

Circuito

November 13, 2021

1 TP 2 - Grupo 4

Pedro Paulo Costa Pereira - A88062

Tiago André Oliveira Leite - A91693

2 Problema 2 - Circuito

Considere-se um circuito booleano \mathcal{C} com n “wires” de “input” e um único “wire” de output. * O circuito é descrito num digrafo com uma classe de nodos representando “gates” e a segunda classe representando “wires”. * Cada nodo contém um campo val cujo conteúdo descreve a semântica desse nodo; para os “wires” o campo val contém uma variável SCIP; para as “gates” o campo val contém uma marca bo conjunto and, or, xor e not, que indica o tipo de “gate”. * Com exceção de not, que é um operador unário, todas as restantes “gates” têm um número arbitrário de “inputs” e um único “output”. * No grafo os arcos com origem numa determinada “gate” têm destino nos “wires” que são “input” dessa “gate”. Cada “wire” que não é “input” é origem de um único arco que tem como destino a “gate” do qual esse “wire” é “output”. * A semântica das várias “gates” é expressa em relações na Aritmética Linear Inteira, tal como está descrita em +Capítulo 2: Programação com Restrições (#LIA)

a. Escreva um programa que, a partir do número n de “inputs” e de um parâmetro positivo $\gamma \ll 1$ como argumentos, gere aleatoriamente circuitos com “gates” or, and e not em que o número de and’s é $\gamma \times$ (número total de nodos).

b. Escreva um programa Python que leia um circuito arbitrário descrito pelo digrafo anterior e formule as restrições (em Programação Inteira) que descrevem as várias “gates” do circuito.

c. Usando os dois programas anteriores e o sistema SCIP: c1. Escreva um programa que determine um vetor de “inputs” $x \in \{0,1\}^n$ aceite pelo circuito (i.e. o respetivo output é 1). c2. Determine o vetor $x' \neq x$, também aceite pelo circuito, que está mais próximo de x .

```
[2]: import networkx as nx
from ortools.linear_solver import pywraplp
import random
```

2.1 Função que gera circuitos aleatoriamente

Primeiramente, foram selecionados aleatoriamente os números de gates *xor*, *or* e *not*, e o número de gates *and* com base no valor de γ de forma que $\#and = \gamma \times (\#xor \times \#or \times \#not \times \#and)$

De seguida, foi criado um digrafo ao qual adicionamos os nodos que representam os “inputs”, as “gates” e os “wires” (que são os “outputs” de cada “gate”).

Para cada “gate” foi adicionado um “wire” e uma aresta da “gate” para tal “wire”. Todos os nodos foram etiquetados de forma a identificar sua função no circuito ("INPUT", "AND", "NOT", "OR", "XOR", "WIRE", "OUTPUT"). As “gates” e seus respectivos “outputs” foram, ainda, etiquetadas com o nível a que pertencem no circuito, de forma a auxiliar na construção do mesmo.

Para ligar as várias “gates”, foi utilizada uma técnica similar à travessia de grafos, usando uma orla, cujo primeiro elemento é a “gate” que está ligada ao “wire” identificado como “output” do circuito. Após seleccionar e remover o nodo g_1 mais antigo da orla há dois casos:

1. g_1 é um “NOT”. Então, é criada uma aresta (w, g_1) , onde w é uma “wire”, “output” de uma “gate” de nível superior ao de g_1 escolhida de forma aleatória.
2. g_1 não é um “NOT”. Então, são criadas n de arestas $(w_2, g_1), \dots, (w_n, g_1)$, onde $2 \leq n \leq$ número de “gates” de nível superior, e, para cada $2 \leq i \leq n$, w_i é um “wire”, “output” de uma “gate” de nível superior ao de g_1 escolhida de forma aleatória.

Todas as “gates” seleccionadas neste passo são adicionadas à orla e o processo termina quando a orla fica vazia.

Como deste processo podem resultar “wires” que não se encontram ligados ao circuito, é realizado um ciclo para estabelecer as ligações necessárias para que o circuito faça sentido. Além disso, são ligados os nodos de “inputs”, à sorte, às “gates” cujo grau de incidência é igual a 0, no caso de “gates” *not*, ou < 2 para as restantes “gates”.

```
[3]: def circuit_generator(I, Gamma):

    if Gamma != 1:
        num_xors = random.randint(1, I)
        num_not = random.randint(1, I)
        num_ors = random.randint(1, I)
        num_and = int((num_xors + num_not + num_ors) * Gamma / (1 - Gamma))
    else:
        num_xors = 0
        num_not = 0
        num_ors = 0
        num_and = 1

    G = nx.DiGraph()
    total = 0

    #adicionar e etiquetar aos varios nodos do grafo

    for n in range(I):
        G.add_node(n, type="INPUT", val=None)

    total += I
```

```

for n in range(num_xors):
    G.add_node(total+n,type="XOR")

total += num_xors

for n in range(num_not):
    G.add_node(total+n,type="NOT")

total += num_not

for n in range(num_ors):
    G.add_node(total+n,type="OR")

total += num_ors

for n in range(num_and):
    G.add_node(total+n,type="AND")

total+= num_and

num_gates = total - I

for n in range(num_gates):
    G.add_node(total+n,type="WIRE",val=None)

gates = [n for n in G.nodes() if G.nodes[n]['type'] != 'INPUT' and G.
→nodes[n]['type'] != 'WIRE']
wires = [n for n in G.nodes() if G.nodes[n]['type'] == 'WIRE']
random.shuffle(gates)
gates_info = {}

# ligar cada gate ao seu wire de output

for edge in zip(gates,wires):
    G.add_edge(*edge)
    gates_info[edge[0]] = {'type':G.nodes[edge[0]]['type'] , 'output':
→edge[1], 'level':float('inf')}

output = random.choice(gates)
G.nodes[gates_info[output]['output']]['type'] = 'OUTPUT'
gates_info[output]['level'] = 1

#criar o circuito ligando as varias gates

orla = [output]
while orla:

```

```

x = orla.pop(0)
candidates = [g for g in gates_info if gates_info[g]['level'] >
↳gates_info[x]['level']]
if candidates:
    random.shuffle(candidates)
    if gates_info[x]['type'] == 'NOT':
        selected = candidates.pop(0)
        gates_info[selected]['level'] = gates_info[x]['level'] + 1
        G.add_edge(gates_info[selected]['output'], x)
        orla.append(selected)
    elif len(candidates) > 1:
        for i in range(random.randint(2, len(candidates))):
            selected = candidates.pop(0)
            gates_info[selected]['level'] = gates_info[x]['level'] + 1
            G.add_edge(gates_info[selected]['output'], x)
            orla.append(selected)

# ligar gates que não se encontram ligadas ao circuito, ou seja, o grau de
↳saída do nodo de output é 0

unconnected = [n for n in gates if G.out_degree[gates_info[n]['output']] ==
↳0 and G.nodes[gates_info[n]['output']]['type'] != 'OUTPUT']
for x in unconnected:
    candidates = [n for n in gates if n not in unconnected and G.
↳nodes[n]['type'] != 'NOT']
    selected = random.choice(candidates)
    G.add_edge(gates_info[x]['output'], selected)

# ligar gates cujo grau de incidencia é 0 aos nodos de input do circuito

unconnected = [n for n in gates if G.in_degree[n] == 0]

for x in unconnected:
    candidates = [i for i in G.nodes() if G.nodes[i]['type'] == 'INPUT']
    random.shuffle(candidates)
    if gates_info[x]['type'] == 'NOT':
        selected = candidates.pop(0)
        G.add_edge(selected, x)
    else:
        for i in range(random.randint(1, len(candidates))):
            selected = candidates.pop(0)
            G.add_edge(selected, x)

# ligar gates NOT, XOR, AND cujo grau de incidenci é 1 aos nodos de input
↳do circuito

```

```

    unconnected = [n for n in gates if G.in_degree[n] == 1 and (G.
↳nodes[n]['type'] == 'OR' or G.nodes[n]['type'] == 'XOR' or G.
↳nodes[n]['type'] == 'AND')]
    for x in unconnected:
        candidates = [i for i in G.nodes() if G.nodes[i]['type'] == 'INPUT' and
↳(i,x) not in G.edges()]
        if not candidates:
            candidates = [i for i in G.nodes() if G.nodes[i]['type'] == 'WIRE'
↳and not nx.has_path(G,x,i)]
            selected = random.choice(candidates)
            G.add_edge(selected,x)

    # ligar nodos de input do circuito que ainda se encontram desconectados a
↳gates com aridade superior a 1

    unconnected = [n for n in G if G.nodes[n]['type'] == 'INPUT' and G.
↳out_degree(n) == 0]
    candidates = [i for i in gates if G.nodes[i]['type'] != 'NOT']
    for x in unconnected:
        selected = random.choice(candidates)
        G.add_edge(x,selected)

    return G

```

2.2 Formular as restrições que descrevem as “gates” do circuito

Para formular as restrições, utilizaremos um *solver* SCIP, ao qual chamaremos `solver`, e um dicionário X para guardar as variáveis binárias correspondentes aos nodos dos tipos "INPUT", "WIRE" e "OUTPUT". Criaremos, também, uma variável inteira T para auxiliar no caso das “gates” do tipo "XOR".

A primeira coisa a ser feita é inverter o circuito, ou seja, o “output” do circuito, que estava no primeiro nível até agora, deve estar no último nível.

De seguida, iteramos por todos os nodos dos tipos "WIRE" e "OUTPUT". Para cada nodo n destes, identificamos a que nodo f o n se encontra ligado, ou seja, a “gate” f da qual n é “output”. Também criamos a lista L que contém todos os nodos aos quais f se encontra ligado (em outras palavras, L é a lista de “inputs” de f).

