Trafego

November 13, 2021

1 TP2 - Grupo 4

Pedro Paulo Costa Pereira - A88062

Tiago André Oliveira Leite - A91693

2 Problema 1 - Sistema de Tráfego

Um sistema de tráfego é representado por um grafo orientado ligado. Os nodos denotam pontos de acesso e os arcos denotam vias de comunicação só com um sentido.

> O grafo tem de ser ligado o que significa que entre cada par de nodos $\langle n_1, n_2 \rangle$ tem de existir um caminho $n_1 \rightsquigarrow n_2$ e um caminho $n_2 \rightsquigarrow n_1$.

1. Gerar aleatoriamente um tal grafo com $N = 32$ nodos. Cada nodo tem um número aleatório de descendentes no intervalo 1..3 cujos destinos são distintos entre si do nodo origem.
2. Pretende-se fazer manutenção interrompendo determinadas vias. Determinar **o maior número de vias** que é possível remover mantendo o grafo ligado.

[1]:
```
import networkx as nx
from ortools.linear_solver import pywraplp
import random
```

2.1 Funções para gerar aleatoriamente um digrafo ligado

Primeiramente, vamos começar declarando duas variáveis globais:

`NUM_NODES` é o número de nodos do digrafo;

`MAX_OUT_DEGREE` é o número máximo de descendentes de cada nodo.

[2]:
```
NUM_NODES = 32
MAX_OUT_DEGREE = 3
```

2.1.1 Método 1

Esta estratégia consiste em, basicamente, manter sempre o grafo orientado (ou digrafo) G ligado à medida que se vão adicionando arestas.

Em primeiro lugar, inserimos todos os nodos $n_1, n_2, ..., n_j$ em G. De seguida, selecionamos de forma aleatória dois nodos, aos quais chamaremos s e d, e adicionamos as arestas (s, d) e (d, s) a G. Agora, vamos ligar cada um dos nodos restantes de G de uma forma aleatória, mas mantendo sempre G ligado.

Portanto, selecionamos um nodo n cujo grau de saída é igual a 0 e um nodo s que já se encontra na parte de G que está ligada. Aqui podemos encontrar dois casos:

1. O grau de saída de s é igual a `MAX_OUT_DEGREE`. Então, selecionamos outro nodo d (que seja sucessor de s), removemos a aresta (s, d) e colocamos as arestas (s, n) e (n, d).
2. O grau de saída de s é menor que `MAX_OUT_DEGREE`. Então, escolhe-se à sorte entre três opções: selecionar um nodo d da parte ligada de G e colocar as arestas (s, n) e (n, d) ou colocar as arestas (s, n) e (n, s) ou realizar o mesmo processo realizado para o caso (1).

Por fim, selecionamos cada nodo cujo grau de saída ainda é menor que `MAX_OUT_DEGREE` e colocamos um número

$$0 \leq n \leq MAX\_OUT\_DEGREE - G.out\_degree(nodo)$$

de arestas aleatórias, partindo deste nodo.

[3]:
```
def graph_generator():
    G = nx.DiGraph()

    nodes = [n for n in range(1,NUM_NODES+1)]
    choosen = []
    G.add_nodes_from(nodes)
    random.shuffle(nodes)

    s = random.choice(nodes)
    nodes.remove(s)
    choosen.append(s)
    d = random.choice(nodes)
    nodes.remove(d)
    choosen.append(d)

    G.add_edge(s,d)
    G.add_edge(d,s)

    while nodes:
        to_add = random.choice(nodes)
        nodes.remove(to_add)
        s = random.choice(choosen)
        option = random.choice([0,1,2])
        if G.out_degree(s) == MAX_OUT_DEGREE or option == 0:
            d = random.choice(list(G.successors(s)))
            G.remove_edge(s,d)
            G.add_edge(s,to_add)
            G.add_edge(to_add,d)
        elif option == 1:
            d = random.choice(choosen)
            G.add_edge(s,to_add)
```

```
            G.add_edge(to_add,d)
        else:
            G.add_edge(s,to_add)
            G.add_edge(to_add,s)

        choosen.append(to_add)

    nodes = [n for n in G.nodes() if G.out_degree(n)<MAX_OUT_DEGREE]
    while nodes:
        s = nodes.pop()
        r = random.randint(0,MAX_OUT_DEGREE - G.out_degree(s))
        candidates = [n for n in G.nodes() if n != s]
        for i in range(r):
            d = random.choice(candidates)
            candidates.remove(d)
            G.add_edge(s,d)

    return G
```

2.1.2 Método 2

Neste método, mais simples que o anterior, criamos o digrafo G, adicionamos todos os nodos $n_1, n_2, ..., n_j$ e criamos um ciclo, ou seja, colocamos as arestas $(n_1, n_2), (n_2, n_3), ..., (n_{j-1}, n_j)$ e (n_j, n_1).

Nota-se que, nesse ponto, todos os nodos têm grau de saída igual a 1.

Por fim, iteramos por todos os nodos e adicionamos um número

$$0 \leq n \leq MAX\_OUT\_DEGREE - 1$$

de arestas aleatórias, partindo deste nodo.

