beträgt:

$$(1 - e^{-\mu(r+dr)}) - (1 - e^{-\mu r}) = e^{-\mu r} - e^{-\mu(r+dr)} \approx -\mu r + \mu(r+dr) = \mu dr$$

Dabei ist l_1 der Weg im ersten Detektor bis zum Punkt \mathbf{z}_1 und dr_1 die Wegstrecke bei \mathbf{z}_1 . $\mu_{Comp}^{D1}(E_1, \mathbf{z}_1)$ ist der Compton-Absorptionskoeffizient bei der Energie E_1 an der Stelle \mathbf{z}_1 .

4. Das Photon wird an \mathbf{z}_1 unter dem Winkel φ_c Compton-gestreut:

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon unter einem bestimmten Winkel Compton-gestreut wird unter der Voraussetzung, dass es gestreut wird, beträgt:

$$p^{KN}(\varphi_c) d\varphi_c = \frac{\frac{d\sigma_c}{d\varphi_c}}{\sigma_c} d\varphi_c$$

Dabei ist $\frac{d\sigma_c}{d\varphi_c}$ die Klein-Nishina-Gleichung (Gl. 1.8) und σ_c der totale Streuquerschnitt (Gl. 1.9).

5. Das gestreute Photon verlässt den ersten Detektor ungestreut:

$$P_{esc}^{D1} = \int dl_2 e^{-\mu_{tot}^{D1}(E_2, l_2) l_2}$$

Dabei ist l_2 der Weg im ersten Detektor vom Punkt \mathbf{z}_1 in Richtung Ω_c durch den D1.

6. Das gestreute Photon erreicht den zweiten Wechselwirkungsort ungestreut und wird dort erneut Compton-gestreut oder auch absorbiert:

$$p_{Comp}^{D2} dr_2 = \mu_{Comp}^{D2}(E_2, \mathbf{z}_2) dr_2 \int dl_3 e^{-\mu_{tot}^{D2}(E_2, l_3) l_3}$$

oder auch:

$$p_{abs}^{D2} dr_2 = \mu_{abs}^{D2}(E_2, \mathbf{z}_2) dr_2 \int dl_3 e^{-\mu_{tot}^{D2}(E_2, l_3) l_3}$$

Dabei ist l_3 der Weg im zweiten Detektor in Richtung Ω_c zum Punkt \mathbf{z}_2 und dr_2 die Wegstrecke bei \mathbf{z}_2 .

7. Für alle weiteren (bekannten) Wechselwirkungen im Detektor kann dies in analoger Weise fortgeführt werden.

$p(\mathbf{A}'_i | \Omega_0)$ setzt sich multiplikativ aus all diesen Wahrscheinlichkeiten zusammen.

Für die Transmissionswahrscheinlichkeit in kartesischen Koordinaten gilt (vgl. [15]):

$$t_{ij} = \int_{\mathbf{z}_0 \in K_j} d\mathbf{z}_0 p(\mathbf{z}_0) \int_{\forall \mathbf{A}'_i} d\mathbf{A}'_i p(\mathbf{A}_i | \mathbf{A}'_i) p(\mathbf{A}'_i | \mathbf{z}_0) \quad (6.1)$$

Dabei wird nur über all jene Positionen \mathbf{z}_0 integriert, die in dem zum Bild-Bin j gehörigen Volumenelement K_j liegen, sowie über alle möglichen wahren Ereignisse \mathbf{A}'_i .

In sphärischen Koordinaten (ϑ, φ) folgt

$$t_{ij} = \int_{\Omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0) \in R_j} d\Omega_0 \sin(\varphi_0) p(\Omega_0) \int_{\forall \mathbf{A}'_i} d\mathbf{A}'_i p(\mathbf{A}_i | \mathbf{A}'_i) p(\mathbf{A}'_i | \Omega_0) \quad (6.2)$$

Dabei wird nur über jene Startrichtungen Ω_0 integriert, die in dem zum Sphärenelement K_j gehörigen Raumwinkelement R_j liegen. Der Abstand zur Himmelssphäre r_s wird gleich eins gesetzt.

Für die Systemsensitivität gilt analog (vgl. [15]):

$$s_j = \int_{\mathbf{z}_0 \in K_j} d\mathbf{z}_0 p(\mathbf{z}_0) \int_{\forall \mathbf{A}'_i} d\mathbf{A}'_i p(\mathbf{A}'_i | \mathbf{z}_0) \quad (6.3)$$

$$s_j = \int_{\Omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0) \in R_j} d\Omega_0 \sin(\varphi_0) p(\Omega_0) \int_{\forall \mathbf{A}'_i} d\mathbf{A}'_i p(\mathbf{A}'_i | \Omega_0) \quad (6.4)$$

Die direkte Bestimmung der t_{ij} und s_j aus den obigen Gleichungen ist mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden, so dass sie auf einem modernen PC (noch) nicht zu bewältigen ist. Deswegen werden nun immer detailliertere Näherungen für die Transmissionswahrscheinlichkeiten entwickelt.

6.2 Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten in sphärischen Koordinaten

6.2.1 System-Modell ohne Berücksichtigung der Messfehler

Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass alle gemessenen Daten ideal sind, d.h.

$$p(\mathbf{A}_i | \mathbf{A}') = \delta(\mathbf{A}' - \mathbf{A}_i)$$

Da bei nicht-getrackten Ereignissen die Information über die Elektronen-Richtung vollständig fehlt, gehen diese Ereignisse in die Berechnungen nicht ein.

Getrackte Ereignisse

Für die Transmissionswahrscheinlichkeiten folgt:

$$t_{ij} = \int_{\Omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0) \in R_j} d\Omega_0 \sin(\varphi_0) p(\Omega_0) \delta(\Omega_0 - \Omega_0^*(E_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \varphi_c, \mathbf{e}_e)) p(\mathbf{A}_i | \Omega_0)$$

Die δ -Funktion extrahiert aus dem Integral die mit Gleichung (1.7) berechneten Einfallrichtungen $\Omega_0^*(E_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \varphi_c, \mathbf{e}_e)$ der Photonen. Um diese Gleichung zu vereinfachen, wurden weitere Annahmen gemacht: $p(\mathbf{A}'_i | \Omega_0) = 1$ sowie $p(\Omega_0) = 1$.

Für die t_{ij} gilt damit:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{Photon stammt aus } K_j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (6.5)$$

Diese Näherung der t_{ij} wird im folgenden als *nullte Näherung* bezeichnet.

Ergebnisse

Abbildung 6.2 enthält die t_{ij} für ein einzelnes Compton-Ereignis.

Ein Beispiel mit mehreren Punktquellen ist in Abbildung 6.6 zu sehen. Dabei wurden für die Quellgeometrie aus Abbildung 6.5 Daten simuliert. Der Energiebereich der drei Punktquellen liegt zwischen 1500 bis 3500 keV (E^{-2} -Spektrum). Es wurden nur die Ereignisse ausgewählt, deren Streuwinkel zwischen 20° und 60° liegen, deren Abstand zwischen den Wechselwirkungen im D1 und D2 mindestens 30 cm beträgt und bei denen *nicht* mehr als zwei Wechselwirkungen im D2 stattfanden, wobei in jeder dieser D2-Wechselwirkungen mehr als 800 keV deponiert worden muss.

Aufgrund zu hoher (und nicht berücksichtigter) Messunsicherheiten, sind keine (oder ausschließlich nicht vorhandene) Punktquellen zu erkennen. Die Ursache dafür ist in erster Linie die Unsicherheit in der Bestimmung der Elektronenrichtung (vgl. Kap. 3.3) und erst in zweiter Linie die Energieunsicherheiten.

Einzelnes getracktes Ereignis

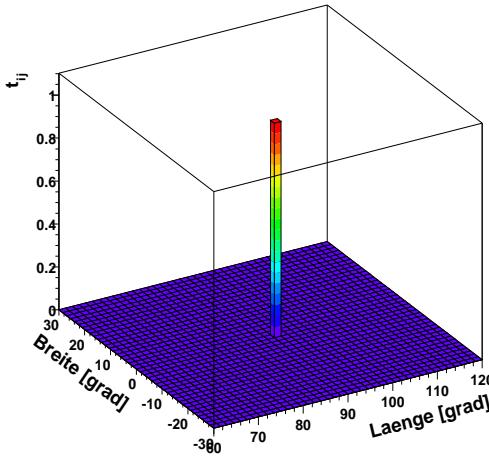


Abbildung 6.2: Einzelnes Ereignis in 0. Näherung

6.2.2 System-Modell unter Berücksichtigung der Ungenauigkeit der Elektronenspur

Im nächsten Schritt soll der Fehler in der Bestimmung der Elektronenspur mitberücksichtigt werden. Somit fliessen getrackte Ereignisse als Ereigniskreissegmente und nicht-getrackte als Ereigniskreise ein. Zudem sollen die $p(\mathbf{A}_i|\Omega_0)$ genähert werden. Energie- und Ortsmessfehler bleiben damit weiterhin unberücksichtigt.

Diese Näherung der Transmissionswahrscheinlichkeiten wird *erste Näherung* genannt.

Nicht-Getrackte Ereignisse:

Für Ereignisse ohne Spur folgt damit:

$$t_{ij} = P_{esc}^{D1} p^{KN} p_{comp}^{D2} \cdot \int_{\Omega_0=(\vartheta_0, \varphi_0) \in R_j} d\Omega_0 p(\Omega_0) \sin(\varphi_0) \delta(\Omega_0 - \Omega_0^*(E_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \varphi_c)) p_{comp}^{D1}(\Omega_0)$$

Die δ -Funktion extrahiert all jene Ω_0 aus dem Integral, die auf dem durch $E_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ und φ_c festgelegten Ereigniskreis liegen, d.h. das Integral über alle $\Omega_0 \in R_j$ ist in Wirklichkeit die Länge des Ereigniskreises in dem zum Raumwinkelement R_j gehörigen Flächenelement K_j auf der Sphäre. Da in der Gleichung (5.7) für den EM-Algorithmus die Transmissionswahrscheinlichkeiten sowohl im Zähler als auch im Nenner in Abhängigkeit vom selben Ereignis erscheinen, kürzen sie sich aus der Gleichung heraus. Somit spielen die Terme vor dem Integral keine Rolle mehr:

$$t_{ij} \propto \left[\int dl_{j1} e^{-\mu_{tot}^{D1}(l_{j1}) l_{j1}} \right] \oint_{E \in K_j} dl \quad (6.6)$$

Dabei ist l_{j1} der Pfad vom Schwerpunkt des j ten Bildpixels zum ersten Wechselwirkungsort \mathbf{z}_1 und E bezeichnet den Ereigniskreis. Es wurde angenommen, dass der im Detektor von \mathbf{z}_0 nach \mathbf{z}_1 zurückgelegte Weg sich nur unwesentlich von der Strecke, die von \mathbf{z}_j aus nach \mathbf{z}_1 führt, unterscheidet.

Getrackte Ereignisse:

Für getrackte Elektronen bleibt im Integral zusätzlich der Term $\int_{\Omega_e} d\Omega_e p(\Omega_e | \Omega'_e)$ erhalten. Dieser sei gleich einer 2D-Gauß-Funktion, die man erhalten würde, wenn man die Dispersion in der Elektronenrichtung mit einer Gauß-Funktion $\mathcal{G}(x_0, \sigma)(x)$ fitten würde. Damit folgt:

$$t_{ij} \propto \int_{\Omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0) \in R_j} d\Omega_0 \sin(\Omega_0) \delta(\Omega_0 - \Omega_0(E_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \varphi_c)) \cdot \\ p_{comp}^{D1}(\Omega_0) \mathcal{G}(\Omega_0^*(E_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \varphi_c), \sigma_{e-Disp})(\Omega_0)$$

Und schließlich:

$$t_{ij} \propto \left[\int dl_{j1} e^{-\mu_{tot}^{D1}(l_{j1})l_{j1}} \right] \mathcal{G}(\Omega_0^*|_E, \sigma_{e-Disp})(\Omega_j) \oint_{E \in K_j} dl \quad (6.7)$$

Dabei ist Ω_j der mittlere Raumwinkel in R_j und $\Omega_0^*|_E$ die auf den Ereigniskreis projizierte, berechnete Einfallsrichtung des Gamma-Quants. Damit entspricht σ_{e-Disp} der Breite der SPD-Verteilung σ_{SPD} (siehe Kap. 3.3).

Algorithmus:

Die direkte Berechnung der Länge des Ereigniskreises in sphärischen Koordinaten über den Schnittpunkt mit den Längen- und Breitenkreisen ist sehr rechenaufwendig. Der folgende Algorithmus erweist sich als effizienter:

1. Teste, ob das Objekt den Bildbereich schneidet, d.h. berechne die Schnittpunkte mit dem Bildbereich. Ist kein Schnittpunkt vorhanden, muss festgestellt werden, ob das Objekt innerhalb des Bildbereichs liegt.
2. Bestimme die Parameterform des Ereigniskreises auf der Sphäre.
3. Scanne den Ereigniskreis in ausreichend kleinen Schritten ab. Die Strecke zwischen den Schritten wird zu dem Bild-Bin hinzugezählt, in dem der jeweilige Scanpunkt liegt.
4. Im Fall getrackter Ereignisse werden die einzelnen Bild-Bins auf dem Ereigniskreis gemäß der SPD-Verteilung um den errechneten Ursprungspunkt des Photons gewichtet.
5. Abschließend können zusätzliche Gewichtungen der Ereignisse stattfinden, z.B. nach Wahrscheinlichkeiten aus der Muster-Erkennung.

Dabei liegt die Breite der SPD-Verteilung für verschiedene Elektronenenergien tabelliert vor.

Ergebnis

Wendet man die erste Näherung auf die Daten aus Abbildung 6.5 an, so zeigt das Bild (Abb. 6.7) eine signifikante Verbesserung im Vergleich zur nullten Näherung, aber immer noch sind die beiden 1°-entfernten Punktquellen nicht auflösbar. Um ein vernünftiges Ergebnis zu erreichen, wurde bereits ein sog. *quadratischer Penalty* eingesetzt (näheres siehe Kap. 7.2) und ein Korrekturterm in den EM-Algorithmus integriert (siehe Kap. 7.1). An die nächste Näherung reicht das Bild trotzdem nicht heran. Zudem ist diese Methode stark von der gewählten Pixelanzahl abhängig, d.h. je größer die Bild-Bins werden, desto glatter wird das Ergebnis.

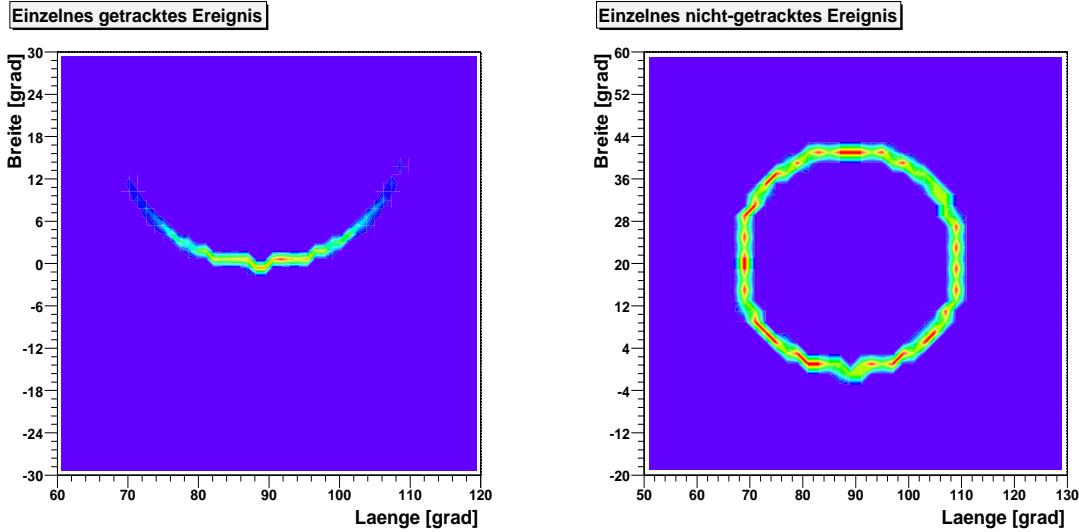


Abbildung 6.3: Getracktes Ereignis in 1.Näherung

Abbildung 6.4: Nicht-getracktes Ereignis in 1. Näherung

6.2.3 System-Modell unter Berücksichtigung aller Messunsicherheiten

Die nächste Verbesserung wird erreicht, indem die Energie- und Ortsunsicherheiten in die Berechnungen mit einbezogen werden. In dieser *zweiten Näherung* erhalten die Ereigniskreise eine individuelle Breite.

Gleichung für getrackte und nicht-getrackte Ereignisse:

Nimmt man an, dass sich Energie- und Ortsmessfehler vorwiegend in der Breite der ARM-Verteilung äußern, können diese Fehler durch eine gezielte Verbreiterung des Ereigniskreises genähert werden:

$$t_{ij} \propto \left[\int dl_{j1} e^{-\mu_{tot}^{D1}(l_{j1})l_{j1}} \right] \mathcal{G}(\Omega_0^*|_K, \sigma_{SPD})(\Omega_j) \mathcal{G}(\varphi_c, \sigma_{ARM})(\varphi_c(\Omega_j)) F(K_j) \quad (6.8)$$

Dabei ist $\varphi_c(\Omega_j)$ der Winkel zwischen Comptonachse und Zentrum von K_j und $F(K_j)$ die Fläche des j ten Bins. Für nicht-getrackte Ereignisse ist $\mathcal{G}(\Omega_0^*|_K, \sigma_{SPD})(\Omega_j) = 1$. Bei dieser Vorgehensweise tragen gute Ereignisse mehr zu den Quellbildern bei als schlechte, da ihre ARM- und SPD-Verteilungen schärfer sind als bei schlechten Ereignissen. So wird eine Gewichtung der einzelnen Ereignisse erreicht.

