CHƯƠNG V

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

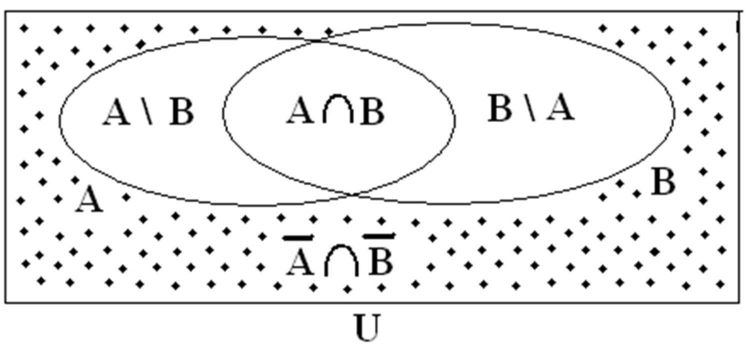
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢN ĐỒ VENN:

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A, B và U thỏa A, B $\subset$ U (U gọi là *tập hợp vũ trụ*). $\overline{A}$ = U \ A và $\overline{B}$ = U \ B lần lượt là phần bù của A và B trong U. Khi đó :

a) $| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$.

b) Từ $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = U \setminus (A \cup B)$, ta suy ra

$| \overline{A} \cap \overline{B} | = | U | - | A \cup B | = | U | - (| A | + | B |) + | A \cap B |$.



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

Ví dụ:

a) Lớp học U có 120 sinh viên trong đó có 90 sinh viên học tiếng Đức, 70 sinh viên học tiếng Pháp và 55 sinh viên học cả tiếng Đức và tiếng Pháp.

Đặt A = { x $\in$ U | x học tiếng Đức }, B = { x $\in$ U | x học tiếng Pháp } thì

$A \cap B$ = { x $\in$ U | x học tiếng Đức và tiếng Pháp }.

Số sinh viên trong lớp L học ít nhất một ngoại ngữ (Đức hay Pháp) là

$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B | = 90 + 70 - 55 = 105$.

Số sinh viên trong lớp L không học cả tiếng Đức lẫn tiếng Pháp là

$| \overline{A} \cap \overline{B} | = | U | - (| A | + | B |) + | A \cap B | = 120 - (90 + 70) + 55 = 15$.

b) Có bao nhiêu dãy số gồm 10 chữ số khác nhau trong hệ thập phân sao cho chữ số đầu ≤ 7 ***và*** chữ số cuối ≥ 3 (chẳng hạn như dãy 6913852704) ?

Đặt U là tập hợp các dãy số gồm 10 chữ số khác nhau trong hệ thập phân,

$A = \{ x \in U \mid x$ có chữ số đầu $\geq 8 \}$ và $B = \{ x \in U \mid x$ có chữ số cuối $\leq 2 \}$ thì

$A \cap B = \{ x \in U \mid x$ có chữ số đầu ≥ 8 ***và*** có chữ số cuối $\leq 2 \}$ và

$A \cup B = \{ x \in U \mid x$ có chữ số đầu ≥ 8 ***hay*** có chữ số cuối $\leq 2 \}$.

Ta có $|U| = 10!$, $|A| = 2.9!$, $|B| = 3.9!$ và $|A \cap B| = 2.3.8!$.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5.9! - 6.8! = 5(362.880) - 6(40.320) = 1.572.480.$

Số dãy số cần tìm là $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| = |U| - |A \cup B|$

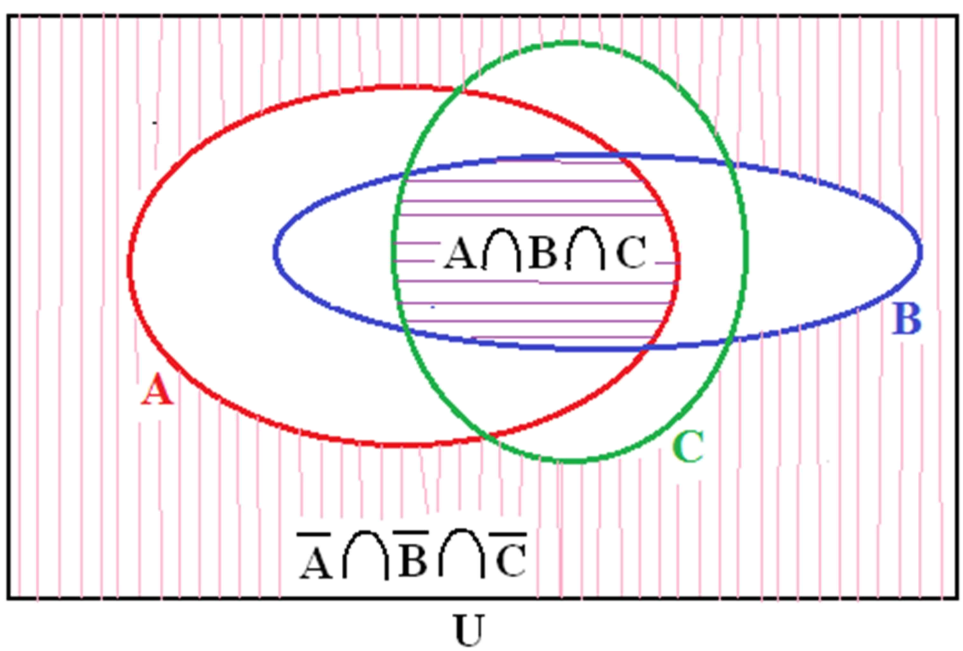
$= 10! - 1.572.480 = 3.628.800 - 1.572.480 = 2.056.320.$

1.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho các tập hợp *hữu hạn* A, B, C và U thỏa $A, B, C \subset U$ (U gọi là *tập hợp vũ trụ*). $\overline{A}, \overline{B}$ và $\overline{C}$ lần lượt là phần bù của A, B và C trong U. Khi đó

a) $|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

b) Do $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C} = U \setminus (A \cup B \cup C)$ nên $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |U| - |A \cup B \cup C|$

$= |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|.$



Ví dụ:

a) Đoàn du lịch U có 380 người trong đó có 190 người biết tiếng Anh, 170 người biết tiếng Đức, 150 người biết tiếng Ý, 70 người biết tiếng Anh và Đức, 60 người biết tiếng Anh và Ý, 50 người biết tiếng Đức và Ý và 20 người biết cả ba thứ tiếng.

Đặt $A = \{ x \in U \mid x$ biết tiếng Anh $\}$, $B = \{ x \in U \mid x$ biết tiếng Đức $\}$,

$C = \{ x \in U \mid x$ biết tiếng Ý $\}$. Do đó $A \cap B = \{ x \in U \mid x$ biết tiếng Anh và Đức $\}$,

$A \cap C = \{ x \in U \mid x$ biết tiếng Anh và Ý $\}$, $B \cap C = \{x \in U \mid x$ biết tiếng Đức và Ý$\}$

$A \cap B \cap C = \{ x \in U \mid x$ biết cả ba thứ tiếng Anh, Đức và Ý $\}$ và

$A \cup B \cup C = \{ x \in U \mid x$ biết ít nhất một trong ba thứ tiếng Anh, Đức, Ý $\}$. Ta có

$$| A \cup B \cup C | = (| A | + | B | + | C |) - (| A \cap B | + | A \cap C | + | B \cap C |) + |A \cap B \cap C|$$

$$= (190 + 170 + 150) - (70 + 60 + 50) + 20 = 350.$$

Số người trong đoàn du lịch U không biết cả ba thứ tiếng Anh, Đức và Ý là

$| \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} | = | U | - | A \cup B \cup C | = 380 - 350 = 30.$

b) $\forall a \in \mathbf{R}$, $[a]$ là *số nguyên lớn nhất* $\leq a$. Ta nói $[a]$ là *phần nguyên non* của a.