[4]:
```
def graph_generator_simple():
    G = nx.DiGraph()

    nodes = [v for v in range(1,NUM_NODES+1)]
    G.add_nodes_from(nodes)
    random.shuffle(nodes)

    for i in range(len(nodes)-1):
        G.add_edge(nodes[i], nodes[i+1])
    G.add_edge(nodes[len(nodes)-1],nodes[0])

    for n in nodes:
        candidates = [v for v in nodes if v != n]
        random.shuffle(candidates)
        num_adj = random.randint(0,MAX_OUT_DEGREE-1)
        for i in range(num_adj):
```

```python
            G.add_edge(n, candidates[i])
    return G
```

2.2 Função para gerar subgrafo orientado ligado de G com número mínimo de arestas

Para gerar um subdigrafo S ligado com um número mínimo de arestas a partir de G, vamos utilizar um *solver* SCIP, ao qual chamaremos `solver`, e dois dicionários A e P, onde vamos armazenar as variáveis do *solver*.

Sendo E o conjunto de arestas de G, a variável A_e, com $e \in E$ representa a presença de e em S, ou seja,

$$A_e = 1 \quad \text{se e só se} \quad e \in E_S$$

onde E_S é o conjunto de arestas de S.

Admitamos que $C_{s,d}$ é uma lista de todos os caminhos de s para d em G, e que um caminho é uma lista de arestas (logo, $C_{s,d}$ é uma lista de listas). A variável $P_{s,d,i}$ representa a existência do caminho $C_{s,d}[i]$ em S, com $0 \leq i < \text{len}(C_{s,d})$, ou seja,

$$P_{s,d,i} = 1 \quad \text{se e só se} \quad \forall_{e \in C_{s,d}[i]} \cdot e \in E_S$$

Nota: para verificar que um digrafo é ligado, basta garantir que existe pelo menos um caminho de um nodo s para todos os outros nodos e que, de cada um dos outros nodos, existe pelo menos um caminho para s.

2.2.1 Restrições

Temos, agora, que adicionar as restrições ao *solver*.

Chamaremos s ao nodo a partir do qual terá de existir um caminho para todos os outros e D ao conjunto formado por todos os outros nodos.

As restrições que adicionaremos ao *solver* são:

1. Um caminho i de s para $d \in D$ não pode existir em S se alguma aresta $e \in C_{s,d}[i]$ não existir em S, ou seja, o valor de A_e nunca será menor que o valor de $P_{s,d,i}$.

$$\forall_{d \in D,\ 0 \leq i < n,\ e \in C_{s,d}[i]} \cdot P_{s,d,i} \leq A_e, \text{ onde } n = \text{len}(C_{s,d})$$

2. De modo análogo ao raciocínio da restrição (1), um caminho i de $d \in D$ para s não pode existir em S se alguma aresta $e \in C_{d,s}[i]$ não existir em S.

$$\forall_{d \in D,\ 0 \leq i < n,\ e \in C_{d,s}[i]} \cdot P_{d,s,i} \leq A_e, \text{ onde } n = \text{len}(C_{d,s})$$

3. Para qualquer $d \in D$, há de existir pelo menos um caminho de s para d e um caminho de d para s.

$$\sum_{0 \leq i < n} P_{s,d,i} \geq 1, \text{ onde } n = \text{len}(C_{s,d})$$

$$\sum_{0\leq i<n} P_{d,s,i} \geq 1, \text{ onde } n = \text{len}(C_{d,s})$$

Para finalizar, temos que declarar a função objetivo. Como queremos que S tenha o menor número possível de arestas, o objetivo é minimizar $\sum_{e\in E} A_e$.

[5]:
```
def sub_graph_generator(G):
    solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('SCIP')

    A = {}

    for edge in G.edges():
        A[edge] = solver.BoolVar('%i%i' %edge)



    nodes = [n for n in G.nodes()]
    s = nodes.pop(0)

    P = {}

    #garantir que de s conseguimos chegar a todos os outros nodos d e de todos␣
↪os nodos d chegamos a s

    for d in nodes:

        #garantir que ha caminho de s para d

        paths = list(nx.all_simple_edge_paths(G, s, d))
        N = len(paths)
        for i in range(N):
            P[(s,d,i)] = solver.BoolVar('%i%i%i' %(s,d,i))
            for edge in paths[i]:
                solver.Add(P[(s,d,i)] <= A[edge])
        solver.Add(sum([P[(s,d,i)] for i in range(N)])>=1)

        #garantir que ha caminho de d para s

        paths = list(nx.all_simple_edge_paths(G, d, s))
        N = len(paths)
        for i in range(N):
            P[(d,s,i)] = solver.BoolVar('%i%i%i' %(d,s,i))
            for edge in paths[i]:
                solver.Add(P[(d,s,i)] <= A[edge])
        solver.Add(sum([P[(d,s,i)] for i in range(N)])>=1)
```

```
    solver.Minimize(sum([A[edge] for edge in G.edges]))
    status = solver.Solve()
    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
        S = nx.DiGraph()
        S.add_nodes_from(G.nodes())
        for edge in A:
            if A[edge].solution_value() == 1:
                S.add_edge(edge[0],edge[1])
        return S
    else:
        print("Sem solução")
```