Algorithmus:

1. Teste, ob das Objekt den Viewport schneidet.
2. Berechne für jedes Bild-Bin den kleinsten Abstand zum Ereigniskreis und wichtige entsprechend der Entfernung gemäß der ARM-Verteilung.
3. Im Fall von getrackten Ereignissen werden die einzelnen Bins nach ihrem Winkelabstand auf dem Kegel zum errechneten Ursprungspunkt des Photons gemäß der SPD-Verteilung gewichtet.
4. Abschließend können die einzelnen Ereignisse zusätzlich gewichtet werden.

Die ARM-Verteilung liegt dabei in Abhängigkeit von der Gesamtenergie und der Energie des gestreuten Photons tabelliert vor, genauso wie die SPD-Verteilung in Abhängigkeit von

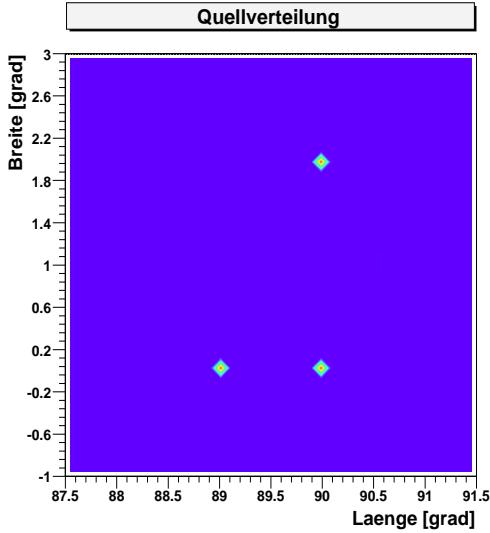


Abbildung 6.5: Quellgeometrie: Drei Punktquellen mit einem E^{-2} -Energiespektrum von 1500 bis 3500 keV befinden sich im Abstand von 1° bzw. 2° in der Nähe des Detektorzenit. Alle drei Punktquellen bestehen jeweils aus 3000 rekonstruierbaren Compton-Ereignissen (getrackt und nichtgetrackt), die wie in Kapitel 3.1 beschrieben mit der Satellitengeometrie (vgl. Abb. 2.6) simuliert wurden. Dabei wurden die im Text beschriebenen Ereignisselektionen durchgeführt.

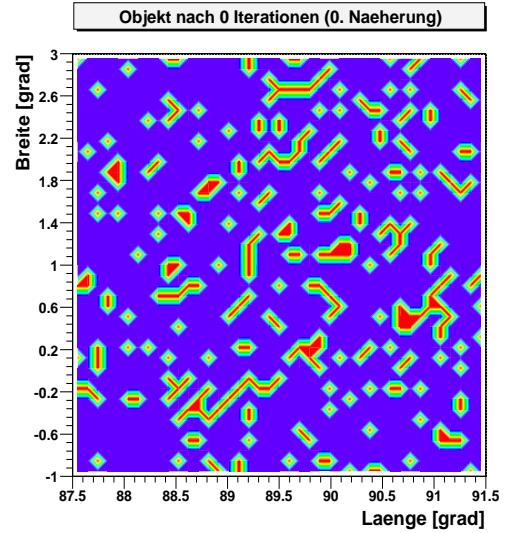


Abbildung 6.6: 0. Näherung: Die einzelnen Punkte stellen rückprojizierte Ereignisse dar. Aufgrund der Messfehler sind in diesem Bildausschnitt, die Punktquellen nicht zu erkennen.

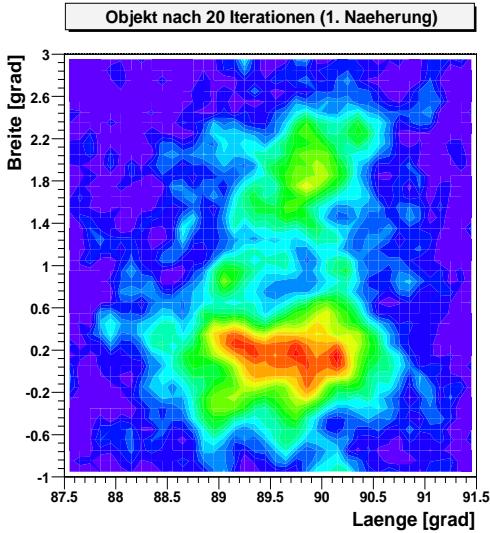


Abbildung 6.7: 1. Näherung: Um ein einigermaßen akzeptables Bild zu erreichen wurde zusätzlich ein Penalty eingesetzt (vgl. 7.2). Die beiden 1° entfernten Punktquellen können trotzdem nicht aufgelöst werden.

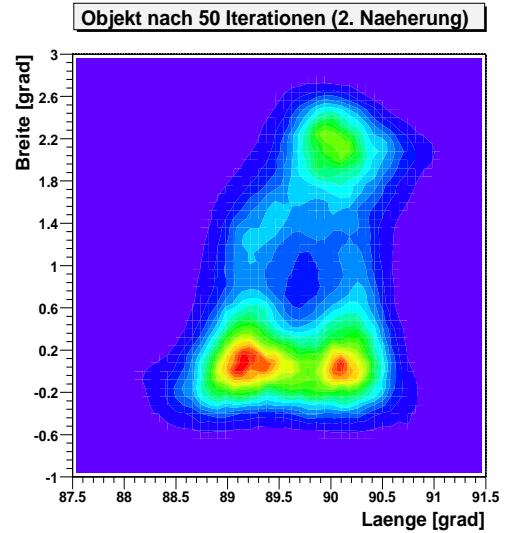


Abbildung 6.8: 2. Näherung: Die beiden 1° entfernten Punktquellen können aufgelöst werden. Da die beiden Punktquellen an der Grenze des Auflösungsbereichs liegen, werden sie etwas unförmig rekonstruiert.

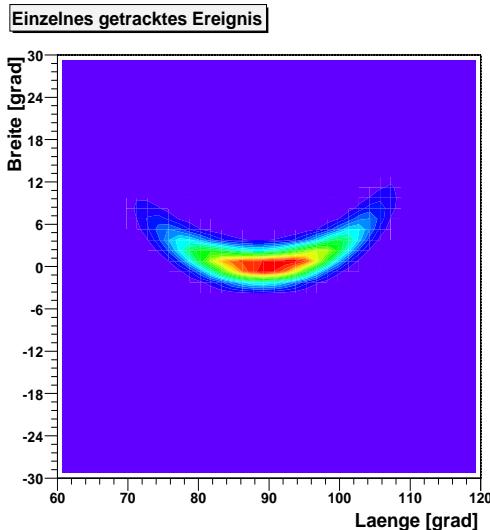


Abbildung 6.9: Getracktes Ereignis in 2.Näherung

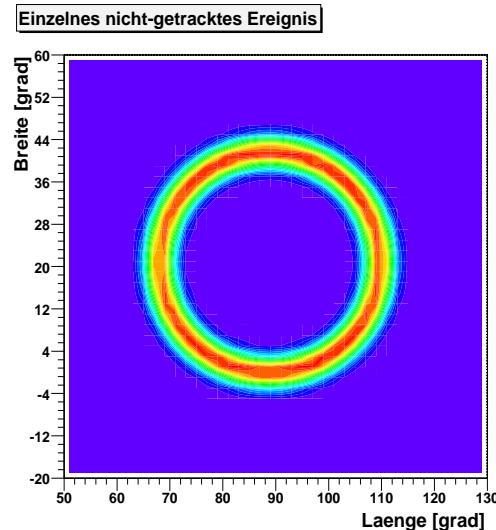


Abbildung 6.10: Nicht-getracktes Ereignis in 2.Näherung

der Elektronenenergie. Die Tabellen sind in Kapitel 3.3 zu finden. Füttet man die ARM-Verteilung, werden die entstehenden Bild sehr glatt und die Winkelauflösung erreicht nicht ihr Maximum. Will man in den Grenzbereich der möglichen Winkelauflösung vordringen, so erweist es sich als vorteilhaft, Werte von etwa ein Viertel der ARM-Verteilung zu verwenden. Dadurch erhöht sich natürlich die Unebenheit des Hintergrunds und man läuft Gefahr Artefakte zu produzieren. Welches die besten Werte für ein bestimmtes Bild sind, hängt von vielen Faktoren ab (Menge und Varianz des Hintergrunds, Stärke der Quellen) und lässt sich nicht ohne weiteres vorhersagen.

Ergebnis:

Abbildung 6.8 zeigt das Resultat dieser Näherung: Die beiden 1° entfernten Quellen können gerade noch aufgelöst werden. Da sich die beiden Punktquellen aber an der Grenze der möglichen Winkelauflösung befinden (vgl. Tab. 3.6), werden die beiden Quellen nicht sehr symmetrisch rekonstruiert. Im *realen* Einsatz mit hohem Hintergrund sind zwei 1° entfernte Punktquellen nicht auflösbar.

Weitere Variationen:

Einige Erweiterungen des Algorithmus sind denkbar:

- Die Breite des Ereigniskreises kann auch über die bekannten Energie- und Ortsunsicherheiten berechnet werden. Da damit aber nur das Verrauschen der Simulationsdaten rückgängig gemacht wird, sollte dies nur mit realen Daten durchgeführt werden.
- Statt den Fehler in der Elektronen-Richtung mittels SPD-Verteilung zu nähern, kann der Ereigniskreis mit der Point-Spread-Funktion der direkt zurückprojizierten Ereignisse aus der ersten Näherung gefaltet werden.
- Da bei sehr hohen Energien aufgrund unvollständiger Absorption nur wenige Ereignisse in der Nähe des Maximums der ARM-Verteilung liegen, könnte anstatt der ARM-Verteilung für die gemessene Gesamtenergie eine Verteilung der möglichen Ursprungsenergien gefittet werden.

Integration von Paarereignissen:

Ähnlich wie bei getrackten Compton-Ereignissen lässt sich die Ursprungsrichtung von Photonen, die über Paarerzeugung wechselwirken, über die Gleichung (1.12) direkt berechnen. Allerdings ist diese Ortsbestimmung mit einem sehr hohen Fehler versehen, der vor allem vom Fehler in der Bestimmung der Elektronenrichtung abhängt (vgl. Tab. 3.8).

Bei der Berechnung der Transmissionswahrscheinlichkeit wird deswegen eine 2D-Gauß-Kurve mit dem Maximum an der Stelle der errechneten Ursprungsrichtung gefittet, wobei die Summe über alle Bins gleich eins ist, solange das Ereignis vollständig im Viewport liegt. Die Breite der Gauß-Kurve ist von der gemessenen Gesamtenergie abhängig und entspricht den Werten aus Tabelle 3.8. Durch diese Form wird eine maximale Harmonisierung mit den Compton-Ereignissen erreicht, so dass ohne Probleme aus den unterschiedlichen Ereignistypen ein Bild berechnet werden kann.

Ein einzelnes rückprojiziertes Paar-Ereignis ist in Abbildung 6.11 zu finden.

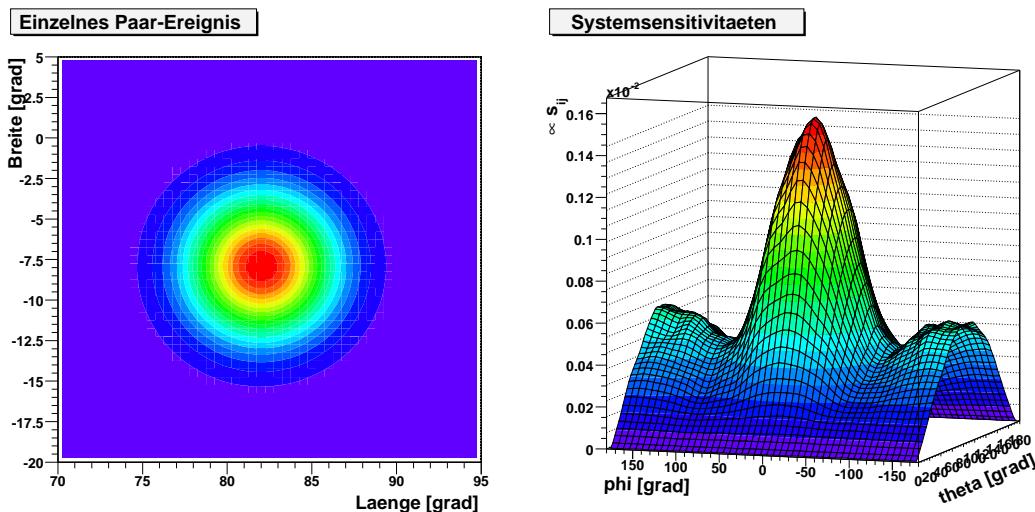


Abbildung 6.11: Einzelnes Paarereignis

Abbildung 6.12: Systemsensitivitäten bei 2 MeV für Compton-Ereignisse für alle Raumwinkel (ϑ, φ)

6.3 Systemsensitivitäten

Die s_j sind gemäß Gleichung 6.4 unabhängig von den einzelnen gemessenen Ereignissen und stellen die Wahrscheinlichkeit dar, dass ein aus j emittiertes Photon gemessen wird. Damit ist dieser Wert dafür prädestiniert, simuliert bzw. gemessen zu werden.

Die Vorgehensweise ist für beide Fälle vollkommen identisch: In genügend großer Entfernung von Detektor werden ausreichend viele Punktquellen simuliert, die gleichmäßig auf einer Sphäre verteilt sind. Das Verhältnis der simulierten zu den rekonstruierbaren Ereignissen ist die Wahrscheinlichkeit ein aus j emittiertes Ereignis zu messen.

Abbildung 6.12 macht den räumlichen Zusammenhang für die Satellitengeometrie deutlich. Da die Funktion $s_j(\vartheta, \varphi)$ sehr glatt ist, können die nicht gemessenen Werte mittels Spline-Fits interpoliert werden.

Solange sich $s_j(\vartheta, \varphi)$ nicht zu stark verändert, verschlechtert sich das Ergebnis nur unwesentlich, wenn konstante s_j angenommen werden (näheres siehe [16]). Solange der Detektor eine symmetrische Form hat, ist dies meistens gewährleistet.

Kapitel 7

Erweiterungen des EM-Algorithmus

Im Laufe des vergangenen Jahrzehnts wurden mehrere Varianten des EM-Algorithmus entwickelt, die sich hinsichtlich ihrer Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit unterscheiden. Diese Weiterentwicklung dauert bis heute an.

Im folgenden werden verschiedene Penalties und Algorithmen auf ihre Anwendbarkeit für MEGA untersucht. Zunächst aber wird eine Erweiterung des Algorithmus vorgenommen, die für eine Anwendung des Verfahrens in der Astrophysik unerlässlich ist.

7.1 Das Viewport-Problem

Einer der Unterschiede zwischen der medizinischen und der astrophysikalischen Anwendung ist, dass das zu rekonstruierende Objekt im medizinischen Fall stets kleiner als der Viewport, also der zu rekonstruierende Bereich ist. Damit haben alle Ereignisse ihren Ursprung innerhalb des Viewports. Wendet man die Algorithmen in der Astrophysik auf Compton-Ereignisse an, dann haben immer auch Ereignisse Einfluss auf den Viewport, die ihren Ursprung außerhalb haben, sofern nicht die gesamte Himmelskarte rekonstruiert wird.

Am deutlichsten tritt das Viewport-Problem bei der Rekonstruktion reiner Hintergrund-Ereignisse zu Tage (vgl. Abb. 7.1 oben). Während bei der 0. Iteration das Bild noch eben ist, wachsen bei den folgenden Iterationen die Ecken überproportional stark an.

Bei einer genaueren Betrachtung wird dieses Phänomen von den Ereignissen ausgelöst, die den Bildraum nur an den Ecken schneiden. Geht man zur Vereinfachung davon aus, dass alle Ereignisse das Gewicht eins haben, so sind bei der Annahme von ungefähr konstantem λ die geschätzten Messungen $\bar{y}_i = \sum_j t_{ij} \lambda_j$ der Eckereignisse sehr klein. Damit wird für diese Ereignisse t_{ij}/\bar{y}_i in Gleichung (5.7) sehr groß und schließlich wächst λ_j übermäßig stark an.

Zur Lösung wird erneut die Herleitung der Gleichung 5.7 betrachtet: In der ursprünglichen Version des EM-Algorithmus im Binned-Mode waren die Y_i die Anzahl der Ereignisse im Datenraum-Bin i . Liegen keine Compton-Ereignisse vor, dann ist es selbstverständlich, dass alle Ereignisse innerhalb des Viewports liegen. Bei Compton-Ereignissen im List-Mode liegen aber viele Ereignisse nur teilweise innerhalb des zu rekonstruierenden Bereichs. Das Problem im List-Mode besteht nun darin, dass die Transmissionswahrscheinlichkeiten nur für den Viewport berechnet werden, so dass die Ereignisse, die nur teilweise in dem zu rekonstruierenden Bereich liegen, zu stark gewichtet werden. Als Abhilfe werden nun auch im List-Mode die Y_i wieder eingeführt, und zwar als der Bruchteil Y_i^* des Ereignisses, der innerhalb des Viewports liegt.