$\forall n, k \in \mathbf{N^*}$, số lượng các số nguyên dương $\leq n$ mà chia hết cho k là $[n / k]$.

Ta có k nguyên tố cùng nhau với $360 = 2^3 3^2 5^1 \Leftrightarrow k$ không chia hết cho $2, 3$ và 5.

$U = \{ k \in \mathbf{N} \mid 1 \leq k \leq 1.000 \}$, $A = \{k \in U \mid k \vdots 2\}$, $B = \{k \in U \mid k \vdots 3\}$, $C = \{k \in U \mid k \vdots 5\}$,

$A \cap B = \{ k \in U \mid k \vdots 6 \}$, $A \cap C = \{ k \in U \mid k \vdots 10 \}$, $B \cap C = \{ k \in U \mid k \vdots 15 \}$ và

$A \cap B \cap C = \{ k \in U \mid k \vdots 30 \}$. Ta có $| U | = 1.000$, $| A | = [1000 / 2] = 500$,

$| B | = [1.000 / 3] = 333$, $| C | = [1.000 / 5] = 200$, $| A \cap B | = [1.000 / 6] = 166$,

$|A \cap C| = [1.000 /10] = 100$, $|B \cap C| = [1.000/15] = 66$, $|A \cap B \cap C| = [1.000/30] = 33$.

Số lượng số nguyên dương ≤ 1.000 mà nguyên tố cùng nhau với 360 là $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| =$

$$= | U | - (| A | + | B | + | C |) + (| A \cap B | + | A \cap C | + | B \cap C |) - |A \cap B \cap C| = 266.$$

$$|A \cup B \cup C| = (| A | + | B | + | C |) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 734.$$

II. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ TỔNG QUÁT:

2.1/ ĐỊNH LÝ: Cho tập hợp (vũ trụ) U hữu hạn chứa các tập hợp con $A_1, A_2, \ldots$ và A_n.

Đặt $\mathbf{S_1} = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$, $\mathbf{S_2} = \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$, $\mathbf{S_3} = \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|, \ldots, \mathbf{S_n} = |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$. Khi đó

a) $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i = \mathbf{S_1} - \mathbf{S_2} + \mathbf{S_3} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{S_n}$.

b) Từ $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = U \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$, ta suy ra

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}| = |U| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i = |U| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} S_i = |U| - \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2} - \mathbf{S_3} + \cdots + (-1)^{n}\mathbf{S_n}.$$

Ví dụ:

a) Tìm *số nghiệm nguyên không âm* của phương trình $x + y + z + t = 20$ (*) thỏa $x \le 5$, $y \le 6$, $z \le 7$ và $t \le 8$.

Đặt U = { các nghiệm nguyên không âm của phương trình (*) },

$A = \{ (x, y, z, t) \in U \mid x \ge 6 \}$, $B = \{ (x, y, z, t) \in U \mid y \ge 7 \}$,

$C = \{ (x, y, z, t) \in U \mid z \ge 8 \}$ và $D = \{ (x, y, z, t) \in U \mid t \ge 9 \}$. Ta tính được

$|U| = K_4^{20} = C_{23}^{3} = 1771$, $|A| = K_4^{14} = C_{17}^{3} = 680$, $|B| = 560$, $|C| = 455$, $|D| = 364$,

$|A \cap B| = K_4^{7} = C_{10}^{3} = 120$, $|A \cap C| = 84$, $|A \cap D| = |B \cap C| = 56$, $|B \cap D| = 35$,

$|C \cap D| = 20$, $|A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |B \cap C \cap D| = 0$

và $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. Do đó $S_1 = |A| + |B| + |C| + |D| = 2059$,

$S_2 = |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| = 371$,

$S_3 = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D| = 0$ và $S_4 = 0$.

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D} = \{ (x, y, z, t) \in U \mid x \le 5,\ y \le 6,\ z \le 7$ và $t \le 8 \}$,

$A \cup B \cup C \cup D = \{ (x, y, z, t) \in U \mid x \ge 6$ *hay* $y \ge 7$ *hay* $z \ge 8$ *hay* $t \ge 9 \}$.

Ta có số nghiệm cần tìm là $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 83$.

Ngoài ra, $|A \cup B \cup C \cup D| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 1.688$.

b) Tính số cách rút 4 lá bài từ bộ bài có 52 lá (mỗi dạng *cơ*, *chuồn*, *rô*, *bích* có 13 lá bài tương ứng) sao cho chỉ có tối đa 3 dạng xuất hiện trong 4 lá bài được rút. Suy ra số cách rút 4 lá bài từ bộ bài có 52 lá sao cho có đủ 4 dạng xuất hiện trong 4 lá bài được rút .

Đặt U là tập hợp các cách rút 4 lá bài (từ bộ bài có 52 lá),

A_1 ={cách rút 4 lá bài không có lá *cơ*}, A_2 ={cách rút 4 lá bài không có lá *chuồn*},

A_3 ={cách rút 4 lá bài không có lá *rô*} và A_4 ={cách rút 4 lá bài không có lá *bích*}.

Ta có $|U| = C_{52}^4 = 270.725$, $|A_i| = C_{39}^4 = 82.251$ ($1 \le i \le 4$), $|A_i \cap A_j| = C_{26}^4 = 14.950$ $(1 \le i < j \le 4)$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = C_{13}^4 = 715$ $(1 \le i < j < k \le 4)$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.

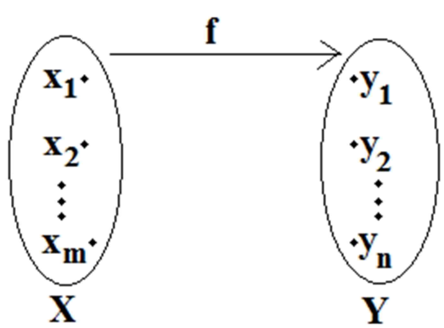
$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} |A_i| = 329.004,\ S_2 = \sum_{1\le i<j\le 4} |A_i \cap A_j| = 89.700,\ S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 2.860,\ S_4 = 0$$

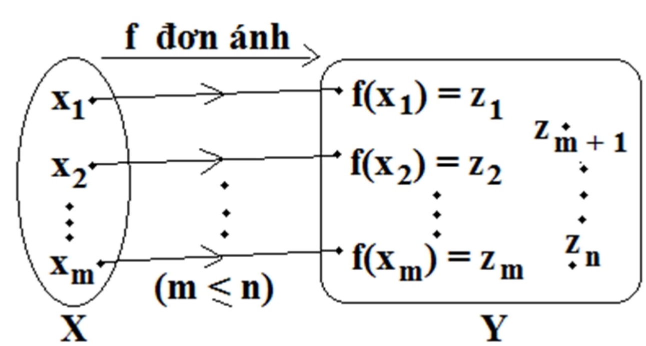
Số cách rút 4 lá bài chỉ có tối đa 3 dạng là $\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 242.164$.

