Lekcja 2

Modelowanie zależności

2.1 Zależności liniowe

Budowa modelu rzeczowego wymaga identyfikacji i modelowania wielu złożonych zależności. Istotne jest przy tym znalezienie przybliżonego modelu zależności na tyle prostego, żeby analiza wynikowego modelu mogła być przeprowadzona i wykorzystana w odpowiednim czasie, a jednocześnie na tyle wiernego, żeby rzeczywiste wyniki decyzji podjętych na podstawie analizy modelu były zgodne z modelowymi. Dla olbrzymiej liczby zależności wystarczająco dobrym przybliżeniem są funkcje lub relacje (nierówności) liniowe. Funkcja liniowa wektora zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma postać $f(\mathbf{x}) = \sum_j w_j x_j + v$, gdzie w_j i v są danymi współczynnikami. Odpowiednie zadania programowania matematycznego formułowane w oparciu o zależności liniowe są nazywane zadaniami programowania liniowego. W zadaniu programowania liniowego zbiór dopuszczalny Q jest zbiorem rozwiązań układu m ograniczeń liniowych

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \Diamond \quad b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

gdzie $\Diamond$ oznacza jedną z relacji $\leq$, $=$ lub $\geq$, a funkcja celu ma postać: $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Współczynniki c_j, a_{ij} oraz b_i stanowią dane zadania. Modele i zadania programowania liniowego są często zapisywane w postaci macierzowej, np. $\max \{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ lub $\max \{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, gdzie $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ (wiersz), $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ (kolumna), $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$ (macierz $m \times n$).

Współczesne solwery komercyjne (por. zestawienia OR/MS Today LP survey[1] i ANL Software Guide[2]), jak np. CPLEX[3], XPRESS[4], LINDO[5] pozwalają efektywnie rozwiązywać zadania programowania liniowego nawet o rozmiarach przekraczających kilkadziesiąt tysięcy zmiennych i ograniczeń. Olbrzymie możliwości obliczeniowe oferuje również wiele solwerów publicznie dostępnych, jak np. GLPK[6]. Dlatego modele liniowe mają olbrzymie znaczenie w procesach wspomagania decyzji. Jednocześnie w wielu systuacjach złożone zależności mogą być lokalnie

[1] http://www.lionhrtpub.com/orms/surveys/LP/LP-survey.html
[2] http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/
[3] http://www.ilog.com/
[4] http://www.dashoptimization.com/
[5] http://www.lindo.com/
[6] http://www.gnu.org/software/glpk/

dobrze przybliżane zależnościami liniowymi. Typowym przykładem jest tu ogólne zagadnienie planowania produkcji. Przy odpowiednio ogólnej analizie systemu istotne są tylko jego wejścia (input) i wyjścia (output). W tak ogólnym modelu proces produkcji może być traktowany jako przekształcenie pewnego zestawu surowców w zestaw produktów. To znaczy, wyróżniona jest m-wymiarowa przestrzeń liniowa surowców, gdzie poszczególne współrzędne reprezentują ilości odpowiednich surowców wyrażone w jednostkach ustalonych dla danego surowca (np. w przypadku modelu piekarni są to tony mąki, hektolitry wody, kwh energii elektrycznej, kg drożdży, itd). Analogicznie, określona jest n-wymiarowa przestrzeń liniowa produktów, gdzie poszczególne współrzędne reprezentują ilości odpowiednich produktów wyrażone w jednostkach ustalonych dla danego produktu. Proces produkcji przekształca elementy (wektory) z przestrzeni surowców na elementy przestrzeni produktów

Ilości surowców	Produkcja	Ilości produktów
y_1		x_1
y_2		x_2
.	$\Rightarrow$	.
y_m		x_n

Dobrze określonym przekształceniem matematycznym (funkcją) jest jednak przyporządkowanie odwrotne $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, czyli określenie wektora surowców potrzebnego do realizacji danego wektora produktów. Z tych samych surowców można bowiem wykonać różne produkty, natomiast konkretne produkty (z ustaloną technologią/recepturą) wymagają jednoznacznie określonych surowców. Przy rozpatrywaniu odpowiednio wąskiego przedziału możliwości przyporządkowanie surowców produktom $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ jest dodatnio jednorodne: $F(\alpha\mathbf{x}) = \alpha F(\mathbf{x})$, np. na zwiększenie produkcji o 10% trzeba o 10% więcej surowców. W takim samym sensie jest ono również addytywne: $F(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') = F(\mathbf{x}') + F(\mathbf{x}'')$, na sumę dwóch zestawów produkcji potrzeba sumy odpowiednich zestawów surowców. Oznacza to, że F jest przekształceniem liniowym i może być zapisane w postaci $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą przekształcenia (obrazy wektorów bazy standardowej), co w tym modelu oznacza macierz technologiczną czyli receptury (ilości surowców) dla poszczególnych produktów. Poszczególne współrzedne przekształcenia przyjmują postać $y_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$. Ogólny model rzeczowy określony zależnością liniową $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ może stanowić podstawę różnych specyficznych modeli lub zadań optymalizacji. W szczególności mając określone parametry: $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ (wiersz) – zyski jednostkowe z poszczególnych produktów, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ (kolumna) – zasoby poszczególnych surowców, można formułować zadanie programowania liniowego:

$$\max\{\mathbf{cx} \;:\; \mathbf{y} = \mathbf{Ax},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \leq \mathbf{b}\} = \max\{\mathbf{cx} \;:\; \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

wyrażające poszukiwanie najlepszego asortymentu produkcji dla maksymalizacji zysku przy ograniczonych wielkościach zasobów surowców.

W modelu planowania asortymentu produkcji zależności liniowe reprezentują kombinacje ważone jak na przykład zysk (całkowity) z produkcji: $z = \sum_j c_j x_j$ wyrażony jako odpowiednia kombinacja zysków jednostkowych c_j. Bardzo często pojawiają się zależności liniowe reprezentujące bilansowanie (rozdział lub agregację) strumieni pewnych towarów lub usług. Dotyczy to szerokiej gamy modeli wykorzystujących struktury sieciowe do modelowania procesów. Najprostszym przykładem jest tu tzw. zadanie transportowe, gdzie rozpatruje się prosty schemat dystrybucji jednorodnego towaru oferowanego przez m dostawców i pobieranego przez n odbiorców. To znaczy, rozpatruje się bezpośrednie przesyłki od dostawców do odbiorców pomijając aspekty wynikające ze środków transportu. Może to być modelowane jako przepływy w grafie dwudzielnym, gdzie dostawcy i odbiorcy są reprezentowani przez rozłączne grupy węzłów. Organizację dystrybucji opisuje tabela zmiennych decyzyjnych x_{ij} określających ilość towaru przesyłaną od dostawcy i do odbiorcy j. Ilość towaru odbierana przez odbiorcę j jest wtedy określona zależnością liniową (sumą po dostawcach) $\sum_i x_{ij}$ i analogicznie łączna ilość towaru wysyłana przez dostawcę i jest określona zależnością liniową (sumą po odbiorcach) $\sum_j x_{ij}$. Mając określone parametry: a_i – zapasy towaru u poszczególnych dostawców, b_j – zapotrzebowania poszczególnych odbiorców oraz c_{ij} – jednostkowe koszty przesłania od dostawcy i do odbiorcy j, można sformułować problem minimalizacji kosztu dystrybucji. Będzie to zadanie programowania liniowego postaci:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \qquad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\
x_{ij} \geq 0 & \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że powyższy model ma mn zmiennych i $m + n$ ograniczeń. Zapis modelu zadania transportowego w postaci macierzowej wymagałby sformułowania macierzy o wymiarach $(m + n) \times mn$, zawierającej niewielką liczbę współczynników niezerowych. W poniższym przykładzie przedstawiamy nieco bardziej złożony model transportowy, który będziemy również dalej wykorzystywać do pokazania pewnych zależności nieliniowych.

Przykład 2.1. Model liniowy dla dystrybucji towarów

Rozważamy następujące uproszczone zagadnienie organizacji schematu dystrybucji dwóch towarów. Transport towarów od dostawców (producentów) do odbiorców (punktów sprzedaży detalicznej) odbywa się dwustopniowo przez magazyny hurtowe z przeładunkiem na mniejsze pojazdy. Rozważamy dwóch dostawców: zakłady wytwórcze D1 i D2, każdy produkujący oba towary. Zakład D1 może dostarczać do 85 tys. jednostek towaru P1 i 40 tys. jednostek towaru P2, a zakład D2 do 40 tys. jednostek towaru P1 i do 70 tys. jednostek P2. Oba towary są transportowane razem. Można korzystać z magazynu hurtowego M1 o pojemności 50 tys. jednostek, który może być powiększony do pojemności 80 tys. jednostek. Można też uruchomić nowe magazyny M2 i (lub) M3 o maksymalnej pojemności 100 tys. jednostek w przypadku M2 i 130 tys. jednostek w przypadku M3, o ile jest w pełni wykorzystana pojemność M1. Koszty operacyjne magazynów hurtowych są proporcjonalne do ich wielkości. Jednostkowy koszt operacyjny jest jednakowy dla wszystkich magazynów i wynosi 0.50zł na jednostkę. Po przeładowaniu produkty są transportowane do czterech odbiorców: punktów sprzedaży detalicznej S1, S2, S3 i S4. Zapotrzebowanie na poszczególne produkty (wyrażone w tys. jednostek) określa tabela:

Tabela 2.1: Wielkości zapotrzebowań na towary u poszczególnych odbiorców

	S1	S2	S3	S4
P1	60	30	15	10
P2	10	30	25	40

Jednostkowe koszty transportu są identyczne dla obu produktów. Poniższe tabele podają wyrażone w złotych odpowiednie jednostkowe koszty transportu.