2.3 Função para imprimir grafo

[6]:
```
def draw_graph(G):
    labels_list␣
 ↪=["OPO","LIS","BRA","BCN","MAD","LON","OSL","AMS","PAR","BER","MUN","ROM","HEL","WAW","STO"
                ␣
 ↪"MOW","BUD","BEG","ZAG","VIE","BUC","BRU","FRA","MIL","ATH","CPH","TLL","SJJ","GVA","LUX","
    labels = {n:labels_list[n-1] for n in G}
    colors = ["orange" for n in G]
    pos = nx.nx_pydot.graphviz_layout(G)
    nx.draw(G, font_size=7,pos=pos, with_labels=True, labels=labels,␣
 ↪node_color=colors)
```

2.4 Exemplos

Nota: Uma vez que o kernel do jupyter "morre" para a combição de 32 nodos com um maximo de 3 descendentes, resolvemos os seguintes exemplos com outras combinações.

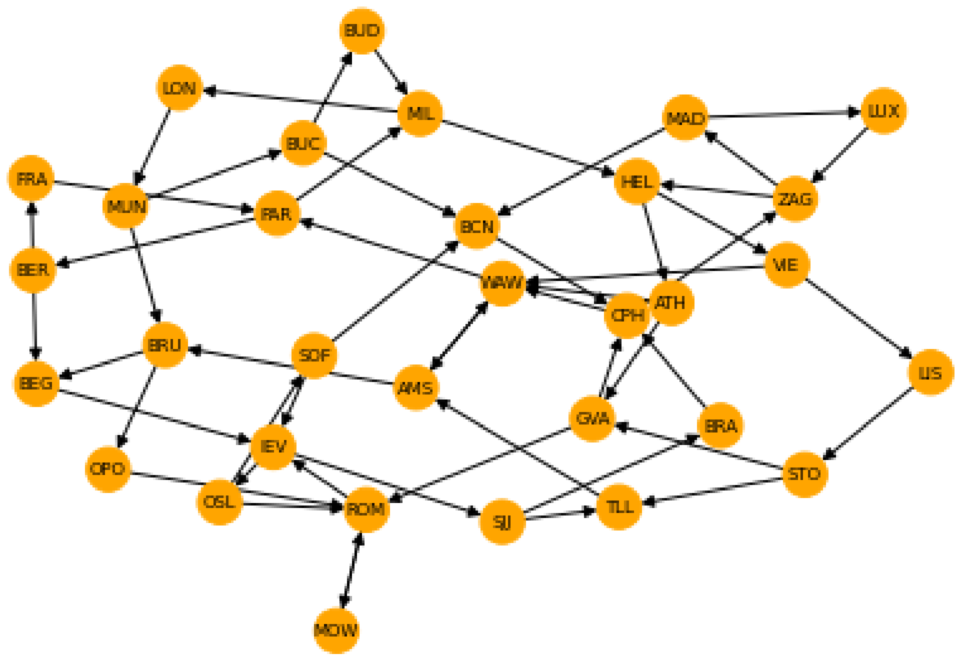
2.4.1 Exemplo 1

[7]:
```
NUM_NODES = 32
MAX_OUT_DEGREE = 2
```

Gerar digrafo - método 1

[137]:
```
G = graph_generator()
draw_graph(G)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(G) else 'O grafo não é␣
 ↪ligado.'
print(ligado)
```