Finalmente, temos quatro casos:

1. f é do tipo "AND". Então, $X_n = 1$ se e só se $\forall_{i \in L} \cdot X_i = 1$, ou seja,
$$\forall_{i \in L} \cdot X_i \geq X_n \quad \wedge \quad \sum_{i \in L} X_i < \text{len}(L) + X_n$$
2. f é do tipo "NOT". Então, L tem um único elemento i e $(X_i = 0 \Rightarrow X_n = 1) \wedge (X_i = 1 \Rightarrow X_n = 0)$, ou seja,
$$X_n = 1 - X_i$$

3. f é do tipo "OR". Então, $X_n = 1$ se e só se $\exists_{i \in L} \cdot X_i = 1$, ou seja,

$$\forall_{i \in L} \cdot X_i \leq X_n \quad \wedge \quad \sum_{i \in L} X_i \geq X_n$$

4. f é do tipo "XOR". Então, $X_n = 1$ se e só se $\sum_{i \in L} X_i$ é ímpar, ou seja,

$$X_n = (\sum_{i \in L} X_i) - 2 \times T, \text{ para algum } T \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Nota: como T é uma variável inteira do *solver*, o mesmo procura um valor entre $[0, +\infty[$ até que o valor de X_n seja 0 ou 1.

A função retorna o *solver* e o dicionário X .

```
[4]: def add_restrictions(G):
    G = G.reverse()
    solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('SCIP')
    variables = [n for n in G.nodes() if G.nodes[n]['type']=='INPUT' or G.
    ↪nodes[n]['type']=='WIRE' or G.nodes[n]['type']=='OUTPUT']
    X = {}
    for n in variables:
        X[n] = solver.BoolVar(str(n))
    wires = [n for n in G if G.nodes[n]['type']=='WIRE' or G.
    ↪nodes[n]['type']=='OUTPUT']
    for n in wires:
        father = list(G.neighbors(n)).pop()
        father_input = list(G.neighbors(father))
        if G.nodes[father]['type'] == "OR":
            solver.Add(sum([X[i] for i in father_input]) >= X[n])
            for i in father_input:
                solver.Add(X[n] >= X[i])
        elif G.nodes[father]['type'] == "AND":
            solver.Add(sum([X[i] for i in father_input]) <= X[n] +
    ↪len(father_input) - 1)
            for i in father_input:
                solver.Add(X[n] <= X[i])
        elif G.nodes[father]['type'] == "NOT":
            solver.Add(X[n] == 1 - X[father_input[0]])
        elif G.nodes[father]['type'] == "XOR":
            T = solver.IntVar(0, solver.infinity(), "XOR"+str(father))
            solver.Add(X[n] == sum([X[i] for i in father_input]) - 2*T)
    return solver, X
```

2.3 Função que calcula vetor de “inputs” x aceite pelo circuito

Para calcular, temos que adicionar mais uma restrição e uma função objetivo ao *solver*.

Primeiro, como queremos que o vetor de “inputs” seja aceite, temos que garantir que $X_o = 1$, sendo o o nodo do tipo "OUTPUT" do circuito.

Agora, o nosso objetivo é encontrar um vetor de “inputs” aceite pelo circuito, portanto nossa função objetivo é minimizar $\sum_{i \in I} X_i$, onde I é a lista dos nodos do tipo "INPUT".

```
[5]: def calculate_input(G):
    solver,X = add_restrictions(G)
    output = [n for n in G if G.nodes[n]['type'] == 'OUTPUT'].pop()
    inputs = [n for n in G if G.nodes[n]['type'] == 'INPUT']
    solver.Add(X[output] == 1)
    solver.Minimize(sum([X[n] for n in inputs]))
    status = solver.Solve()
    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
        result = [round(X[i].solution_value()) for i in inputs]
        for n in X:
            G.nodes[n]['val'] = round(X[n].solution_value())
        return result
    else:
        return None
```

2.4 Função que calcula o vetor de “inputs” $x' \neq x$ aceite pelo circuito, que está mais próximo de x

Esta função, para além do circuito, recebe o vetor de “inputs” x aceite pelo circuito.

Para calcular o vetor x' , temos que criar um dicionário de erro E , que vai armazenar variáveis binárias. O número de elementos de E é igual ao comprimento do vetor x . Também serão utilizadas variáveis auxiliares do tipo inteiro, às quais chamaremos T .

Temos, agora mais duas restrições:

1. O novo valor de cada “input” do circuito é calculado através de um *xor* entre a variável de erro e o correspondente valor da solução x .

$$\forall 1 \leq n \leq N \cdot X_{I_n} = E_n + x_n - 2 \times T, \text{ onde } N = \text{len}(x) \text{ e } T \in [0, +\infty[$$

2. Para garantir que $x' \neq x$, precisamos ter pelo menos uma mudança nos valores do vetor x .

$$\sum_{e \in E} e \geq 1$$

E, como queremos a solução mais próxima de x , vamos minimizar $\sum_{e \in E} e$.

```
[6]: def next_solution(G,S):
    if not S:
        return None
    solver,X = add_restrictions(G)
    E = {}
    output = [n for n in G if G.nodes[n]['type'] == 'OUTPUT'].pop()
    inputs = [n for n in G if G.nodes[n]['type'] == 'INPUT']
    solver.Add(X[output] == 1)
    solver.Minimize(sum([X[n] for n in inputs]))
    for i in range(len(inputs)):
        E[i] = solver.BoolVar("e"+str(i))
        T = solver.IntVar(0,solver.infinity(),"T"+str(i))
        solver.Add(E[i] + S[i] == X[inputs[i]] + 2*T )
    solver.Add(sum([E[n] for n in E]) >=1)
```

```

solver.Minimize(sum([E[n] for n in E]))

status = solver.Solve()

if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
    result = [round(X[i].solution_value()) for i in inputs]
    for n in X:
        G.nodes[n]['val'] = round(X[n].solution_value())
    return result
else:
    return None