Tabela 2.2: Jednostkowe koszty transportu towarów od dostawców do magazynów

	M1	M2	M3
D1	2	5	3
D2	9	4	7

Tabela 2.3: Jednostkowe koszty transportu towarów z magazynów do odbiorców

	S1	S2	S3	S4
M1	7	1	6	4
M2	14	3	5	8
M3	2	7	9	1

Formułując model matematyczny identyfikujemy zbiory: towarów {P1,P2}, dostawców {D1,D2}, magazynów {M1,M2,M3}, odbiorców {S1,S2,S3,S4}. Parametrami modelu są:
a_{rk} – ilość (w tys. jednostek) towaru Pr dostępna u dostawcy Dk ($r = 1, 2$; $k = 1, 2$),
b_{rj} – zapotrzebowanie (w tys. jednostek) na towar Pr u odbiorcy Sj ($r = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$),
c_{ki} – jednostkowy koszt (w tys. zł na tys. jednostek) przesyłania towarów od dostawcy Dk do magazynu Mi ($k = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$),
t_{ij} – jednostkowy koszt przesyłania towarów z magazynu Mi do odbiorcy Sj ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$),
d_i, g_i – dolne i górne ograniczenia pojemności (w tys. jednostek) magazynu Mi ($i = 1, 2, 3$).
h_i – jednostkowe koszty operacyjne (w tys. zł na tys. jednostek) dla magazynu Mi ($i = 1, 2, 3$).
Możliwie najprostszy model programowania matematycznego otrzymujemy dopuszczając podzielność jednostek towarów. Możemy wtedy wprowadzić zmienne decyzyjne (ciągłe):
x_{rki} – ilość (w tys. jednostek) towaru Pr (w tys. jednostek) przesyłana od dostawcy Dk do magazynu Mi ($r = 1, 2$; $k = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$),
z_{rij} – ilość (w tys. jednostek) towaru Pr przesyłana z magazynu Mi do odbiorcy Sj ($r = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$),
s_{ri} – ilość (w tys. jednostek) towaru Pr przeładowywana w magazynie Mi ($r = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$),
y_i – pojemność (w tys. jednostek) magazynu Mi ($i = 1, 2, 3$).
Wszystkie zmienne wyrażające przesyły towarów są nieujemne

$$\begin{aligned} x_{rki} &\geq 0 \qquad \text{dla } r = 1, 2; k = 1, 2; i = 1, 2, 3 \\ z_{rij} &\geq 0 \qquad \text{dla } r = 1, 2; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

a zmienne y_i muszą spełniać swoje dolne i górne ograniczenia

$$d_i \leq y_i \leq g_i \quad \text{dla } i = 1, 2, 3$$

czyli w przypadku konkretnych danych

$$\begin{aligned} 50 \leq y_1 \leq 80 \\ 0 \leq y_2 \leq 100 \\ 0 \leq y_3 \leq 130 \end{aligned}$$

Ilości towarów wysyłane od poszczególnych dostawców nie mogą przekraczać podaży tych towarów

$$x_{rk1} + x_{rk2} + x_{rk3} \leq a_{rk} \quad \text{dla } r = 1,2; k = 1,2$$

czyli w przypadku konkretnych danych

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{112} + x_{113} &\leq 85 \\ x_{211} + x_{212} + x_{213} &\leq 40 \\ x_{121} + x_{122} + x_{123} &\leq 40 \\ x_{221} + x_{222} + x_{223} &\leq 70 \end{aligned}$$

Ilości towarów dostarczane od poszczególnych odbiorców są zgodne z odpowiednimi zapotrzebowaniami

$$z_{r1j} + z_{r2j} + z_{r3j} = b_{rj} \quad \text{dla } r = 1,2; j = 1,2,3,4$$

czyli w przypadku konkretnych danych

$$\begin{aligned} z_{111} + z_{121} + z_{131} &= 60 \\ z_{211} + z_{221} + z_{231} &= 10 \\ z_{112} + z_{122} + z_{132} &= 30 \\ z_{212} + z_{222} + z_{232} &= 30 \\ z_{113} + z_{123} + z_{133} &= 15 \\ z_{213} + z_{223} + z_{233} &= 25 \\ z_{114} + z_{124} + z_{134} &= 10 \\ z_{214} + z_{224} + z_{234} &= 40 \end{aligned}$$

Ilości poszczególnych towarów wysyłane do magazynów określają ilości towarów tam przeładowywanych

$$x_{r1i} + x_{r2i} = s_{ri} \quad \text{dla } r = 1,2; i = 1,2,3$$

czyli w przypadku konkretnych danych

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} &= s_{11} \\ x_{112} + x_{122} &= s_{12} \\ x_{113} + x_{123} &= s_{13} \\ x_{211} + x_{221} &= s_{21} \\ x_{212} + x_{222} &= s_{22} \\ x_{213} + x_{223} &= s_{23} \end{aligned}$$

Ilości towarów przeładowywanych w poszczególnych magazynach nie mogą przekraczać ich pojemności

$$s_{1i} + s_{2i} \leq y_i \quad \text{dla } i = 1,2,3$$

czyli w przypadku konkretnych danych

$$\begin{aligned} s_{11} + s_{21} &\leq y_1 \\ s_{12} + s_{22} &\leq y_2 \\ s_{13} + s_{23} &\leq y_3 \end{aligned}$$

Ilości towarów wysyłane z poszczególnych magazynów powinny być równe ilościom do nich przywożonym

$$z_{ri1} + z_{ri2} + z_{ri3} + z_{ri4} = s_{ri} \quad \text{dla } r = 1,2; i = 1,2,3$$

czyli w przypadku konkretnych danych

$$\begin{aligned}
z_{111} + z_{112} + z_{113} + z_{114} &= s_{11} \\
z_{121} + z_{122} + z_{123} + z_{124} &= s_{12} \\
z_{131} + z_{132} + z_{133} + z_{134} &= s_{13} \\
z_{211} + z_{212} + z_{213} + z_{214} &= s_{21} \\
z_{221} + z_{222} + z_{223} + z_{224} &= s_{22} \\
z_{231} + z_{232} + z_{233} + z_{234} &= s_{23}
\end{aligned}$$

Koszty transportowe (w tys. zł) wyraża formuła

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} c_{ki}(x_{1ki} + x_{2ki}) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} t_{ij}(z_{1ij} + z_{2ij})$$

gdzie konkretne wartości wspóczynników c_{ki} i t_{ij} są określone odpowiednio w tabelach 2.2 i 2.3. Koszty operacyjne przeładunku wyraża formuła

$$h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3$$

a w przypadku konkretnych danych liczbowych

$$0.5(y_1 + y_2 + y_3)$$

W konkretnych danych jednostkowe koszty operacyjne wszystkich magazynów są takie same, ale w ogólnym modelu naturalne jest pozostawienie możliwości ich różnicowania.

Sformułowany model można znacznie prościej zapisać korzystając z języka modelowania AMPL. Plik opisu modelu może tu przyjąć następującą postać (znak # oznacza wiersz komentarza):

```
# PLIK MODELU
# Deklaracje zbiorów i parametrów zawartych w pliku danych
#
set TOWARY;
set DOSTAWCY;
set MAGAZYNY;
set ODBIORCY;
#
param podaz {TOWARY, DOSTAWCY} >= 0;
param magmin {MAGAZYNY} >= 0;
param magmax {MAGAZYNY} >= 0;
param kosztM {MAGAZYNY} >= 0;
param zapotrz {TOWARY, ODBIORCY} >= 0;
param kosztDM {DOSTAWCY, MAGAZYNY} >= 0;
param kosztMO {MAGAZYNY, ODBIORCY} >= 0;
#
# zmienne x, z, s, y
var trDM {TOWARY, DOSTAWCY, MAGAZYNY} >= 0;
var trMO {TOWARY, MAGAZYNY, ODBIORCY} >= 0;
var wmag {i in MAGAZYNY} >= 0;
var tmag {r in TOWARY, i in MAGAZYNY} =
   sum {k in DOSTAWCY} trDM[r,k,i];
var wypelmag {i in MAGAZYNY} = sum {r in TOWARY} tmag[r,i];
var kosztytr =
```

```
   sum {r in TOWARY, k in DOSTAWCY, i in MAGAZYNY} trDM[r,k,i]
   + sum {r in TOWARY, i in MAGAZYNY, j in ODBIORCY} trMO[r,i,j];
var kosztymag = sum {i in MAGAZYNY} kosztM[i] * wmag[i];
#
# Funkcja celu
minimize koszty:  kosztytr + kosztymag;
#
# ograniczenia wielkości magazynów
s.t.  OgrMagMin {i in MAGAZYNY}:  wmag[i] >= magmin[i];
s.t.  OgrMagMax {i in MAGAZYNY}:  wmag[i] <= magmax[i];
#
# ograniczenia podaży towarów
s.t.  OgrPodaz {r in TOWARY, k in DOSTAWCY}:
   sum {i in MAGAZYNY} trDM[r,k,i] <= podaz[r,k];
#
# realizacja zapotrzebowań na towary
s.t.  OgrZapotrz {r in TOWARY, j in ODBIORCY}:
   sum {i in MAGAZYNY} trMO[r,i,j] = zapotrz[r,j];
#
# ograniczenia przeładunków przez wielkości magazynów
s.t.  OgrMagPrzep {i in MAGAZYNY}:  wypelmag[i] <= wmag[i];
#
# bilans przeładunków towarów
s.t.  OgrBilTow {r in TOWARY, i in MAGAZYNY}:
   sum {j in ODBIORCY} trMO[r,i,j] = tmag[r,i];
# KONIEC MODELU
```

