

PRIMENA PROJEKTIVNE GEOMETRIJE U RACUNARSTVU

Podsetnik za usmeni

(bez dokaza)

profesor: Srdjan Vukmirovic

2018/2019

Zorana Gajic, mi16400

1. deo

1.1 Homogene koordinate u afinoj ravni

Homogene koordinate take $M(x, y)$ afine ravni \mathbb{R}^2 su ona koja trojka $(x_1 : x_2 : x_3)$ takva da vazi:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Vektor $\vec{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ je **vektor predstavnik** tacke M .

Prava $p : ax + by + c = 0$ u homogenim koordinatama postaje $p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

Trojka $[x_1 : x_2 : x_3]$ predstavlja **homogene koordinate prave** p .

Prava $p_\infty : x_3 = 0$ naziva se **beskonacno daleka prava**, a svaka tacka $B_\infty(x_1 : x_2 : 0)$, koja joj pripada, **beskonacno daleka tacka**.

Afina ravan dopunjena tackama beskonacno daleke tacke prave $x_3 = 0$ naziva se **dopunjena ili prosirena afina ravan** i oznacava se sa $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Paralelne prave afine ravni se seku u beskonacno dalekoj tacki dopunjene afine ravni.

Svaka prava dopunjene afine ravni ima jedinstvenu beskonacno daleku tacku i to je njen presek sa pravom $x_3 = 0$.

1.2 Realna projektivna ravan

Realna projektivna ravan je skup tacaka $\mathbb{R}P^2 := \{(x_1 : x_2 : x_3)\}$, pri cemu ne mogu sve tri homogene koordinate biti jednake nuli.

Mozemo identifikovati $\mathbb{R}P^2$ sa prosirenom afinom ravni $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Geometrijski mozemo videti realnu projektivnu ravan kao skup pravih koje sadrze koordinatni pocetak u \mathbb{R}^3 . Svaka takva prava predstavlja jednu tacku projektivne ravni. Vektor pravca te prave je vektor predstavnik homogenih koordinata.

Sve prave realne projektivne ravni takodje cine projektivnu ravan $\{[x_1 : x_2 : x_3]\}$ koja se zove **dualna projektivna ravan pravih**.

Geometrijski mozemo videti kao skup svih ravni u prostoru \mathbb{R}^3 kroz koordinatni pocetak.

Homogene koordinate prave $p = AB$ se dobija vektorskim proizvodom $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$.

U projektivnoj ravni se svake dve prave seku!

Homogene koordinate presečne tacke $P = a \cap b$ se dobijaju vektorskim proizvodom $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$.

1.3 Princip dualnosti u projektivnoj ravni

Neka je iskaz I iskaz geometrije projektivne ravni. Njemu **dualan iskaz** I' je iskaz koji se dobija zamenom reci tacka i prava, pripada i sadrzi, kolinearno i konkurentno.

1.4 Realna projektivna prava

Posto je prava p u prostoru predstavljena sa ravni, tacke $A, B, C \in p$ su predstavljene pravama koje pripadaju toj ravni.

Tacka C pripada pravoj $p = AB$ ako i samo ako za njihove vektore predstavnike vazi $\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji nisu istovremeno nula.

Primetimo da $\lambda \vec{C} = \lambda \alpha \vec{A} + \lambda \beta \vec{B}$, $\lambda \neq 0$ predstavlja istu tacku.

Zato su $(\alpha : \beta)$ **homogene koordinate na pravoj** p .

Svaka prava realne projektivne ravni je tzv. **realna projektivna prava** $\mathbb{R}P^1$ koju dobijamo dodavanjem beskonacno daleke tacke P_∞ afinoj pravoj \mathbb{R} .

Model projektivne prave je KRUG.

Dakle, raspored tacaka na projektivnoj pravoj je kao na krugu, pa ne postoji relacija «izmedju», vec **relacija razdvojenosti parova tacaka**.