```

2.5 Função que imprime o circuito

```

[7]: def draw_circuit(C):
    pos = nx.nx_pydot.graphviz_layout(C)
    labels = {}
    colors = [None for n in C.nodes]
    for n in C:
        if C.nodes[n]['type'] == 'INPUT':
            if C.nodes[n]['val'] != None:
                labels[n] = C.nodes[n]['val']
            else:
                labels[n] = chr(ord('A') + n)
                colors[n] = "turquoise"
        elif C.nodes[n]['type'] == 'OUTPUT':
            labels[n] = 'OUT'
            colors[n] = "blue"
        elif C.nodes[n]['type'] == 'XOR':
            labels[n] = 'XOR'
            colors[n] = "orange"
        elif C.nodes[n]['type'] == 'NOT':
            labels[n] = 'NOT'
            colors[n] = "red"
        elif C.nodes[n]['type'] == 'OR':
            labels[n] = 'OR'
            colors[n] = "pink"
        elif C.nodes[n]['type'] == 'AND':
            labels[n] = 'AND'
            colors[n] = "yellow"
        else:
            if C.nodes[n]['val'] != None:
                labels[n] = C.nodes[n]['val']
            else:
                labels[n] = "W"
            colors[n] = "grey"

```



```

nx.draw(C, pos=pos, with_labels=True, labels=labels, font_size=8,
↪node_size=700, node_color=colors)

```

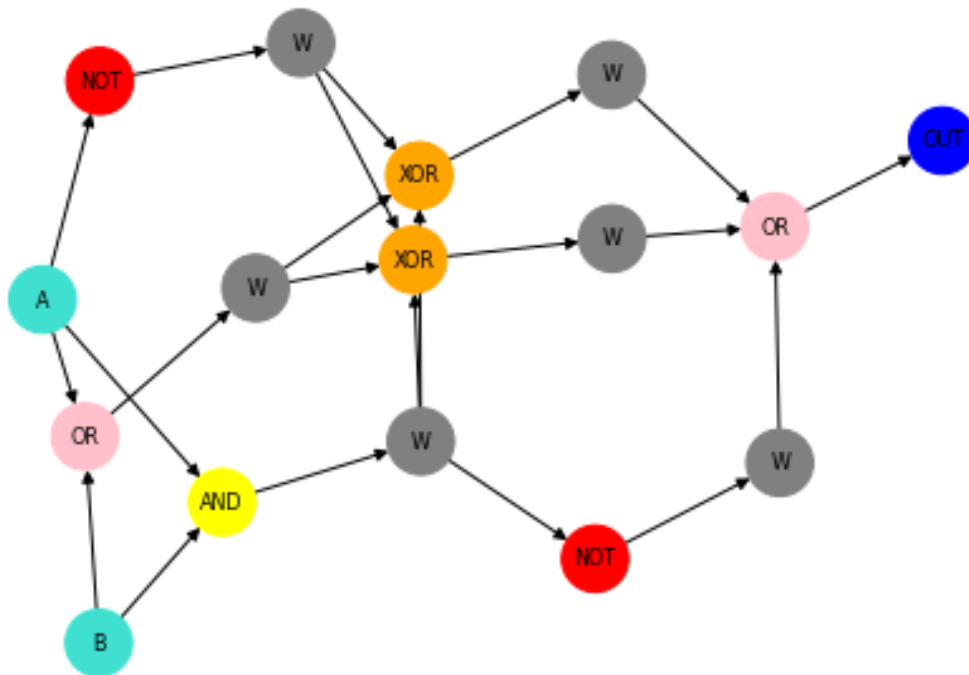
2.6 Exemplo 1

Gerar circuito

```

[31]: C = circuit_generator(2,0.2)
draw_circuit(C)