Số cách rút 4 lá bài có đủ 4 dạng là $\left|\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\right| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 28.561$.

c) Cho $|X| = m$ và $|Y| = n$ (m, n nguyên ≥ 1 và $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$).

Số ánh xạ f từ X vào Y là n^m [$\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, ảnh $f(x_j)$ có n cách chọn trong Y nên theo nguyên lý nhân, ta có $n \times \cdots \times n$ (m lần) $= n^m$ cách tạo ra ánh xạ f từ X vào Y]. Khi $m > n$ thì *không có đơn ánh* từ X vào Y.





Khi $m \le n$, *số các ánh xạ đơn ánh* f *từ* X *vào* Y là $[\, n! / (n-m)! \,] = A_n^m$

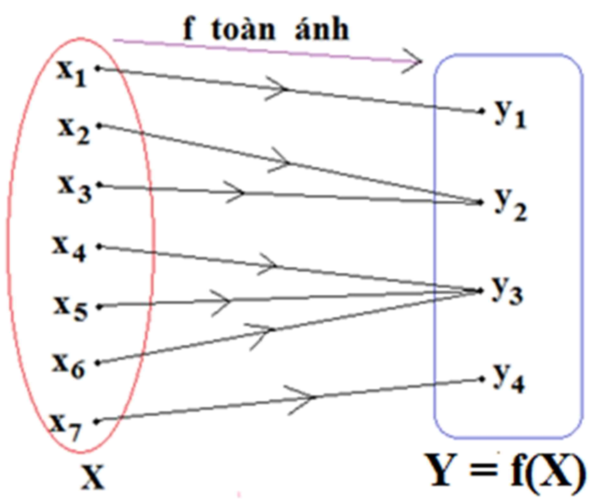
$\{$ các ảnh $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ khác nhau trong Y nên $f(x_1)$ có n cách chọn,

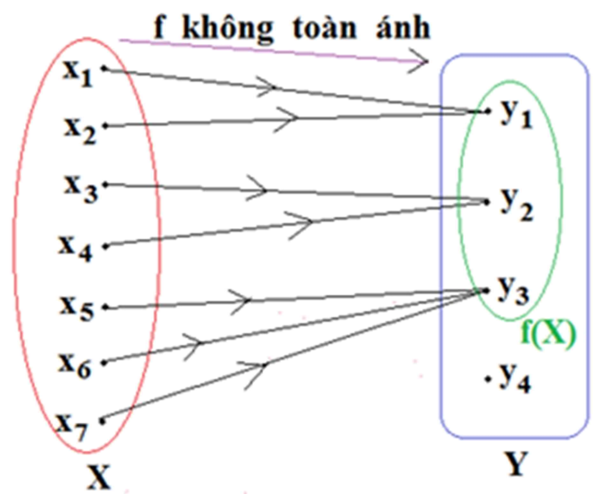
$f(x_2)$ có $(n-1)$ cách chọn, … và $f(x_m)$ có $[\, n-(m-1) \,]$ cách chọn.

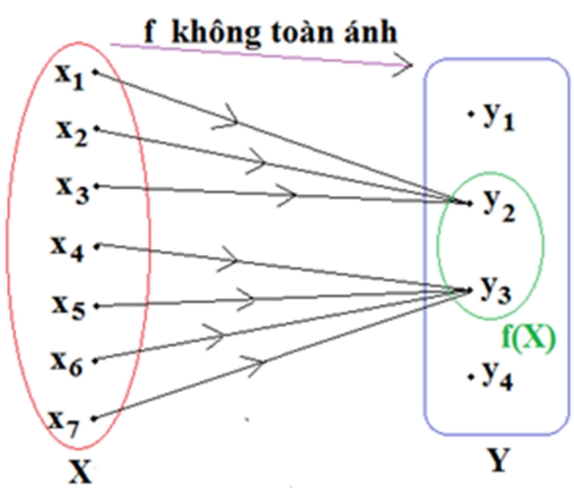
Theo nguyên lý nhân, ta có $n(n-1)\ldots[n-(m-1)] = [\, n! / (n-m)! \,]$ cách xây dựng ánh xạ đơn ánh f từ X vào Y $\}$. Suy ra khi $m \le n$, *số các ánh xạ không đơn ánh* f từ X vào Y là $n^m - [\, n! / (n-m)! \,] = n^m - A_n^m$.

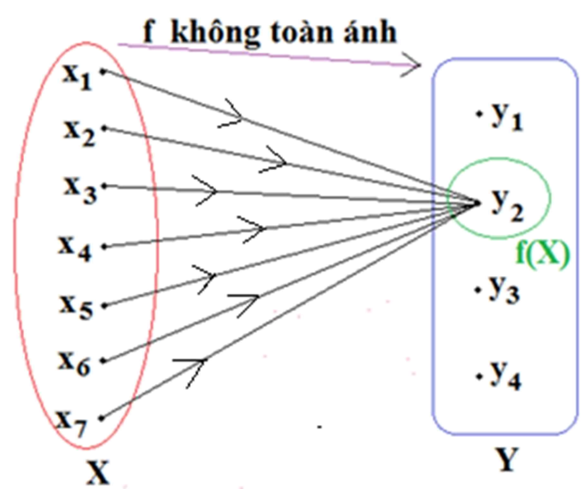
d) Cho các tập hợp X và Y với $|X| = 7$ và $Y = \{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$ ($|Y| = 4$).

Tính số ánh xạ *toàn ánh* và số ánh xạ *không toàn ánh* từ X vào Y.









Đặt U là tập hợp các ánh xạ từ X vào Y, $A_i = \{ f : X \to Y \mid y_i \notin f(X) \}$ $(1 \le i \le 4)$.

Ta có $|U| = 4^7 = 16.384$, $|A_i| = 3^7 = 2.187$ ($1 \le i \le 4$), $|A_i \cap A_j| = 2^7 = 128$

$(1 \le i < j \le 4)$, $| A_i \cap A_j \cap A_k | = 1^7 = 1$ $(1 \le i < j < k \le 4)$, $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 0$.

$S_1 = \sum_{i=1}^{4} | A_i | = 8.748$, $S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 4} | A_i \cap A_j | = 768$, $S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le 4} | A_i \cap A_j \cap A_k | = 4$ và $S_4 = 0$.

Số ánh xạ *không toàn ánh* từ X vào Y là $\left| \bigcup_{i=1}^{4} A_i \right| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 7.984$.

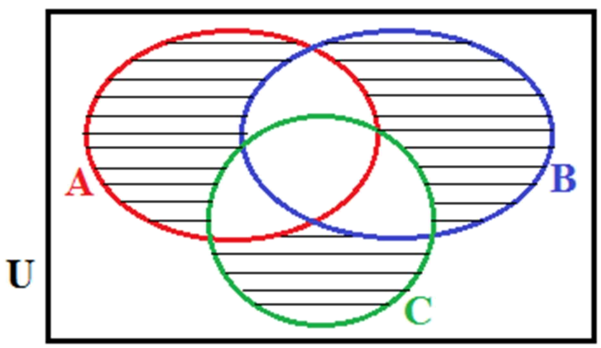
Số ánh xạ *toàn ánh* từ X vào Y là $\left| \bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i} \right| = | U | - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 8.400$.