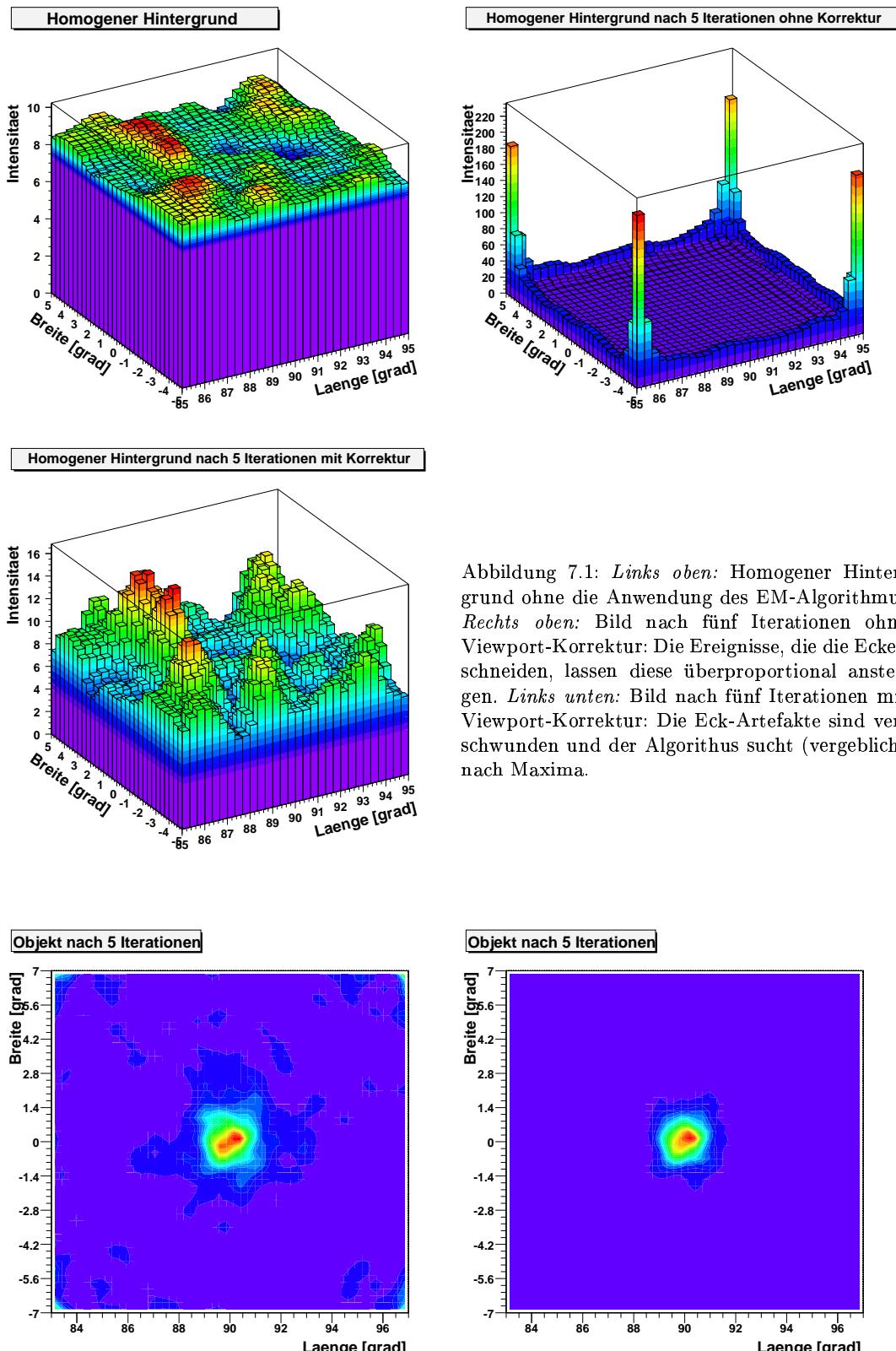


Abbildung 7.1: *Links oben:* Homogener Hintergrund ohne die Anwendung des EM-Algorithmus *Rechts oben:* Bild nach fünf Iterationen ohne Viewport-Korrektur: Die Ereignisse, die die Ecken schneiden, lassen diese überproportional ansteigen. *Links unten:* Bild nach fünf Iterationen mit Viewport-Korrektur: Die Eck-Artefakte sind verschwunden und der Algorithmus sucht (vergeblich) nach Maxima.

Abbildung 7.2: *Links:* Befindet sich das Objekt vollständig innerhalb des zu rekonstruierenden Bereichs, spielt das Viewport-Problem nur eine untergeordnete Rolle. *Rechts:* Führt man auch hier die Viewport-Korrektur ein, so erhöht sich die Konvergenz der Punktquelle.

Damit ändert sich Gleichung (5.7) zu:

$$\lambda_j^{(l+1)} = \frac{\lambda_j^{(l)}}{s_j} \sum_i \frac{Y_i^* t_{ij}}{\sum_k t_{ik} \lambda_k} \quad (7.1)$$

Da die Y_i^* während der Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten als Nebenprodukt anfallen, wird der Algorithmus nicht rechenaufwendiger. Die Konvergenz wird durch die Einführung der Y_i^* nicht berührt, da die Y_i auch im ursprünglichen Konvergenz-Beweis auftauchen - nur als Ereignisanzahl mit *ganzen* Werten.

In Abbildung 7.1 (links unten) ist das selbe Hintergrundbild mit Viewport-Korrektur zu sehen: die Artefakte an den Ecken sind vollständig verschwunden.

Befindet sich das zu rekonstruierende Objekt vollständig innerhalb des Gesichtsfeldes, dann wachsen die Ecken nur gemächlich an (vgl. Abb. 7.2 links). Mit Korrektur bleiben die Ecken eben (vgl. Abb. 7.2 rechts).

Die endgültige Form des Algorithmus ist in Tabelle 7.1 zu finden.

Tabelle 7.1: EM-Algorithmus

```

Initialisiere  $\lambda^{(0)}$ 
Für jede Iteration  $l = 0, \dots, L - 1$ 
     $\bar{y}_i = \sum_j t_{ij} \lambda_j^{(l)} \quad \forall i$ 
     $e_j = \sum_i Y_i^* t_{ij} / \bar{y}_i \quad \forall j$ 
     $\lambda_j^{(l+1)} = \lambda_j^{(l)} e_j / s_j \quad \forall j$ 
Ende

```

7.2 Regularisierung

Die meisten iterativen Algorithmen benötigen eine Regularisierung (Glättungsfunktion, sog. Penalty) um nicht in Artefakte zu zerfallen (vgl. Abb. 7.3 rechts oben). Dieses Problem tritt vor allem dann auf, wenn die Detektor-Response nicht korrekt modelliert wird - also beispielsweise bei der 1. Näherung der Transmissionssensitivitäten. Je genauer die Detektor-Response modelliert wird, desto schwächer kann die Regularisierung sein. Deswegen sollte das Ziel sein, die t_{ij} und s_j möglichst exakt zu bestimmen. Bei der Berechnung von Bildern mittels zweiter Näherung kann im Normalfall auf eine Regularisierung verzichtet werden.

Eine gut mit dem EM-Algorithmus zusammenarbeitende Lösung ist die Einführung eines Penalties, der die Aufgabe hat, das Bild zu glätten (sog. "roughness penalty").

Neben der in Kapitel 5.1 eingeführten Likelihood-Funktion kann die Konvergenz auch für folgende "penalized" Likelihood-Funktion gezeigt werden:

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_i (Y_i \ln \bar{y}_i(\boldsymbol{\lambda}) - \bar{y}_i(\boldsymbol{\lambda})) - \alpha P(\boldsymbol{\lambda}) \quad (7.2)$$

$P(\boldsymbol{\lambda})$ ist dabei die Penalty-Funktion und α ein frei wählbarer Wichtungsfaktor, der das Gewicht der Penaltyfunktion auf die ursprüngliche Likelihoodfunktion beschreibt.

Der Penalty hat die allgemeine Form:

$$P(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_j \frac{1}{2} \sum_{k \in N_j} \psi(\lambda_j - \lambda_k) \quad (7.3)$$

Dabei ist N_j die Nachbarschaft um Pixel j (z.B. oben, unten, links, rechts oder auch die Diagonalen) und ψ beschreibt den Einfluss der Nachbarschaft auf das betrachtete Bildpixel.

Der M-Step aus Kapitel 5.4 ändert sich damit zu:

$$-\sum_i t_{ij} - \sum_i \frac{N_{ij}}{\lambda_j} - \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda_j} P(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (7.4)$$

Quadratischer Penalty

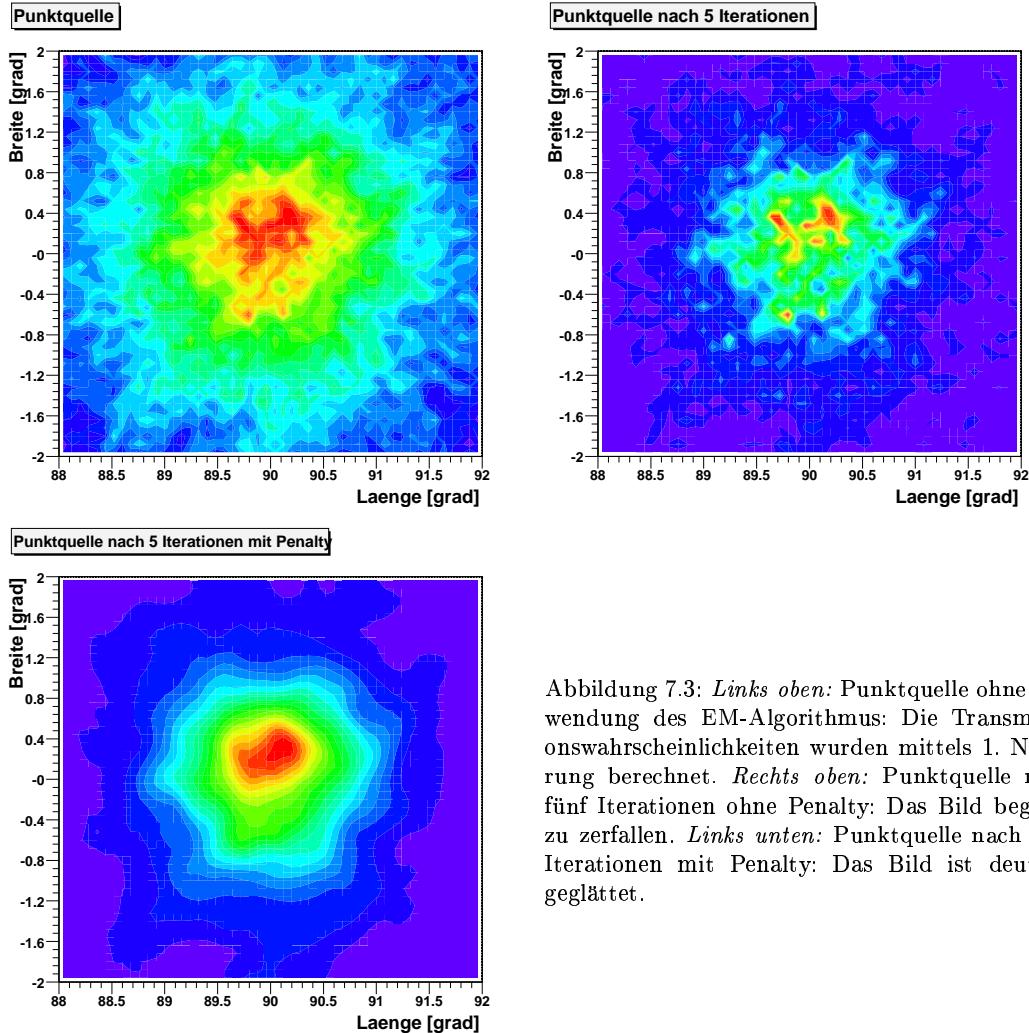


Abbildung 7.3: Links oben: Punktquelle ohne Anwendung des EM-Algorithmus: Die Transmissionswahrscheinlichkeiten wurden mittels 1. Näherung berechnet. Rechts oben: Punktquelle nach fünf Iterationen ohne Penalty: Das Bild beginnt zu zerfallen. Links unten: Punktquelle nach fünf Iterationen mit Penalty: Das Bild ist deutlich geglättet.

Eine mögliche Realisierung ist der quadratische Penalty:

$$P_Q(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_j \frac{1}{2} \sum_{k \in N_j} \omega_{jk} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \quad (7.5)$$

Die Nachbarschaft N_j um Pixel j nimmt über die Wichtungsfaktoren ω_{jk} folgenden Einfluss:

$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$
1	Pixel j	1
$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$

Damit folgt für den M-Step (7.4):

$$-\sum_i t_{ij} - \sum_i \frac{N_{ij}}{\lambda_j} - \alpha \sum_{k \in N_j} \omega_{jk} (\lambda_j - \lambda_k) = 0$$

Und schließlich:

$$\lambda_j^{(l+1)^2} (\alpha \sum_{k \in N_j} \omega_{jk}) + \lambda_j^{(l+1)} (s_j + \alpha \sum_{k \in N_j} \omega_{jk} \lambda_k^{(l)}) + \sum_i \frac{N_{ij}}{\lambda_j^{(l)}} = 0 \quad (7.6)$$

Dabei handelt es sich um eine quadratische Gleichung, die sich trivial nach λ_j auflösen lässt.

Der quadratische Penalty erfüllt eine wichtige Eigenschaft: Er ist konvex. Andernfalls hat die Likelihood-Funktion mehrere Extrema und es besteht zudem die Gefahr, dass sich das Bild bei der Änderung nur eines Photons stark verändert (siehe [17]).

Es existieren noch einige weitere Penalties:

- Entropie: $P_E(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_j \frac{1}{2} \sum_{k \in N_j} \omega_{jk} (\lambda_j - \lambda_k) \log(\lambda_j - \lambda_k)$
Dieser verhindert wie der quadratische Penalty, dass einige Pixel überproportional anwachsen.
- “Gaussian prior”: $P_G(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_j \frac{1}{2} \sum_{k \in N_j} \omega_{jk} \frac{(\lambda_j - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}$:
Dieser versucht die Bild-Werte in der Nähe von μ_j zu halten.

und viele mehr (siehe z.B. [17]).

7.3 Alternative EM-Algorithmen

Mit dem Ziel, schneller konvergierende Algorithmen zu erhalten, wurde der EM-Algorithmus auf verschiedene Arten ergänzt. Zwei Möglichkeiten, die in den List-Mode übertragbar sind, werden in diesem Abschnitt kurz vorgestellt.

OS-EM

Der Ordered-Subsets-Expectation-Maximization-Algorithmus (OS-EM) im Binned-Mode geht auf Hudson und R. Larkin zurück [18]. Als Besonderheit teilt er die Ereignisse in Untergruppen (sog. *Subsets S^m*) auf. Danach wird der Standard-EM-Algorithmus auf jeden Subset angewendet, wobei die resultierende Parameter-Schätzung Ausgangspunkt für die Berechnung der Parameterschätzung des nächsten Subsets ist. Eine Iteration ist erfolgt, wenn alle Ereignisse einmal durchlaufen wurden. Beim OS-EM-Algorithmus handelt es sich um einen sog. “row action”-Algorithmus. Eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus für den Binned-Mode ist in [18] zu finden und der Algorithmus ist in Tabelle 7.2 beschrieben.

Tabelle 7.2: OS-EM-Algorithmus

```

Initialisiere  $\lambda^{(0), m} \quad \forall m$ 
Für jede Iteration  $l = 0, \dots, L - 1$ 
  Für jeden Subset  $m = 0, \dots, M - 1$ 
     $\bar{y}_i = 1/M \sum_j t_{ij} \lambda_j^{(l), m} \quad \forall i$ 
     $e_j = \sum_i Y_i^* t_{ij} / \bar{y}_i \quad \forall j$ 
     $\lambda_j^{(l+1), m+1} = \lambda_j^{(l), m} e_j / s_j \quad \forall j$ 
  Ende
Ende

```

Im folgenden Fall werden die Ereignisse zufällig und gleichmäßig auf mehrere Subsets verteilt. Im Grenzfall nur eines Subsets liegt der Standard-EM-Algorithmus vor.

Es zeigt sich, dass die Beschleunigung der Konvergenz in etwa so groß ist wie die Anzahl der verwendeten Subsets - solange nur wenige Subsets verwendet werden und die Anzahl der Ereignisse genügend groß ist.

Diese Methode hat allerdings auch einen entscheidenden Nachteil: Sie konvergiert nicht gegen die selbe Parameterschätzung wie der ursprüngliche Algorithmus und der Wert ist zudem von der gewählten Aufteilung der Ereignisse abhängig.

Trotzdem ist die Binned-Mode-Variante zur Zeit in der Medizin weit verbreitet, da bei einer genügenden Anzahl an Ereignissen und niedriger Komplexität des gesuchten Bildes kaum visuelle Unterschiede zu erkennen sind.

Bei der Anwendung in der Astrophysik kann es Probleme geben: Bei schwachen Punktquellen auf starkem Hintergrund kommt es vor, dass zwar der Standard-EM-Algorithmus die Punktquellen auflösen kann, nicht aber der OS-EM. Bei einer Verkleinerung des Datensatzes werden sowohl die Anzahl der Hintergrund-Ereignisse als auch die Zahl der Quell-Ereignisse reduziert. Dies führt zu einer höheren Varianz des Hintergrunds.

Space altering generalized EM (SAGE)

Eine detaillierte Beschreibung des SAGE-Algorithmus für den Binned-Mode ist in [19] und [20] zu finden und basiert auf einer Idee von Jeff Fessler (University of Michigan).

Beim ursprünglichen EM-Algorithmus werden zunächst alle geschätzten Messungen \bar{y}_i berechnet und anschließend alle Parameter λ auf den neuesten Stand gebracht (*simultaner* Algorithmus). Beim SAGE-Algorithmus werden zunächst alle \bar{y}_i berechnet und dann für einen Index-Bereich S^m des Bildraums jedes λ_j bestimmt und anschließend sofort die \bar{y}_i neu berechnet. Enthält S^m mehr als ein Bild-Pixel spricht man von einem *pixel grouped*-Algorithmus, ansonsten von einem *sequenziellen* Algorithmus.

