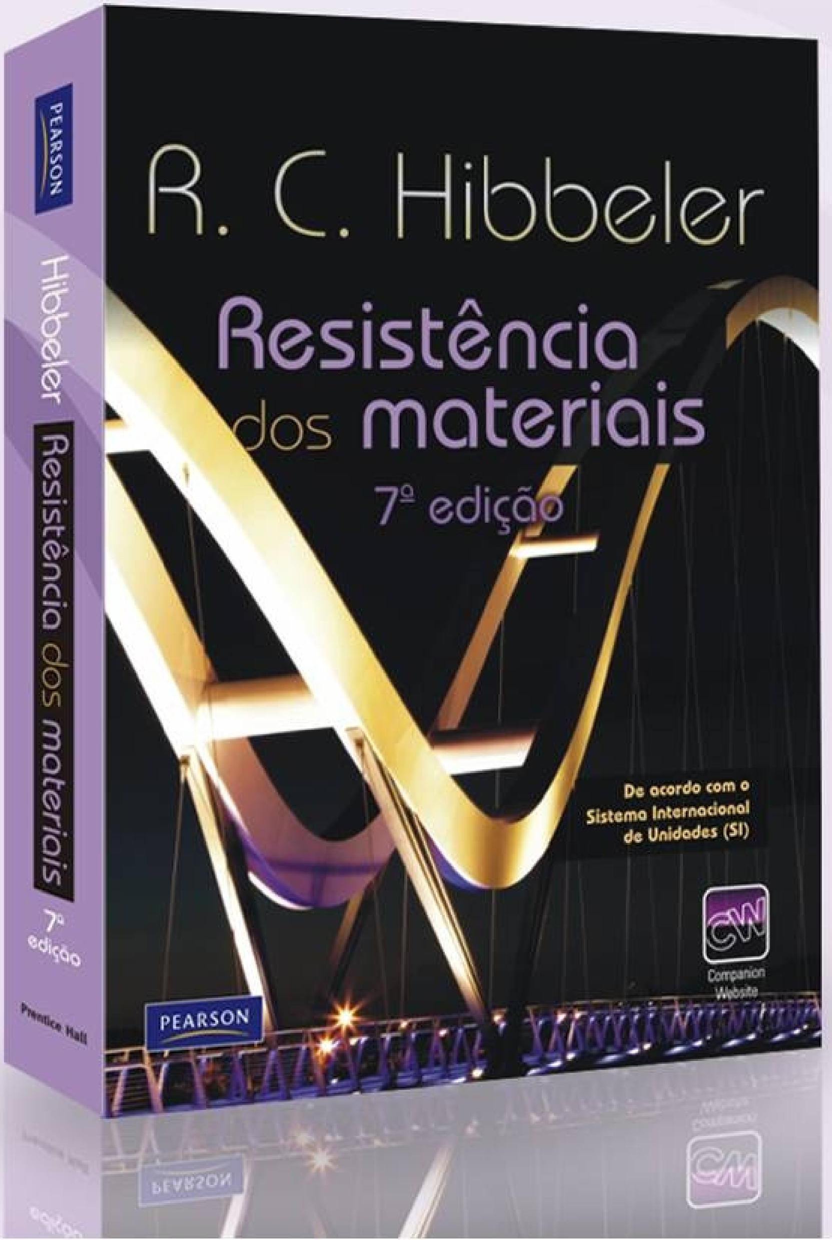
Capítulo 9:

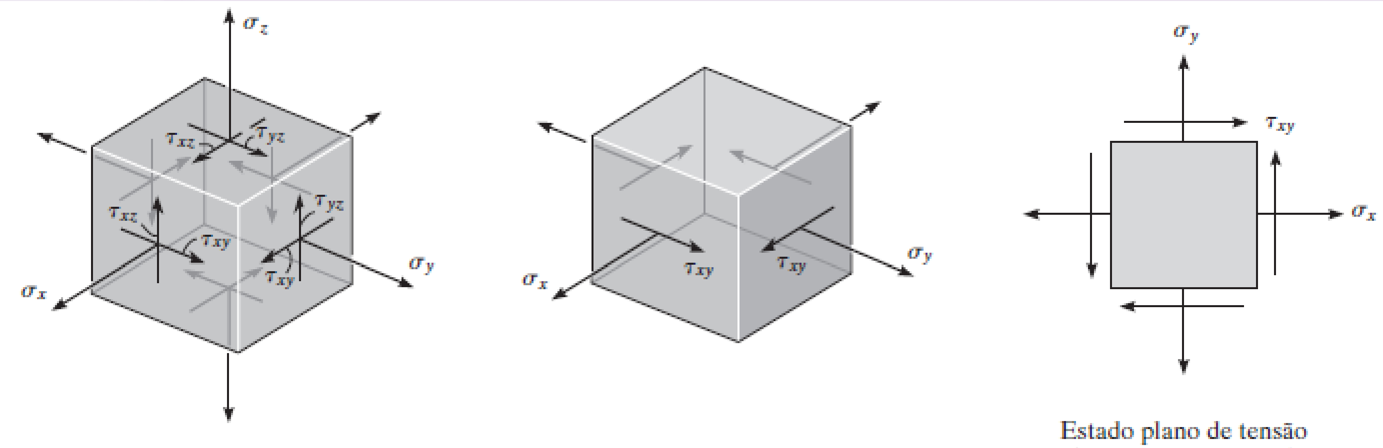
Transformação de tensão



Transformação de tensão no plano

- O estado **geral** de tensão em um ponto é caracterizado por **seis** componentes independentes da tensão normal e de cisalhamento.

- A tensão pode ser analisada em um **único plano**.

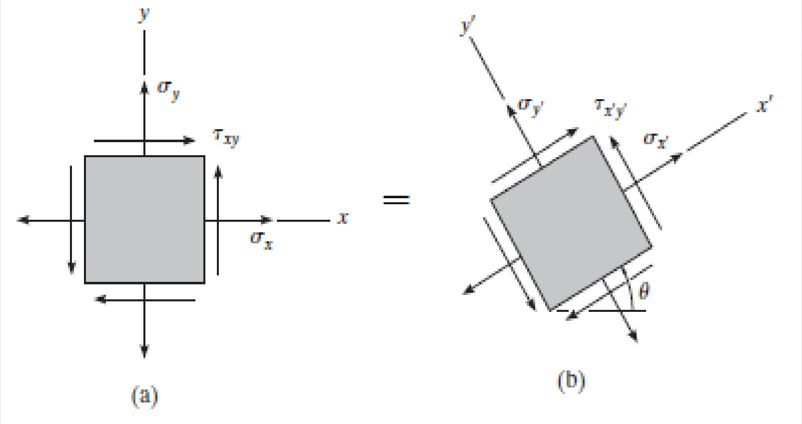


Estado geral de tensão
(a)

Estado plano de tensão
(b)

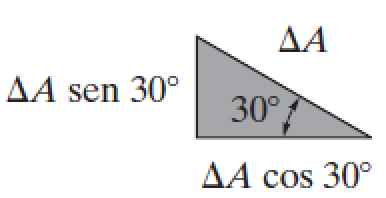
Estado plano de tensão
(visão bidimensional)
(c)