2.2/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho tập hợp (vũ trụ) U hữu hạn chứa các tập hợp con $A_1, A_2, \ldots$ và A_n.

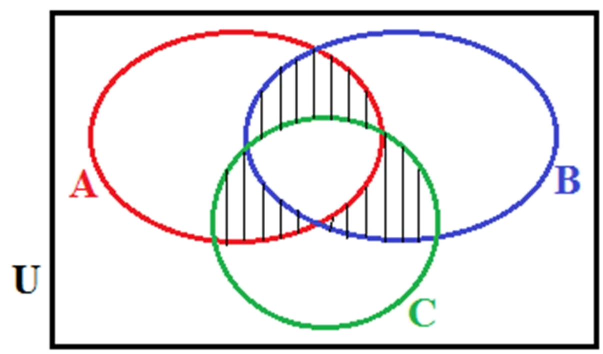
Các ký hiệu $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \ldots, \mathbf{S_n}$ đã nói trong (**2.1**). Khi đó, $\forall m \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$, ta có:

a) Số phần tử của U thuộc về *đúng m tập hợp* (trong số các tập $A_1, A_2, \ldots$ và A_n)

$$\text{là } N_m = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{m+i}^{i} S_{m+i} = C_m^0 \mathbf{S}_m - C_{m+1}^1 \mathbf{S}_{m+1} + C_{m+2}^2 \mathbf{S}_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m} C_n^{n-m} \mathbf{S}_n.$$



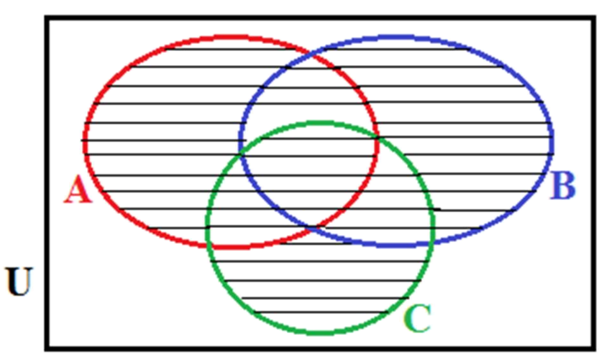
Miền chỉ thuộc đúng một tập hợp



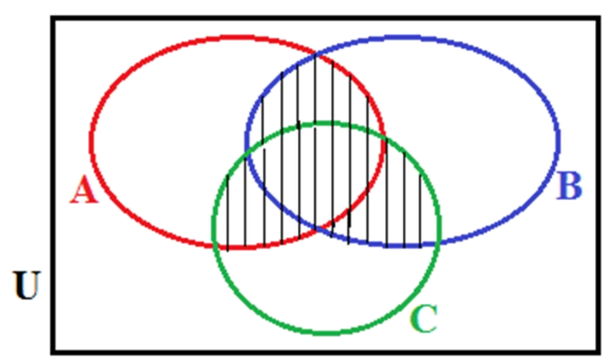
Miền chỉ thuộc đúng hai tập hợp

b) Số phần tử của U thuộc về *ít nhất m tập hợp* (trong số các tập $A_1, A_2, \ldots$ và A_n)

$$\text{là } N_m^* = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{m-1+i}^{i} S_{m+i} = C_{m-1}^0 \mathbf{S}_m - C_m^1 \mathbf{S}_{m+1} + C_{m+1}^2 \mathbf{S}_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m} C_{n-1}^{n-m} \mathbf{S}_n.$$



Miền thuộc ít nhất một tập hợp



Miền thuộc ít nhất hai tập hợp

Ví dụ:

a) Tính số chuỗi tứ phân (mỗi ký tự dùng các chữ số 0, 1, 2, 3) có độ dài 6 mà chứa đúng ba chữ số 2. Tính số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa ít nhất ba chữ số 2.

3	2	3	2	2	0

2	2	2	0	1	2

2	1	2	2	2	2

2	2	2	2	2	2

Đặt U là tập hợp các chuỗi tứ phân có độ dài 6 ($|U| = 4^6 = 4.096$),

A_i = { các chuỗi tứ phân có độ dài 6 có chữ số ở vị trí thứ i là 2 } ($1 \le i \le 6$).

Ta có $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4^3 = 64$ ($1 \le i < j < k \le 6$),

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 4^2 = 16$ ($1 \le i < j < k < r \le 6$),

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r \cap A_s| = 4^1 = 4$ ($1 \le i < j < k < r < s \le 6$) và

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 1$.

$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le 6} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 64 C_6^3 = 1.280$, $S_4 = \sum_{1 \le i < j < k < r \le 6} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 16 C_6^4 = 240$,

$S_5 = \sum_{1 \le i < j < k < r < s \le 6} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r \cap A_s| = 24$ và $S_6 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 1$.

Số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa đúng ba chữ số 2 là

$N_3 = C_3^0 S_3 - C_4^1 S_4 + C_5^2 S_5 - C_6^3 S_6 = 1.280 - 4(240) + 10(24) - 20(1) = 540.$

Số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa ít nhất ba chữ số 2 là

$N_3^* = C_2^0 S_3 - C_3^1 S_4 + C_4^2 S_5 - C_5^3 S_6 = 1.280 - 3(240) + 6(24) - 10(1) = 694.$

Số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa không quá hai chữ số 2 là $4.096 - 694 = 3.402$.

b) Có 5 lá thư (có nội dung khác nhau) được xếp ngẫu nhiên vào 5 phong bì có ghi sẵn 5 địa chỉ khác nhau cần gởi (mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư). Tính số cách xếp mà không có lá thư nào bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gởi. Tính số cách xếp mà có đúng 3 lá thư bỏ đúng vào các phong bì có địa chỉ cần gởi. Tính số cách xếp mà có ít nhất 3 lá thư bỏ đúng vào các phong bì có địa chỉ cần gởi.

Đặt U là tập hợp các cách xếp 5 lá thư vào 5 phong bì đã nói trên,

A_i ={cách xếp 5 lá thư vào 5 phong bì mà lá thư thứ i gởi đúng địa chỉ} ($1 \le i \le 5$).

Ta có $|U| = 5! = 120$, $|A_i| = 4! = 24$ ($1 \le i \le 5$), $|A_i \cap A_j| = 3! = 6$ ($1 \le i < j \le 5$),

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2! = 2$ ($1 \le i < j < k \le 5$) , $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$ và

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 1! = 1$ ($1 \le i < j < k < r \le 5$).

$S_1 = \sum_{i=1}^{5} |A_i| = 120$, $S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 5} |A_i \cap A_j| = 60$, $S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 20$,

$S_4 = \sum_{1 \le i < j < k < r \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 5$ và $S_5 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$.