```



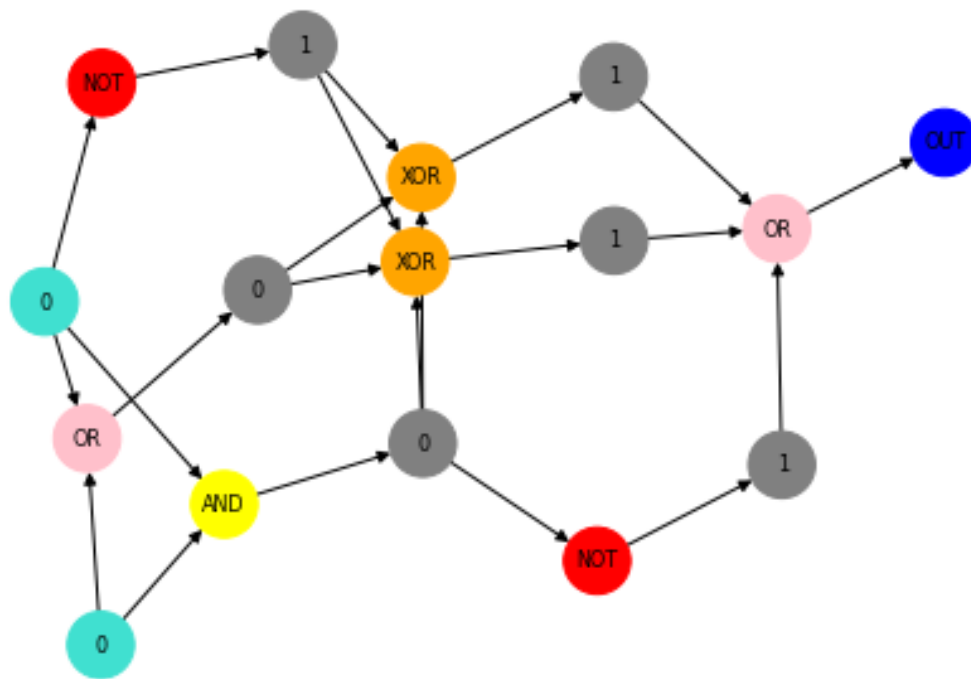
Calcular vetor de input X aceite pelo circuito

```

[32]: S = calculate_input(C)
if S:
    draw_circuit(C)
print("X =",S)

```

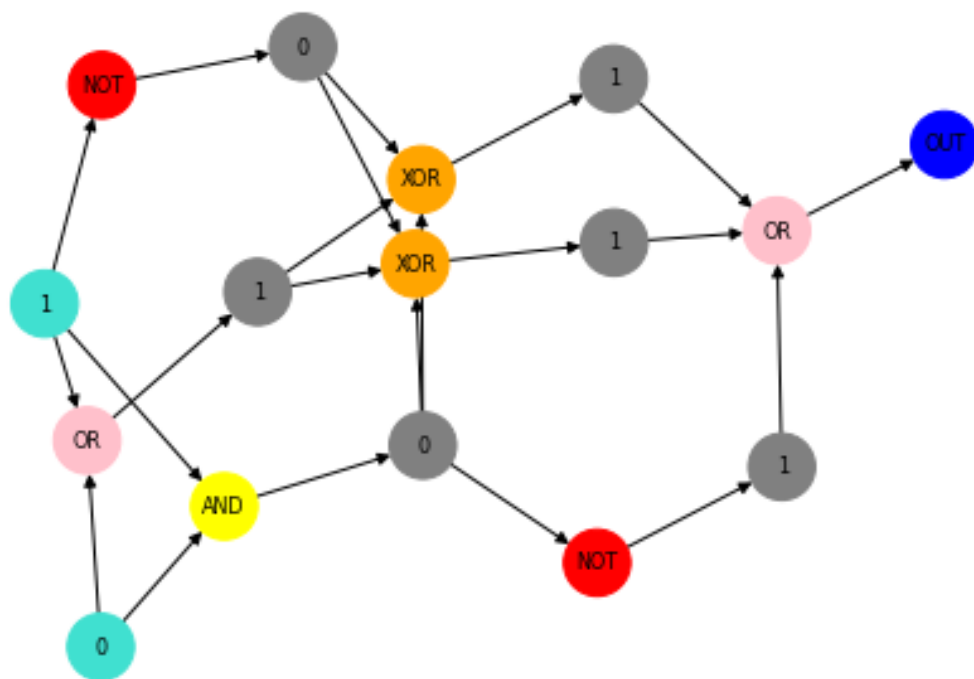
X = [0, 0]



Calcular vetor de input X' aceite pelo circuito que está mais próximo de X

```
[33]: NS = next_solution(C,S)
      if NS:
          draw_circuit(C)
      print("X' =", NS)
```

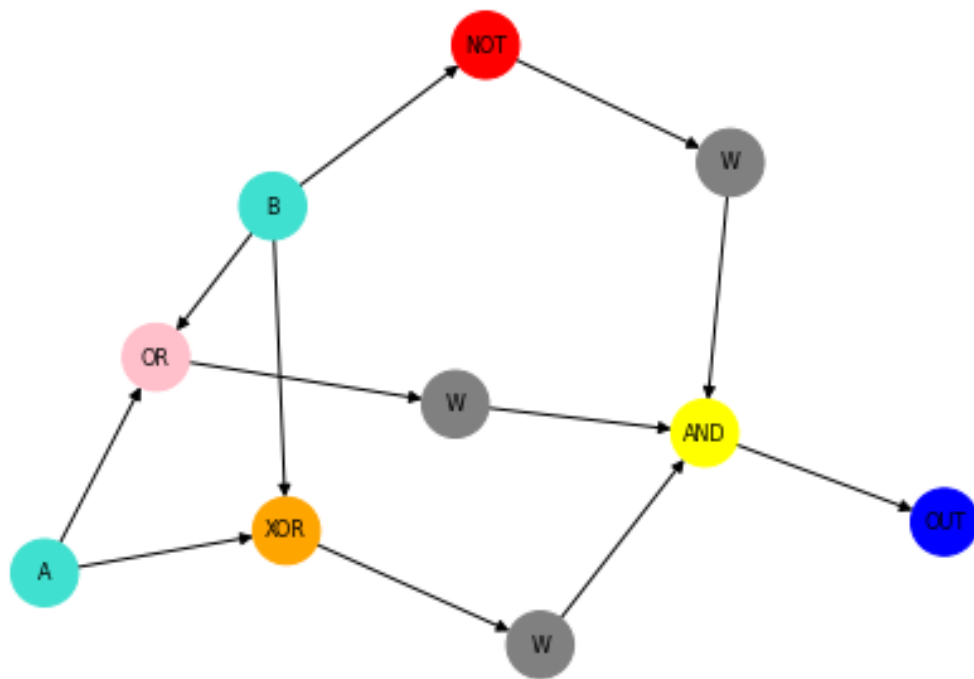
X' = [1, 0]