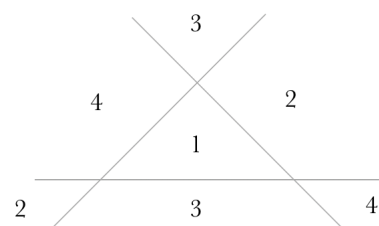
Kazemo da par tacaka A, B razdvaja par tacaka C, D u oznaci $(A, B \div C, D)$.

Dve tacke A, B razbijaju pravu $p = AB$ na dve **projektivne duzi** - onu koja sadrzi tacku C i onu koja sadrzi tacku D .

1.5 Trotemenik i cetvorotemenik

Trotemenik ABC je figura projektivne ravni koja se sastoji od 3 nekolinearne tacke A, B, C i tri prave AB, BC, CA njima odredjene.

Tri prave koje nisu konkurentne razbijaju projektivnu ravan na 4 oblasti.



Za n tacaka u ravni od kojih nikoje tri nisu kolinearne kazemo da su **u opstem poloazaju**.

Cetvorotemenik $ABCD$ je figura projektivne ravni koja se sastoji od 4 tacke u opstem poloazaju i sest pravih odredjenih tim tackama.

1.6 Dvorazmera

Neka su tacke A, B, C, D kolinearne i vazi $\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$,
 $\vec{D} = \gamma \vec{A} + \delta \vec{B}$.

Dvorazmera tacaka A, B, C, D je broj $(A, B, C, D) := \frac{\beta}{\alpha} \div \frac{\delta}{\gamma}$.

Definicija ne zavisi od izbora vektora predstavnika.

Osobine:

1. $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1}$
2. $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$
3. $(A, B, C, D) \neq 0, 1$
4. Ako su date tacke A, B, C i broj $\mu \neq 0, 1$ tada postoji jedinstvena tacka D takva da vazi $(A, B, C, D) = \mu$.

Parovi tacaka A, B i C, D su **harmonijski konjugovani** ako je $(A, B, C, D) = -1$.

Teorema: Ako su a, b, c, d konkurentne prave i $A \in a, B \in b, C \in c, D \in d$ kolinearne tacke. Tada vazi $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$.

Posledica: dvorazmera je invarijanta centralnog projektovanja.

Afino posmatrano, dvorazmera je odnos dve razmere: $(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$

Srediste duzi je konjugovano sa beskonacno dalekom tackom.

Neka je S - srediste duzi AB i P_∞ beskonacno daleka tacka prave AB .

$$\implies (A, B, S, P_\infty) = -1.$$

Razdvojenost parova tacaka mozemo uvesti preko dvorazmere.

$$(A, B \div C, D) \iff (A, B, C, D) < 0.$$

1.7 Projektivna preslikavanja ravni $\mathbb{R}P^2$

Projektivno preslikavanje je ono koje preslikava tacku $M(x_1 : x_2 : x_3)$ u tacku

$M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ formulama

$$\lambda \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \det(p_{ij}) \neq 0. \quad (1)$$

Broj $\lambda \neq 0$ sugerise da su u pitanju homogene koordinate.

Projektivno preslikavanje je indukovano linearnim preslikavanjem vektorskog prostora \mathbb{R}^3 .

Krace $\lambda X' = PX$.

Inverzno preslikavanje $\lambda X = P^{-1}X'$.

Matrice $P, \lambda P$ predstavljaju isto preslikavanje.

Kompoziciji preslikavanja odgovara mnozenje matrica, a inverznom preslikavanju inverzna matrica.

Projektivna preslikavanja cine **projektivnu grupu** $PGI_3(\mathbb{R})$, opisana sa 8 parametara.

Projektivna preslikavanja **cuvaju** kolinearnost i konkuretnost, dvorazmeru.

Projektivna preslikavanja **ne cuvaju** ni razmeru ni paralelnost.

1.8 Osnovna teorema Projektivne geometrije

Teorema: Postoji jedinstveno preslikavanje ravni $\mathbb{R}P^2$ koje cetiri tacke A, B, C, D u opstem poloza ju slika redom u tacke A', B', C', D' , u opstem poloza ju.

Projektivno preslikavanje ravni sa 4 fiksne tacke u opstem poloza ju je **identitet**.