Số cách xếp mà không có lá thư nào bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gởi là

$$\left|\bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i}\right| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 = 44.$$

Số cách xếp mà có đúng ba lá thư bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gởi là

$N_3 = C_3^0 S_3 - C_4^1 S_4 + C_5^2 S_5 = 20 - 4(5) + 10(1) = 10.$

Số cách xếp mà có ít nhất ba lá thư bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gởi là

$N_3^* = C_2^0 S_3 - C_3^1 S_4 + C_4^2 S_5 = 20 - 3(5) + 6(1) = 11.$

III. <u>ĐA THỨC QUÂN XE:</u>

3.1/ <u>KHÁI NIỆM:</u> Trên bàn cờ vua (hay cờ tướng), mỗi quân cờ có một trong hai màu trắng và đen (hoặc xanh và đỏ, …). Trong đó *quân Xe* là một quân cờ quan trọng và mỗi loại màu có hai *quân Xe*. Quân Xe có thể ‘‘ ăn ’’ bất kỳ một quân cờ khác màu nào ở trên cùng một dòng hay một cột (nếu không có một quân cờ khác ngăn trở).

Một số bài toán đếm được đưa về dạng ‘‘ *tính số cách đặt* k *quân Xe trên một bảng* (tất nhiên *hai quân Xe bất kỳ không ở trên cùng một dòng hay một cột của bảng*) ’’.

3.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Xét $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $S_n = \{ \sigma \mid \sigma : I_n \to I_n$ là song ánh $\}(n \geq 1)$.

a) Mỗi $\sigma \in S_n$ xem như là *một phép hoán vị trên* n *phần tử* của I_n. Mỗi $\sigma \in S_n$ được xem như cách đặt n quân Xe (cùng màu) vào các ô có tọa độ $(i, \sigma(i))$ với $1 \leq i \leq n$ của một bảng có $n \times n$ ô vuông (hiển nhiên không có hai quân xe nào cùng dòng hay cùng cột vì $i \neq j \Leftrightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$ khi $1 \leq i, j \leq n$).

b) Nếu $\sigma \in S_n$ có $\sigma(i) = k_i$ $(1 \leq i \leq n)$ thì ta viết đơn giản $\sigma = (k_1k_2\ldots k_n)$.

<u>Ví dụ:</u> $\sigma \in S_4$ có $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$ được ghi gọn là $\sigma = (3241)$.

i	1	2	3	4
σ(i)	3	2	4	1

σ được xem như cách đặt 4 quân Xe (cùng màu) vào các ô có các tọa độ lần lượt là $(1, 3), (2, 2), (3, 4)$ và $(4, 1)$ của một bảng có 4×4 ô vuông như sau :

	1	2	3	4
1			•	
2		•		
3				•
4	•			

3.3/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho các tập hợp con bất kỳ $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset I_n = \{ 1, 2, \ldots, n \}$.

Đặt $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i \ (1 \leq i \leq n) \}$. Tập X_i gọi là *vị trí cấm của* i $(1 \leq i \leq n)$. Ta gọi mỗi $\sigma \in P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là *một phép hoán vị trên* n *phần tử với các vị trí cấm tương ứng* $X_1, X_2, \ldots$ và X_n.

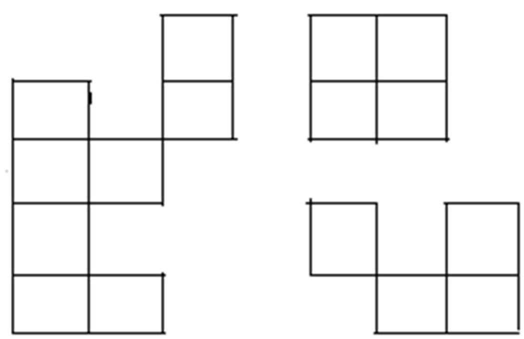
<u>Ví dụ:</u> $I_5 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ có các tập con $X_1 = \{2, 5\}, X_2 = \{4\}, X_3 = \varnothing, X_4 = \{1, 5\}$ và $X_5 = \{ 2, 3, 4 \}$. Ta có $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(i) \notin X_i \ (1 \leq i \leq 5) \}$. Việc tìm $\mid P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mid$ tương đương với việc tính số cách xếp 5 quân Xe vào các ô trong một bảng 5×5 dưới đây và không được xếp các quân vào các ô bị cấm có đánh dấu (tất nhiên không có hai quân Xe nào cùng dòng hoặc cùng cột) :

	1	2	3	4	5
1		•			•
2				•	
3					
4	•				•
5		•	•	•	

3.4/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> *Một bàn cờ* được hiểu là *một tập hợp con khác* $\varnothing$ *gồm một số ô vuông nào đó* của một bảng gồm $p \times q$ ô vuông $(p, q \geq 1)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Bàn cờ sau bao gồm một số ô vuông của một bảng 5×7:



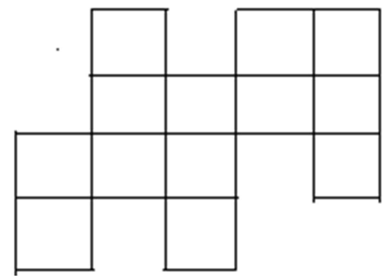
b) Ta cần xếp 4 người A, B, C, D làm 4 trong 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi người làm một việc khác nhau) với các yêu cầu: A không nhận việc 1 và 3, B không nhận việc 1, C không nhận việc 4 và D không nhận việc 2, 4 và 5.

Ta biểu diễn 4 người và 5 việc trên một bảng 4×5 như sau :

	1	2	3	4	5
A	•		•		
B	•				
C				•	
D		•		•	•

Việc xếp 4 người A, B, C, D làm 4 trong 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 chính là việc xếp

4 quân Xe vào bảng trên nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu (hai quân Xe bất kỳ không cùng dòng hay cùng cột). Xóa các ô cấm, ta được bàn cờ sau:



3.5/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho C là một bàn cờ có m ô ($m \geq 1$) và $0 \leq k \leq m$.

Đặt $r_k(C)$ là số cách xếp k quân Xe (cùng màu) trên bàn cờ C (tất nhiên hai quân Xe bất kỳ không được xếp cùng dòng và không cùng cột).

a) *Đa thức quân Xe của bàn cờ* C được định nghĩa như sau :

$$R(C, x) = \sum_{k=0}^{m} r_k(C)x^k = 1 + mx + ...$$

Để ý $r_o(C) = 1$, $r_1(C) = m$ và $1 \leq \deg R(C, x) \leq m$.

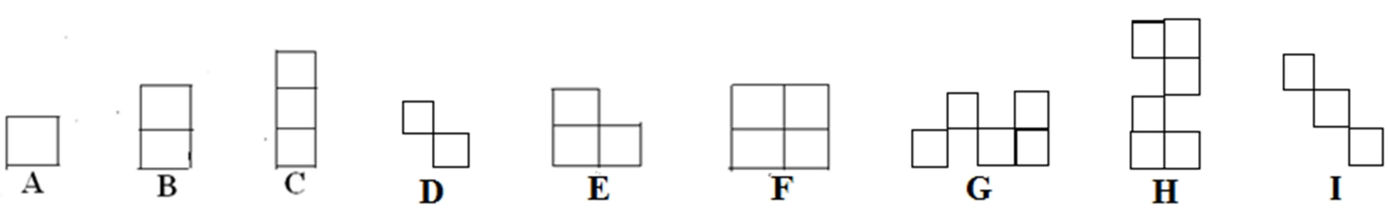
b) Nếu C có p dòng và q cột thì $\deg R(C, x) \leq \min\{ p, q \}$ (vì $\forall k > \min\{ p, q \}$, số cách xếp k quân Xe không cùng dòng và không cùng cột vào bàn cờ C là 0).

c) Nếu C có không quá 2 dòng (hay có không quá 2 cột) thì ta có thể tính trực tiếp R(C, x) một cách dễ dàng và ta có $\deg R(C,x) \leq 2$.

d) Khi ta *hoán vị 2 dòng* (hay *hoán vị 2 cột*) của C thì đa thức quân Xe của C *không thay đổi*. Ta có thể dùng các thao tác này khi C có hình dạng phức tạp.