Odpowiedni plik danych przyjmuje następującą postać (znak # oznacza wiersz komentarza):

```
# PLIK DANYCH
# Definicje zbiorów indeksowych
#
set TOWARY := P1 P2 ;
set DOSTAWCY := D1 D2 ;
set MAGAZYNY := M1 M2 M3 ;
set ODBIORCY := S1 S2 S3 S4 ;
#
# wielkości podaży
 param podaz:  D1  D2  :=
           P1  85  40
           P2  40  70
            ;
# minimalne wielkości magazynów
 param:  magmin  :=
     M1      50
     M2       0
     M3       0
      ;
# maksymalne wielkości magazynów
 param:  magmax  :=
     M1      80
     M2     100
     M3     130
      ;
```

```
# koszty jednostkowe przeładunku
 param:  kosztM  :=
     M1     0.5
     M2     0.5
     M3     0.5
      ;
# wielkości zapotrzebowania
 param zapotrz:  S1  S2  S3  S4  :=
              P1  60  30  15  10
              P2  10  30  25  40
               ;
# jednostkowe koszty transportu od dostawców
 param kosztDM:  M1  M2  M3  :=
              D1   2   5   3
              D2   9   4   7
               ;
# jednostkowe koszty transportu do odbiorców
 param kosztMO:  S1  S2  S3  S4  :=
              M1   7   1   6   4
              M2  14   3   5   8
              M3   2   7   9   1
               ;
# KONIEC PLIKU DANYCH
```

Zauważmy, że w przedstawionym modelu AMPL wyraźnie widać oddzielenie samego modelu od specyficznych danych dla konkretnej instancji modelu. □

Technika modelowania przepływów za pomocą zależności liniowych może być wykorzystana w wielu różnorodnych zastosowaniach. Poniższy przykład ilustruje jej wykorzystanie w problemie dynamicznego zarządzania funduszem inwestycyjnym.

Przykład 2.2. Model liniowy dla zarządzania funduszem

Rozważamy następujące uproszczone zagadnienie optymalnego zarządzania funduszem inwestycyjnym. Dysponujemy funduszem o początkowej wartości 500 tys. zł, którym trzeba efektywnie zarządzać przez okres sześciu miesięcy. Wartość wynikowa funduszu po okresie inwestycyjnym sześciu miesięcy zależy od przyjętego sposobu lokowania aktywów w rozważanym okresie inwestycyjnym. Należy zaplanować schemat inwestycji tak, aby uzyskać możliwie największy przyrost wartości. Dostępne są następujące możliwości do wykorzystania:

- lokaty miesięczne, dostępne w każdym miesiącu, przynoszące zysk 1.0% w momencie zapadalności,
- lokaty dwumiesięczne, dostępne w co drugim miesiącu, przynoszące zysk 2.5% w momencie zapadalności,
- lokaty trzymiesięczne, dostępne w pierwszym i czwartym miesiącu, przynoszące w momencie zapadalności zysk 6.0%.
- lokata sześciomiesięczna, dostępna w pierwszym miesiącu, przynosząca zysk 14.0% w momencie zapadalności,

Jednocześnie wymaga się aby na początku każdego miesiąca średni okres zapadalności dla całości aktualnych inwestycji nie przekroczył poziomu 2 miesięcy.
Wprowadzamy zmienne decyzyjne:
x_{1j} – wielkość lokaty jednomiesięcznej na początku j-tego miesiąca,

x_{2j} – wielkość lokaty dwumiesięcznej na początku j-tego miesiąca,
x_{3j} – wielkość lokaty trzymiesięcznej na początku j-tego miesiąca,
x_{4j} – wielkość lokaty sześciomiesięcznej na początku j-tego miesiąca,
oraz zmienną stanu z wyrażającą wartość funduszu po 6 miesiącach,
gdzie wszystkie wartości są wyrażone w tys. zł.

W każdym miesiącu (dokładniej na początku każdego miesiąca) musi być spełniony bilans inwestycji i jednocześnie pewne lokaty muszą być kontynuowane. Stąd otrzymujemy zależności liniowe:
dla początkowego miesiąca

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 500$$

dla drugiego miesiąca

$$\begin{aligned} x_{12} &= 1.01x_{11} \\ x_{22} &= x_{21} \\ x_{32} &= x_{31} \\ x_{42} &= x_{41} \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} &x_{13} + x_{23} = 1.01x_{12} + 1.025x_{22} \\ &x_{33} = x_{32} \\ &x_{43} = x_{42} \\ &x_{14} + x_{34} = 1.01x_{13} + 1.06x_{33} \\ &x_{24} = x_{23} \\ &x_{44} = x_{43} \\ &x_{15} + x_{25} = 1.01x_{14} + 1.025x_{24} \\ &x_{35} = x_{34} \\ &x_{45} = x_{44} \\ &x_{16} = 1.01x_{15} \\ &x_{26} = x_{25} \\ &x_{36} = x_{35} \\ &x_{46} = x_{45} \\ &z = 1.01x_{16} + 1.025x_{26} + 1.06x_{36} + 1.14x_{46} \end{aligned}$$

Średnie okresy zapadalności sum lokat na początku każdego miesiąca wyrażają się odpowiednimi wskaźnikami ilorazowymi. Dla pierwszych czterech miesięcy otrzymujemy nierówności:

$$\begin{aligned} \frac{x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} + 6x_{41}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} &\leq 2 \\ \frac{x_{12} + x_{22} + 2x_{32} + 5x_{42}}{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}} &\leq 2 \\ \frac{x_{13} + 2x_{23} + x_{33} + 4x_{43}}{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}} &\leq 2 \\ \frac{x_{14} + x_{24} + 3x_{34} + 3x_{44}}{x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44}} &\leq 2 \end{aligned}$$

Dla dalszych miesięcy termin zapadalności wszystkich lokat nie przekracza dwóch miesięcy, zatem warunek jest oczywiście spełniony.

W tym wypadku nierówności ilorazowe można łatwo przekształcić do zależności liniowych

$$\begin{array}{rcl} -x_{11}+x_{31}+4x_{41} & \leq & 0 \\ -x_{12}-x_{22}+3x_{42} & \leq & 0 \\ -x_{13}-x_{33}+2x_{43} & \leq & 0 \\ -x_{14}-x_{24}+x_{34}+x_{44} & \leq & 0 \end{array}$$

Przyrost wartości funduszu wyraża się formułą liniową: $z-500$. □

2.2 Zależności liniowo-dyskretne

Proste własności zależności liniowych i odpowiednie bardzo efektywne metody rozwiązywania zadań programowania liniowego dotyczą zmiennych rzeczywistych (ciągłych). Jeżeli zmienne decyzyjne bądź stanu mają dziedzinę ograniczoną do zbioru dyskretnego, to odpowiednie zależności choć formalnie zapisane jako liniowe nie reprezentują już modelu liniowego, w którym działają własności jednorodności i addytywności (bo odpowiednie elementy nie muszą należeć do dziedziny). Komplikuje to strukturę modeli i drastycznie zmniejsza efektywność metod rozwiązywania odpowiednich zadań. Zmienne dyskretne są jednak silnym narzędziem modelowania złożonych zależności, a w szczególności warunków logicznych bardzo istotnych w problemach decyzyjnych. Najprostsze zmienne dyskretne, to zmienne całkowite (całkowitoliczbowe) i zmienne binarne (zero-jedynkowe, 0-1). Zmienne binarne służą przede wszystkim do reprezentacji w modelu algebraicznym zmiennych i warunków logicznych. Natomiast ogólne zmienne całkowite mogą reprezentować ilości pewnych niepodzielnych jednostek jak również numerację wariantów do wyboru (indeksowanie).

Flaga dodatniości

Najczęściej stosowaną zależnością ze zmienną dyskretną jest *binarna flaga dodatniości* zmiennej (wyrażenia). Flagą dodatniości zmiennej ciągłej x (o ograniczonych wartościach $0 \leq x \leq M$) nazywamy zmienną binarną $u \in \{0,1\}$ taką, że $u=1$ gdy x przyjmuje dodatnią wartość (tzn. $x>0 \quad \Rightarrow \quad u=1$).

Flaga dodatniości może być prosto modelowana za pomocą nierówności liniowych

$$0 \leq x \leq Mu, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad u \in Z$$

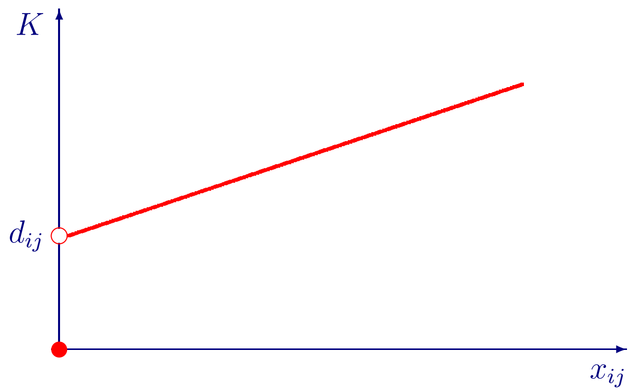
gdzie warunek przynależności zmiennej flagowej u do zbioru liczb całkowitych Z jest jedyną nieliniowością.

Zmienna całkowita u może przyjmować tylko wartości 0 albo 1, przy czym $u=0$ powoduje $x \leq 0$ i wymusza $x=0$. Tym samym, prawdziwa jest wymagana implikacja $x>0 \quad \Rightarrow \quad u=1$.