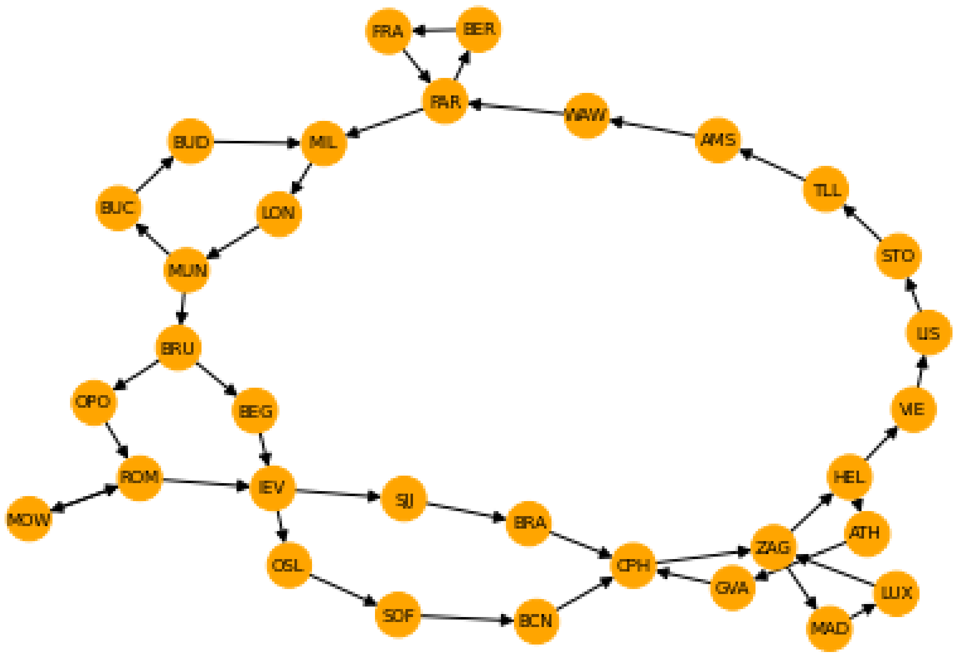
```
O grafo é ligado!
```



Gerar subgrafo minimal

[138]:
```python
S = sub_graph_generator(G)
draw_graph(S)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(S) else 'O grafo não é␣
↪ligado.'
print(ligado)
print(f'Foram removidas {len(G.edges()) - len(S.edges())} arestas.')
```

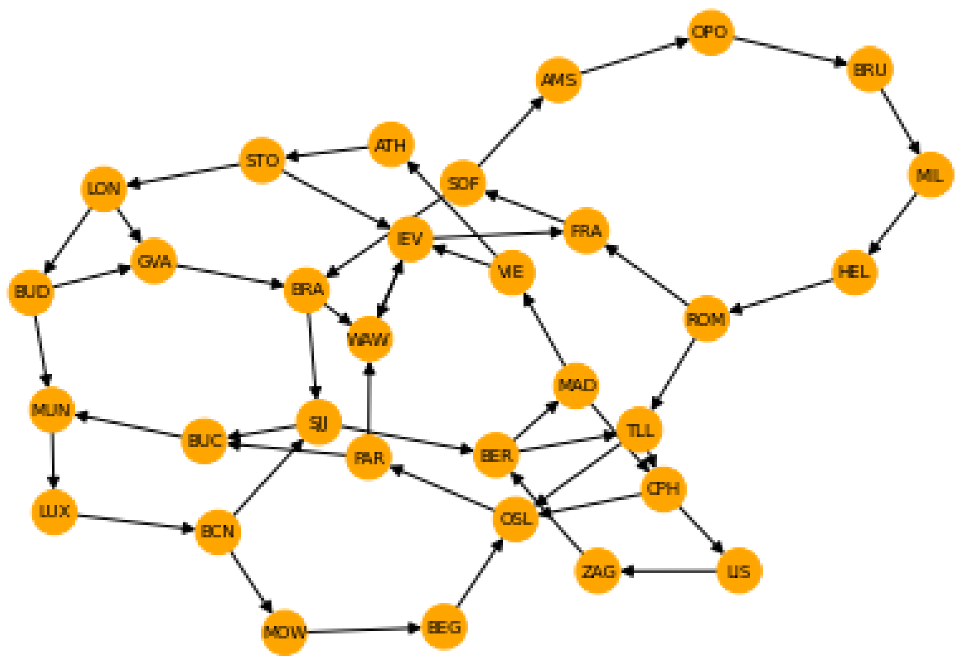
```
O grafo é ligado!
Foram removidas 14 arestas.
```



Gerar digrafo - método 2

[139]:
```
G = graph_generator_simple()
draw_graph(G)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(G) else 'O grafo não é␣
 ↪ligado.'
print(ligado)
```

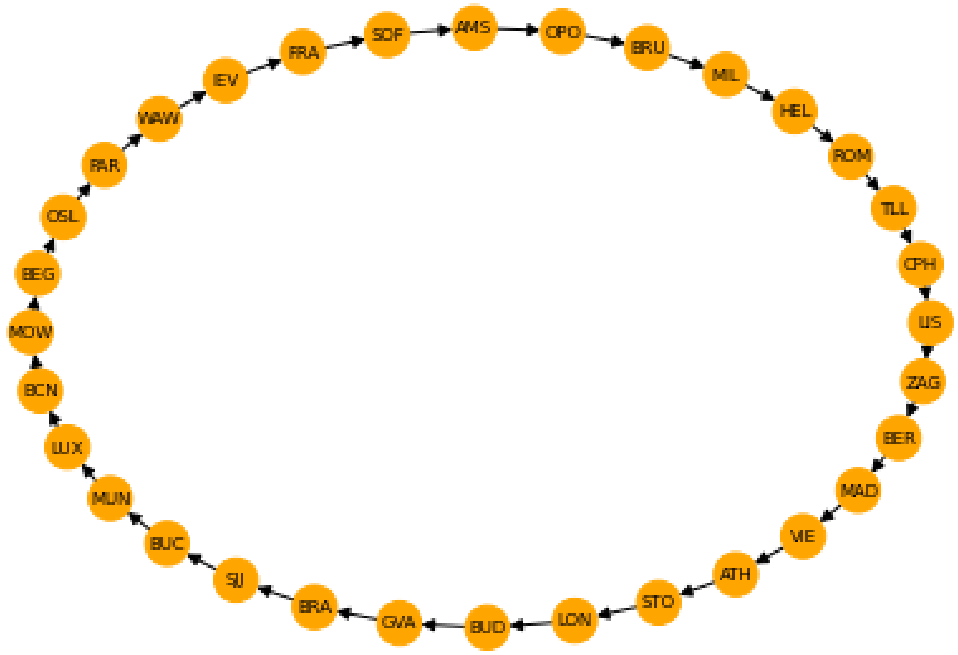
```
O grafo é ligado!
```



Gerar subgrafo minimal

[140]:
```python
S = sub_graph_generator(G)
draw_graph(S)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(S) else 'O grafo não é␣
↪ligado.'
print(ligado)
print(f'Foram removidas {len(G.edges()) - len(S.edges())} arestas.')
```

```
O grafo é ligado!
Foram removidas 15 arestas.
```