Als zweite Neuerung wird ein alternativer erweiterter Datenraum eingeführt. Dieser basiert auf zwei unabhängigen Poisson-verteilten Größen, die die Emissionen aus Quellen und aus Hintergrund darstellen. Da die Trennung zwischen den beiden Ereignis-Typen im Wirklichkeit nicht möglich ist, sprich man vom sogenannten "hidden data space". Die x_{ij} beim Standard-EM werden ersetzt durch:

$$Z_{ij}^m \sim \text{Poisson} \left\{ t_{ij}(\lambda_j + z_j^m) \right\}$$

Tabelle 7.3: SAGE3-Algorithmus

Initialisiere $\lambda^{(0)}$, $\bar{y}_i = \sum_j t_{ij} \lambda_j^{(0)}$ $\forall i$
Für jede Iteration $l = 0, \dots, L - 1$

Für jedes Bildpixel $k = 0, \dots, J - 1$

$$\begin{aligned} e_j &= \sum_i Y_i^* t_{ij} / \bar{y}_i \quad \forall j \\ z_k &= \min_{i:t_{ik} \neq 0} \{\bar{y}_i(\lambda^m)/t_{ik}\} - \lambda_k^l \\ \lambda_k^{(l+1)} &= \left[(\lambda_k^{(l)} + z_k) e_j / s_j - z_k \right]_+ \quad \forall j \\ \lambda_j^{(l+1)} &= \lambda_j^{(l)} \quad \forall j \text{ mit } j \neq k \\ \bar{y}_i &= \bar{y}_i + (\lambda_k^{(l+1)} - \lambda_k^{(l)}) t_{ik} \quad \forall i \end{aligned}$$

Ende

Ende

Dabei gilt: $[x]_+ = \begin{cases} x & : \text{falls } x > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$

$$B_{ij}^m \sim \text{Poisson} \left\{ r_i - t_{ij} z_j^m + \sum_{k \neq j} t_{ik} \lambda_k^m \right\}$$

Die Z_{ij}^m sind bis auf die Ergänzung z_j^m mit den x_{ij} des ursprünglichen Datenraums identisch. Die z_j^m sind Design-Parameter, die, damit die B_{ij}^m nicht negativ werden, folgender Bedingung unterliegen:

$$t_{ij} z_j^m \leq r_i + \sum_{k \neq j} t_{ik} \lambda_k^m$$

Die r_i stellen die Hintergrund-Ereignisse im Daten-Bin i dar. Da im List-Mode Fall nur ein Ereignis pro Datenraum-Bin i vorliegt, kann nicht auf einfache Art unterschieden werden, ob dieses Ereignis Hintergrund darstellt oder nicht.

Der so aufgestellte Datenraum ist:

$$\mathbf{X}_j^m = \{Z_{ij}^m, B_{ij}^m\}$$

Mit einer analogen Herleitung wie in 5.2 ergibt sich für die Übertragung in den List-Mode:

$$\lambda_j^{m+1} = \frac{\lambda_j^m + z_j^m}{s_j} \sum_i Y_i^* \frac{t_{ij}}{\sum_k t_{ik} \lambda_k^m} - z_j^m \quad (7.7)$$

Bei der folgenden Wahl der Designparameter, konvergiert der SAGE-Algorithmus am schnellsten (vgl. [19]):

$$z_j^m = \min_{i: t_{ij} \neq 0} \{\bar{y}_i(\boldsymbol{\lambda}^m) / t_{ij}\} - \lambda_j^m$$

Man spricht dann vom SAGE3-Algorithmus. Tabelle 7.3 fasst den Algorithmus zusammen. Obwohl der SAGE-Algorithmus schneller konvergiert als der Standard-EM-Algorithmus, hat er einen entscheidenden Nachteil: Während bei letzterem die t_{ij} als Sparse-Matrix nur in Abhängigkeit vom Event-Bin gespeichert werden mussten, benötigt der SAGE-Algorithmus sowohl die Abhängigkeit vom Event- als auch vom Bild-Bin. Dies verdoppelt den Speicherbedarf.

Konvergenzverhalten der verschiedenen Algorithmen

Die Abbildungen 7.4 und 7.5 zeigen die Konvergenz-Geschwindigkeit für verschiedene Quellgeometrien der verschiedenen vorgestellten Algorithmen. Die folgenden Punkte sind festzustellen:

- SAGE und OS-EM lassen sich in den List-Mode übertragen!
- Der Standard-EM-Algorithmus konvergiert, aber in beiden Fällen am langsamsten.
- Der SAGE3 konvergiert ebenfalls, und ist deutlich schneller als der EM-Algorithmus.
- Wählt man beim OS-EM zu viele Subsets, konvergiert dieser auch im List-Mode nicht mehr und beginnt sogar zu schwingen.
- Ob SAGE3 oder OS-EM2 schneller konvergiert, hängt vom gewählten Datensatz ab.

Konvergenzverhalten verschiedener EM-Algorithmen (Punktquelle)

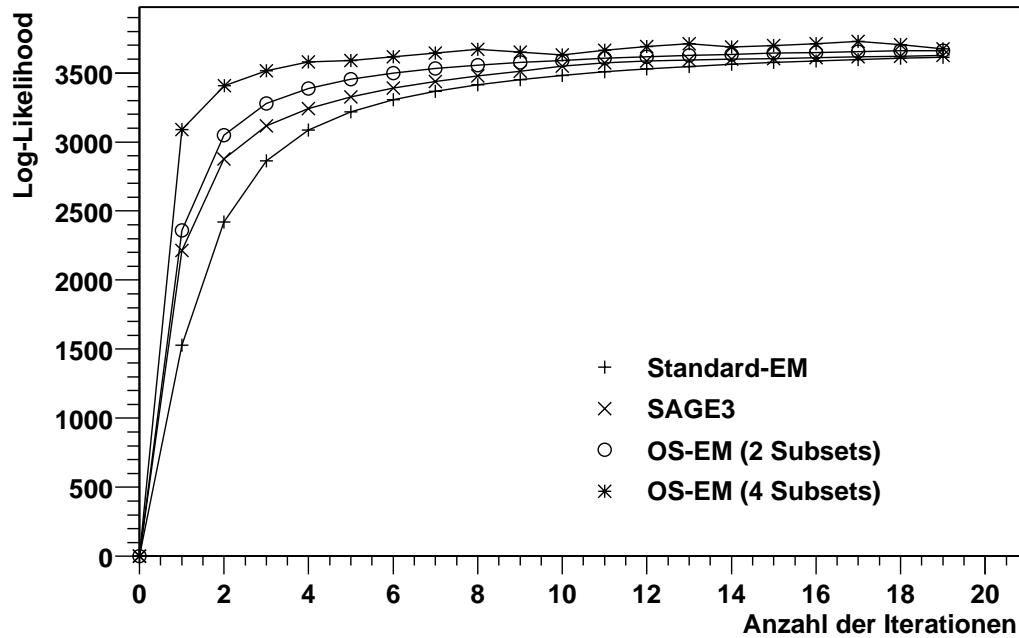


Abbildung 7.4: Log-Likelihood $L(\boldsymbol{\lambda}^{(l)}) - L(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})$ für eine Punktquelle mit 10000 Ereignissen bei 2 MeV im Zenit

Konvergenzverhalten verschiedener EM-Algorithmen (Punktquelle mit Hintergrund)

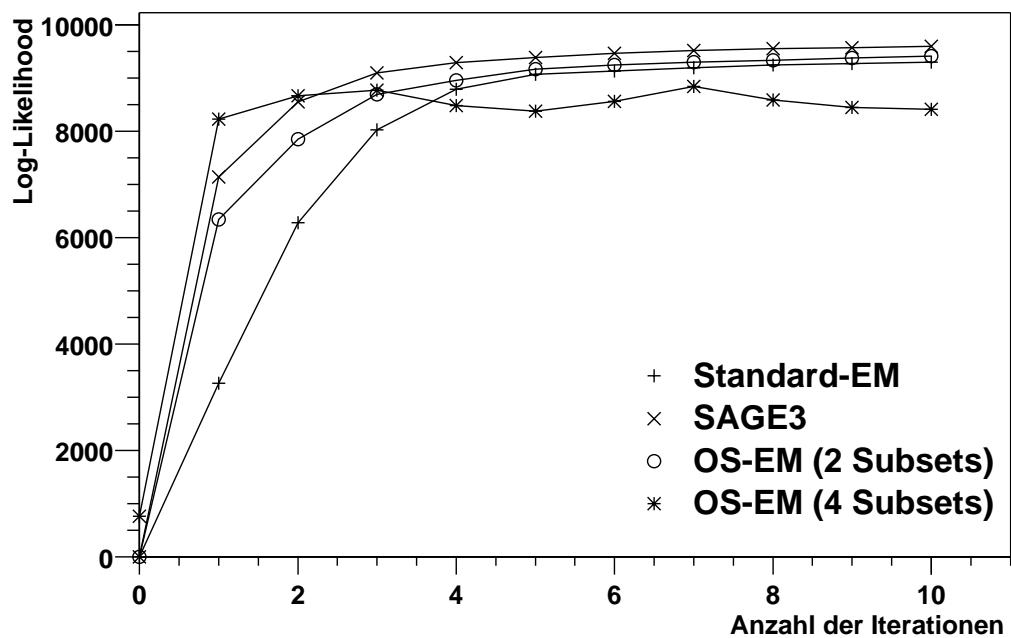


Abbildung 7.5: Log-Likelihood $L(\boldsymbol{\lambda}^{(l)}) - L(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})$ für eine Punktquelle mit 5000 Ereignissen bei 2 MeV im Zenit vor Hintergrund (Flächenquelle mit 5° Durchmesser und 20000 Ereignissen)

Schlussfolgerungen:

Aufgrund des nicht eindeutig geklärten Konvergenzverhaltens des OS-EM-Algorithmus sollte unbedingt dem Standard-EM-Algorithmus der Vorzug gegeben werden. Für den SAGE-Algorithmus müssen die t_{ij} sowohl in Abhängigkeit vom Ereignis-Bin als auch vom Bild-Bin vorhanden sein. Damit kommt dieser Algorithmus nur in Frage, wenn genügend Arbeitsspeicher zur Verfügung steht.

Während im Binned-Mode die System-Matrix schon vorhanden ist und somit der größte Zeitaufwand in die Iterationen gesteckt wird, kostet im List-Mode die Berechnung der Transmissionswahrscheinlichkeiten am meisten Zeit. Somit bringt ein schneller konvergierender Algorithmus nur wenig Gewinn, besonders wenn er mit Nachteilen (Konvergenz, Speicher) erkauft wird.

Kapitel 8

Ergebnisse der Simulation von MEGA als Satellitenteleskop

Die in diesem Kapitel vorgestellten Bilder sollen die Abbildungseigenschaften des Instruments in der *realistischen* astrophysikalischen Anwendung verdeutlichen. Für alle Bilder wurde der Standard-EM-Algorithmus und die 2. Näherung in der Berechnung der t_{ij} angewendet. Simulationsgrundlage war die Satellitengeometrie (vgl. Abb. 2.6).

8.1 Simulierte astronomische Quellen

Galaktisches Antizentrum

Abbildung 8.2 zeigt das simulierte galaktische Antizentrum nach einer Beobachtungszeit von $2.5 \cdot 10^5$ Sekunden. Die Quellverteilung ist in Abbildung 8.1 angegeben. Die Daten der Quellen sind dem Dritten EGRET Katalog [21] entnommen worden und die Quellintensität wurde *sehr grob* dem im Energiebereich zwischen 1 MeV und 50 MeV erwarteten Fluss angepasst (E^{-2} -Spektrum). Es wurde ein instrumenteller Hintergrund von fünf rekonstruierbaren Ereignissen pro Sekunde angenommen (ca. 1.3 Millionen Ereignisse, verteilt über 4π). Demgegenüber enthält die stärkste Quelle, der Crab-Nebel, 36 000 rekonstruierbare Ereignisse. Für das Bild wurden alle Ereignisse (getrackte und nicht-getrackte Compton-Ereignisse, sowie Paar-Ereignisse) im Energie-Bereich zwischen 1 MeV und 50 MeV herangezogen.

Nach drei Tagen Beobachtungszeit sind an allen Orten mit Punktquellen zumindest schwache Maxima zu erkennen, die sich bei den schwächsten Quellen allerdings kaum von Hintergrundmaxima unterscheiden lassen. Besonders in der Nähe der starken Quelle Crab erscheinen einige Maxima, die sich von den schwachen Punktquellen in der Nähe kaum unterscheiden lassen. Um die Hintergrund-Toleranz des Algorithmus noch weiter zu erhöhen, kann versucht werden, Algorithmen für den List-Mode anzupassen, die spezielle Hintergrundmodelle verarbeiten können.

Der Algorithmus bildet alle Punktquellen an die simulierte Position ab und die Intensitäten der drei stärksten Punktquellen entsprechen der verwendeten Anzahl der Ereignisse. Die Halbwertsbreite der deutlich sichtbaren Quellen beträgt etwa 1.5° . Punktquellen die sich gerade außerhalb des Viewports befinden, erzeugen keine ungewöhnlichen Randerscheinungen. Auf dem Rand des Viewports liegende Punktquellen, werden richtig abgebildet.

^{26}Al : Vela-ähnliche Region

Abbildung 8.3 stellt eine Struktur aus ^{26}Al (1.8 MeV-Linie) dar, wie sie nach einer Supernova entstanden sein könnte (z.B. Vela). Die Punktquellen enthalten jeweils ca. 3000

Quellverteilung in der Antizentrum-Simulation

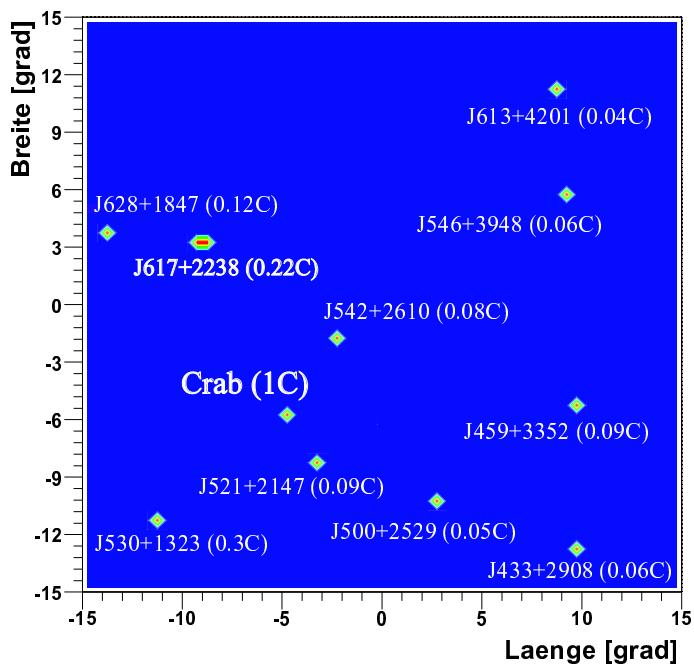


Abbildung 8.1: Quellverteilung der Simulation des galaktischen Antizentrums

Antizentrum nach 50 Iterationen

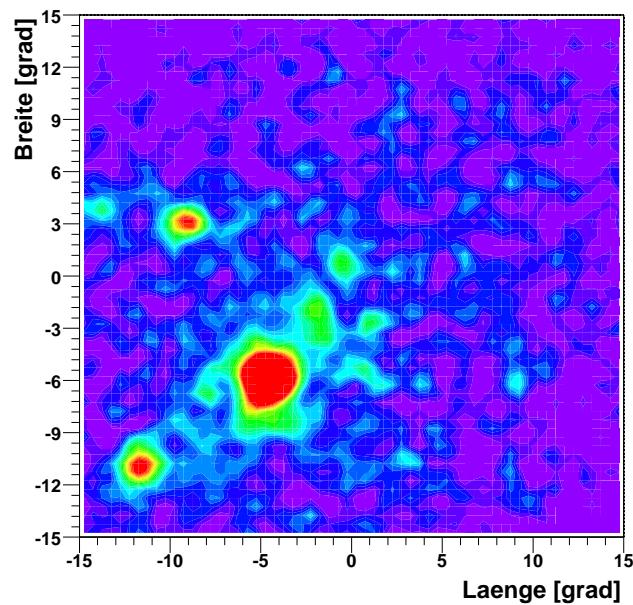


Abbildung 8.2: Simulation des galaktischen Antizentrums nach 3 Tagen effektiver Beobachtungszeit mit 5 rekonstruierbaren instrumentellen Hintergrundereignissen pro Sekunde. Länge und Breite sind im Satelliten-System definiert (Detektorachse bei $(0^\circ, 0^\circ)$). Die stärkste Quelle ist der Crab-Nebel mit einem Fluss von $2 \cdot 10^{-3} \gamma \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Es wurde ein E^{-2} -Spektrum zwischen 1 MeV und 50 MeV angenommen. Die (farbliche) Breite des Crab und das verschwinden der Hintergrundunebenheiten an den Rand hin ist auf ein Abschneiden der Minima und Maxima in der Darstellung zurückzuführen.

Struktur aus Al-26

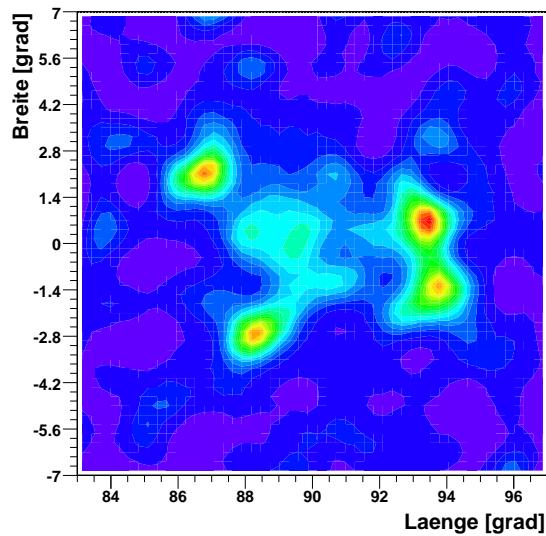
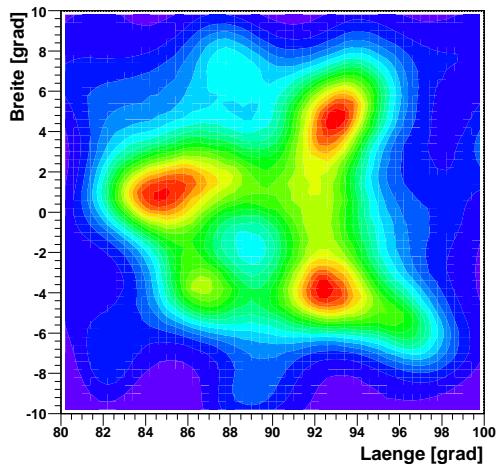
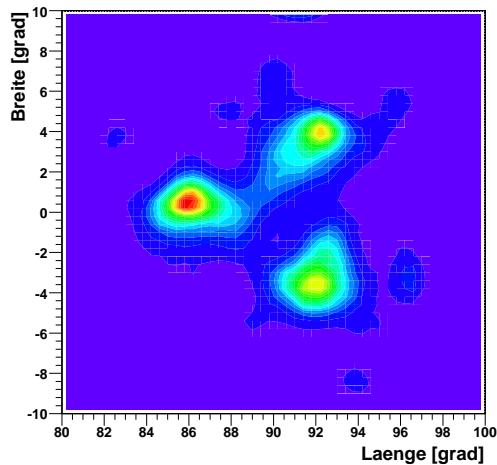


Abbildung 8.3: Simulation einer Vela-ähnlichen Region bei der 1.8 MeV-Line von ^{26}Al . Die vier Punktquellen können gut aufgelöst werden und haben eine Breite von ca. 1° .