Flagi dodatniości mogą być wykorzystane między innymi do modelowania wymagań progowych wartości dodatnich pewnych zmiennych (wyrażeń). Dość typową sytuacją jest ograniczenie minimalnego poziomu aktywności o ile dany proces jest aktywny. Na przykład, w modelu transportowym może być wymaganie minimalnej wielkości przesyłu dla uruchamiania danego połaczenia. W problemie zarządzania funduszem finansowym określona lokata, np. lokata sześciomiesięczna, może mieć wymaganą minimalną kwotę 50 tys. zł. Warunek ten można modelować ze zmienną binarną u_4 stanowiącą flagę dodatniości zmiennej x_{41} wyrażającej wielkość lokaty sześciomiesięcznej:

$$50u_4 \leq x_{41} \leq 1000u_4,\ 0 \leq u_4 \leq 1,\ u_4 \in Z$$

gdzie nierówność $50u_4 \leq x_{41}$ określa dolne ogranicznie 50 na wartość zmiennej x_{41}, o ile zmienna u_4 stanowiąca flagę dodatniości x_{41} przyjmuje wartość 1. W konsekwencji, zmienna x_{41} wyrażająca wielkość lokaty D w tys. zł może przyjmować albo wartość 0 (brak lokaty), albo wartość większą lub równą 50.



Rysunek 2.1: Wykres nieciągłej funkcji kosztu z kosztem stałym

Flagi dodatniości mogą być też wykorzystane do modelowania kosztów stałych. Zilustrujemy to na przykładzie zadania transportowego z kosztami stałymi. Niech koszt transportu towaru od dostawcy i do odbiorcy j składa się z sumy kosztu stałego d_{ij} w przypadku uruchamiania tego połączenia oraz kosztu zmiennego proporcjonalnego do ilości towaru z kosztem jednostkowym c_{ij}. To znaczy, koszt transportu wyraża się wzorem:

$$K(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}x_{ij} + d_{ij} & \text{dla } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{dla } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

określającym funkcję nieciągła w 0 (por. rys. 2.1). Wprowadzając flagi dodatniości zmiennych x_{ij}, minimalizację całkowitego kosztu transportu można wyrazić jako

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} K(x_{ij}) = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [c_{ij}x_{ij} + d_{ij}u_{ij}]$$

$$0 \leq x_{ij} \leq Mu_{ij},\ 0 \leq u_{ij} \leq 1,\ u_{ij} \in Z \quad \forall i, j$$

gdzie zmienne x_{ij} spełniają ograniczenia zadania transportowego. Zauważmy, że wszystkie zależności są zapisane za pomocą warunków liniowych i jedyną nieliniowością jest żądanie całkowitych wartości zmiennych flagowych u_{ij}.

Warunki logiczne

Typowym zastosowaniem zmiennych binarnych jest modelowanie zmiennych i warunków logicznych. Pojedyncze algebraiczne zmienne binarne x_i mogą bezpośrednio odpowiadać zmiennym logicznym X_i z wartościami 1 dla *prawda* i 0 dla *fałsz*. Tab. 2.4 zestawia algebraiczne modele reprezentujące warunki logiczne definiowane przez pojedyncze operatory logiczne.

Tabela 2.4: Algebraiczne modele prostych warunków logicznych

warunek logiczny	warunek binarny
$X_1 \vee X_2$	$x_1 + x_2 \geq 1$
$X_1 \wedge X_2$	$x_1 = 1,\ x_2 = 1$
$X_1 \otimes X_2$	$x_1 + x_2 = 1$
$X_1 \Rightarrow X_2$	$x_1 - x_2 \leq 0$
$X_1 \Leftrightarrow X_2$	$x_1 - x_2 = 0$

Złożone warunki logiczne mogą być modelowane analogicznie. Rozpatrzmy na przykład modelowanie warunku $(X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_3$.

$$
\begin{array}{lcl}
X_1 \vee X_2 & \rightarrow & x_1 + x_2 \geq 1 \\
(X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_3 & \rightarrow & x_1 + x_2 \geq 1 \Rightarrow x_3 = 1 \\
(X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_3 & \rightarrow & x_1 + x_2 \leq 2x_3
\end{array}
$$

gdzie w ostatecznym modelu implikacji wykorzystano technikę analogiczną do modelu flagi dodatniości.

Bardziej złożony warunek $(X_1 \vee X_2) \Rightarrow (X_3 \vee X_4 \vee X_5)$ może być modelowany następująco:

$$
\begin{array}{lcl}
X_1 \vee X_2 & \rightarrow & x_1 + x_2 \geq 1 \\
X_3 \vee X_4 \vee X_5 & \rightarrow & x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
(X_1 \vee X_2) \Rightarrow Y & \rightarrow & x_1 + x_2 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \\
(X_1 \vee X_2) \Rightarrow Y & \rightarrow & x_1 + x_2 - 2y \leq 0 \\
Y \Rightarrow (X_3 \vee X_4 \vee X_5) & \rightarrow & y \geq 1 \Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
Y \Rightarrow (X_3 \vee X_4 \vee X_5) & \rightarrow & -x_3 - x_4 - x_5 + y \leq 0
\end{array}
$$

czyli ostatecznie

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 - 2y & \leq & 0 \\
-x_3 - x_4 - x_5 + y & \leq & 0
\end{array}
$$

Alternatywnie można najpierw dokonać tu przekształcenia warunku logicznego do postaci $[X_1 \Rightarrow (X_3 \vee X_4 \vee X_5)] \wedge [X_2 \Rightarrow (X_3 \vee X_4 \vee X_5)]$, aby ostatecznie otrzymać model

$$
\begin{array}{rcl}
-x_3 - x_4 - x_5 + x_1 & \leq & 0 \\
-x_3 - x_4 - x_5 + x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Warunek wyboru

Warunkiem logicznym często występującym w modelach decyzyjnych jest warunek wyboru. W najprostszej sytuacji może to być wybór jednej z wielu wartości liczbowych, np. wyboru wielkości dysku, wyboru grubości blachy, wyboru rozmiaru magazynu, itp. Taki wybór może być prosto wyrażony za pomocą zmiennej decyzyjnej o danym skończonym zbiorze wartości. Warunek wyboru jednej z k możliwych wartości $q_1,\ q_2, \ldots, q_k$ wyraża zmienna x taka, że

$$x \in \{q_1,\ q_2, \ldots, q_k\}$$

Model całkowitoliczbowy pozwala wyrazić warunek wyboru w postaci zależności liniowych:

$$x = \sum_{i=1}^{k} q_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{k} u_i = 1$$

$$0 \leq u_i \leq 1,\ u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k$$

gdzie k zmiennych binarnych u_i sumuje się do jedynki co gwarantuje, że tylko jedna z nich przyjmuje wartość 1, a pozostałe są równe zeru. Tym samym, zmienna x przyjmuje wartość q_i odpowiadającą zmiennej binarnej $u_i = 1$. W warunku wyboru można pominąć górne ograniczenia na zmienne u_1, ponieważ wymaganie sumowania do 1 zapewnia, że żadna ze zmiennych nie może przekroczyć 1.

Przykład 2.3. Wykorzystanie warunku wyboru w modelu dla dystrybucji towarów

Rozważamy ponownie uproszczone zagadnienie organizacji schematu dystrybucji dwóch towarów (przyklad 2.1). Transport towarów od dostawców do odbiorców odbywał się tam dwustopniowo przez magazyny hurtowe z przeładunkiem na mniejsze pojazdy i dopuszczaliśmy możliwości dowolnej rozbudowy magazynów w ramach określonych limitów. To znaczy, możliwe było powiększenie magazynu o 1 jednostkę, jak również o 2 jednostki itd. W praktycznych sytuacjach zazwyczaj nie ma możliwości uruchamia magazynów dowolnej wielkości, lecz istnieje kilka określonych typów magazynów. Wymaganie to można uwzględnić wykorzystując model warunku wyboru.

Przypuśćmy, że należy określić lokalizację i wielkości magazynów hurtowych. Rozważamy trzy potencjalne magazyny M1, M2 i M3, przy czym magazyn M1 już istnieje i może być rozbudowany lub nie. Magazyn M1 ma pojemność 50 tys. jednostek i może być pozostawiony bez zmian lub rozbudowany do pojemności 80 tys. jednostek. Magazyn M2 może nie być budowany (pojemność 0), może być budowany jako magazyn o pojemności 50 tys. jednostek, albo o pojemności 100 tys. jednostek. Magazyn M3 może nie być budowany (pojemność 0), może być budowany jako magazyn o pojemności 60 tys. jednostek, albo o pojemności 130 tys. jednostek.

Koszty operacyjne magazynów hurtowych zależą od ich wielkości, a nie ilości faktycznie przeładowywanych towarów. Koszty te wynoszą odpowiednio:
200 tys. zł dla magazynu o pojemności 50 lub 60 tys. jednostek,
250 tys. zł dla magazynu o pojemności 80 tys. jednostek,
300 tys. zł dla magazynu o pojemności 100 lub 130 tys. jednostek.