2.7 Exemplo 2

Gerar circuito

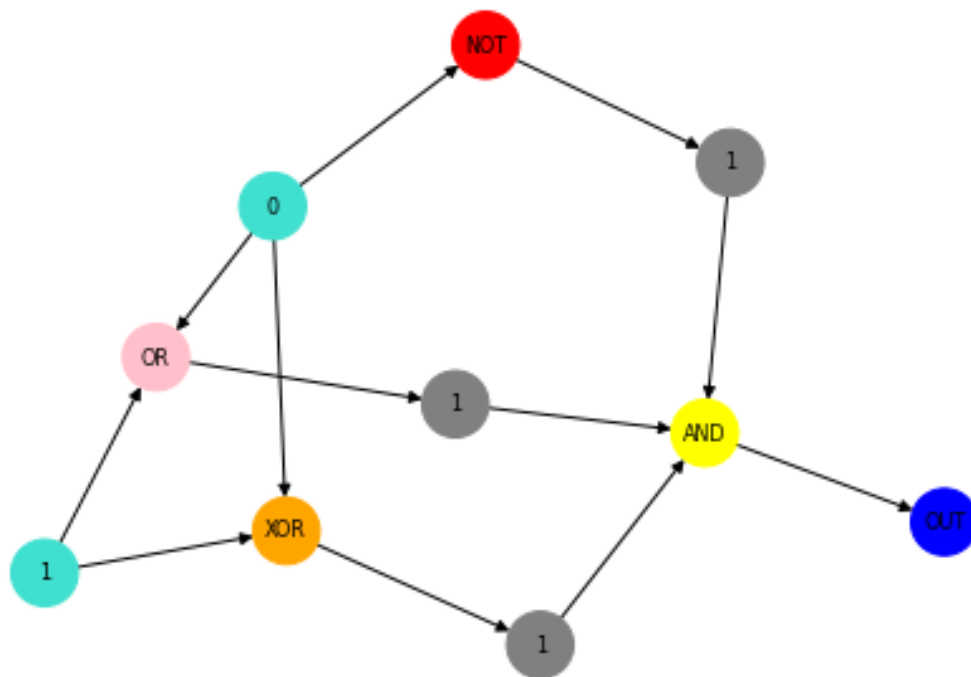
```
[37]: C = circuit_generator(2,0.3)
      draw_circuit(C)
```



Calcular vetor de input X aceite pelo circuito

```
[38]: S = calculate_input(C)
      if S:
          draw_circuit(C)
      print("X =",S)
```

X = [1, 0]



Calcular vetor de input X' aceite pelo circuito que está mais próximo de X

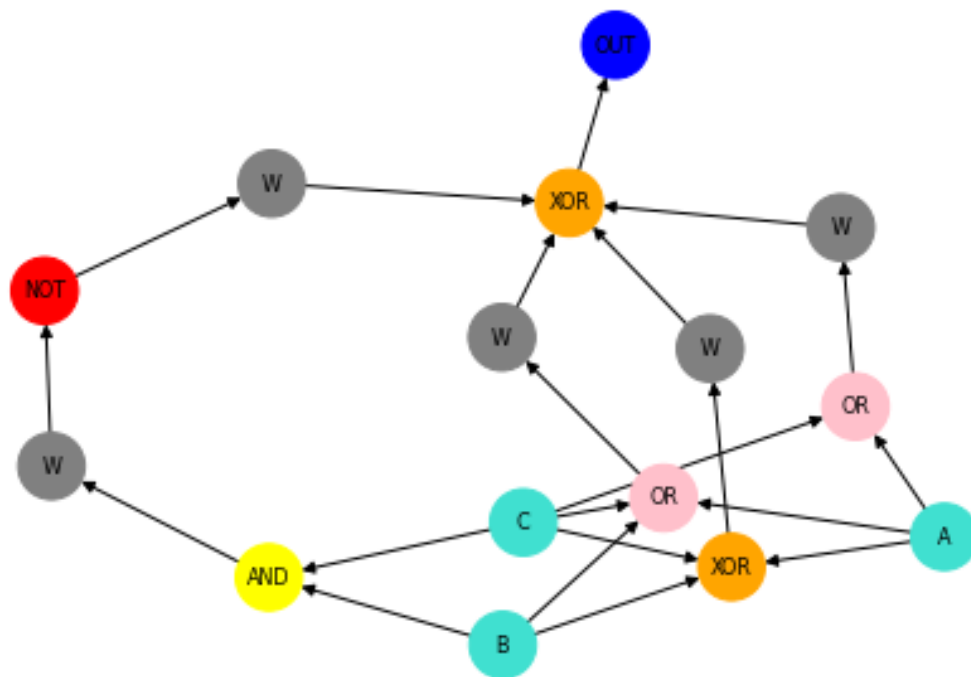
```
[39]: NS = next_solution(C,S)
      if NS:
          draw_circuit(C)
      print("X'", NS)
```