Paar-Ereignisse



Compton-Ereignisse



Compton- und Paar-Ereignisse

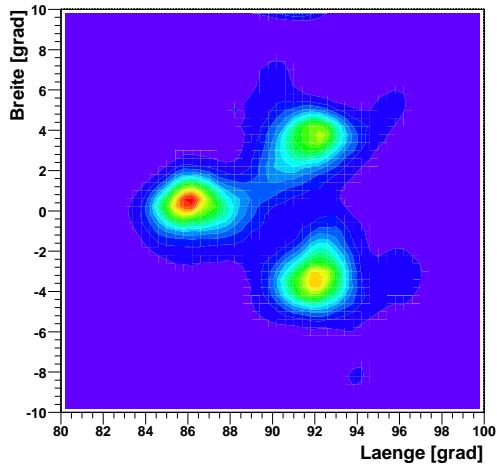


Abbildung 8.4: Drei Punktquellen bei Energien zwischen 8 MeV und 12 MeV nach 15 Iterationen. *Links oben:* Es wurden nur Paar-Ereignisse verwendet. *Rechts oben:* Es wurden nur Compton-Ereignisse verwendet. *Links unten:* Kombination aus Paar- und Compton-Ereignissen: Das Bild wird deutlich von den Compton-Ereignissen dominiert, ist aber etwas besser als das Bild der Compton-Ereignisse allein.

Ereignisse und die Struktur zwischen den Punktquellen besteht aus mehreren Flächenquellen in Form von Kreisscheiben (Innerste Scheibe: 1.5° Durchmesser und 6000 Ereignisse, mittlere Scheibe: 3° Durchmesser und 12000 Ereignisse, äußere Scheibe: 8° Durchmesser und 30000 Ereignisse).

Die unterschiedlichen Ereignistypen:

Abbildung 8.4 verdeutlicht das Zusammenspiel der einzelnen Ereignistypen zur Generierung eines Bildes. Die Bilder enthalten drei Punktquellen mit Ereignissen zwischen 8 MeV und 12 MeV, wobei jede Punktquelle etwa 2000 rekonstruierbare Ereignisse besitzt. Der Hintergrund besteht ebenfalls aus rund 2000 Ereignissen. Die Hälfte aller Ereignisse sind Paar-Ereignisse. Wie aufgrund der Tabellen 3.6 und 3.8 erwartet, sind die Paar-Ereignisse etwas schlechter als die Compton-Ereignisse. Trotzdem liefert das Zusammenspiel der beiden Ereignistypen ein etwas besseres Bild als die Compton-Ereignisse allein.

8.2 Effektive Fläche und Sensitivität

Die folgenden Ergebnisse beruhen auf der Annahme idealer Mustererkennung.

Effektive Fläche

Ein Maß für die Anzahl der detektierten Ereignisse stellt die effektive Fläche dar.

Für sie gilt (siehe z.B. [3]):

$$A_{eff} = A_{Start} \frac{N_{Mess}}{N_{Start}} \quad (8.1)$$

mit:
 A_{Start} Fläche, von der die Photonen homogen gestartet werden
 (größer als der Detektor)
 N_{Start} Anzahl der von dieser Fläche gestarteten Photonen
 N_{Mess} Anzahl der gemessenen, rekonstruierbaren Ereignisse

Grafik 8.5 enthält die effektive Fläche für Compton-Ereignisse (gestrichelte Linie), Paar-Ereignisse (gepunktete Linie) und beide Ereignistypen zusammen (durchgezogene Linie) in Abhängigkeit von der Gesamtenergie. Die Richtung der einfallenden Photonen ist 5° um den Zenit verteilt. Beim tatsächlichen Teleskop werden bei höheren Energien geringere effektive Flächen zu erwarten sein, da zum einen aufgrund der hohen Anzahl von Hits die Mustererkennung schlechter wird und zum anderen nur wenige Ereignisse vollständig absorbiert werden, so dass eine geringere Gesamtenergie gemessen wird.

Die effektive Fläche für getrackte und nicht-getrackte Compton-Ereignisse ist in Abbildung 8.6 dargestellt. Bei der aktuellen Dicke der Streifenzähler ($500 \mu\text{m}$) sind erst ab ca. 2 MeV mehr als die Hälfte der Ereignisse getrackt. Die effektive Fläche der getrackten Ereignisse erreicht ihr Maximum mit $(54 \pm 2) \text{ cm}^2$ bei ca. 3 MeV. Geht man von einem E^{-2} -Spektrum der γ -Quanten aus, so beträgt die Anzahl der getrackten Compton-Ereignisse nur 13.7 Prozent (siehe auch Tabelle 8.2). Aufgrund der Detektorschwellen (vgl. Kap 3.1) bricht die effektive Fläche unterhalb von 500 keV ab.

Die effektive Fläche in Abhängigkeit vom Einfallswinkel der Photonen relativ zur Detektorachse ist in Abbildung 8.7 illustriert. Die durchgezogene Linie steht für ein E^{-2} Spektrum zwischen 500 keV und 50 MeV. Der Einbruch bei 90° ist mit den parallel zur Einfallsrichtung der Photonen liegenden Wafern zu erklären. Der Verlauf der Kurve ist mit der Absorption der γ -Strahlung durch die Kalorimeter zu erklären. Im realen Teleskop werden die meisten Photonen bei höheren Winkel vom Satellitenmaterial absorbiert werden.

Effektive Fläche in Abhängigkeit von der Energie

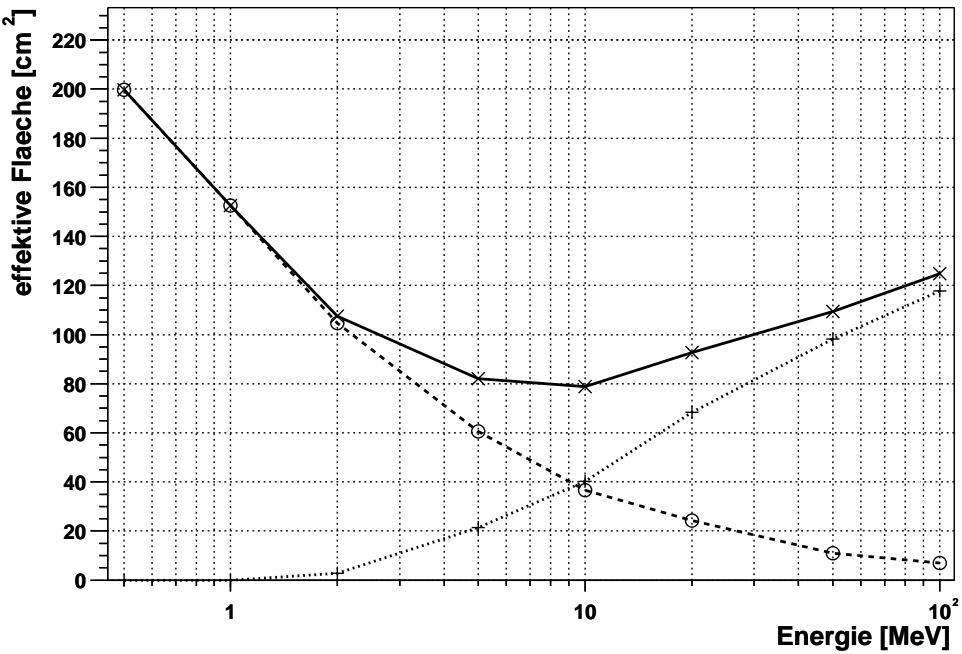


Abbildung 8.5: Effektive Fläche für Compton- und Paar-Ereignisse in Abhängigkeit von der Gesamtenergie
(○: Compton-Ereignisse, +: Paar-Ereignisse, ×: Compton- und Paar-Ereignisse)

Effektive Fläche in Abhängigkeit von der Energie

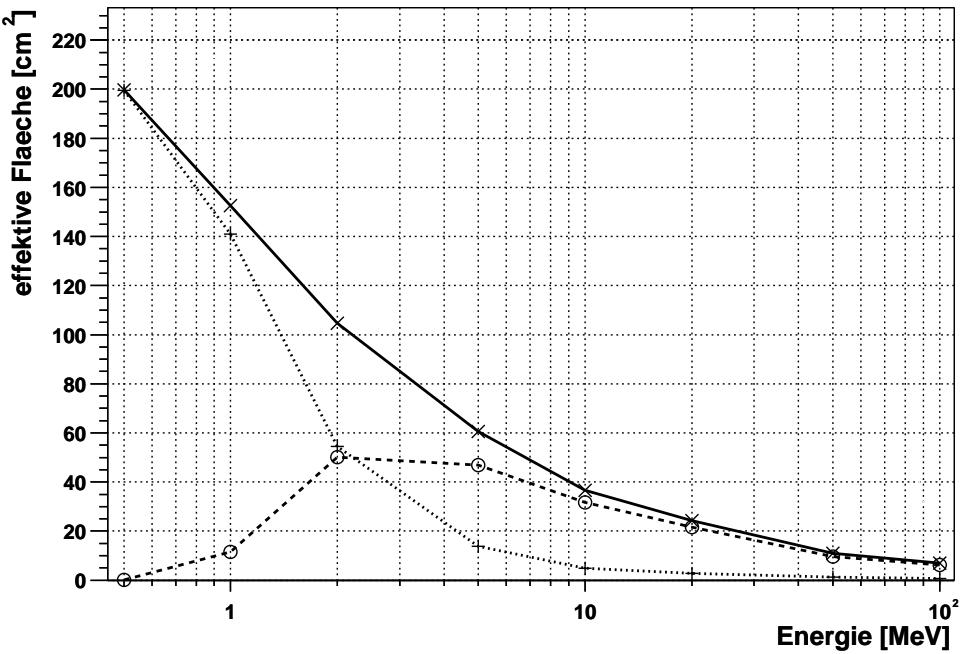


Abbildung 8.6: Effektive Fläche der getrackten und nicht-getrackten Compton-Ereignisse in Abhängigkeit von der Gesamtenergie (○: getrackte Compton-Ereignisse, +: nicht-getrackte Compton-Ereignisse, ×: alle Compton-Ereignisse)

Effektive Fläche in Abhängigkeit vom Einfallswinkel

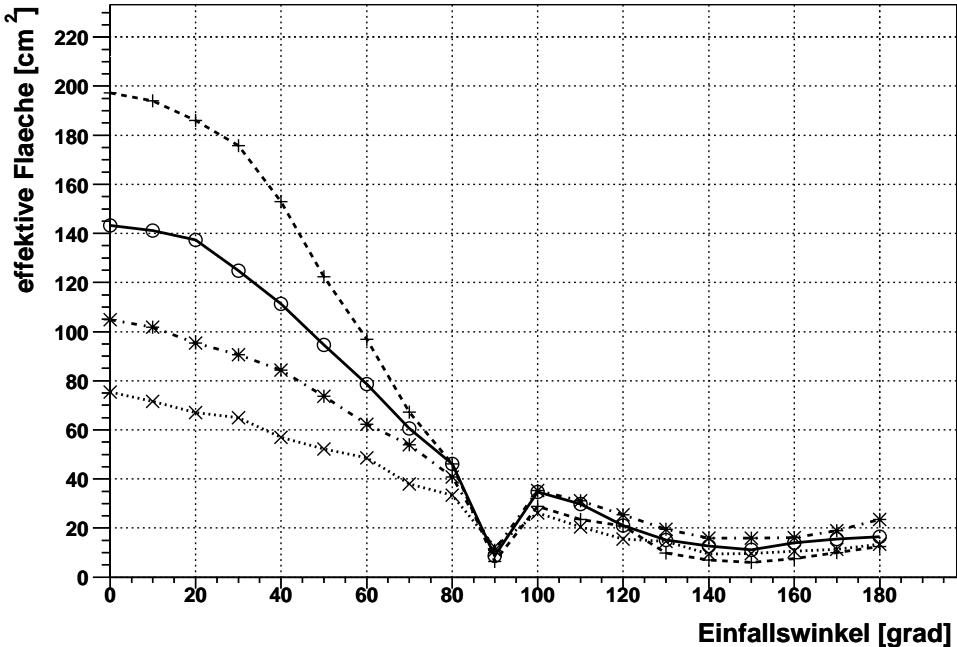


Abbildung 8.7: Effektive Fläche in Abhängigkeit vom Einfallswinkel der Photonen (\circ : E^{-2} -Spektrum, $+$: 500 keV, $*$: 2 MeV, \times : 10 MeV)

Sensitivität

Unter Sensitivität versteht man den minimalen Fluss (in $\gamma \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) einer Punktquelle, der nötigt ist, damit sich die Punktquelle aus einem vorgegebenen Hintergrund eindeutig (z.B. mindestens 5σ) hervorhebt.

Das Problem bei der Sensitivitäts-Bestimmung besteht darin, die gemessene Anzahl an Ereignissen für die Endversion des Satelliten richtig einzuschätzen, wie beispielsweise:

1. Anzahl der identifizierten Elektronentracks
2. Gesamtzahl der richtig identifizierten Ereignisse
3. Anzahl der Hintergrund-Ereignisse
4. Verteilung des instrumentellen Hintergrunds auf der Himmelssphäre
5. Reduktion des instrumentellen Hintergrunds während der Spurerkennung

Die Punkte (1), (2) und (5) sind erst mit einem voll funktionsfähigen Muster-Erkennungsprogramm richtig abzuschätzen und Punkte (3) und (4) benötigen umfangreiche Simulationen mit der endgültigen Geometrie des Satelliten.

Bei der Berechnung der Sensitivitäten wurde so vorgegangen:

Zunächst wurde ein isotroper Hintergrund mit einem E^{-2} -Spektrum simuliert, der auf der festgelegten Zählrate von 5 rekonstruierbaren Ereignissen pro Sekunde und einer Beobachtungszeit von $t_{obs} = 10^5$ s beruht. Anschließend wurden Punktquellen bei verschiedenen Energien E_{PQ} 5° vom Detektorzenit simuliert. Zuletzt wurde die Anzahl der Ereignisse der Punktquelle N_{PQ} bestimmt, damit die Quelle 5σ über dem Hintergrund liegt.

Für den Fluss dieser Punktquelle gilt dann:

$$F_{PQ}^{5\sigma} = \frac{N_{PQ}}{A_{eff}(E_{PQ}) t_{obs}}$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst. Bei der gegebenen Ausgangslage ergibt sich eine mittlerer Sensitivität von $3 \cdot 10^{-4} \gamma \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$.

Energie [MeV]	$F_{PQ}^{5\sigma} [\gamma \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}]$
0.5 MeV	$(4.5 \pm 1.0) \cdot 10^{-4}$
1.0 MeV	$(3.3 \pm 0.7) \cdot 10^{-4}$
2.0 MeV	$(2.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-4}$
5.0 MeV	$(2.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-4}$
10 MeV	$(2.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-4}$
20 MeV	$(9.3 \pm 2.0) \cdot 10^{-5}$
50 MeV	$(6.5 \pm 1.6) \cdot 10^{-5}$

Tabelle 8.1: Minimaler Fluss von Punktquellen in Zenitnähe unter folgender Abschätzung des instrumentellen Hintergrunds: Es wurde ein isotropes E^{-2} -Spektrum mit einer Zählrate von fünf Ereignissen pro Sekunde und einer Beobachtungszeit von 10^5 s simuliert.

Da die meisten Ereignisse nicht-getrackt sind, ist in 10^5 s keine sehr wesentliche Verbesserung gegenüber COMPTEL zu erkennen. Erst wenn nur getrackten Ereignisse verwendet werden, verbessert sich das Ergebnis etwas. Genauere Untersuchen werden folgen. Bei der Integration eines Hintergrund-Modells in den List-Mode Likelihood, könnte dieses Ergebnis noch weiter verbessert werden. Andererseits wird die Mustererkennung zu einer Verschlechterung der Daten führen. Bei hohen Energien gelten die selben Anmerkungen wie bei der effektiven Fläche.

8.3 Designoptimierungen

Dicke der Wafer

Eines der wichtigsten Merkmale von MEGA ist die Möglichkeit Elektronenspuren zu messen. Die Richtungsbestimmung des Elektrons wird allerdings stark von der Molière-Streuung verschlechtert. Diese hängt in erster Linie von der Energie des Elektrons (je höher, desto geringer) und der Dicke des Silizium-Wafers (je dicker, desto stärker) ab (näheres in [3]).

Um den Einfluss von unterschiedlich dicken Si-Wafern zu untersuchen wurden Simulationen mit der Satelliten-Geometrie mit $500\mu\text{m}$ - bzw. $300\mu\text{m}$ -Wafers durchgeführt. Es wurde eine Punktquelle im Zenit mit einem E^{-2} -Spektrum zwischen 500 keV und 50 MeV simuliert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.2 zusammengefasst.

Waferdicke	$500\mu\text{m}$	$300\mu\text{m}$
$FWHM - SPD$	25°	20°
getrackte/rekonstruierbare Ereignisse	14%	20%
effektive Fläche für alle Ereignisse	143 cm^2	96 cm^2
effektive Fläche für getrackte Ereignisse	20 cm^2	19 cm^2
Anzahl der unvollständig gestoppten Elektronen	12%	15%

Tabelle 8.2: Vergleich von $500\mu\text{m}$ - und $300\mu\text{m}$ -Wafers basierend auf der Satelliten-Geometrie

Eine Reduzierung der Wafer-Dicke führt zu einer Erhöhung der getrackten Ereignisse um ca. 43% und zu einer Verkleinerung des Ereigniskreissegments um 20%. Der Nachteil ist, dass die effektive Fläche um ca. 33% abnimmt und 25% mehr Elektronen unvollständig absorbiert werden, so dass letztendlich die effektive Fläche für getrackte Ereignisse sogar etwas kleiner ist als bei einer Wafer-Dicke von $500\mu\text{m}$.