Aby uwzględnić omówioną sytuację, wprowadzamy do modelu dodatkowe zmienne dyskretne reprezentujące warunki wyboru: zmienna u_{ip} wskazuje czy dla magazynu Mi został wybrany wariant p (wartość 1), czy nie (wartość 0).

$$\begin{aligned}
&y_1 = 50u_{11} + 80u_{12}\\
&y_2 = 0u_{21} + 50u_{22} + 100u_{23}\\
&y_3 = 0u_{31} + 60u_{32} + 130u_{33}\\
&u_{11} + u_{12} = 1\\
&u_{21} + u_{22} + u_{23} = 1\\
&u_{31} + u_{32} + u_{33} = 1\\
&0 \leq u_{ip}, u_{ip} \in Z \quad \forall\, i, p
\end{aligned}$$

Warunki te zastępują dolne i górne ograniczenia na wielkości magazynów. Koszty operacyjne magazynów (w tys. zł) wyraża teraz formuła

$$200u_{11} + 250u_{12} + 200u_{22} + 300u_{23} + 200u_{32} + 300u_{33}$$

Zauważmy, że zmienne wyboru wariantu zerowego (u_{21} i u_{31}) mogły być pominięte przy zastąpieniu równań w warunkach wyboru odpowiednimi nierównościami. $\square$

Warunek wyboru może być uogólniany na zbiory, co pozwala łatwo modelować zbiory niespójne i wypukłe jako sumy zbiorów wypukłych. Uogólnieniem warunku wyboru jest wymaganie aby zmienna (lub wektor zmiennych) x należała do co najmniej jednego z k zbiorów Q_i:

$$x \in Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$$

gdzie zbiory Q_i w ogólności nie muszą być rozłączne. Jeżeli wprowadzimy zmienne binarne u_i wskazujące na przynależność x do odpowiedniego zbioru Q_i

$$u_i \in \{0,1\}, \quad u_i = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in Q_i \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,k$$

to uogólniony warunek wyboru możemy zapisać w postaci zależności liniowych

$$\sum_{i=1}^{k} u_i = 1$$

Rozpatrzmy przypadek zmiennej x należacej do jednego z dwóch przedziałów (potencjalnie rozłącznych)

$$a \le x \le b \quad \text{lub} \quad c \le x \le d$$

Warunku tego nie można zapisać w postaci układu zależności

$$\begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le x \le d \end{array}$$

bo ten układ reprezentuje część wspólną odpowiednich przedziałów (koniunkcję a nie alternatywę). Odpowiedni model liniowo-całkowitoliczbowy możemy natomiast zapisać jako:

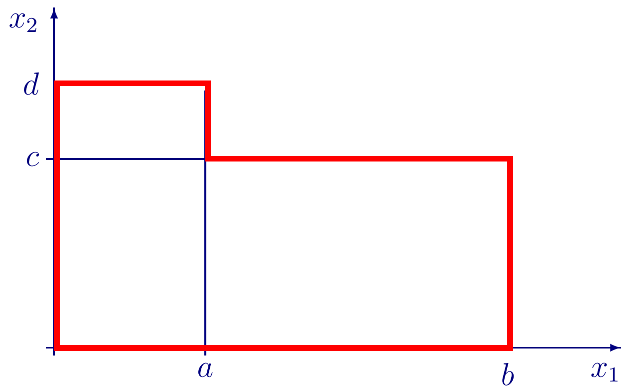
$$\begin{array}{l} au_1 + cu_2 \le x \le bu_1 + du_2 \\ u_1 + u_2 = 1 \\ 0 \le u_1 \le 1 \\ 0 \le u_2 \le 1 \\ u_1, u_2 \in Z \end{array}$$

gdzie $u_1 = 1$ powoduje, ze pierwszy warunek przyjmuje postać $a \le x \le b$, a $u_2 = 1$ implikuje $c \le x \le d$. W tym przypadku wyboru dwuwariantowego można wyeliminować jedną z dwu zmiennych binarnych, np. podstawiając $u_2 = 1 - u_1$, co prowadzi do prostego modelu

$$au + c(1-u) \le x \le bu + d(1-u), \quad u \in \{0,1\}$$

Szczególnym przypadkiem rozważanego tu warunku jest ograniczenie

$$a \le |x| \le b, \quad \text{gdzie } b > a > 0$$



Rysunek 2.2: Niewypukły zbiór wielościenny

czyli

$$a \le x \le b \quad \text{lub} \quad -b \le x \le -a$$

model liniowo-całkowitoliczbowy dla niego przyjmuje postać:

$$au - b(1-u) \le x \le bu - a(1-u), \quad 0 \le u \le 1, \quad u \in Z$$

Przedstawiona technika może być również stosowana do modelowania bardziej złożonych zbiorów wielowymiarowych. Rozważmy na przykład ograniczenia:

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le a \\ 0 \le x_2 \le d \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a \le x_1 \le b \\ 0 \le x_2 \le c \end{cases}$$

opisujące niewypukły zbiór wielościenny z rys. 2.2. Odpowiedni model liniowo-całkowitoliczbowy może być tu zapisany jako:

$$\begin{array}{l} a(1-u) \le x_1 \le au + b(1-u) \\ 0 \le x_2 \le du + c(1-u) \\ 0 \le u \le 1, \quad u \in Z \end{array}$$

Uogólnienia warunku wyboru

Warunek wyboru może dotyczyć nie tylko pojedynczego wariantu ale również wyboru określonej ograniczonej liczby wariantów. Na przykład, ograniczenie wykorzystywania jednocześnie co najwyżej trzech różnych lokat w problemie zarządzania funduszem inwestycyjnym, albo ograniczenie liczby różnych dostawców realizujących zaopatrzenie pojedynczego odbiorcy w problemie transportowym. Wymaganie, że co najwyżej k zmiennych $0 \le x_j \le M$ przyjmuje wartości dodatnie można modelować w postaci następujących zależności liniowo-całkowitoliczbowych

$$0 \le x_j \le Mu_j, \quad 0 \le u_j \le 1, \quad u_j \in Z$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \le k$$

Zauważmy, że w przypadku $k > 1$ istotne są górne ograniczenia na zmienne u_j, ponieważ warunek sumowania nie ogranicza ich wtedy przez 1.

Na przykład, warunek aby w funduszu inwestycyjnym w każdym miesiącu użyte były co najwyżej 3 różne lokaty jest modelowane następująco (x_{ij} – wielkość lokaty j w i-tym miesiącu):

$$x_{ij} \leq 1000u_{ij}, \quad 0 \leq u_{ij} \leq 1, \quad u_{ij} \in Z \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, 4;\ i = 1, \ldots, 6$$

$$u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} + u_{i4} \leq 3 \quad \text{dla } i = 1, \ldots, 6$$

Analogicznie ograniczenie do 4 liczby różnych dostawców realizujących zaopatrzenie pojedynczego odbiorcy w problemie transportowym może być modelowane następująco

$$x_{ij} \leq Mu_{ij}, \quad 0 \leq u_{ij} \leq 1, \quad u_{ij} \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} \leq 4 \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n$$

Warunek wielowariantowego wyboru uogólniony na zbiory może być zastosowany do modelowania wymagań spełnienia określonej liczby warunków. Niech będzie danych m warunków określonych przynależnoącią wektora zmiennych $\mathbf{x}$ do zbiorów Q_i. Rozpatrujemy wymaganie, aby co najmniej k spośród tych warunków było spełnionych. Jeżeli wprowadzimy zmienne binarne u_i wskazujące na nieprzynależność $\mathbf{x}$ do odpowiedniego zbioru Q_i

$$u_i \in \{0, 1\}, \quad \mathbf{x} \notin Q_i \quad \Rightarrow \quad u_i = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

to wymaganie spełnienia co najmniej k warunków możemy wyrazić przy pomocy zależności liniowej wielowariantowego warunku wyboru

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - k$$

ograniczającej do $m - k$ liczbę niespełnionych warunków i tym samym gwarantującej spełnienie co najmniej k warunków $\mathbf{x} \in Q_i$. Rozpatrzmy na przykład zbiór warunków określonych jako nierówności

$$y_i = g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

gdzie wszystkie wyrażenia mają ograniczone z góry wartości $g_i(\mathbf{x}) \leq M$ w rozważanym zbiorze zmiennych. Naruszenie nierówności jest tu równoważne dodatniości odpowiedniej zmiennej y_i. Wymaganie spełnienia co najmniej k nierówności możemy zatem zapisać w postaci warunku wielowariantowego wyboru z użyciem flag dodatniości zmiennych y_i. Odpowiedni model liniowo-całkowitoliczbowy przyjmuje postać

$$y_i \leq Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - k$$

Zamiast ograniczenia spełnienia co najmniej określonej liczby warunków może być postawione wymaganie maksymalizacji liczby spełnionych warunków. Posługując się modelem wyboru wielowariantowego możemy je wyrazić jako minimalizację sumy zmiennych binarnych u_i

$$\min \sum_{i=1}^{m} u_i$$

czyli funkcji celu wyrażającej liczbę niespełnionych warunków.

Uporządkowane wartości

Techniki modelowania warunków wielowariantowego wyboru mogą być wykorzystane do analitycznego zapisu wyboru uporządkowanych wartości, a w szczególności wartości najmniejszej i największej. Rozpatrzmy zależność, że zmienna z reprezentuje najmniejszą wartość spośród $y_i = f_i(x)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$, przy czym różnice między wartościami są ograniczone przez pewną liczbę M. Oznacza to, że z jest mniejsza lub równa wszystkim wartościom y_i i jednocześnie jest większa lub równa przynajmniej jednej z nich. Może to być zapisane w postaci modelu liniowo-całkowitoliczbowego

$$z \leq y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$z \geq y_i - Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1$$

gdzie warunek wielokrotnego wyboru został wykorzystany do zapisu wymagania, że z jest niemniejsza od przynajmniej jednej wartości y_i.