<u>Ví dụ:</u>

a) Tìm đa thức quân Xe của các bàn cờ A, B, C, D, E, F, G, H và I dưới đây:

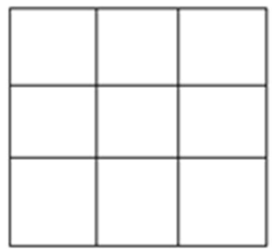


$R(A, x) = 1 + x$, $R(B, x) = 1 + 2x$, $R(C, x) = 1 + 3x$, $R(D, x) = 1 + 2x + x^2$,

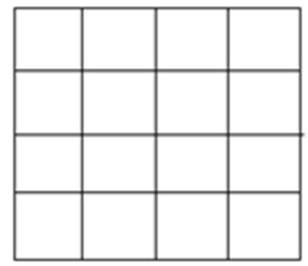
$R(E, x) = 1 + 3x + x^2$, $R(F, x) = 1 + 4x + 2x^2$, $R(G, x) = 1 + 5x + 5x^2$,

$R(H, x) = 1 + 6x + 7x^2$ và $R(I, x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ (số cách đặt hai quân Xe vào D, E, F, G, H, I lần lượt là 1, 1, 2, 5, 7 và 3. Có 1 cách đặt 3 quân Xe vào I).

b) Tìm đa thức quân Xe của các bàn cờ J và K dưới đây:



J



K

$R(J, x) = 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3$ (Khi xếp 2 quân Xe, ta có $C_3^2 = 3$ cách chọn dòng cho chúng.Với mỗi cách chọn dòng, quân 1 có 3 cách chọn cột và quân 2 có 2 cách chọn cột. Do đó $r_2(J) = 3 \times 3 \times 2 = 18$. Khi xếp 3 quân Xe, ta có $C_3^3 = 1$ cách chọn dòng cho chúng.Với mỗi cách chọn dòng, quân 1 có 3 cách chọn cột, quân 2 có 2 cách chọn cột và quân 3 có 1 cách chọn cột. Do đó $r_3(J) = 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$).

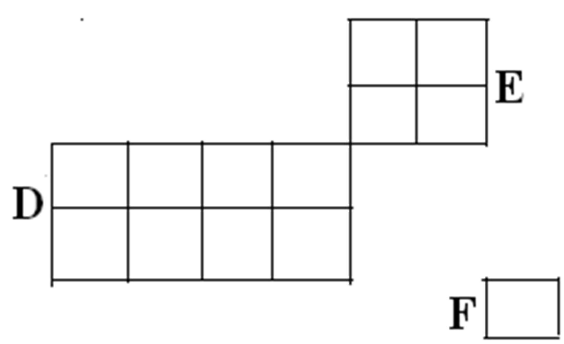
$R(K, x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4$ [lý luận tương tự như khi tìm $R(J, x)$].

3.6/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho các tập hợp con A và B khác $\varnothing$ của bàn cờ C.

Ta nói A và B là *rời nhau* nếu không có ô nào của A cùng dòng hay cùng cột với một ô khác của B.

Định nghĩa tương tự cho trường hợp các tập con *rời nhau từng đôi một* của bàn cờ C.

<u>Ví dụ:</u> Ta có các tập con D, E, F rời nhau từng đôi một của bàn cờ C:



3.7/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Nếu bàn cờ C là *phần hội của các tập hợp con* A *và* B *rời nhau* thì $R(C, x) = R(A, x).\ R(B, x)$.

Kết quả tương tự cho trường hợp các tập con *rời nhau từng đôi một* của bàn cờ C.

<u>Ví dụ:</u> Ta xem lại các tập con D, E, F rời nhau từng đôi một của bàn cờ C ở trên.

Ta có $R(C, x) = R(D, x).\ R(E, x).R(F, x) = (1 + 8x + 12x^2)(1 + 4x + 2x^2)(1 + x) =$

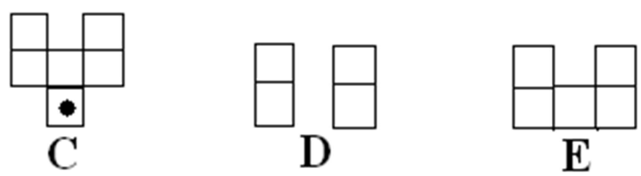
$= 1 + 13x + 58x^2 + 110x^3 + 88x^4 + 24x^5$.

3.8/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Xét Δ là một ô tùy ý của bàn cờ C. Gọi D là bàn cờ có từ C bằng cách *xóa hàng và cột chứa ô* Δ. Gọi E là bàn cờ có từ C bằng cách *xóa ô* Δ.

Khi đó $R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho các bàn cờ C, D và E như sau :

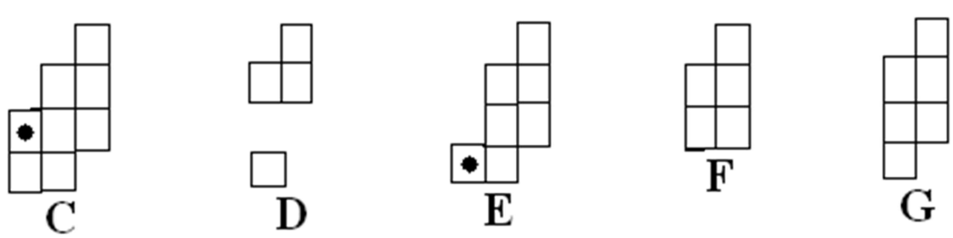


Trong C, chọn Δ là ô được đánh dấu (khi xóa ô này thì bàn cờ mới còn 2 dòng).