X' = None

2.8 Exemplo 3

Gerar circuito

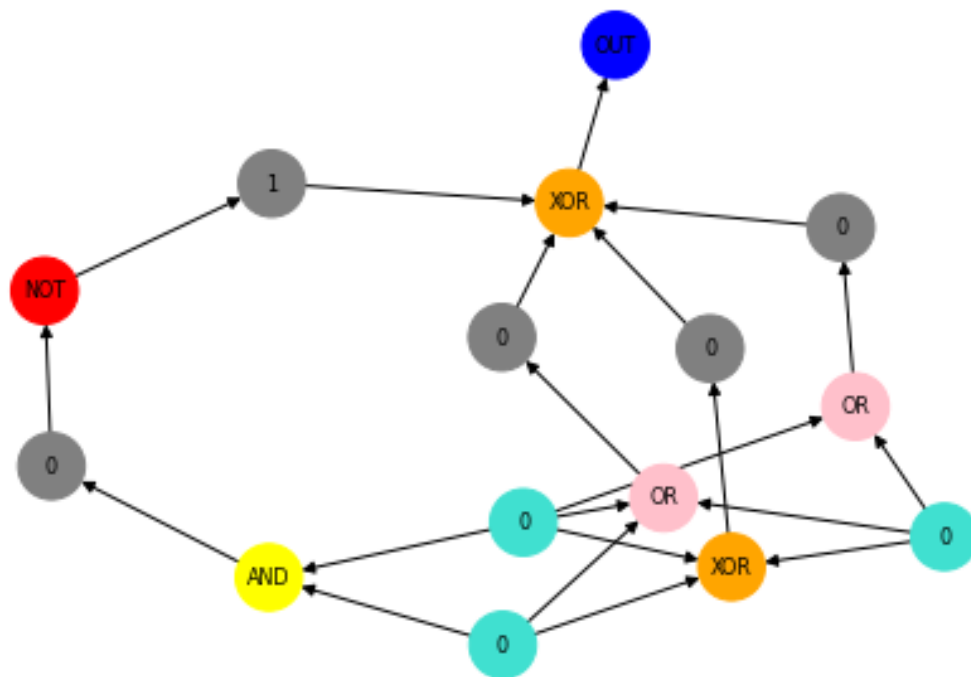
```
[19]: C = circuit_generator(3,0.2)
      draw_circuit(C)
```



Calcular vetor de input X aceite pelo circuito

```
[20]: S = calculate_input(C)
      if S:
          draw_circuit(C)
      print("X =",S)
```

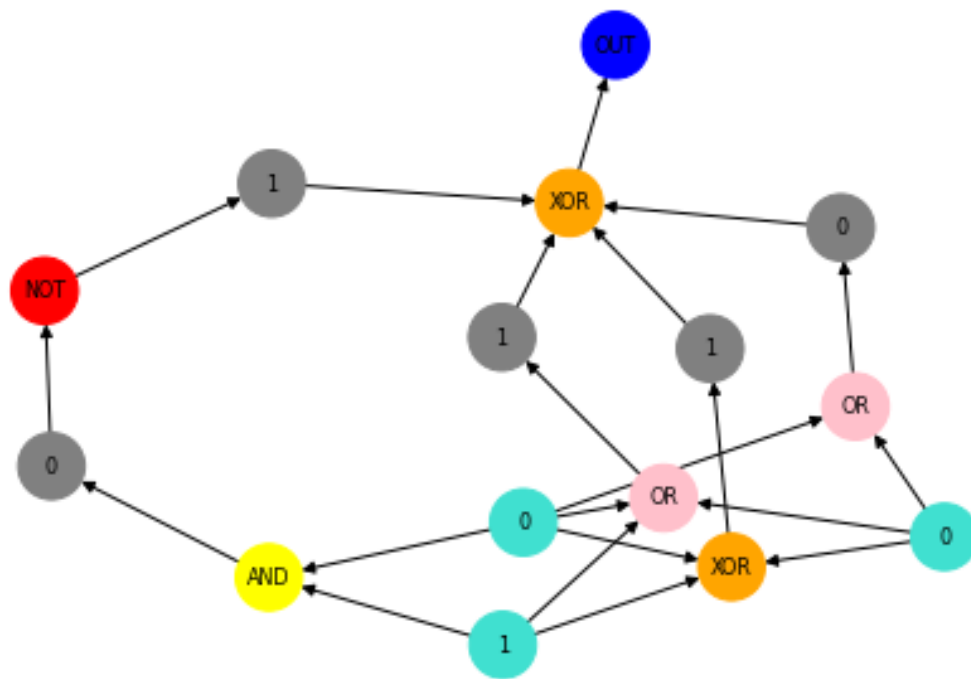
X = [0, 0, 0]