Podobnie, jeżeli zmienna z reprezentuje największą wartość spośród $y_i = f_i(x)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ (z różnicami między wartościami ograniczonymi przez M), to z jest większa lub równa wszystkim wartościom y_i i jednocześnie jest mniejsza lub równa przynajmniej jednej z nich. Stosując liniowo-całkowitoliczbowy model wielowariantowego wyboru do zapisu tej drugiej zależności otrzymujemy

$$z \geq y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$z \leq y_i + Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1$$

W wielu modelach reprezentacja wartości najmniejszej lub największej może być istotnie uproszczona. Na ogól bowiem potrzebny jest model tylko jednej z nierówności $z \leq \min_i y_i$ lub $z \geq \min_i y_i$ w przypadku wartości najmniejszej i analogicznie w przypadku wartości największej. Takie pojedyncze nierówności wymagają tylko części z zależności. I tak modelując nierówność

$$z \leq \min_{i=1,\ldots,m} y_i$$

wystarczy zapisać, że zmienna z jest mniejsza lub równa wszystkim wartościom y_i, czyli proste warunki liniowe

$$z \leq y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Natomiast modelując nierówność

$$z \geq \min_{i=1,\ldots,m} y_i$$

trzeba zapisać, że zmienna z jest większa lub równa przynajmniej jednej z wartości y_i. Może to być zapisane w postaci modelu liniowo-całkowitoliczbowego

$$z \geq y_i - Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1$$

Analogicznie, w przypadku wartości największej modelując nierówność

$$z \geq \max_{i=1,\ldots,m} y_i$$

wystarczy zapisać, że zmienna z jest większa lub równa wszystkim wartościom y_i, czyli proste warunki liniowe

$$z \geq y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Natomiast modelując nierówność

$$z \leq \max_{i=1,\ldots,m} y_i$$

trzeba zapisać, że zmienna z jest mniejsza lub równa przynajmniej jednej z wartości y_i, co wymaga modelu liniowo-całkowitoliczbowego

$$z \leq y_i + Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1$$

Modelowanie wartości najmniejszych i największych w postaci odpowiednich zależności nierównościowych ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.4. Modelowanie wartości najmniejszych i największych

Zbiór $Q \subset R^n$ jest wielościennym zbiorem wypukłym. Funkcje $f_i(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ są liniowe i spełniają warunki:

$$a \leq f_i(\mathbf{x}) \leq b, \; a \leq g_i(\mathbf{x}) \leq b \; \forall i = 1, 2, \ldots, m \; \forall \mathbf{x} \in Q$$

Następujący problem optymalizacji należy sformułować w postaci zadania programowania liniowego, jeżeli jest to możliwe, lub w postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego

$$\max\{\min_{1\leq i\leq m} f_i(\mathbf{x}) \; : \; \min_{1\leq i\leq m} g_i(\mathbf{x}) \leq c, \; \mathbf{x} \in Q\}$$

Powyższy model można wyrazić w postaci

$$\max\{z \; : \; z \leq \min_{1\leq i\leq m} f_i(\mathbf{x}), \; v \geq \min_{1\leq i\leq m} g_i(\mathbf{x}), \; v \leq c, \; \mathbf{x} \in Q\}$$

Wymaganie aby najmniejsza z wartości $g_i(\mathbf{x})$ była mniejsza lub równa c można bowiem zastąpić odpowiednią nierównością górnego ograniczenia wartości najmniejszej i c. Podobnie, zamiast maksymalizacji najmniejszej spośród wartości $f_i(\mathbf{x})$ można rozpatrywać maksymalizację dolnego ograniczenia najmniejszej wartości. Stosując standardowe techniki modelowania odpowiednich nierówności z wartością najmniejszą otrzymujemy następujące sformułowanie zadania

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ & z \leq f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\ & \mathbf{x} \in Q \\ & v \leq c \\ & v \geq g_i(\mathbf{x}) - M u_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1 \end{array}$$

gdzie M jest dostatecznie dużą stałą ($M \geq b - a$). Ponieważ wszystkie funkcje $f_i(\mathbf{x})$ i $g_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) są liniowe, to wszystkie zależności modelu są liniowe. Wymaganie przynależności zmiennych u_i do zbioru liczb całkowitych powoduje jednak, że otrzymujemy zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego. □

2.3 Zależności nieliniowe

Szereg zależności ma nieliniowy charakter i muszą one być wyrażone za pomocą odpowiednich funkcji, Na przyklad funkcji kwadratowej, logarytmicznej lub innych. Zależności nieliniowe można często skutecznie aproksymować funkcjami przedziałami liniowymi. Dotyczy to w szczególności funkcji (addytywnie) separowalnych, czyli funkcji dających się wyrazić jako suma poszczególnych funkcji jednej zmiennej

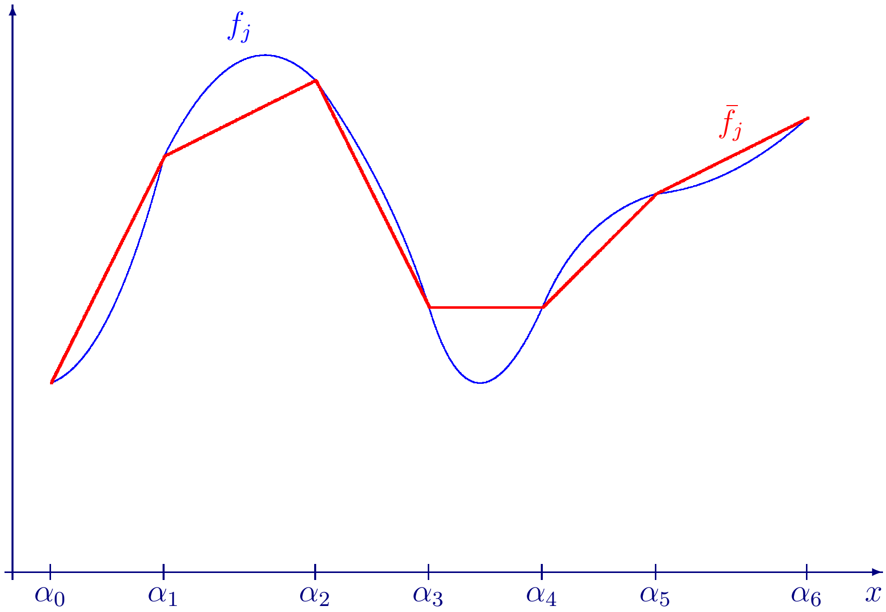
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

Poszczególne składniki jako funkcje jednej zmiennej mogą być łatwo przybliżane funkcjami przedziałami liniowymi. Proces ten może polegać na wyborze odpowiedniej siatki punktów (węzłów), w których wartości funkcji mają być reprezentowane dokładnie, i na interpolacji liniowej wartości funkcji pomiędzy węzłami. Na rys. 2.3 przedstawiono wykres pewnej nieliniowej funkcji ciągłej f_j oraz jej przedziałami liniowej aproksymacji $\bar{f}_j$ opartej na węzłach $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_6$. Stosując odpowiednio gęstą siatkę węzłów można dowolnie dokładnie przybliżać funkcję nieliniową f_j przedziałami liniową funkcją $\bar{f}_j$.

Modelowanie funkcji przedziałami liniowych metodą wartości

Istnieją dwie podstawowe metody reprezentacji funkcji przedziałami liniowych: metoda wartości (tzw. technika lambd) i metoda przyrostów (tzw. technika delt). W *metodzie wartości* funkcja przedziałami liniowa jest reprezentowana bezpośrednio przez węzły i wartości w węzłach. Niech g będzie przedziałami liniową funkcją ciągłą określoną na przedziale $[a; b]$, przy czym $\alpha_0 = a$,$\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$,$\alpha_m = b$ oznaczają węzły, a $g_0, g_1, \ldots, g_m$ wartości funkcji g w odpowiednich węzłach ($g_i = g(\alpha_i)$). Wartości funkcji $g(x)$ mogą być wyrażone za pomocą zależności liniowych:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=0}^{m} g_i \lambda_i \\ x &= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \lambda_i \end{aligned}$$



Rysunek 2.3: Przedziałami liniowa aproksymacja funkcji nieliniowej

gdzie λ_i są dodatkowymi zmiennymi spełniającymi warunki

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, m$$

przy czym co najwyżej dwie zmienne λ_i, i to sąsiednie, mogą przyjmować wartości różne od zera.

Warunek aby co najwyżej dwie sąsiednie zmienne typu lambda przyjmowały wartości dodatnie można wyrazić za pomocą nierówności z użyciem warunku wyboru:

$$\begin{array}{ll} \lambda_0 \leq u_1 & \\ \lambda_i \leq u_i + u_{i+1} & \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \lambda_m \leq u_m & \end{array}$$

gdzie zmienne u_i reprezentują warunek wyboru

$$u_i \geq 0, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$$

Przykład 2.5. Wykorzystanie metody wartości w modelu dla dystrybucji towarów

Rozważamy ponownie uproszczone zagadnienie organizacji schematu dystrybucji dwóch towarów (przyklad 2.1). Transport towarów od dostawców do odbiorców odbywał się tam dwustopniowo przez magazyny hurtowe z przeładunkiem na mniejsze pojazdy i zakładaliśmy, że koszty operacyjne magazynów są proporcjonalne do ich wielkości (ilości przeładowywanych towarów). Często jednak koszty operacyjne są wklęsłymi funkcjami wielkości magazynów. Sytuację taką można uwzględnić stosując funkcje przedziałami liniowe.

Rozpiętość ilości towarów przeładowanych w magazynie M1 jest niewielka. Wobec tego pozostawiamy bez zmian założenie o liniowości kosztów operacyjnych tego magazynu (i wartość jednostkowego kosztu 0.5 tys. zł na tys. jednostek). Natomiast dla magazynów M2 i M3 rozpiętość możliwych pojemności jest znaczna: od 0 do 100 tys. jednostek i odpowiednio od 0 do 130 tys. jednostek. Dlatego dla tych magazynów uwzględniamy wklęsłość funkcji kosztów operacyjnych. Przyjmujemy, że dla magazynu M2 koszty operacyjne wynoszą odpowiednio 0 przy pojemności zerowej (braku magazynu), 200 tys. zł przy pojemności 50 tys. jednostek, a 300 tys. zł przy maksymalnej pojemności 100 tys. jednostek. Podobnie dla magazynu M3 koszty operacyjne wynoszą odpowiednio 0 przy pojemności zerowej (braku magazynu), 200 tys. zł przy pojemności 60 tys. jednostek, a 300 tys. zł przy maksymalnej pojemności 130 tys. jednostek. Zakładamy, że dla pośrednich pojemności magazynów koszty operacyjne zmieniają się liniowo. Stosując metodę wartości (technikę lambd) można przedstawić te zależności w postaci warunków:

$$\begin{aligned}
&y_2 = 0\lambda_{20} + 50\lambda_{21} + 100\lambda_{22}\\
&y_3 = 0\lambda_{30} + 60\lambda_{31} + 130\lambda_{32}\\
&\lambda_{20} + \lambda_{21} + \lambda_{22} = 1\\
&\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{32} = 1\\
&\lambda_{20} \le u_{21}\\
&\lambda_{21} \le u_{21} + u_{22}\\
&\lambda_{22} \le u_{22}\\
&\lambda_{30} \le u_{31}\\
&\lambda_{31} \le u_{31} + u_{32}\\
&\lambda_{32} \le u_{32}\\
&u_{21} + u_{22} = 1\\
&u_{31} + u_{32} = 1\\
&\lambda_{20}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{30}, \lambda_{31}, \lambda_{32} \ge 0\\
&u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32} \ge 0\\
&u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32} \in Z
\end{aligned}$$