Pravougaonik i trapez su projektivno ekvivalentni u $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Dijagonalne tacke cetvorotemenika su medjusobno projektivno ekvivalentne.

Teorema: Pri projektivnom preslikavanju f zadatom sa (1) prava

$u : p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 = 0$, odredjena zadnjom vrstom matrice P se slika u beskonacno daleku pravu p_∞ .

1.9 Afina preslikavanja

Afina preslikavanje tacku $M(x, y)$ preslikava u tacku $M'(x', y')$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \det(a_{ij}) \neq 0 \quad (2)$$

Kolone matrice $A = (a_{ij})$ su koordinate slika baznih vektora, a $O'(b_1, b_2)$ slika koordinatnog pocetka.

Afina preslikavanja su **bijekcije**.

Afina preslikavanja **cuvaju** kolinearnost, konkuretnost, razmeru i paralelnost.

Mogu preslikati trougao u proizvoljan trougao.

Afino preslikavanje nakon prelaska **u homogene koordinate**

$$\lambda \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je afino preslikavanje je specijalan slucaj projektivnog preslikavanja prosirene afine ravni $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Vidimo da je projektivno preslikavanje afino ako preslikava beskonacno daleku tacku u sebe i obrnuto.

Posledica: Grupa afinih preslikavanja je izomorfna podgrupi projektivnih preslikavanja ravni $\overline{\mathbb{R}^2}$ koje cuvaju beskonacnu daleku pravu p_∞ .

1.10 Algoritmi za odredjivanje projektivnog preslikavanja

Naivni algoritam

Ulaz: Homogene koordinate 4 originalne tacke A, B, C, D i njihove slike A', B', C', D' (obe cetvorke u opstem polozaaju)

Izlaz: 3x3 matrica P projektivnog preslikavanja ravni koja slika A, B, C, D redom u A', B', C', D'

Algoritam:

1. Odredi $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ tako da $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$.
 P_1 je matrica sa kolonama $\alpha A, \beta B, \gamma C$
2. Odredi $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$ tako da $D' = \alpha' A' + \beta' B' + \gamma' C'$.
 P_2 je matrica sa kolonama $\alpha' A', \beta' B', \gamma' C'$
3. $P = P_2 P_1^{-1}$ je trazena matrica preslikavanja

Prednosti: Geometrijski jasan I jednostavan za implementaciju.

Mane: Radi samo za 4 para odgovarajucih tacaka.

DLT algoritam

Ulaz: Homogene koordinate n , $n \geq 4$, originalnih tacaka M_i i n njihovih slika M'_i

Izlaz: 3x3 matrica P projektivnog preslikavanja, takvog da je $\lambda M'_i = PM_i, i = 1..n$

Algoritam:

1. Za svaku korespondenciju $M_i \longleftrightarrow M'_i$ odrediti 2x9 matricu
2. Spojiti te matrice u jednu matricu A formata $2n \times 9$
3. Odrediti SVD dekompoziciju matrice A , $A = UDV^T$.

P je poslednja kolona matrice V

(D ima opadajuće dijagonalne vrednosti.)

2x9 matrica za $M(x_1 : x_2 : x_3)$ i $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ kada je $x_3 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -x'_3x_1 & -x'_3x_2 & -x'_3x_3 & x'_2x_1 & x'_2x_2 & x'_2x_3 \\ x'_3x_1 & x'_3x_2 & x'_3x_3 & 0 & 0 & 0 & -x'_1x_1 & -x'_1x_2 & -x'_1x_3 \end{bmatrix}$$

Mana: DLT je algebarske, a ne geometrijske prirode. DLT nije invarijantan u odnosu na promenu koordinata.