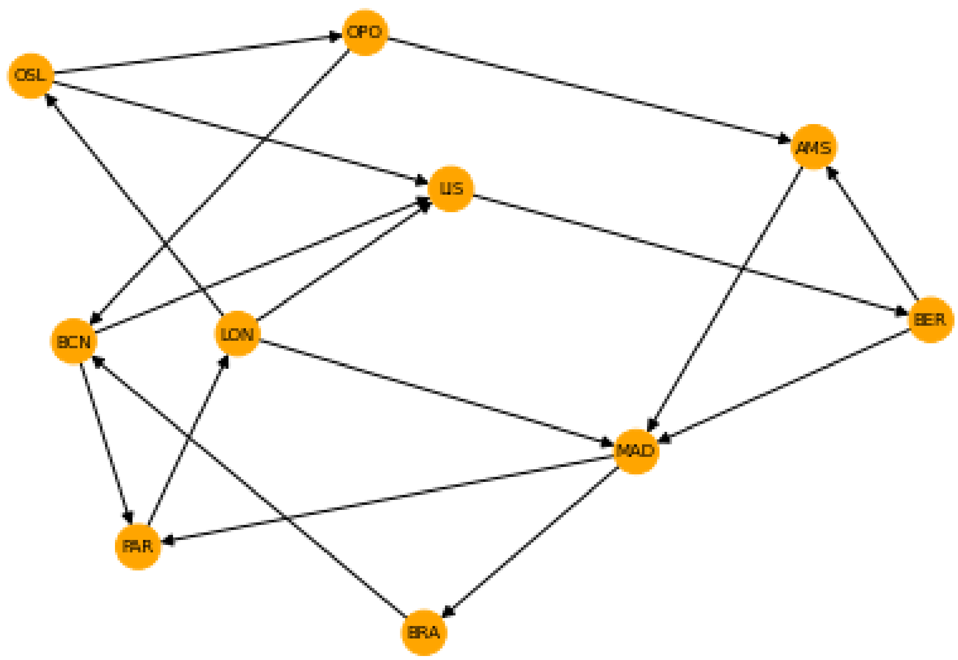
2.4.2 Exemplo 2

[8]:
```
NUM_NODES = 10
MAX_OUT_DEGREE = 3
```

Gerar digrafo - método 1

[153]:
```
G = graph_generator()
draw_graph(G)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(G) else 'O grafo não é␣
 ↪ligado.'
print(ligado)
```

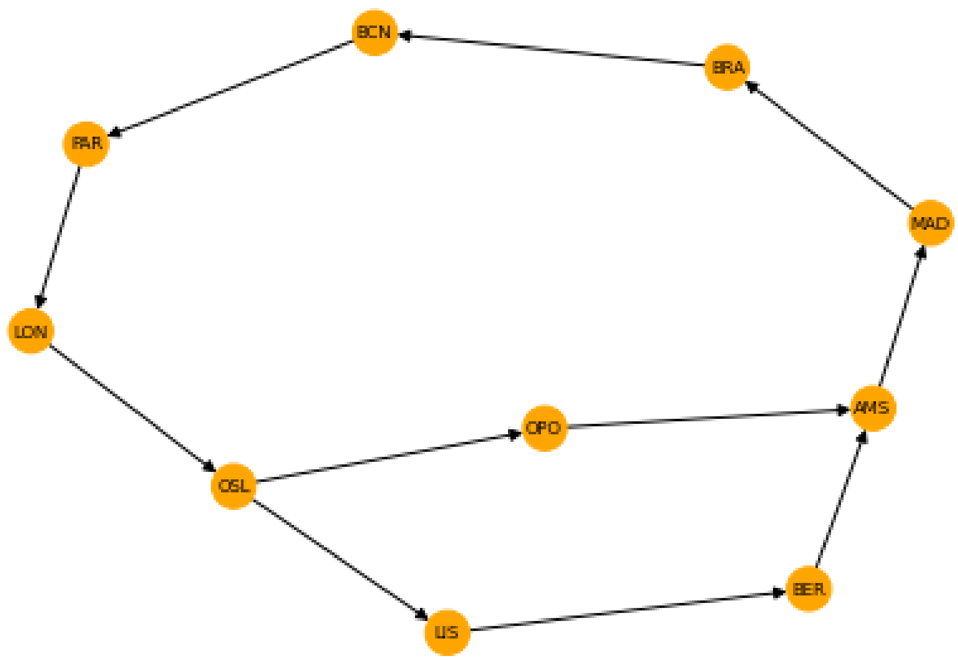
```
O grafo é ligado!
```



Gerar subgrafo minimal

[154]:
```
S = sub_graph_generator(G)
draw_graph(S)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(S) else 'O grafo não é␣
 ↪ligado.'
print(ligado)
print(f'Foram removidas {len(G.edges()) - len(S.edges())} arestas.')
```