Warunki te zastępują dolne i górne ograniczenia na zmienne y_2 i y_3. Koszty operacyjne magazynów (w tys. zł) wyraża teraz formuła:

$$0.5y_1 + 200\lambda_{21} + 300\lambda_{22} + 200\lambda_{31} + 300\lambda_{32}$$

gdzie pominięto nieznaczące składniki $0\lambda_{20}$ i $0\lambda_{30}$. □

Modelowanie funkcji przedziałami liniowych metodą przyrostów

Metoda wartości dla reprezentacji funkcji przedziałami liniowych odwołuje się do naturalnych danych w postaci stablicowanych wartości funkcji w węzłach. Prowadzi ona jednak do dość skomplikowanego modelu. Nieco prostszy model otrzymuje się w metodzie przyrostów, gdzie stablicowane wartości trzeba zastąpić różnicami (przyrostami). W *metodzie przyrostów* funkcja przedziałami liniowa jest reprezentowana przez przyrosty argumentu i wartości funkcji między kolejnymi węzłami. Niech g będzie przedziałami liniową funkcją ciągłą określoną na przedziale $[a; b]$, przy czym $\alpha_0 = a$,$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$,$\alpha_m = b$ oznaczają węzły, a $g_0, g_1, \ldots, g_m$ wartości funkcji g w odpowiednich węzłach ($g_i = g(\alpha_i)$). W metodzie przyrostów jako dane opisujące funkcję g przyjmuje się wartości początkowe α_0 i g_0 oraz przyrosty:

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \alpha_i - \alpha_{i-1} \qquad &&\text{dla } i = 1, 2, \ldots, m\\
d_i &= g_i - g_{i-1} \qquad &&\text{dla } i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}$$

Zmienną x z przedziału $[a; b]$ i wartość funkcji $g(x)$ można wtedy wyrazić zależnościami liniowymi:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \delta_i \\ g(x) &= g_0 + \sum_{i=1}^{m} d_i \delta_i \end{aligned}$$

gdzie δ_i są dodatkowymi zmiennymi (ciągłymi) spełniającymi nierówności

$$0 \leq \delta_i \leq 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

oraz dodatkowe warunki

$$\delta_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{i-1} = 1 \quad \text{dla } i = 2, 3, \ldots, m$$

To znaczy, co najwyżej jedna zmienna δ_i przyjmuje wartość spomiędzy zera i jedynki, wszystkie wcześniejsze zmienne przyjmują wartość równą 1, a wszystkie dalsze zmienne wartość równą 0.

Wszystkie warunki na zmienne δ_i można wyrazić za pomocą nierówności:

$$\begin{aligned} & u_1 \leq \delta_1 \leq 1 \\ & u_i \leq \delta_i \leq u_{i-1} \quad \text{dla } i = 2, \ldots, m-1 \\ & 0 \leq \delta_m \leq u_{m-1} \\ & 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m-1 \end{aligned}$$

gdzie dodatkowe zmienne binarne u_i ($i = 1, 2, \ldots, m-1$) reprezentują odpowiednio flagi dodatniości zmiennych δ_{i+1}.

Przykład 2.6. Wykorzystanie metody przyrostów w modelu dla dystrybucji towarów

Rozważamy ponownie uproszczone zagadnienie organizacji schematu dystrybucji dwóch towarów z kosztami operacyjnymi magazynów będącymi wklęsłymi funkcjami ich pojemności (przykład 2.5). Tak samo jak w przykładzie 2.5 przyjmujemy bez zmian założenie o liniowości kosztów operacyjnych magazynu M1 (i wartość jednostkowego kosztu 0.5 tys. zł na tys. jednostek), a dla pozostałych magazynów uwzględniamy wklęsłość funkcji kosztów operacyjnych. Przyjmujemy, że dla magazynu M2 koszty operacyjne wynoszą odpowiednio 0 przy pojemności zerowej (braku magazynu), 200 tys. zł przy pojemności 50 tys. jednostek, a 300 tys. zł przy maksymalnej pojemności 100 tys. jednostek. Podobnie dla magazynu M3 koszty operacyjne wynoszą odpowiednio 0 przy pojemności zerowej (braku magazynu), 200 tys. zł przy pojemności 60 tys. jednostek, a 300 tys. zł przy maksymalnej pojemności 130 tys. jednostek. Zakładamy, że dla pośrednich pojemności magazynów koszty operacyjne zmieniają się liniowo. Stosując metodę przyrostów (technikę delt) można przedstawić te zależności w postaci warunków:

$$\begin{aligned} & y_2 = 0 + 50\delta_{21} + 50\delta_{22} \\ & y_3 = 0 + 60\delta_{31} + 70\delta_{32} \\ & u_{21} \leq \delta_{21} \leq 1 \\ & 0 \leq \delta_{22} \leq u_{21} \\ & u_{31} \leq \delta_{31} \leq 1 \\ & 0 \leq \delta_{32} \leq u_{31} \\ & 0 \leq u_{21} \leq 1, \quad u_{21} \in Z \\ & 0 \leq u_{31} \leq 1, \quad u_{31} \in Z \end{aligned}$$

Warunki te zastępują dolne i górne ograniczenia na zmienne y_2 i y_3. Koszty operacyjne magazynów (w tys. zł) wyraża teraz formuła:

$$0.5y_1 + 200\delta_{21} + 100\delta_{22} + 200\delta_{31} + 100\delta_{32}$$

gdzie pominięto zerowe składniki odpowiadające kosztom dla zerowych rozmiarów. □

Metoda przyrostowa może być stosowany w postaci nienormalizowanej umożliwiającej prostszą reprezentację funkcji przedziałami liniowej z jawnie danymi wzorami poszczególnych funkcji liniowych. Niech g będzie przedziałami liniową funkcją ciągłą określoną na przedziale $[a;b]$, przy czym $\alpha_0 = a$,$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$,$\alpha_m = b$ oznaczają węzły:

$$g(x) = \begin{cases} a_1x + b_1 & \text{dla } \alpha_0 \le x \le \alpha_1 \\ a_2x + b_2 & \text{dla } \alpha_1 \le x \le \alpha_2 \\ \ldots & \\ a_mx + b_m & \text{dla } \alpha_{m-1} \le x \le \alpha_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Stosując przyrostową reprezentację takiej funkcji, zamiast zmiennych δ_i obrazujących znormalizowany (do skali od 0 do 1) przyrost argumentu w przedziale $[\alpha_{i-1}; \alpha_i]$, można wprowadzić zmienne $x_i = \beta_i\delta_i$ czyli miary bezwzględnego przyrostu argumentu. Zmienną x z przedziału $[a;b]$ i wartość funkcji $g(x)$ można wtedy wyrazić zależnościami liniowymi:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ g(x) &= a_1\alpha_0 + b_1 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \end{aligned}$$

gdzie formuła wartości funkcji odwołuje się bezpośrednio do współczynników nachylenia a_i, jako że $d_i\delta_i = (d_i/\beta_i)(\beta_i\delta_i) = a_ix_i$. Zmienne x_i są zmiennymi ciągłymi spełniającymi nierówności

$$0 \le x_i \le \beta_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

oraz dodatkowe implikacje

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{i-1} = \beta_{i-1} \quad \text{dla } i = 2, 3, \ldots, m$$

Warunki te można wyrazić za pomocą nierówności:

$$\begin{array}{ll} \beta_1u_1 \le x_1 \le \beta_1 & \\ \beta_iu_i \le x_i \le \beta_iu_{i-1} & \text{dla } i = 2, \ldots, m-1 \\ 0 \le x_m \le \beta_mu_{m-1} & \\ 0 \le u_i \le 1, \quad u_i \in Z & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m-1 \end{array}$$

gdzie dodatkowe zmienne binarne u_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ reprezentują odpowiednio flagi dodatniości zmiennych x_{i+1}.

Na przykład w modelu produkcyjnym jednostkowy koszt produkcji danego towaru wynosi: 10zł dla pierwszych 50 tys. jednostek produktu, 9zł dla dalszych 40 tys. jednostek, 8zł dla dalszych 30 tys. jednostek i 7zł dla kolejnych 100 tys. jednostek. Potrzebujemy wyrazić zależność kosztu K od wielkości produkcji $0 \leq x \leq 220\,000$. Jest to zależność określona funkcją przedziałami liniową. Stosując nienormalizowaną metodę przyrostową wprowadzamy zmienne:

x_1 – wielkość produkcji po koszcie 10zł,
x_2 – wielkość produkcji po koszcie 9zł,
x_3 – wielkość produkcji po koszcie 8zł,
x_4 – wielkość produkcji po koszcie 7zł.