Normalizovani DLT algoritam

Ulaz: Homogene koordinate n , $n \geq 4$, originalnih tacaka M_i i n njihovih slika M'_i

Izlaz: 3x3 matrica P projektivnog preslikavanja, takvog da je $\lambda M'_i = PM_i, i = 1..n$

Algoritam:

1. Normalizovati originalne tacke $\bar{M}_i = TM_i$
2. Normalizovati slike tacaka $\bar{M}'_i = T'M'_i$
3. Odrediti DLT algoritmom matricu transformacije \bar{P} iz korespondencija $\bar{M}_i \longleftrightarrow \bar{M}'_i$
4. Trazena matrica je $P = T'^{-1}\bar{P}T$

Algoritam normalizacije tacaka

Algoritam:

1. Izracunaj teziste sistema tacaka
2. Translirati teziste u koordinatni pocetak (matrica G)
3. Skalirati tacke tako da prosečna udaljenost tacke od koordinatnog pocetka bude $\sqrt{2}$ (matrica homotetije S)
4. Matrica normalizacije $T = SG$

2. deo

2.1 Izometrije

Izometrije su preslikavanja koja **cuvaju** duzine, uglove, površine, razmeru, paralelnost...

Izometrije su afino preslikavanja.

Izometrije koje cuvaju orijentaciju nazivaju se **kretanja ili direktne izometrije**.

Teorema: Svaka izometrija (ravni, prostora) je afino preslikavanje čiji je linearni deo predstavljen ortogonalnom matricom A , $A^T A = E$.

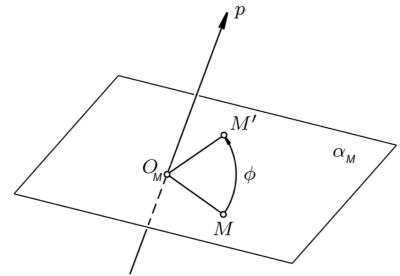
Dakle, sve izometrije ravni su kompozicija translacije i rotacije ili kompozicija translacije i osne refleksije.

2.2 Rotacije oko prave u prostoru

Primer kretanja je rotacija $\mathfrak{R}_p(\phi)$ oko orijentisane prave p za ugao $\phi \in [0, \pi]$.

Ne moramo ograničavati ϕ jer važi

$\mathfrak{R}_p(\phi) = \mathfrak{R}_{-p}(2\pi - \phi)$ I tada se radi o **refleksiji u odnosu na pravu p**



Matrice rotacija oko koordinatnih osa fiksirane ortonormirane baze e zovemo **svetske rotacije**.

Matrice tih rotacija:

$$[\mathfrak{R}_x(\phi)]_e = R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$[\mathfrak{R}_y(\theta)]_e = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[\mathfrak{R}_z(\psi)]_e = R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Formula Rodrigeza

Matrice rotacije $\mathfrak{R}_p(\phi)$, za ugao ϕ oko orijentisane prave p koja sadrzi koordinatni pocetak je

$$\mathfrak{R}_p(\phi) = pp^T + \cos \phi (E - pp^T) + \sin \phi p_x,$$

gde je p_x matrica vektorskog mnozenja jedinичnim vektorom prave $p = (p_1, p_2, p_3)$:

$$p_x := \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Ojlerovi uglovi i teoreme

I Ojlerova teorema: Svako kretanje f prostora koje ima fiksnu tacku O je rotacija oko neke orijentisane prave p koja sadrzi O , za ugao $\phi \in [0, \pi]$.

Sopstvene rotacije su rotacije u odnosu na ose pokretnog koordinatnog sistema koji je vezan za telo. Uglovi za koje rotiramo se zovu **Ojlerovi uglovi:** $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Teorema: Ako je kretanje f predstavljeno **sopstvenim** rotacijama za Ojlerove uglove $f = \mathfrak{R}_{x_2}(\phi) \circ \mathfrak{R}_{y_1}(\theta) \circ \mathfrak{R}_z(\psi)$ tada njegoa matrica $A = [f]_e = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$.

Ako je svetskim ne menjamo redosled.

II Ojlerova teorema: Svako kretanje f prostora koje ima fiksnu tacku O moze se predstaviti kao kompozicija tri sopstvene rotacije.