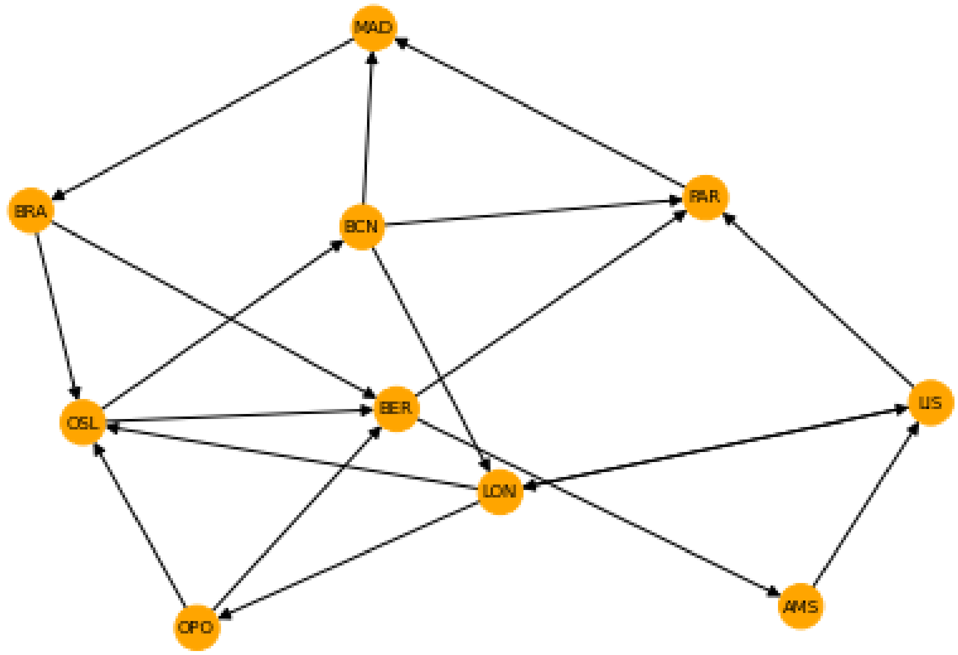
```
O grafo é ligado!
Foram removidas 6 arestas.
```



Gerar digrafo - método 2

[144]:
```
G = graph_generator_simple()
draw_graph(G)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(G) else 'O grafo não é␣
↪ligado.'
print(ligado)
```

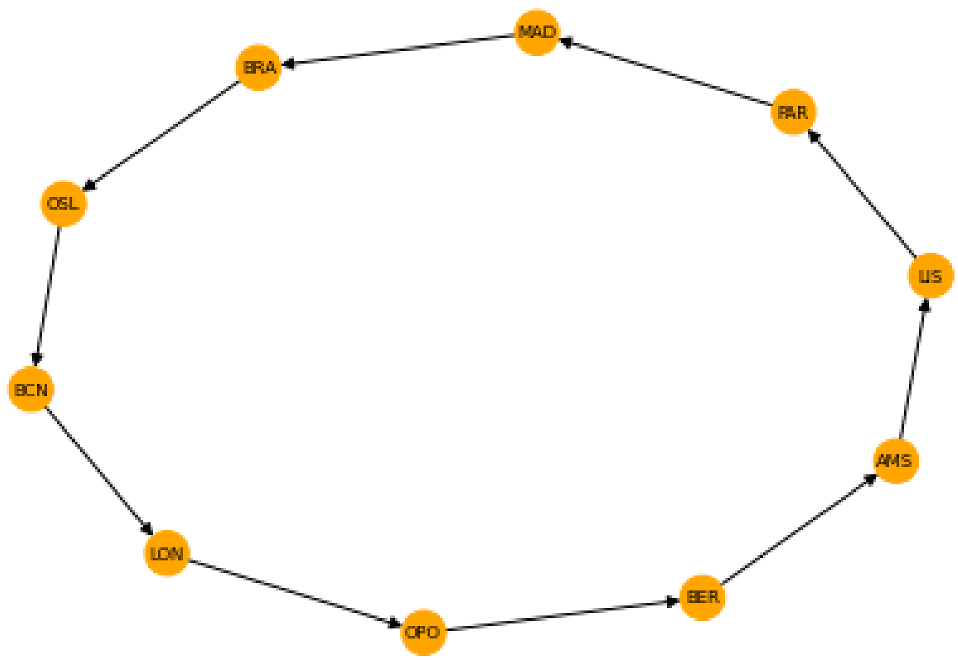
```
O grafo é ligado!
```



Gerar subgrafo minimal

[145]:
```
S = sub_graph_generator(G)
draw_graph(S)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(S) else 'O grafo não é␣
 ↪ligado.'
print(ligado)
print(f'Foram removidas {len(G.edges()) - len(S.edges())} arestas.')
```

```
O grafo é ligado!
Foram removidas 9 arestas.
```