Koszt produkcji o wielkości x może być wtedy modelowany za pomocą zależności:

$$\begin{aligned}
&K = 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 \\
&x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
&50000u_1 \leq x_1 \leq 50000 \\
&40000u_2 \leq x_2 \leq 40000u_1 \\
&30000u_3 \leq x_3 \leq 30000u_2 \\
&0 \leq x_4 \leq 100000u_3 \\
&0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Przedziałami liniowe funkcje wypukłe

Modelowanie zależności z funkcjami przedziałami liniowymi może być znacznie uproszczone jeżeli są to funkcje wypukłe lub wklęsłe. Co więcej możliwe jest wtedy bezpośrednie modelowania przedziałami liniowych funkcji wielu zmiennych

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) & \text{dla } \mathbf{x} \in Q_1 \\ g_2(\mathbf{x}) & \text{dla } \mathbf{x} \in Q_2 \\ \dots & \\ g_m(\mathbf{x}) & \text{dla } \mathbf{x} \in Q_m \end{cases}$$

gdzie g_i są funkcjami liniowymi. Jeżeli g jest funkcją wypukłą, to może ona być wyrażona jako maksimum z funkcji g_i:

$$g(\mathbf{x}) = \max\{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})\}$$

Tym samym do jej modelowania mogą być wykorzystane techniki liniowo-całkowitoliczbowe modelowania wyboru wartości największej. Jeżeli w rozważanym obszarze różnice między wartościami funkcji g_i są ograniczone przez M, to zależność ta może być wyrażona jako

$$g(\mathbf{x}) \geq g_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m$$

$$g(\mathbf{x}) \leq g_i(\mathbf{x}) + Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1$$

W przypadku potrzeby modelowania tylko nierówności $z \geq g(\mathbf{x})$ zależności te redukują się prostego układu nierówności liniowych

$$z \geq g_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m$$

Analogicznie, jeżeli g jest funkcją wklęsłą, to może ona być wyrażona jako minimum z funkcji g_i:

$$g(\mathbf{x}) = \min\{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\}$$

Do jej modelowania mogą być wykorzystane techniki liniowo-całkowitoliczbowe modelowania wyboru wartości najmniejszej. Jeżeli w rozważanym obszarze różnice między wartościami funkcji g_i są ograniczone przez M, to zależność ta może być wyrażona jako

$$g(\mathbf{x}) \leq g_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g(\mathbf{x}) \geq g_i(\mathbf{x}) - Mu_i, \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq m - 1$$

W przypadku potrzeby modelowania tylko nierówności $z \leq g(\mathbf{x})$ zależności te redukują się prostego układu nierówności liniowych

$$z \leq g_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Metoda przyrostów dla funkcji wypukłych

Przy modelowaniu przedziałami liniowych funkcji jednej zmiennej metodą (nienormalizowanych) przyrostów wypukłość lub wklęsłość funkcji przekłada sie na proste własności ciągów współczynników a_i. Mianowicie, wypukła funkcja przedziałami liniowa g określona wzorem (2.1) na przedziale $[a; b]$, przy czym $\alpha_0 = a$,$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$,$\alpha_m = b$ oznaczają węzły, charakteryzuje się rosnącym (niemalejącym w przypadku braku załamania w węźle) ciągiem współczynników nachylenia $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$. W konsekwencji funkcję $g(x)$ można wyrazić w postaci zależności:

$$\begin{aligned} g(x) \quad = \quad & \min_{x_1,\ldots,x_m} (a_1\alpha_0 + b_1 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m) \\ & x = \alpha_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ & 0 \leq x_i \leq \beta_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

gdzie minimalizacja zastępuje (wymusza) dodatkowe implikacje

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{i-1} = \beta_{i-1} \quad \text{dla } i = 2, 3, \ldots, m$$

Tym samym, wypukła funkcja $g(x)$ jest tu modelowana bez użycia zmiennych binarnych.

Umożliwia to proste modelowanie nierówności $z \geq g(x)$ z funkcją wypukłą jako warunku

$$\begin{aligned} & z \geq a_1\alpha_0 + b_1 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \\ & x = \alpha_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ & 0 \leq x_i \leq \beta_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Na przykład, w problemie produkcyjnym jednostkowy koszt produkcji wynosi: 10 zł dla pierwszych 50 tys. jednostek produktu, 11 zł dla dalszych 40 tys. jednostek, 12 zł dla dalszych 30 tys. jednostek i 15 zł dla kolejnych 100 tys. jednostek. Wprowadzamy zmienne:

x – całkowita wielkość produkcji,
x_1 – wielkość produkcji przy koszcie 10 zł,
x_2 – wielkość produkcji przy koszcie 11 zł,
x_3 – wielkość produkcji przy koszcie 12 zł,
x_4 – wielkość produkcji przy koszcie 15 zł.

Rozważamy minimalizację kosztu przy określonych warunkach produkcji $x \in Q$. Można to zapisać w postaci zadania programowania liniowego.

$$\begin{aligned} \min\quad & z \\ & z \geq 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 15x_4 \\ & x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 50000 \\ & 0 \leq x_2 \leq 40000 \\ & 0 \leq x_3 \leq 30000 \\ & 0 \leq x_4 \leq 100000 \\ & x \in Q \end{aligned}$$

Z kolei, wklęsła funkcja przedziałami liniowa g określona wzorem (2.1) na przedziale $[a; b]$, przy czym $\alpha_0 = a$,$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$,$\alpha_m = b$ oznaczają wę zły, charakteryzuje się malejącym (nierosnącym w przypadku braku załamania w węźle) ciągiem współczynników nachylenia $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$. Dzięki temu funkcję $g(x)$ można wyrazić w postaci zależności:

$$\begin{aligned} g(x) \quad = \quad & \max_{x_1,\ldots,x_m} (a_1\alpha_0 + b_1 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m) \\ & x = \alpha_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ & 0 \leq x_i \leq \beta_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

gdzie maksymalizacja zastępuje (wymusza) dodatkowe implikacje

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{i-1} = \beta_{i-1} \quad \text{dla } i = 2, 3, \ldots, m$$

Umożliwia to proste modelowanie nierówności $z \leq g(x)$ z funkcją wklęsłą jako warunku

$$\begin{aligned} & z \leq a_1\alpha_0 + b_1 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \\ & x = \alpha_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ & 0 \leq x_i \leq \beta_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Możliwości wykorzystania tej techniki modelowania ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.7. Model dla maksymalizacji dochodu przy zmieniających się cenach

W problemie produkcyjnym jednostkowa cena sprzedaży wynosi: 1200 zł dla pierwszych 50 tys. jednostek produktu, 1000 zł dla dalszych 40 tys. jednostek, 900 zł dla dalszych 30 tys. jednostek i 700 zł dla kolejnych 100tys. jednostek. Wprowadzamy zmienne:

x – wielkość produkcji/sprzedaży,
x_1 – wielkość sprzedaży po cenie 1200 zł,
x_2 – wielkość sprzedaży po cenie 1000 zł,
x_3 – wielkość sprzedaży po cenie 900 zł,
x_4 – wielkość sprzedaży po cenie 700 zł.

Rozważamy maksymalizację dochodu przy określonych warunkach wytwarzania $x \in Q$. Można to zapisać w postaci zadania programowania liniowego.

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ & z \leq 1200x_1 + 1000x_2 + 900x_3 + 700x_4 \\ & x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 50000 \\ & 0 \leq x_2 \leq 40000 \\ & 0 \leq x_3 \leq 30000 \\ & 0 \leq x_4 \leq 100000 \\ & x \in Q \end{array}$$

W rozważanym tu przykładzie mieliśmy do czynienia z malejącymi cenami (zyskami) jednostkowymi. W przypadku maksymalizacji dochodu w warunkach rosnących zysków jednostkowych model będzie oczywiście bardziej skomplikowany, bo funkcja przedziałami liniowa będzie wypukła a nie wklęsła. Na przykład, jednostkowa cena sprzedaży wynosi: 1200 zł dla pierwszych 50 tys. jednostek produktu, 1300 zł dla dalszych 40 tys. jednostek, 1400 zł dla dalszych 30 tys. jednostek i 1500 zł dla kolejnych 100tys. jednostek. Jak poprzednio wprowadzamy zmienne x oraz x_1, x_2, x_3 i x_4. Rozważamy maksymalizację zysku przy określonych warunkach wytwarzania $x \in Q$. W tym wypadku jednak, z powodu braku wklęsłości funkcji celu musimy sformułować zadanie programowania liniowo-całkowitoliczbowego.

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ & z \leq 1200x_1 + 1000x_2 + 900x_3 + 700x_4 \\ & x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ & 50000u_1 \leq x_1 \leq 50000 \\ & 40000u_2 \leq x_2 \leq 40000u_1 \\ & 30000u_3 \leq x_3 \leq 30000u_2 \\ & 0 \leq x_4 \leq 100000u_3 \\ & 0 \leq u_i \leq 1, \quad u_i \in Z, \quad i = 1,2,3 \\ & x \in Q \end{array}$$

Użycie zmiennych binarnych u_i jest tu konieczne ponieważ sama maksymalizacja nie gwarantuje wykorzystania x_1 przed x_2 itd. $\square$

Zależności nieliniowe ze zmiennymi dyskretnymi

W przypadku zmiennych dyskretnych zależności nieliniowe mogą być zazwyczaj sprowadzone postaci równań i nierówności liniowych. Na przykład, zależność w postaci iloczynu zmiennych binarnych:

$$y_3 = y_1 y_2, \quad y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$$

wyraża faktycznie równoważność

$$y_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\, y_1 = 1 \,\wedge\, y_2 = 1 \,)$$

Zależność $y_3 = y_1 y_2$ może być zapisana w postaci modelu liniowego

$$
\begin{aligned}
&y_3 \le y_1 \\
&y_3 \le y_2 \\
&y_1 + y_2 \le y_3 + 1
\end{aligned}
$$

Podobnie w przypadku iloczynu zmiennej binarnej i ograniczonej zmiennej ciągłej

$$z = xy, \quad y \in \{0, 1\},\ 0 \le x \le M$$

czyli zależności

$$z = \begin{cases} 0 & \text{dla } y = 0 \\ x & \text{dla } y = 1 \end{cases}$$

Zależność $z = xy$ może być modelowana za pomocą warunków liniowych

$$
\begin{aligned}
&0 \le z \le My \\
&z \le x \\
&x - z + My \le M
\end{aligned}
$$