Ta có $R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x) = x(1 + 4x + 2x^2) + (1 + 5x + 4x^2)$

$$= (x + 4x^2 + 2x^3) + (1 + 5x + 4x^2) = 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3.$$

b) Cho các bàn cờ C, D, E, F và G như sau :

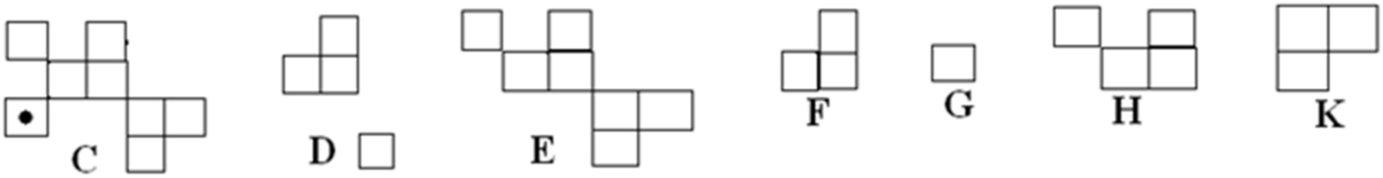


Trong C và E, chọn Δ là ô được đánh dấu. Ta có

$R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x) = x(1 + 4x + 3x^2) + [\ xR(F, x) + R(G, x)\ ] =$

$= x(1 + 4x + 3x^2) + [\ x(1 + 5x + 4x^2) + (1 + 6x + 7x^2)\ ] = 1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$.

c) Cho các bàn cờ C, D, E, F, G, H và K như sau :



Trong C, chọn Δ là ô được đánh dấu. Ta có F và G rời nhau trong D.

Tương tự, H và K rời nhau trong E. Từ đó ta có

$R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x) = xR(F, x).R(G, x) + R(H, x).R(K, x)$

$= x(1 + 3x + x^2)(1 + x) + (1 + 4x + 3x^2)(1 + 3x + x^2) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.$

3.9/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho các tập hợp con bất kỳ $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset I_n = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ ($n \geq 1$).

Đặt $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i \ (1 \leq i \leq n) \}$.

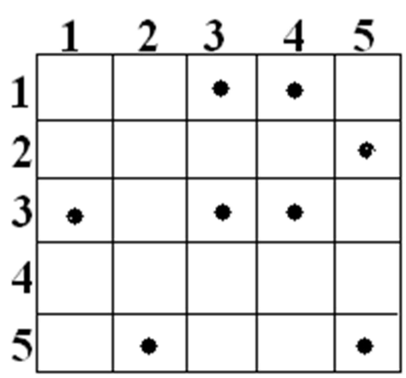
Gọi C là *bàn cờ được tạo ra từ các ô bị cấm liên quan đến* $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Khi đó

$$| P(X_1, X_2, \ldots, X_n) | = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! r_k(C).$$

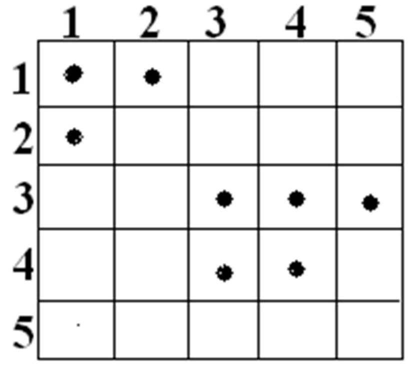
<u>Ví dụ:</u>

a) $I_5 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ có các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{ 1, 3, 4 \}$, $X_4 = \varnothing$ và $X_5 = \{ 2, 5 \}$. Ta có $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(i) \notin X_i \ (1 \leq i \leq 5) \}$.

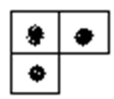
Tìm $| P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) |$ bằng cách tính số cách xếp 5 quân Xe vào các ô trong bàn cờ 5×5 dưới đây nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu :



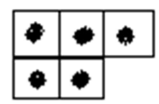
Lần lượt hoán vị (dòng 1 với dòng 4), (cột 1 với cột 5) và (dòng 1 với dòng 5), ta có bảng mới sau:



Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm trên bàn cờ mới. Ta thấy C được tạo bởi hai bàn cờ rời nhau A và B như sau :



A



B

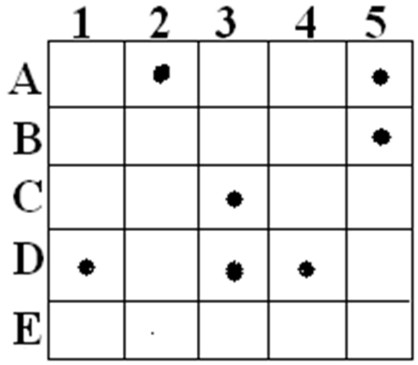
$R(C, x) = R(A, x).R(B, x) = (1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 4x^2)$

$\qquad = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.$

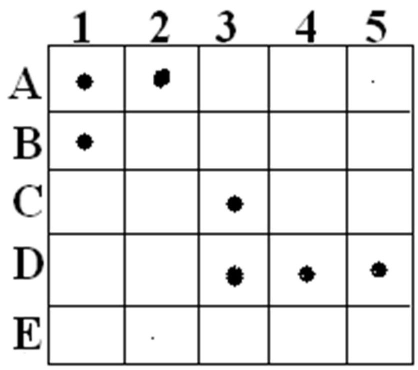
$| P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) | = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!r_k(C) = 5! - 8.4! + 20.3! - 17.2! + 4.1! = 18.$

b) Ta cần tính số cách xếp 4 người A, B, C, D làm 4 trong 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi người làm một việc khác nhau) với các yêu cầu: A không nhận việc 2 và 5, B không nhận việc 5, C không nhận việc 3 và D không nhận việc 1, 3 và 4. Ta thêm vào ‘‘ người ảo E ’’ (người này có thể làm bất kỳ việc nào trong 5 việc nói trên). Như vậy ta tính số cách xếp 5 người A, B, C, D, E làm 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi người một việc khác nhau), nghĩa là tính $| P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) |$ với $X_1 = \{ 2, 5 \}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{3\}$, $X_4 = \{ 1, 3, 4 \}$ và $X_5 = \varnothing$.

Như vậy ta cần tính số cách xếp 5 quân Xe vào các ô trong bảng 5×5 dưới đây nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu :

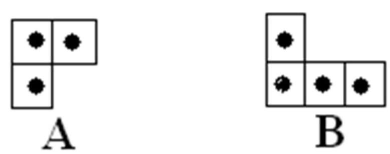


Hoán vị cột 1 với cột 5, ta có bảng mới như sau:



Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm trên bàn cờ mới.

Ta thấy C được tạo bởi hai bàn cờ rời nhau A và B như sau :