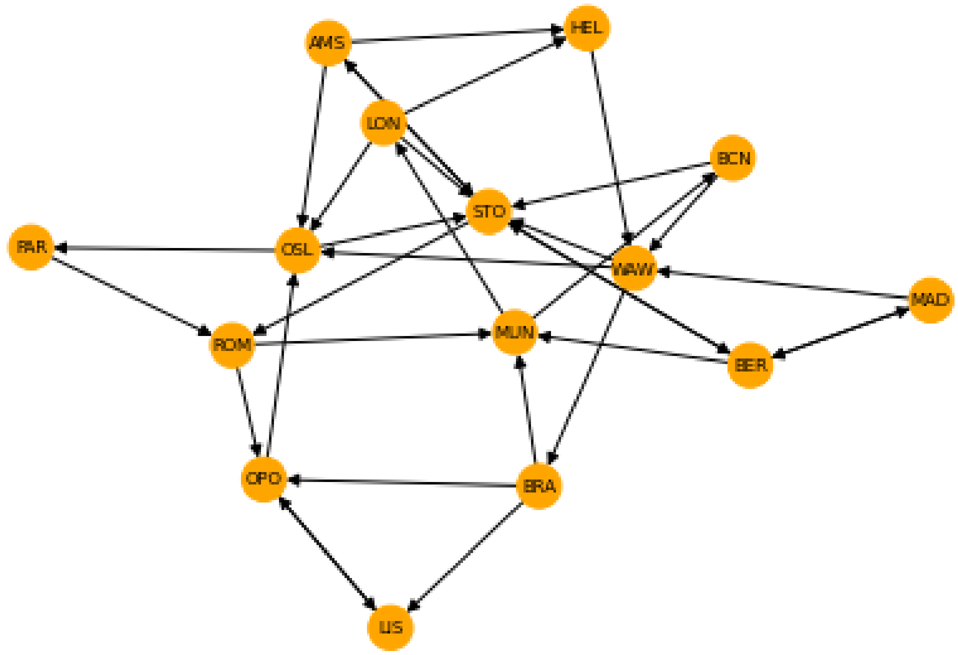
2.4.3 Exemplo 3

[9]:
```
NUM_NODES = 15
MAX_OUT_DEGREE = 3
```

Gerar digrafo - método 1

[147]:
```
G = graph_generator()
draw_graph(G)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(G) else 'O grafo não é␣
↪ligado.'
print(ligado)
```

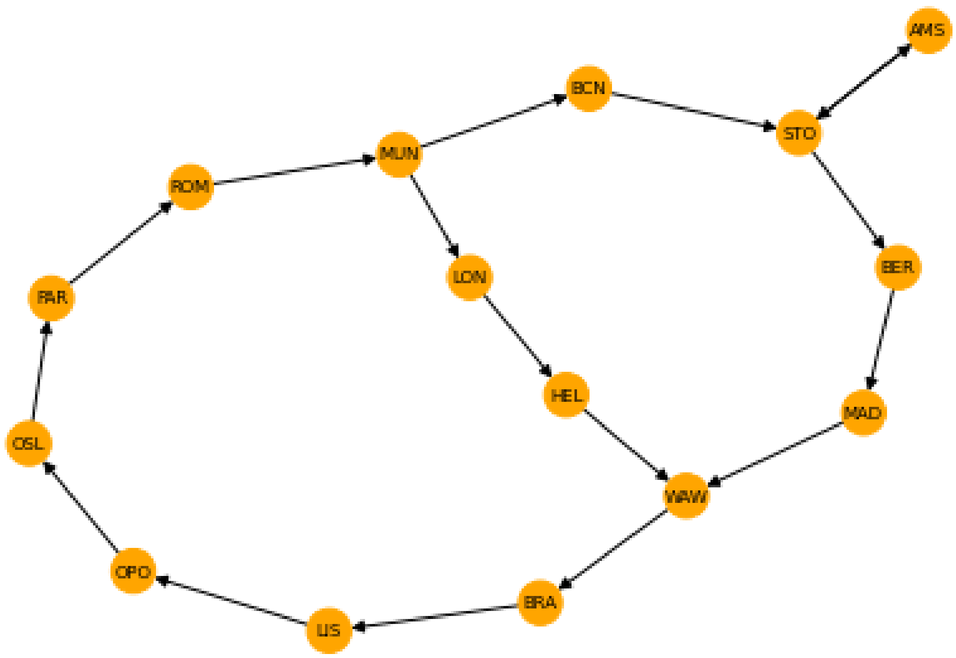
```
O grafo é ligado!
```



Gerar subgrafo minimal

[148]:
```
S = sub_graph_generator(G)
draw_graph(S)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(S) else 'O grafo não é␣
 ↪ligado.'
print(ligado)
print(f'Foram removidas {len(G.edges()) - len(S.edges())} arestas.')
```