Calcular vetor de input X' aceite pelo circuito que está mais próximo de X

```
[21]: NS = next_solution(C,S)
      if NS:
          draw_circuit(C)
      print("X' =", NS)
```

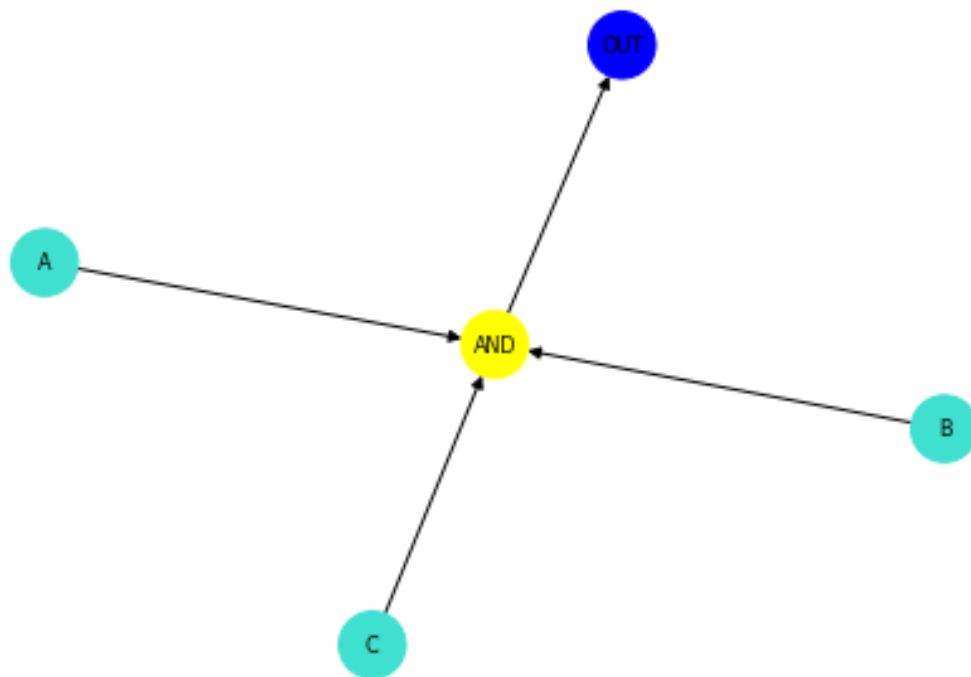
$X' = [0, 1, 0]$



2.9 Exemplo 4

Gerar circuito

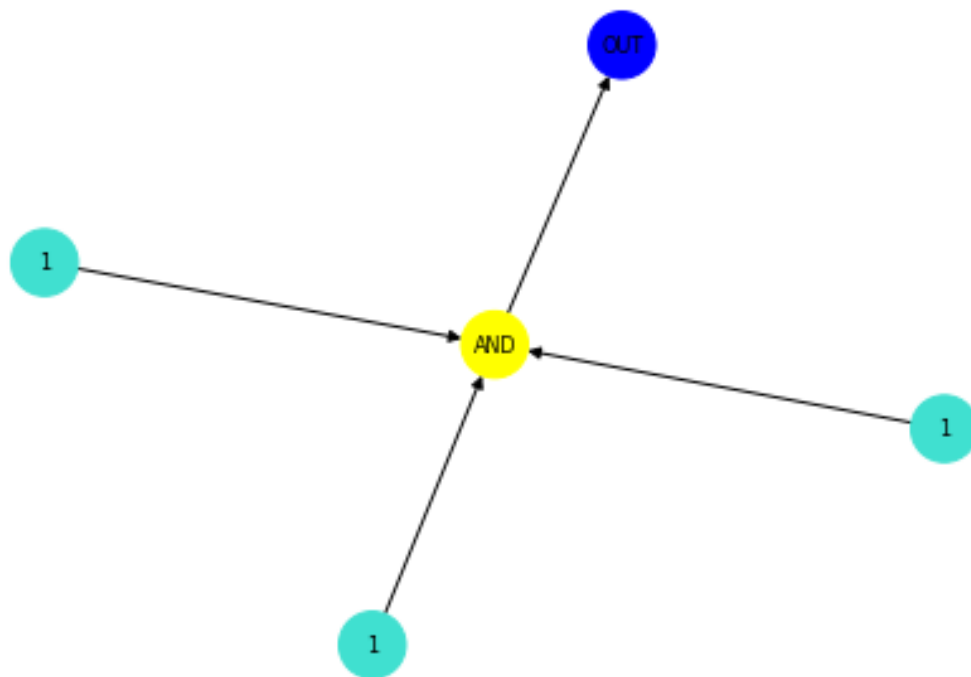
```
[22]: C = circuit_generator(3,1)
      draw_circuit(C)
```

Calcular vetor de input X aceite pelo circuito

```
[23]: S = calculate_input(C)
      if S:
          draw_circuit(C)
      print("X =", S)
```

X = [1, 1, 1]



Calcular vetor de input X' aceite pelo circuito que está mais próximo de X

```
[24]: NS = next_solution(C,S)
      if NS:
          draw_circuit(C)
      print("X' =", NS)
```

X' = None