2.5 Razno

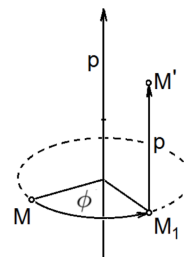
Telo u neki položaj mozemo dovesti na 3 nacina:

1. Jednom rotacijom $\mathfrak{R}_p(\phi)$ oko pogodno odabrane prave
2. Trima sopstvenim rotacijama za Ojlerove uglove
3. Trima svetskim rotacijama za Ojlerove uglove

Zavojno kretanje je kompozicija translacije i rotacije, korisceno u robotici.

$$\mathfrak{Z}_{\lambda \overline{p}}(\phi) := \mathfrak{R}_{\overline{p}}(\phi) \circ \mathfrak{T}_{\lambda \overline{p}} = \mathfrak{T}_{\lambda \overline{p}} \circ \mathfrak{R}_{\overline{p}}(\phi).$$

Teorema: Svako kretanje prostora je zavojno kretanje (ne zahtevamo da neka tacka bude fiksna)



2.6 Kvaternioni

Kvaternioni su brojevi oblika: $\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, gde su i, j, k imaginarne jedinice.

Vazi $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

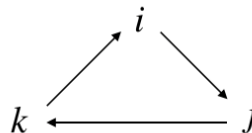
Realni i kompleksni brojevi su takodje kvaternioni, tj $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Množenje je definisano relacijama:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i * j = k, j * k = i, k * i = j$$

$$i * k = -j, k * j = -i, j * i = -k$$



Množenje kvaterniona **jeste asocijativno**, ali **nije komutativno**.

Realni i imaginarni deo kvaterniona q su redom:

$$Re(q) := w, Im(q) := xi + yj + zk = \vec{v}$$

$$q = xi + yj + zk + w = [(x, y, z), w] = [\vec{v}, w]$$

Konjugovani kvaternion kvaterniona $q = [\vec{v}, w]$ je: $\bar{q} = [-\vec{v}, w]$

Norma kvaterniona $|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$

Inverzni kvaternion $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$

Bitne osobine:

1. $\overline{\overline{q}} = q$
 $\overline{q + q_1} = \bar{q} + \bar{q}_1$
 $\overline{\bar{q}} = q$
2. $Re(q) = \frac{q + \bar{q}}{2}$ $Im(q) = \frac{q - \bar{q}}{2}$
3. $|qq_1| = |q| |q_1|$
4. $(qq_1)^{-1} = q_1^{-1} q^{-1}$

Konjugacija kvaternionom $q \neq 0$ je preslikavanje $C_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$C_q(p) := qpq^{-1}$$

Lema:

1. $C_q \equiv C_h, q, h \neq 0$ ako i samo ako vazi $h = \lambda q, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $C_{q_2} \circ C_{q_1} = C_{q_2 q_1}$
3. C_q je kretanje prostora $Im \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$
4. Ako vazi $q = [\vec{v} \sin \alpha, \cos \alpha]$ i $|\vec{v}| = 1$, preslikavanje C_q je rotacija za ugao 2α oko vektora \vec{v} u pozitivnom smeru.

2.7 Interpolacije izmedju položaja objekta

Cesto se javlja potreba da objekat iz jednog položaja dovedemo u drugi.

Ako je centar bio u poziciji $C_1(x_1, y_1, z_1)$, a treba ga dovesti u $C_2(x_2, y_2, z_2)$ najprirodnija je

linearna interpolacija:

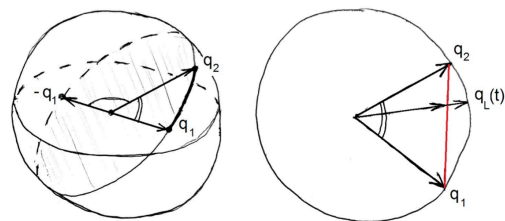
$$C(t) = (1 - \frac{t}{t_u})C_1 + \frac{t}{t_u}C_2, t \in [0, t_u]$$

Radi se o pravolinijskom kretanju konstantnom brzinom.

Promena «orijentacije» objekta resavamo kvaternionima.

Neka su «orijentacije» objekta zadate kvaternionima $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$ koji pripadaju jedinичnoj trodimenzionalnoj sferi.

Lerp interpolacija je kada se uzme kvaternion na duži q_1q_2 , a zatim se normira i time vrati na jedinčnu sferu.