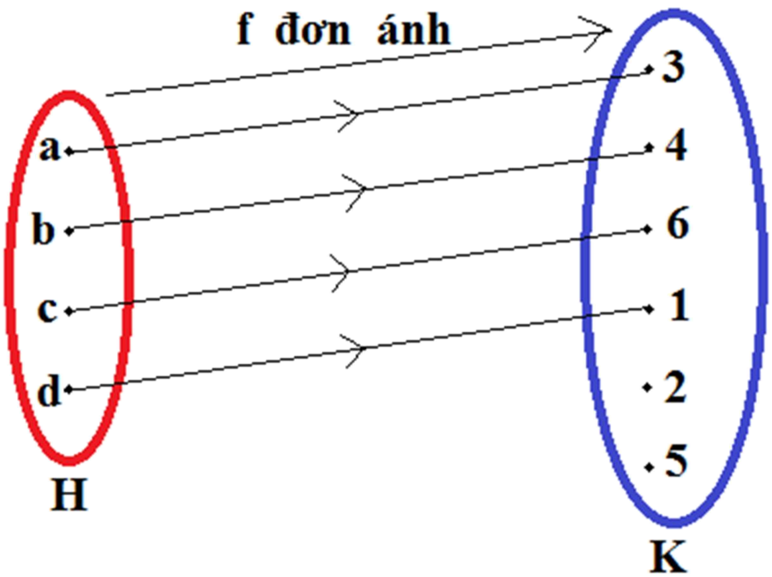


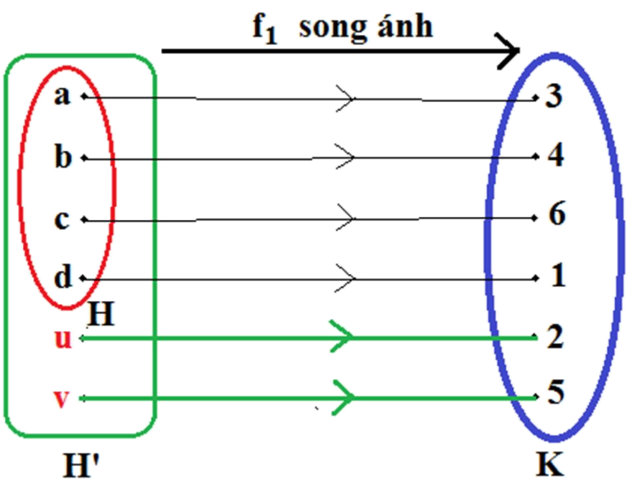
$R(C, x) = R(A, x).R(B, x) = (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 2x^2) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4.$

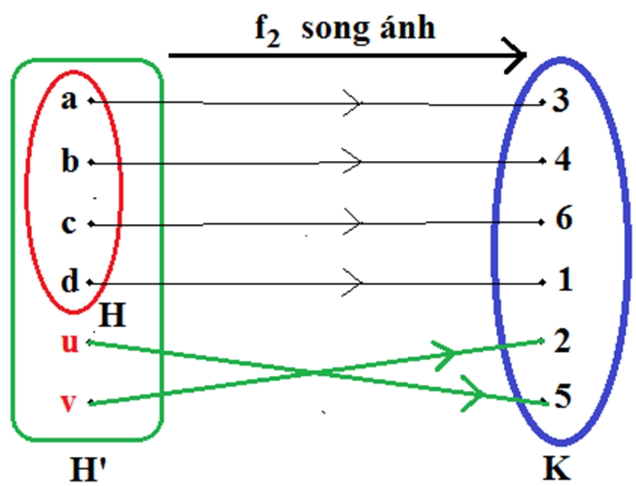
$| P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) | = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!r_k(C) = 5! - 7.4! + 15.3! - 10.2! + 2.1! = 24.$

c) Cho $H = \{ a, b, c, d \}$ và $K = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Tính số đơn ánh $f : H \to K$ thỏa $f(a) \notin \{ 1, 2 \}, f(b) \notin \{ 3 \}, f(c) \notin \{ 3, 4 \}$ và $f(d) \notin \{ 4, 5, 6 \}$.

Đặt $H' = H \cup \{ u, v \}$. Mỗi đơn ánh $f : H \to K$ có thể mở rộng thành 2 song ánh f_1 và f_2 [có 2 cách xác định ảnh cho $f(u)$ và $f(v)$]. Số đơn ánh cần tìm sẽ bằng nửa số song ánh $g : H' \to K$ thỏa $g(a) \notin \{ 1, 2 \}, g(b) \notin \{3\}, g(c) \notin \{ 3, 4 \}$ và $g(d) \notin \{ 4, 5, 6 \}$. Việc tìm số song ánh g nói trên tương đương với việc tính



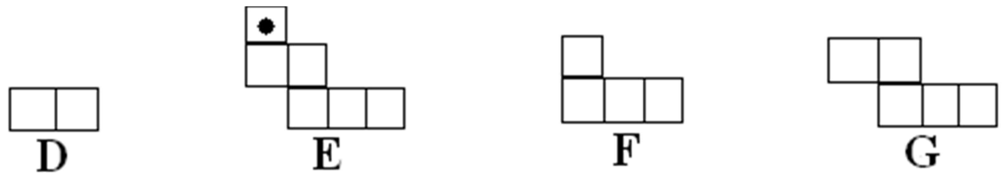




$|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)|$ với $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{3\}$, $X_3 = \{3, 4\}$, $X_4 = \{4, 5, 6\}$ và $X_5 = X_6 = \varnothing$. Như vậy ta cần tính số cách xếp 6 quân Xe vào các ô trong bảng 6×6 dưới đây nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu :

	1	2	3	4	5	6
g(a)	•	•				
g(b)			•			
g(c)			•	•		
g(d)				•	•	•
g(u)						
g(v)						

Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm trên bàn cờ mới. Ta thấy C được tạo bởi hai bàn cờ rời nhau D và E dưới đây. Trong E, chọn Δ là ô được đánh dấu.



Ta có $R(C, x) = R(D, x).R(E, x) = R(D, x) [xR(F, x) + R(G, x)] =$

$= (1 + 2x) [x(1 + 4x + 2x^2) + (1 + 5x + 5x^2)] = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 4x^4$.

$$| P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) | = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k(6-k)!r_k(C)$$

$$= 6! - 8.5! + 21.4! - 20.3! + 4.2! = 152.$$

Như vậy số đơn ánh cần tìm sẽ là $(152 / 2) = 76$.

3.10/ <u>GHI CHÚ:</u>

* Khi tìm đa thức quân Xe của một bàn cờ phức tạp, ta thường dùng (**3.7**) và (**3.8**) nhiều lần một cách khéo léo để phân tích nó thành các bàn cờ nhỏ hơn mà ta có thể tính trực tiếp đa thức quân Xe của mỗi bàn cờ nhỏ đó.

* Các bài toán trong (**3.9**) vẫn có thể giải bằng *nguyên lý bù trừ* (tuy khá rườm rà). Ta giải thử a). Đặt $A_1 = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(1) = 3$ hay $4 \}$, $A_2 = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(2) = 5 \}$, $A_3 = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(3) = 1, 3$ hay $4 \}$, $A_4 = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(5) = 2$ hay $5 \}$ và $U = S_5$.

Ta có $| U | = 5! =120$, $| A_1 | = | A_4 | = 2.4! = 48$, $| A_2 | = 4! = 24$, $| A_3 | = 3.4! = 72$,

$| A_1 \cap A_2 | = 2.3! = 12$, $| A_1 \cap A_3 | = | A_1 \cap A_4 | = 4.3! = 24$, $| A_2 \cap A_3 | = 3.3! = 18$,

$| A_2 \cap A_4 | = 3! = 6$, $| A_3 \cap A_4 | = 6.3! = 36$, $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 | = 4.2! = 8$,

$| A_1 \cap A_2 \cap A_4 | = 2.2! = 4$, $| A_1 \cap A_3 \cap A_4 | = 8.2! = 16$, $| A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 3.2! = 6$,

và $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 4.1! = 4$.

Suy ra $S_1 = \sum_{i=1}^{4}| A_i | = 192$, $S_2 = \sum_{1\le i<j\le 4} | A_i \cap A_j | = 120$, $S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le 4} | A_i \cap A_j \cap A_k | = 34$

và $S_4 = | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 4$.

Do đó $| P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) | = | \bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i} | = | U | - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$

$= 120 - 192 + 120 - 34 + 4 = 18.$