CdZnTe

In der aktuellen Version von MEGA ist die Winkelauflösung vor allem durch die Messunsicherheiten der Kalorimeter limitiert. Als Alternative bieten sich andere Halbleitermaterialien an, wie z.B. Germanium oder CdZnTe. Für letzteres wurden Simulationen mit der in Abbildung 8.8 dargestellten Geometrie durchgeführt. Dabei wurden die Orts- und Energieauflösungen des TIGRE-Teleskops [22] für CdZnTe-Detektoren übernommen. Es zeigt sich, dass für Energien über 1 MeV Winkelauflösungen von weniger als 30 Bogenminuten erreicht werden können. In Abbildung 8.9 wurden zwei 0.4° entfernte Punktquellen bei 2 MeV aufgelöst.

Bis heute ist es allerdings nicht gelungen CdZnTe-Detektoren in einem Umfang herzustellen, der für der Realisierung der in Abbildung 8.8 gezeigten Geometrie notwendig wäre.



Abbildung 8.8: Geant-Geometrie in der die Kalorimeter durch CdZnTe-Halbleiter-Detektoren ersetzt wurden. Diese besitzen eine Ortsauflösung von $0.375 \times 0.375 \times 5 \text{ mm}^3$ und eine Energieauflösung von 2 keV (vgl. [22]). Die Seitenwände bestehen aus fünf Lagen und der Boden aus 10 Lagen CdZnTe-Detektoren mit einer Dicke von jeweils 5 mm.

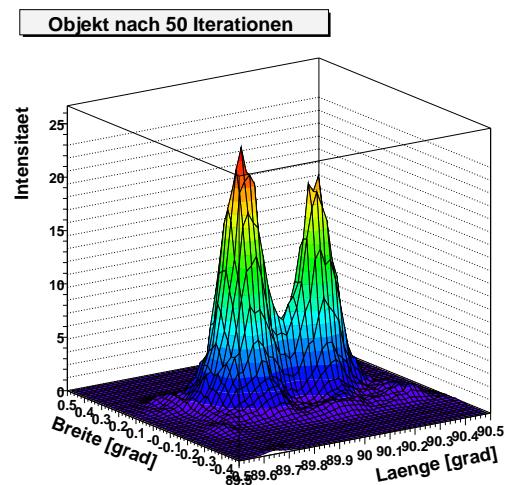


Abbildung 8.9: Zwei Punktquellen (2 MeV) im Abstand von 0.4° , simuliert mit der CdZnTe-Geometrie.

Kapitel 9

Abbildung von Quellen im Nahfeld

9.1 Anwendungen für MEGA im Nahfeld

Der wichtigste Anwendungsbereich von Rekonstruktionsalgorithmen im Nahfeld ist die Eichung von MEGA für den Einsatz als Weltraumteleskop, denn auf der Erde kann man mit den Quellen niemals so weit vom Detektor entfernt sein, dass wirklich paralleler Einfall vorliegt.

Obwohl MEGA grundsätzlich als Weltraumteleskop entwickelt wurde, so sind doch auch terrestrische Anwendung denkbar. Für weitere Einsatzmöglichkeiten spricht bereits die grundlegende Konzeption des Detektors:

- Der Detektor besteht aus vielen einzelnen Modulen, die in vielfältiger Art und Weise angeordnet werden können. So ist eine ringförmige Gruppierung der Kalorimeter für eine Anwendung in der Nuklearmedizin genauso realisierbar, wie senkrecht zueinander stehende Streifenzähler, die eine gute dreidimensionale Auflösung ermöglichen sollen. Eine mögliche Geometrie für den Einsatz von MEGA in der Nuklearmedizin ist in Abbildung 9.1 zu sehen.
- Die hohe Energiemessunsicherheit der Kalorimeter spielt eine untergeordnete Rolle, da bei den meisten terrestrischen Anwendungen die Energie der Gammastrahlung bekannt ist. Damit kann der Compton-Winkel über die Gesamtenergie und die im Tracker deponierte Energie berechnet werden.
- Befinden sich die Objekte im Nahfeld sehr nah an den Streifenzählern, bestimmt die Ortsauflösung des D1 die gesamte Ortsauflösung.

Unter diesen Voraussetzungen kommen mehrere Einsatzbereiche in Frage:

- Eine der wichtigsten Anwendungen liegt in der Nuklearmedizin, in der sogenannten **Single Photon Emission Computer Tomography (SPECT)**: Dort werden den Patienten radioaktive Substanzen gespritzt, wie beispielsweise ^{99m}Tc oder ^{131}I . Aus der Verteilung dieser Stoffe im Körper werden dann Rückschlüsse auf spezielle Gewebeeigenschaften geführt. So wird sich aufgrund höherer Durchblutung die radioaktive Substanz in Krebsgewebe konzentrieren. Ferner können beispielsweise geringer durchblutete Regionen des Gehirns diagnostiziert werden und vieles mehr.
- Eine andere Einsatzmöglichkeit ist die Überwachung von radioaktiven Abfällen: In den nächsten Jahren werden zahlreiche Kernkraftwerke stillgelegt werden. Damit müssen sowohl ausgebrannte Kernbrennstäbe als auch die Reaktoren sicher entsorgt werden. Mehrere kleine MEGA-Detektoren, bestehend aus einigen Streifenzählern

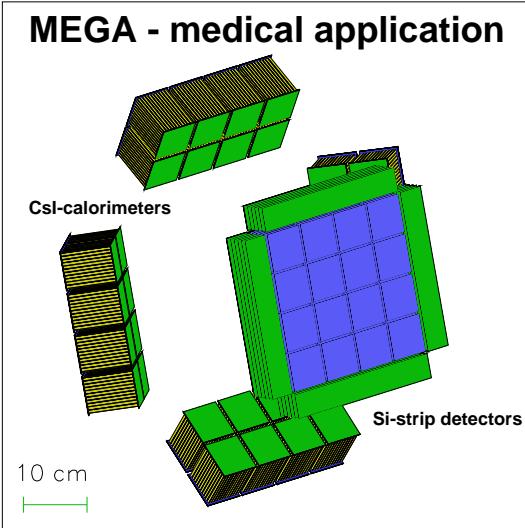


Abbildung 9.1: Geometrie für den Einsatz in der Nuklearmedizin: Der Tracker besteht aus 5 Lagen Streifenzählern, die jeweils aus 16 Wafern aufgebaut sind. 32 Kalorimeter umgeben den Konverter. Die Geometrie ist dem C-SPRINT-Detektor nachempfunden (siehe z.B. [12]).

und ein paar Kalorimetern, verteilt auf das Endlager, würden ausreichen, sowohl die Position der Quelle im dreidimensionalen Raum als auch deren genaue Energie festzustellen.

Um diese Einsatzmöglichkeiten abzuschätzen und um die Funktion des Prototypen zu testen, wird nun ein Algorithmus sowohl für die zweidimensionale als auch die dreidimensionale Rekonstruktion abgeleitet.

9.2 Bestimmung der Transmissionswahrscheinlichkeiten in kartesischen Koordinaten

Beim Standardproblem der zweidimensionalen Rekonstruktion im Nahfeld befindet sich das emittierende Objekt in einer Entfernung z_s oberhalb des Detektors. Durch dieses Objekt wird die Rekonstruktionsebene parallel zu den Streifenzählern gelegt. Beim Schnitt der Ereigniskegel mit den Rekonstruktionsebenen entstehen Kegelschnitte, in erster Linie Ellipsen und Hyperbeln (Kreise, Parabeln und Geraden können als Grenzfälle vernachlässigt werden).

Analog zu Kapitel 6 können auch hier die Transmissionswahrscheinlichkeiten berechnet werden. Der entscheidende Unterschied ist, dass nun nicht mehr über eine Kugeloberfläche R integriert wird ($\Omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0) \in R_j$), sondern über alle möglichen Ursprungspunkte in der Rekonstruktionsebene E ($\mathbf{z}_0 \in E_j$).

Die Gleichung für die Kegelschnitte lautet (vgl. [23]):

$$[\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)]^2 = \cos^2 \varphi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^2 \quad (9.1)$$

- \mathbf{n} Einheitsvektor in Richtung Kegelachse
- wobei: \mathbf{x}_c Kegelspitze (Ort der ersten Compton-Wechselwirkung)
- φ Öffnungswinkel des Kegels (\equiv Compton-Winkel)

1. Näherung:

Für die erste Näherung gilt analog Gleichung (6.7):

$$t_{ij} \propto \left[\int dl_{j1} e^{-\mu_{tot}^{D1}(l_{j1})l_{j1}} \right] \mathcal{G}(\Omega_0^*|_E, \sigma_{e-Disp})(\Omega_j) \oint_{KS \in E_j} dl \quad (9.2)$$

$\oint_{K \in E_j} dl$ ist dabei die Länge des Kegelschnitts in der Rekonstruktionsebene.

Der Algorithmus, der ähnlich dem in [23] ist, führt diese Schritte aus:

1. Zunächst werden die Schnittpunkte $S_{V,c}$ des Kegelschnitts mit dem Viewportrand berechnet. Sind keine Schnittpunkte vorhanden, liegt das Ereignis entweder vollständig innerhalb oder außerhalb des Viewports. Deswegen werden nun kleinere Viewports nach Schnittpunkten abgesucht. Werden keine gefunden, liegt das Ereignis außerhalb und der Algorithmus fährt mit dem nächsten Ereignis fort.
2. Von den Viewport-Schnittpunkten ausgehend werden die beiden angrenzenden senkrecht dazu verlaufenden Gitternetzlinien y_a und y_{a+1} (siehe Abb. 9.2) nach den Schnittpunkten $S_{y,a}$ bzw. $S_{y,a+1}$ abgesucht.
3. Berechne die Schnittpunkte $S_{x,b}$ der parallel verlaufenden Gitternetzlinien x_b bis zum Schnittpunkt $S_{y,a}$.
4. Berechne den (linearen) Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten des jeweiligen Bins.
5. Falls in (2) der Schnittpunkt an y_a gefunden wurde, dann suche nun y_{a-1} ab, ansonsten y_{a+2} .
6. Wiederhole Schritte (3) bis (5) bis der nächste Schnittpunkt des Viewports erreicht wurde.
7. Wiederhole (2) bis (6) für die noch verbleibenden Viewportschnittpunkte.
8. Im Fall von getrackten Ereignissen werden nun die einzelnen Bins nach ihrem Winkeleabstand auf dem Kegel zum errechneten Ursprungspunkt des Photons gemäß der SPD-Verteilung gewichtet.
9. Abschließend kann eine zusätzliche Gewichtung des Ereignisses erfolgen, z.B. nach Wahrscheinlichkeiten aus der Spurerkennung.

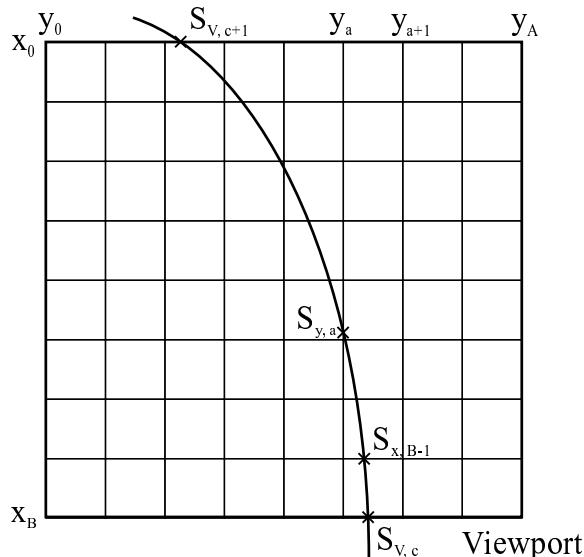


Abbildung 9.2: :

Beschreibung der einzelnen Größen:

x_b	Gitternetzlinien in y-Richtung
y_a	Gitternetzlinien in x-Richtung
$S_{V,c}$	Schnittpunkte mit dem Viewportrand
$S_{x,b}$	Schnittpunkte mit der Gitternetzlinie x_b
$S_{y,a}$	Schnittpunkte mit der Gitternetzlinie y_a

2. Näherung:

Für die zweite Näherung folgt analog Gleichung (6.8):

$$t_{ij} \propto \left[\int dl_{j1} e^{-\mu_{tot}^{D1}(l_{j1})l_{j1}} \right] \mathcal{G}(\Omega_0^*|_K, \sigma_{e-Disp})(\Omega_j) \mathcal{G}(\varphi_c, \sigma_{ARM})(\varphi_c(\Omega_j)) F(E_j) \quad (9.3)$$

Das Prinzip der Rekonstruktion sieht folgendermaßen aus:

1. Bestimme, ob das Ereignis den Viewport kreuzt.
2. Berechne die Eigenschaften des Kegelschnitts (Translation, Rotatation, Brennpunkte). In Anhang A ist der Algorithmus für die Herleitung der Daten aus Gleichung 9.1 hergeleitet.
3. Berechne für jedes Bin des Bildraums:
 - bei Ellipsen: $d_E = F_1 P + F_2 P - 2a$
 - bei Hyperbeln: $d_H = |F_1 P - F_2 P - 2a|$

Diese Werte werden gemäß der ARM-Verteilung gewichtet. Im Fall von getrackten Ereignissen werden diese auch noch nach ihrem Winkelabstand auf dem Ereigniskegel zum errechneten Ursprungspunkt des Photons gemäß der SPD-Verteilung gewichtet.

4. Abschließend kann eine zusätzliche Gewichtung des Ereignisses erfolgen, z.B. nach Wahrscheinlichkeiten aus der Spurerkennung.

Genau wie im sphärischen Fall ist auch hier die 2. Näherung signifikant besser, so dass für alle folgenden Bilder nur noch diese verwendet wird.

Dreidimensionale Rekonstruktion

Die 3D-Bildrekonstruktion beruht im Wesentlichen auf der 2D-Rekonstruktion: Zunächst wird das Objekt in einzelne Scheiben zerlegt. Für jede dieser Ebenen wird ein zweidimensionales Bild erzeugt. Nachdem alle Ebenen berechnet sind, werden die Ebenen wieder zusammengesetzt und an den EM-Algorithmus übergeben. Dort müssen entsprechende Routinen wie Penalties an den dreidimensionalen Fall angepasst werden.

Da in die Rekonstruktion die z-Komponente als neue Größe einfließt, erhöht sich der Speicherbedarf gegenüber der zweidimensionalen Rekonstruktion um einen Faktor, der der Anzahl der Rekonstruktionsebenen entspricht. Bei begrenzter Speicherkapazität reduziert sich die Anzahl der verwendbaren Ereignisse entsprechend.

Abbildung 9.4 zeigt ein solches dreidimensionales Bild einer Punktquelle mit der Satellitengeometrie.

Auch wenn die gegenwärtige dreidimensionale Rekonstruktion im Vergleich zu den komplexen Algorithmen, die in der Medizin angewendet werden, noch sehr rudimentär ist, so zeigt sich doch, dass die Satellitengeometrie in der Lage ist, Strukturen zu identifizieren, die sich im näheren Umfeld des Detektors befinden. Theoretisch müsste sich damit auch die während einer Satellitenmission aktivierte Masse erkennen lassen. Inwiefern damit eine Unterdrückung von Ereignissen, die von aktiverter Satellitenmasse stammen, möglich ist, erfordert noch umfangreichere Untersuchungen.

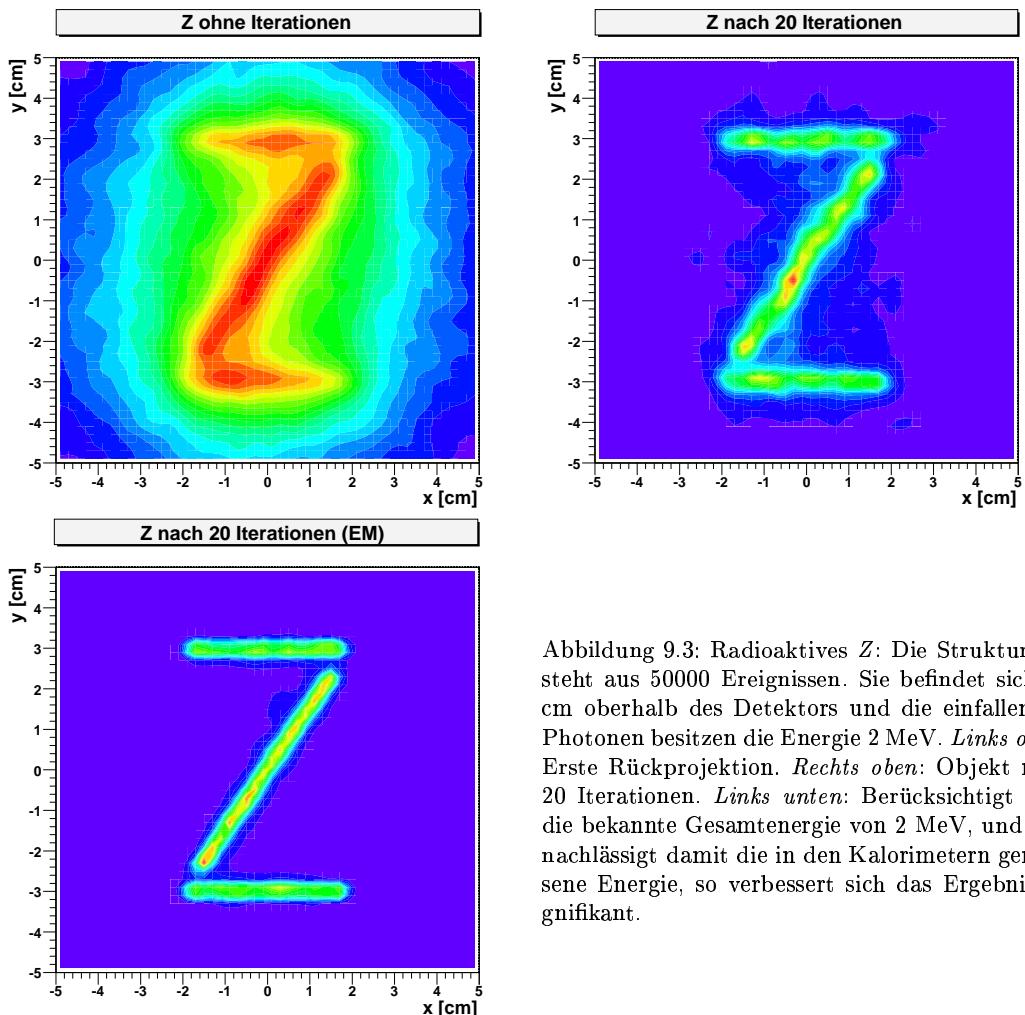


Abbildung 9.3: Radioaktives Z : Die Struktur besteht aus 50000 Ereignissen. Sie befindet sich 10 cm oberhalb des Detektors und die einfallenden Photonen besitzen die Energie 2 MeV. *Links oben*: Erste Rückprojektion. *Rechts oben*: Objekt nach 20 Iterationen. *Links unten*: Berücksichtigt man die bekannte Gesamtenergie von 2 MeV, und vernachlässigt damit die in den Kalorimetern gemessene Energie, so verbessert sich das Ergebnis signifikant.