Slika: Interpolacija izmedju dva kvaterniona

$$\bar{q}(t) = (1 - \frac{t}{t_m})q_1 + \frac{t}{t_m}q_2,$$

$$q_L(t) = \frac{\bar{q}(t)}{|\bar{q}(t)|} = \text{normalize}(\bar{q}(t)), t \in [0, t_m]$$

Slerp interpolacija je parametrizacija kruznog luka q_1q_2 , gde je parametar odgovarajući centralni ugao. Objekat čije je kretanje parametrizovano Slerp interpolacijom ima konstantnu ugaonu brzinu i minimalno uvrtnje.

Interpolacija osom i uglom.

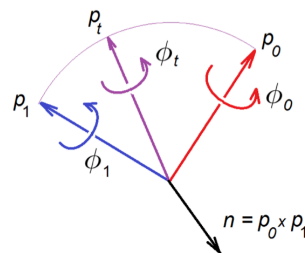
Date su dve orijentacije $R_{p_0}(\phi_0)$ i $R_{p_1}(\phi_1)$.

Interpolacija orijentacije je zadata sa $R_{p_t}(\phi_t)$,

gde je

$$p_t = R_n(t\theta)(p_0), \quad n = p_0 \times p_1 \quad \text{ i } \quad \theta = \angle(p_0, p_1)$$

$$\phi_t = (1 - t)\phi_0 + t\phi_1, t \in [0, 1]$$



2.8 Poredjenje razlicitih predstavljanja «orijentacija»

1. **Matrice** - «sustinski nacin», jednostavna kompozicija, 4x4 matrice, losa interpolacija.
2. **Ojlerovi uglovi** - najociglednije predstavljanje, «gimbal lock» problem, losa interpolacija, teska kompozicija.
3. **Osa i ugao** - nema «gimbal lock» problema, dobra interpolacija, losa kompozicija.
4. **Kvaternioni** - nema «gimbal lock» problema, dobra interpolacija, laka kompozicija, teski za razumevanje i implementaciju

2.9 Senzori u mobilnim uredjajima

Senzore mozemo grubo podeliti u sledece grupe:

1. Kamere (kolor, crno-bele, 3D...)
2. Senzori pokreta (akcelerometar, zirooskop, pedometar)
3. Senzori pozicije (magnetometar, GPS, barometar)
4. Senzori svetla i zvuka (mikrofon, senzor blizine, senzor ambijentnog svetla)
5. Ostalo: senzor temperature, vlaznosti, otiska prsta, pulsmetar...

2.9.1 Senzori pokreta

Rade se MEMS(MicroElectroMechanicalSystem) tehnologijom i sadrze mikroskopske pokretne delove.

Akcelerometar - meri linearno ubrzanje po principu: ubrzanje je proporcijalno sili, a sila je proporcionalna istezanju opruge. Rezultat je 3-vektor linearnog ubrzanja. Gravitacija ide u pravcu negativne y-ose.

Zirooskop - meri ugaono ubrzanje, na osnovu Koriolisove sile, takodje u tri pravca, tako da je rezultat orijentacija uredjaja, tj kvaternion.

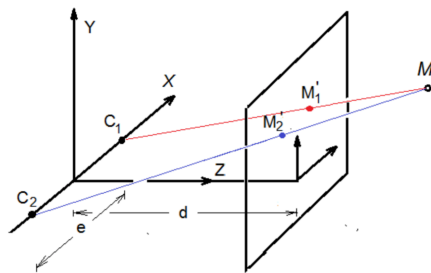
Magnetometar - tzv. elektronski kompas, koristan je za odredjivanje pravca severa, a moze se koristiti i za detekciju metalnih predmeta. Radi po principu Halovog efekta, a kao rezultat daje 3-vektor magnetnog polja.

3. deo

3.1 Stereoskopsko gledanje

Anaglif 3D - najjednostavniji način za 3D gledanje.

Lentikularna 3D tehnologija - možemo gledati 3D ekrane bez 3D naočara, koriste tzv. lentikularna sociva.



Slika: Projekcija iz levog i desnog oka (kamere)

Rastojanje između tačaka M'_1 i M'_2 naziva se **paralaksa**.