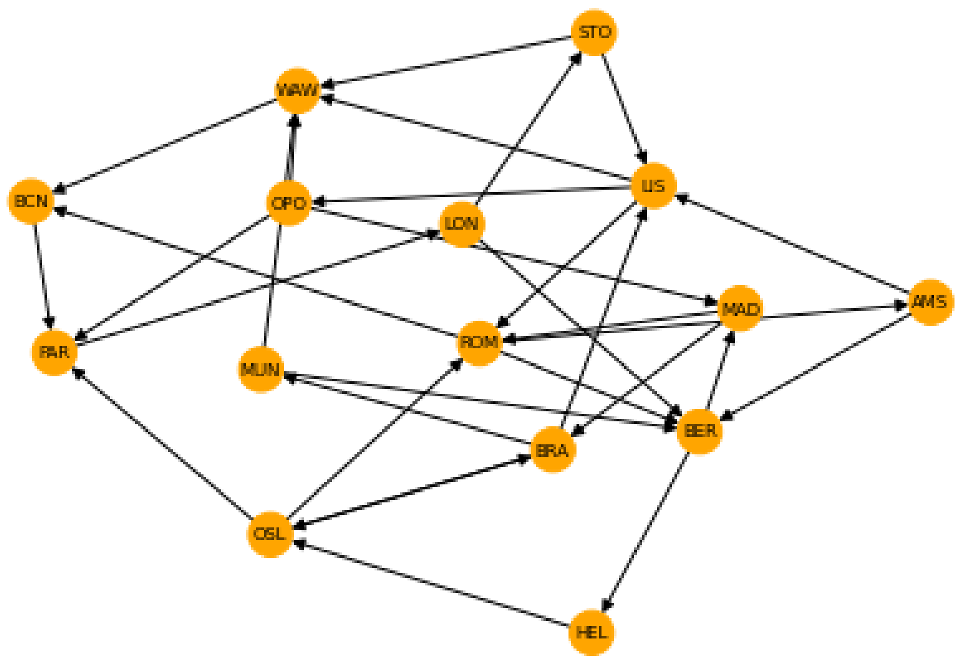
```
O grafo é ligado!
Foram removidas 16 arestas.
```



Gerar digrafo - método 2

[149]:
```
G = graph_generator_simple()
draw_graph(G)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(G) else 'O grafo não é␣
↪ligado.'
print(ligado)
```

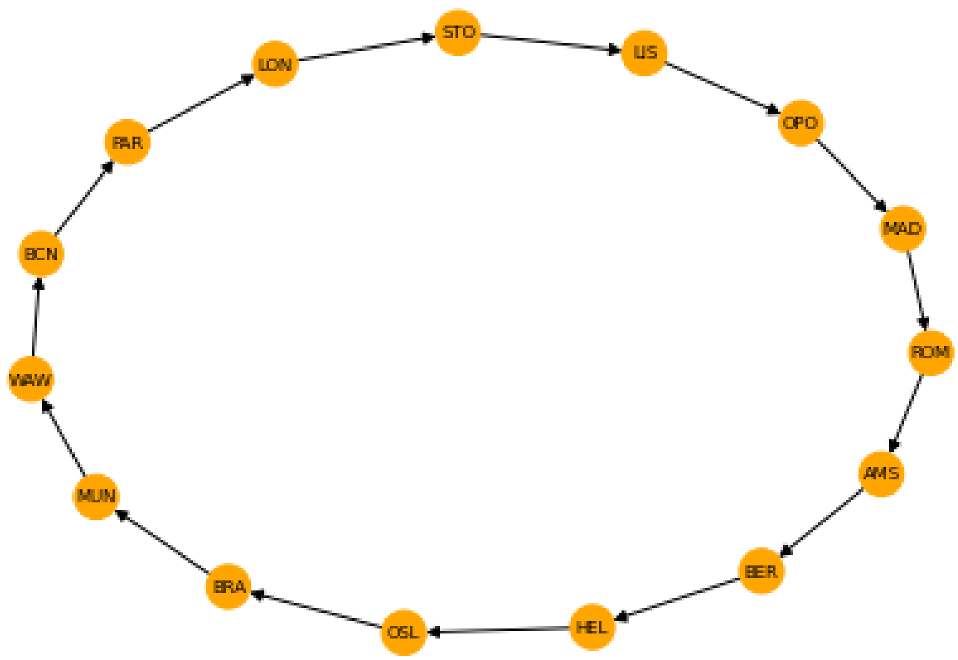
```
O grafo é ligado!
```



Gerar subgrafo minimal

[150]:
```
S = sub_graph_generator(G)
draw_graph(S)
ligado = 'O grafo é ligado!' if nx.is_strongly_connected(S) else 'O grafo não é␣
↪ligado.'
print(ligado)
print(f'Foram removidas {len(G.edges()) - len(S.edges())} arestas.')
```

```
O grafo é ligado!
Foram removidas 16 arestas.
```


STO
LIS
OPO
MAD
ROM
AMS
BER
HEL
OSL
BRA
MUN
WAW
BCN
PAR
LON