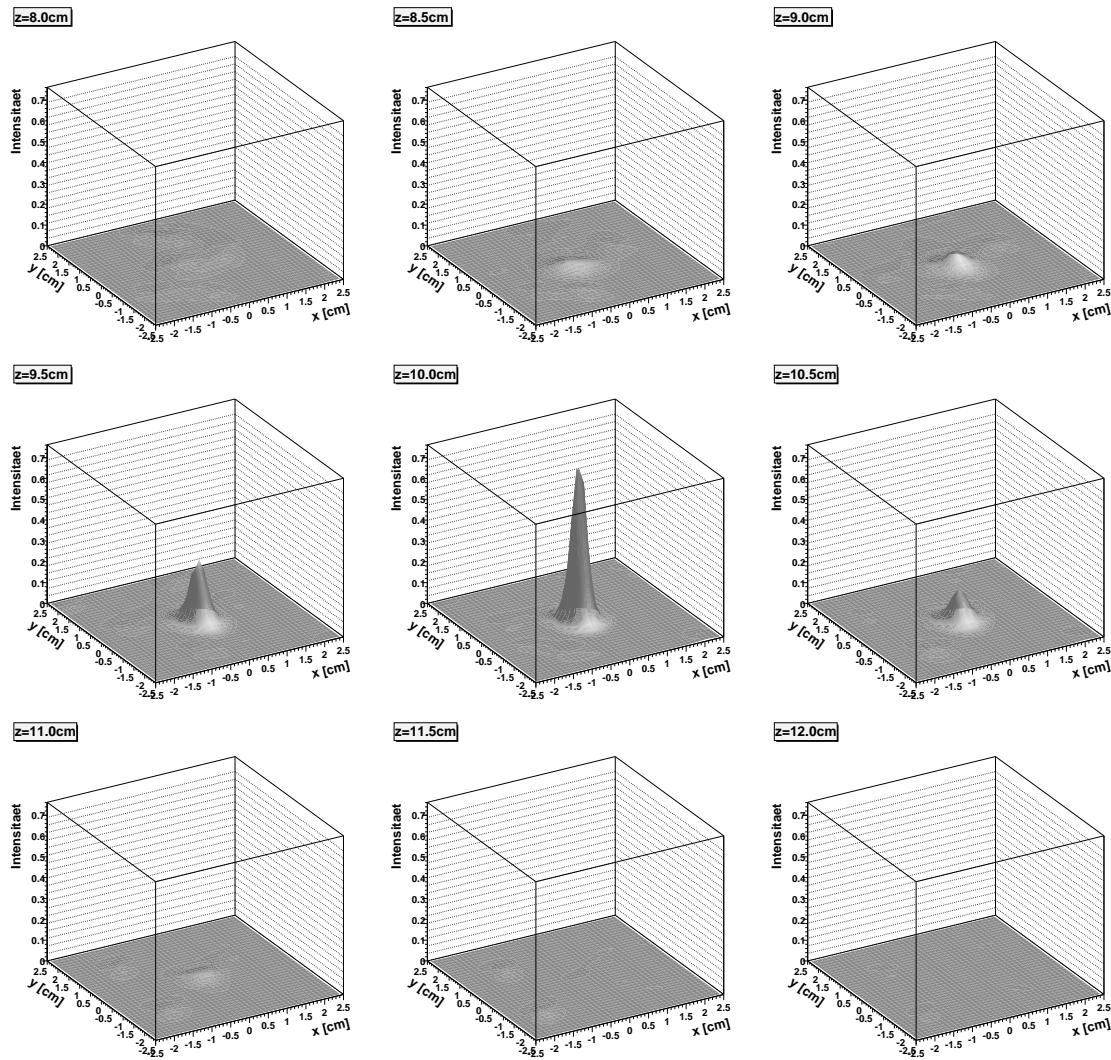


Abbildung 9.4: Punktquelle im Abstand von 10 cm vom obersten Layer: Die Halbwertsbreite in x- und y-Richtung beträgt etwa 0.6 cm, die in z-Richtung 0.8 cm. Es wurden ca. 2000 Ereignisse der Energie 2 MeV verwendet.

Kapitel 10

Erste Ergebnisse des Prototypen

Dieses Kapitel befasst sich mit den experimentellen Ergebnissen der ersten Ausbaustufe des Prototypen. Diese umfasst einen Streifenzähler und zwei Kalorimeter (siehe Abb. 10.1).

Prinzipieller Versuchsaufbau (Geant-Modell)

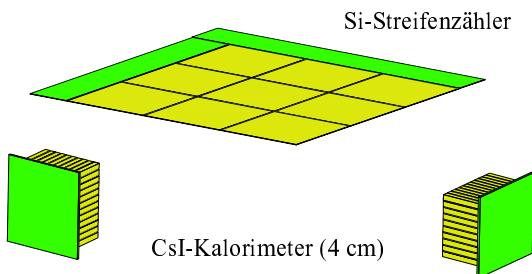


Abbildung 10.1: Erste Ausführung des Prototypen mit einem Streifenzähler und zwei senkrecht zueinander angeordneten Kalorimetern

Mit dieser Geometrie wurde eine ^{133}Ba -Quelle (356 keV-Linie) an den Positionen (1/1/36) und (-8/0/36) ($x/y/z$ in cm) (14 cm über dem Streifenzähler) sowie an (4/1.4/19.5) (2.5 cm unter dem Streifenzähler) aufgenommen. Der Mittelpunkt des Streifenzählers befindet sich bei (0/0/22).

In Abbildung 10.2 wird das aufgenommene Energiespektrum und in Abbildung 10.3 die Aufteilung der Energie auf das Elektron und das gestreutes Photon illustriert. Mit einer Halbwertsbreite von 100 keV sind die gemessenen Energien um einen Faktor 1.6 schlechter als die aus der Simulation erwarteten Werte. Dafür kommen mindestens zwei Ursachen in Frage:

1. Durch die Röntgenfluoreszenz-Linie von ^{133}Ba bei 81 keV kommt es zu zahlreichen Zufallskoinzidenzen. Diese lassen sich durch die Verkleinerung des Koinzidenzfensters reduzieren.
2. Die Energiemessunsicherheiten der einzelnen Detektoren haben noch nicht die in Kapitel 2 angegebenen minimalen Werte erreicht. Weiterentwicklungen an Elektronik und genauere Energieeichungen werden diese Messfehler zukünftig mindern.

Für die Punktquelle an (1/1/36) beträgt die Ortsauflösung aus der ARM-Verteilung etwa 5 cm (siehe Abb. 10.4). Dem entspricht eine Winkelauflösung von ca. 18° FWHM. Die Simulationsrechnungen ergaben hingegen eine Halbwertsbreite von 9° FWHM. Die Ursache ist im Wesentlichen in der schlechteren Energiemessung zu finden.

Um ein Bild zweier Punktquellen zu erhalten wurden die Messdaten aus der Entfernung $z = 14$ cm kombiniert und mit Hilfe des 2D-Nahfeld-Algorithmus und des klassischen EM-Algorithmus wurde ein Bild (siehe Abb. 10.5) rekonstruiert. Es zeigt, dass MEGA diese

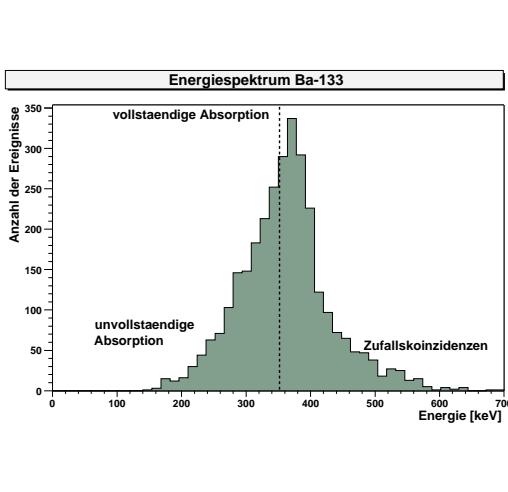


Abbildung 10.2: Energiespektrum der ^{133}Ba -Quelle an Position (1/1/36): Die Halbwertsbreite beträgt etwa 100 keV im Vergleich zu 60 keV aus der Simulation. Die Verschiebung des Maximums zu höheren Energien ist auf Probleme mit der Energieeichung zurückzuführen.

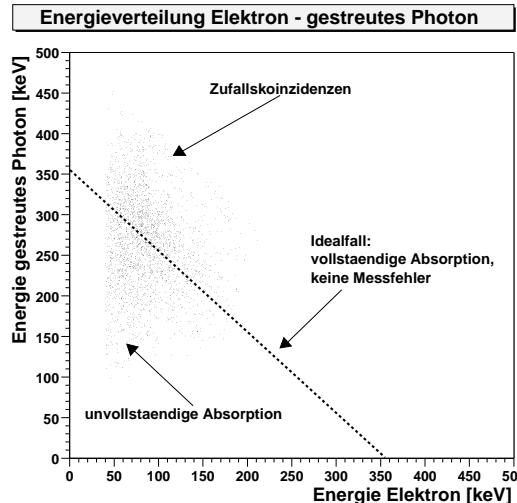


Abbildung 10.3: Aufteilung der gemessenen Energie auf Elektron und gestreutes Photon: Die gemessenen Werte sind sehr breit um den Idealfall (gestrichelte Linie) verteilt. Die leichte Erhöhung der Intensität bei 81 keV Elektronen Energie ist auf eine Röntgenfluoreszenzlinie von ^{133}Ba zurückzuführen.

Punktquellen eindeutig auflösen kann. Die auftauchenden Artefakte, die etwa 1/10 der Intensität der schwachen Quelle besitzen, haben zwei Ursachen:

1. Während der gauß-förmige Fit an die ARM-Verteilung für simulierte Daten sehr gut übereinstimmt, ist dies für die Messwerte nicht mehr der Fall. Eine detailliertere Modellierung der Fitfunktion wird für eine stärkere Unterdrückung der Artefakte sorgen.
2. Die aktuelle Ausbaustufe des Prototypen ist extrem asymmetrisch: Die Hyperbeläste liegen hauptsächlich auf der Verbindungsline zwischen den beiden Quellen bzw. senkrecht dazu. Genau dort liegen auch die Artefakte.

Die Halbwertsbreiten der Quellen liegen bei etwa 1.0 cm. Dies ist nicht gleichbedeutend mit der möglichen Trennung von zwei eng beieinander liegenden Quellen, da der EM-Algorithmus immer zur Erzeugung punktförmiger Quellen tendiert. Simulationen ergaben, dass bei der gegebenen Entfernung von 14 cm zum obersten Layer zwei Punktquellen im Abstand von 2.5 cm eindeutig aufgelöst werden können.

Der Versuch, den Energiemessfehler in den Kalorimetern unter Berücksichtigung der bekannten Energie des einfallenden Photons zu eliminieren (mittels $E_{D2} = 365 \text{ keV} - E_{D1}$), brachte keine Verbesserung in der Bildqualität. Dies lässt den Schluss zu, dass der Energiemessfehler im Tracker - zumindest in diesem Datensatz - höher ist als erwartet.

Die Aufnahme der Punktquelle 2 cm unterhalb des Streifenzählers wurde sowohl mittels 2D-Nahfeld- als auch über den 3D-Nahfeld-Algorithmus untersucht. Für sie ergibt sich eine theoretische Ortsauflösung von 4 mm. Bei einer Halbwertsbreite von etwa 5 mm (vgl. Abb. 10.6) nach 15 Iterationen stimmen diese Werte sehr gut überein.

Die dreidimensionale Rekonstruktion der unteren Punktquelle ist in Abb. 10.7 zu finden. Aufgrund der Asymmetrie des Detektors und der hohen Rechenanforderungen konnte die Quelle nicht vollständig in eine Punktquelle übergeführt werden.

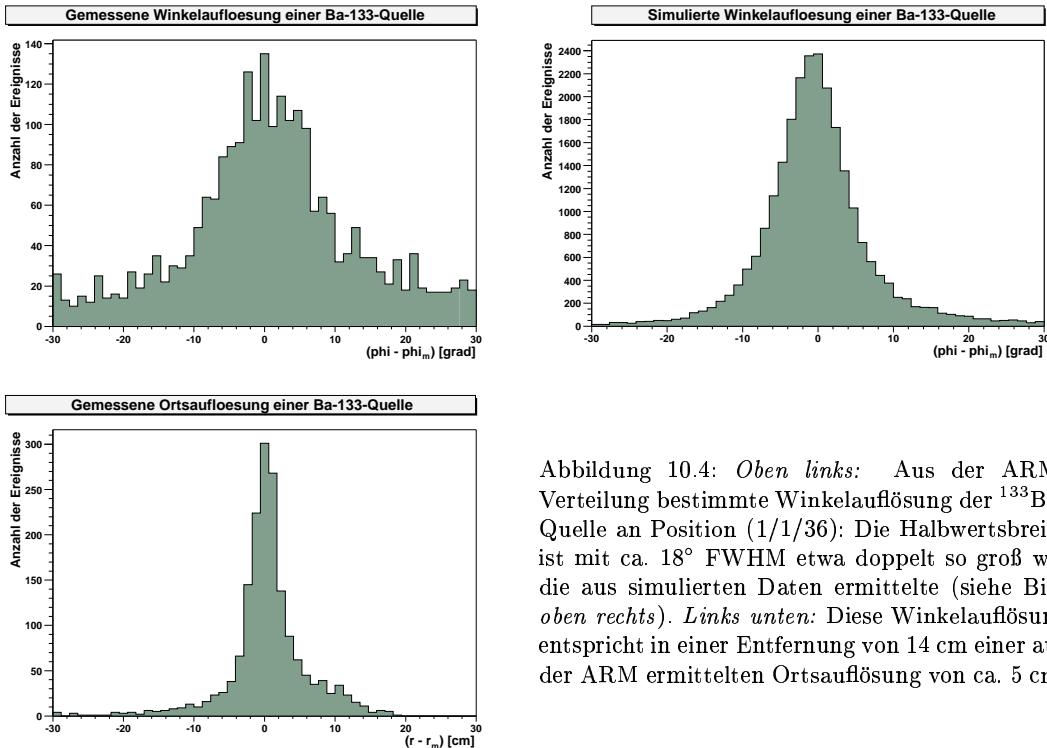


Abbildung 10.4: *Oben links:* Aus der ARM-Verteilung bestimmte Winkelauflösung der ^{133}Ba -Quelle an Position (1/1/36): Die Halbwertsbreite ist mit ca. 18° FWHM etwa doppelt so groß wie die aus simulierten Daten ermittelte (siehe Bild *oben rechts*). *Links unten:* Diese Winkelauflösung entspricht in einer Entfernung von 14 cm einer aus der ARM ermittelten Ortsauflösung von ca. 5 cm.

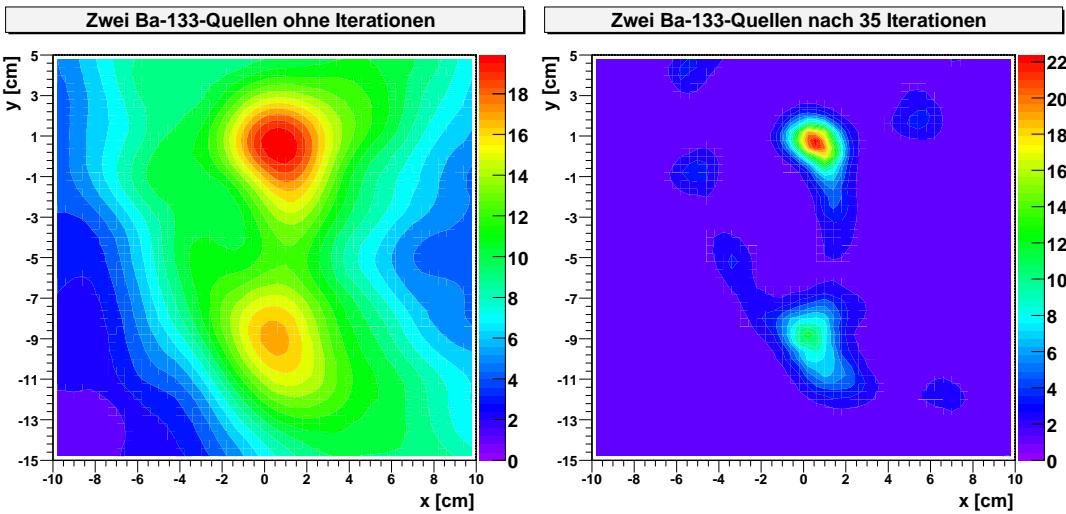


Abbildung 10.5: *Links:* Zwei ^{133}Ba -Quellen an den Positionen (1/1/36) und (-9/0/36), also 14 cm über dem obersten Layer ohne Anwendung des EM-Algorithmus. Die Asymmetrie des Detektors ist deutlich an dem Plateau zu erkennen, das sich von oben nach unten erstreckt und deckungsgleich mit dem Verlauf der Hyperbeläste ist. *Rechts:* Die selben Quellen nach 20 Iterationen. In die Berechnung der stärkeren Punktquelle gingen etwa doppelt so viele Ereignisse (2120) ein als in die der Schwächeren (1135). Die Halbwertsbreite der Quellen liegt bei etwa 1.0 cm. In die Rekonstruktion flossen alle Ereignisse zwischen 300 und 400 keV ein.