Paralaksa je u ovom slučaju paralelna X osi i jednaka:

$$M'_1M'_2 = e \left(1 - \frac{d}{Z}\right)$$

Paralaksa je rastojanje dveju centralnih projekcija jedne te iste tačke.

Ako je $d > Z$ imamo ukršten pogled,

$d < Z$ imamo paralelan pogled,

$d = Z$ tačka je u projekcijskoj ravni.

Paralaksa je proporcionalna rastojanju e između kamera.

3.2 Geometrija (jedne) kamere

Matrica projektovanja T je 3×4 .

Normalna projekcija kamere C na ravan naziva se **glavna tačka**.

3×4 matrica $T = KA[I_3 | -C]$ koja je ranga 3 se zove **matrica kamere**.

3×3 matrica K se zove **matrica kalibracije**, a njen najopstiji oblik je

$$K = \begin{bmatrix} d_x & s & x_0 \\ 0 & d_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, s \text{ je parametar smicanja.}$$

Svaka 3×4 matrica

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \end{bmatrix} \text{ ranga 3 predstavlja matricu centralne projekcije prostora}$$

na neku ravan iz centra C .

Afina ravan $t_{31}X + t_{32}Y + t_{33}Z + t_{34} = 0$ određena poslednjom vrstom matrice T je **ravan**

iscezavanja, tj. ravan koja sadrži C i paralelna je toj ravni.

QR dekompozicija je zapravo Gram-Smitov postupak ortogonalizacije.

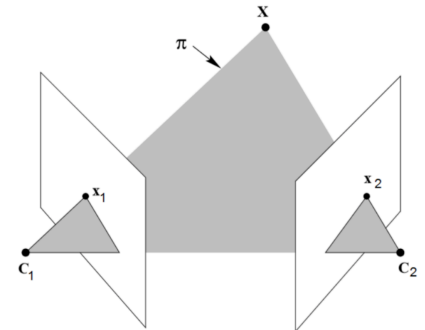
QR dekompozicija je razlaganje matrice $A = QR$, gde je

Q - ortogonalna, R - gornje trougaona.

3.3 Geometrija dve kamere

Tacke x_1, x_2, X i tacke C_1, C_2 kamera pripadaju ravni π koja se naziva **epipolarna ravan tacke X**.

Epipolovi e_1 i e_2 su tacke u kojima linija kamera C_1C_2 sece ravni projektovanja.



Fundamentalna matrica kamera T_1 i T_2 (tim redom) je **3x3**.

$$F = E_2 H_\pi$$

Osobine fundamentalne matrice:

1. $\text{rang} F = 2$, $\det F = 0$.
2. Ima 7 stepeni slobode, pa je odredjena sa **7 ili vise** odgovarajucih tacaka.
3. Ako je F fundamentalna matrica za T_1 i T_2 , tada je F^T fundamentalna matrica za T_2 i T_1 .
4. Epipol e_1 je resenje $F e_1 = 0$.
5. Epipol e_2 je resenje $F^T e_2 = 0$.
6. Iz F dobijamo kanonske kamere: $T_1 = [E | 0]$, $T_2 = [M | e_2]$

3.4 3D rekonstrukcija iz dve projekcije

Triangulacija

Ako znamo matrice kamera T_1 i T_2 i odgovarajuce projekcije x_1, x_2 treba odrediti tacku X prostora tako da vazi:

$$x_1 = T_1 X, \quad x_2 = T_2 X$$

Problem triangulacije: zbog suma ne moze da odrediti tacno resenje, vec se pribegava raznim minimizacijama greske.

Projektivna rekonstrukcija - ocuvane kolinearnost, konkurentnost, dvorazmera.

Afina rekonstrukcija - ocuvane kolinearnost, paralelnost, razmera.

Metricka rekonstrukcija - nakon ovakve rekonstrukcije geometrija objekta nam je u potpunosti poznata (uglovi, duzine...).

Metricka rekonstrukcija je moguca ako znamo: 3 para normalnih linija, prostorne koordinate 5 tacaka, matrice K_1, K_2 kalibracija kamera.