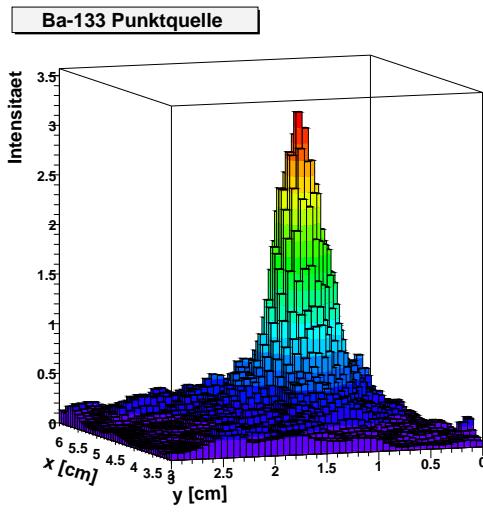


Abbildung 10.6: Punktquelle an $(4.5/1.5/19.5)$ nach 15 Iterationen. Die Peak-Breite beträgt etwa 5 mm. In die Rekonstruktion flossen 10000 Ereignisse zwischen 300 und 400 keV ein.

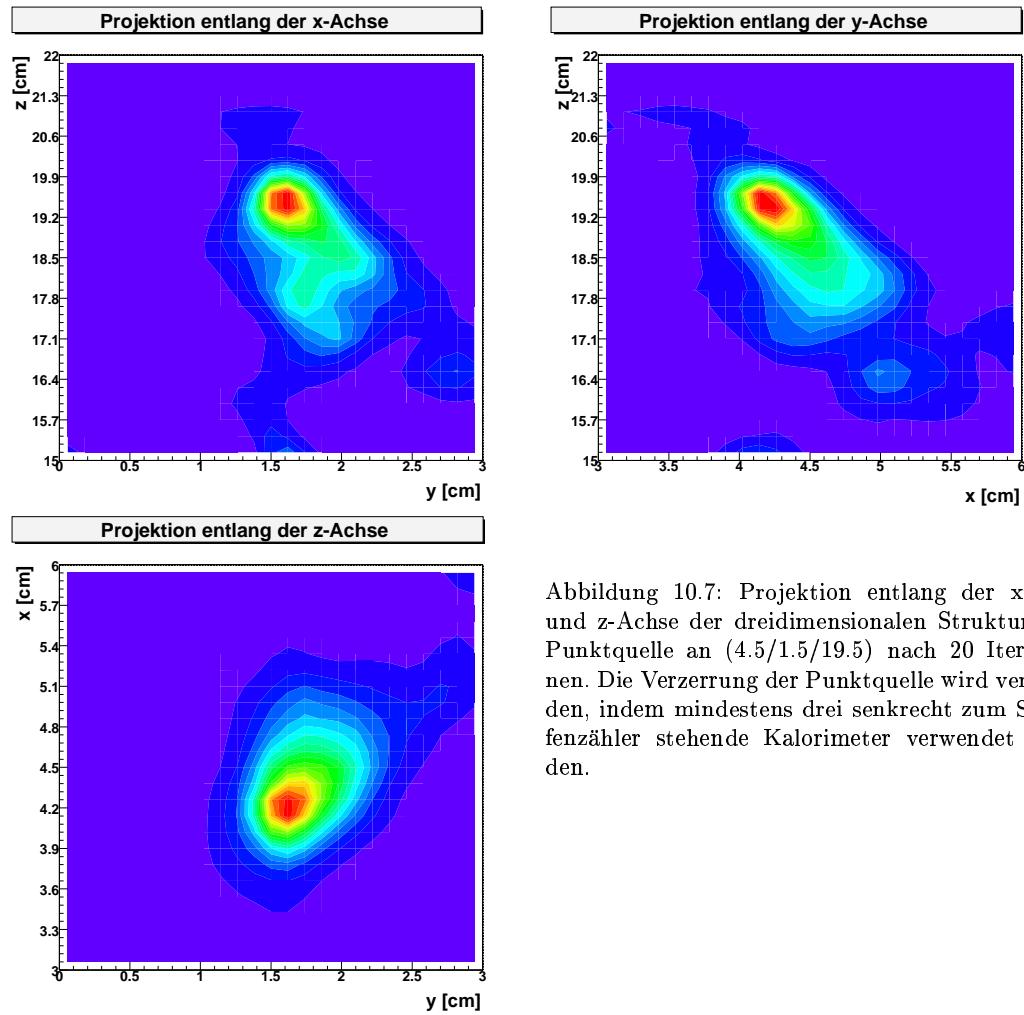


Abbildung 10.7: Projektion entlang der x-, y- und z-Achse der dreidimensionalen Struktur der Punktquelle an $(4.5/1.5/19.5)$ nach 20 Iterationen. Die Verzerrung der Punktquelle wird vermieden, indem mindestens drei senkrecht zum Streifenzähler stehende Kalorimeter verwendet werden.

Kapitel 11

Ausblick

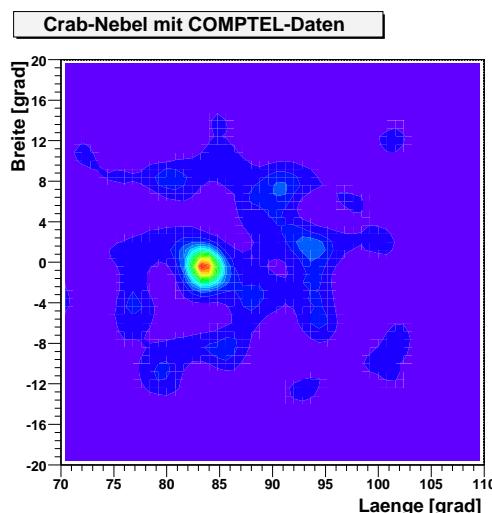


Abbildung 11.1: Crab-Nebel aus Comptel-Daten: In dieses Bild gingen 6784 Ereignisse von COMPTEL ein im Energiebereich zwischen 10 MeV und 30 MeV. Für die Rekonstruktion dieses Bildes wurden im Rekonstruktionsalgorithmus alle Geometriekorrekturen abgeschaltet, die System sensitivitäten wurden auf eins gesetzt und es wurde eine feste Breite der Ereigniskreise von 1.5° FWHM angenommen. Die Halbwertsbreite der Quelle beträgt etwa 2° . Die kreisförmig um den Crab-Nebel angeordneten Intensitätsmaxima, sind auf die für alle Ereignisse identische Ereignismodellierung zurückzuführen.

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass List-Mode Maximum-Likelihood Expectation-Maximization Algorithmen für alle Anwendungsbereiche von MEGA geeignet sind.

Als nächsten Schritt in der Weiterentwicklung der Bildrekonstruktion von MEGA-Daten sollte die Mustererkennung überarbeitet werden, so dass die vollständige Rekonstruktion von den Daten bis zum Bild erfolgen kann. Erst dann kann das tatsächliche Leistungsvermögen des Detektors aufgezeigt werden. Bei der Optimierung der Mustererkennung sollte besonderes Augenmerk auf die Unterdrückung von instrumentellem Hintergrund gelegt werden, da Photonen aus der Satelliten-Struktur den größten Teil der detektierten Ereignisse ausmachen könnten. Insbesondere sollte abgeschätzt werden, inwiefern die 3D-Rekonstruktion dazu beitragen kann, den instrumentellen Hintergrund zu unterdrücken.

Anschließend muss ein List-Mode EM-Algorithmus entwickelt werden, der in der Bildrekonstruktion Annahmen über den Hintergrund verarbeiten kann oder alternativ gleichzeitig Quellintensitäten und Hintergrundintensitäten abschätzen kann. Für beides existieren aus der Nuklearmedizin Algorithmen im Binned-Mode, ihre Übertragung in den List-Mode erweist sich aber als schwierig, da jedem einzelnen Event eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden müsste, die angibt, ob aus dem Hintergrund kommt.

Da weite Teile des Algorithmus unabhängig von der verwendeten Geometrie der Detektoren sind, sollte es ein leichtes sein, das entwickelte Program auf COMPTEL- und EGRET-Daten anzuwenden und damit die bestehenden Algorithmen zu vergleichen. Abbildung 11.1 ist ein erstes Beispiel. Sollte sich bei weiteren Untersuchungen herausstellen, dass Maximum-Entropy-Algorithmen den EM-Algorithmen überlegen sind, sollte versucht werden, ein List-Mode Maximum-Entropy-Verfahren zu entwickeln.

Da bei COMPTEL die meisten Ereignisse aus der Struktur des Satelliten kommen, wäre es interessant herauszufinden, ob sich aus den Daten ein dreidimensionales Abbild der aktivierten Satellitenmasse rekonstruieren lässt (“the ghost of GRO”).

Anhang A

Berechnung von Brennpunkten

Im folgenden wird ein Algorithmus erläutert, der aus der allgemeinen Gleichung für Kegelschnitte

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{A.1})$$

die Brennpunkte über eine vereinfachte Hauptachsentransformation ermittelt.

Zunächst wird eine Translation des Zentrums des Kegelschnittes um (p, q) in den Koordinatenursprung durchgeführt, d.h. man bestimmt p und q so, dass für die neue Kegelschnittgleichung gilt: $D' = E' = 0$:

Es zeigt sich, dass dies für

$$q = \frac{CD - 2AE}{4AB - C^2}, \quad p = \frac{CE - 2BD}{4AB - C^2} \quad (\text{A.2})$$

der Fall ist.

Die neue Gleichung lautet:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + F' = 0$$

mit $F' = Ap^2 + Bq^2 + Dp + Eq + Cpq + F$

Diese Gleichung wird durch $-F'$ dividiert:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy = 1$$

mit $A' = -A/F'$, $B' = -B/F'$, $C' = -C/F'$

Dies entspricht der normalen Hyperbel- bzw. Ellipsengleichung, die um einen Winkel ϵ gedreht wurde.

Der Drehwinkel ergibt sich zu:

$$\epsilon = 0.5 \arctan \frac{C'}{B' - A'} \quad (\text{A.3})$$

Damit folgen die neuen A'' und B''

$$A'' = A' \cos \epsilon^2 + B' \sin \epsilon^2 + C' \sin \epsilon \cos \epsilon$$

$$B'' = A' \sin \epsilon^2 + B' \cos \epsilon^2 - C' \sin \epsilon \cos \epsilon$$

Für die Halbachsen a' und b' gilt:

$$a' = \sqrt{\frac{1}{|A'|}}$$

$$b' = \sqrt{\frac{1}{|B'|}}$$

Nun müssen verschiedene Fälle unterschieden werden:

1. Ellipse: $A'' > 0$ und zugleich $B'' > 0$:
 Es sei a die größere Halbachse. Dann folgt:

- falls $A'' \geq B'': a = a', b = b'$
- falls $A'' < B'': a = b', b = a', \epsilon$ muss um 90° gedreht werden

2. Hyperbel: $A'' < 0$ oder $B'' < 0$:

- falls $B'' < 0$: $a = a', b = b'$
- falls $A'' < 0$: $a = b', b = a', \epsilon$ muss um 90° gedreht werden

Damit folgt für die Brennpunkte im Fall der Ellipse:

$$F_1^E = (\sqrt{a^2 - b^2} \cos \epsilon + p, \sqrt{a^2 - b^2} \sin \epsilon + q) \quad (\text{A.4})$$

$$F_2^E = (-\sqrt{a^2 - b^2} \cos \epsilon + p, -\sqrt{a^2 - b^2} \sin \epsilon + q) \quad (\text{A.5})$$

und für die Hyperbel:

$$F_1^H = (\sqrt{a^2 + b^2} \cos \epsilon + p, \sqrt{a^2 + b^2} \sin \epsilon + q) \quad (\text{A.6})$$

$$F_2^H = (-\sqrt{a^2 + b^2} \cos \epsilon + p, -\sqrt{a^2 + b^2} \sin \epsilon + q) \quad (\text{A.7})$$

Die anderen Fälle können vernachlässigt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] V. Schönfelder et al., "Instrument Description and Performance of the Imaging Gamma-Ray Telescope COMPTEL aboard the Compton Gamma-Ray Observatory GRO", *ApJ. Suppl.*, **86**:657-692, 1993
- [2] G. Kanbach et al., "The Project EGRET on NASA's Gamma-Ray Observatory GRO", *Space Science Reviews*, **49**:69-692, 1988
- [3] C. Nefzger, "Entwicklung von Methoden zur Auswertung von Einzel-Ereignissen des neuartigen γ -Teleskops MEGA", Diplomarbeit Technische Universität München, 2000
- [4] R. Andritschke: "Aufbau und Eichung der Kalorimeter für das Gammateleskop MEGA", Diplomarbeit Technische Universität München, 2000
- [5] E. Aprile, "Xena - a liquid xenon compton telescope for gamma-ray astrophysics in the MeV regime", *Proceedings of SPIE*, **3446**, 88, 1998
- [6] G. Weidenspointner, "The Origin of the Cosmic Gamma-Ray Background in the COMPTEL Energy Range", Dissertation, 1999
- [7] M. Hofmann, Monte-Carlo-Simulation eines Mittelenergie-Gamma-Detektors mit Datenauswertung, Diplomarbeit Technische Universität München, 1998
- [8] CERN: Application software Group and Networks Division, "Geant - Detector Description and Simulation Tool", CERN Geneva, 1993
- [9] J.W. LeBlanc: "A Compton Camera for Low Energy Gamma Ray Imaging in Nuclear Medicine Applications", Ph.D. thesis, University of Michigan, 1999
- [10] J. Fessler, "Lectures on Medical Imaging Systems (EECS 516)", University of Michigan, 1997
- [11] A.W. Strong, "Maximum Entropy for COMPTEL", from "Imaging in High Energy Astronomy", Edited by L. Bassiani, G. di Cocco, Kluwer Academic Publishers
- [12] J.W. LeBlanc et al., " ^{99m}Tc Imaging Performance of the C-SPRINT Compton Camera", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1999
- [13] K. Lange und R. Carson, "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography", *Journal of Computer Assisted Tomography*, Vol. 8, N. 2, S. 306-316, Apr. 1984
- [14] H. Barrett, T. White und L. Parra, "List-Mode likelihood", *J. Opt. Soc. Am. A/Vol. 14*, No. 11, Nov. 1997
- [15] S. Wilderman, N. Clinthorne, J. Fessler and L. Rogers, "List-Mode Maximum Likelihood Reconstruction of Compton Scatter Camera Images in Nuclear Medicine", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1998

- [16] N. Clinthorne: "Noise Propagation from Attenuation Measurements into PET Emission Reconstructions", IEEE Transactions on Medical Imaging, 1998
- [17] J. Fessler, N. Clinthorne, "Statistical Methods for Image Reconstruction and Medical imaging system Design", NSS-MIC, 1998
- [18] M. Hudson und R. Larkin, "Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data", IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 13, No. 4, Dez. 1994
- [19] J. Fessler und A. Hero, "Penalized Maximum-Likelihood Image Reconstruction using Space-Alternating Generalized EM Algorithms", IEEE Transactions in Image Processing: To appear
- [20] J. Fessler und A. Hero, "Space-Alternating Generalized Expectation-Maximization Algorithm", IEEE Transactions in Image Processing, Okt. 1994
- [21] Hartman et. al., "The Third EGRET Catalog of High-Energy Gamma-Ray Sources", ApJ Suppl, **123**:79-202, 1999
- [22] Zych et. al., "Few arc-minute and keV resolution with the tigre compton telescope", Proceedings 2nd INTEGRAL Workshop 'The Transparent Universe', St. Malo, France, 1996
- [23] S. Wilderman, L. Rogers, G. Knoll, J. Engdahl, "Fast Algorithm for List Mode Back-Projektion of Compton Scatter Camera Data", IEEE Transactions on Medical Imaging, 1998
- [24] E. Aprile, A. Curioni, U. Oberlack: "Requirements and Feasibility of a Next Generation Compton Teleskope", GRAPWG, 1999
- [25] W.R. Leo, "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments", Springer-Verlag, 1987

Danksagung

Florian Schopper für die umfassende Unterstützung während des letzten Jahres

Gottfried Kanbach für die Finanzierung meines Aufenthalts in Ann Arbor und die Beantwortung aller Fragen hinsichtlich Astrophysik

Professor Schönfelder für die Ermöglichung dieser Arbeit

Robert Andritschke für den regen Gedankenaustausch während der Endphase *unserer* Diplomarbeiten

Werner Collmar für die COMPTEL-Daten

Fritz Schrey, Stefan Plüschke, Roland Diehl, Christian Straubmeier, Christian Nefzger und allen anderen Institutsmitarbeitern, die direkt oder indirekt diese Arbeit unterstützt haben.

Les Rogers for the friendly welcome in Ann Arbor and some really helpful discussions on the viewport problem

Neal Clinthorne for his opinion on how to model the system-response and the introduction to C-SPRINT

Scott Wilderman for the exchange of ideas on list-mode likelihood in the near-field

Chiaho Hua for the introduction to the campus in Ann Arbor and the computer-system

Jeff Fessler for the discussion on the expansion of the EM-algorithms to astrophysical problems

Tom Kragh for his views on direct computation of the system-matrix

Donna Zajonc for the room in her house

Meinen Eltern und Großeltern für die Finanzierung meines Studiums

“Undank”-sagung

... to the new *owner* of my laptop, my backup ZIP-disks and the work of five weeks!