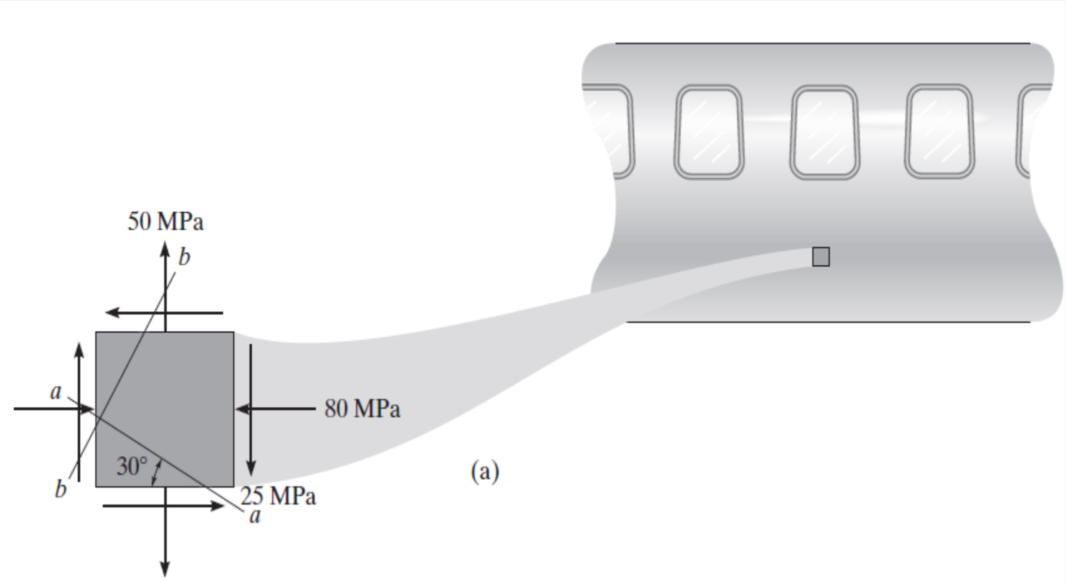
- Modificação na orientação produz componentes de tensão diferentes.



Exemplo 9.1

O estado plano de tensão em um ponto da superfície da fuselagem do avião é representado no elemento orientado como mostra a figura. Represente o estado de tensão no ponto em um elemento orientado a 30º no sentido horário em relação à posição mostrada.

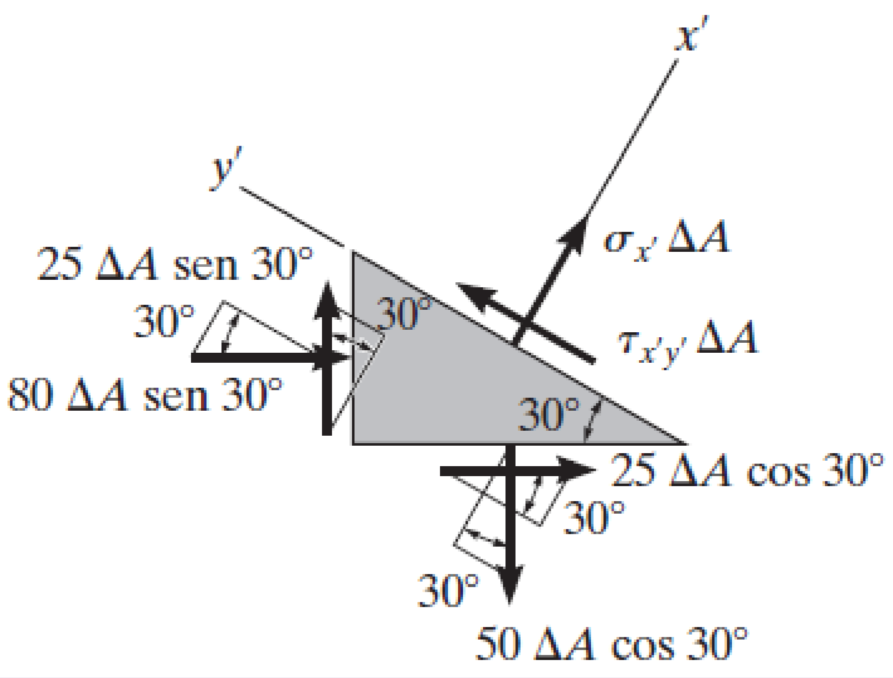


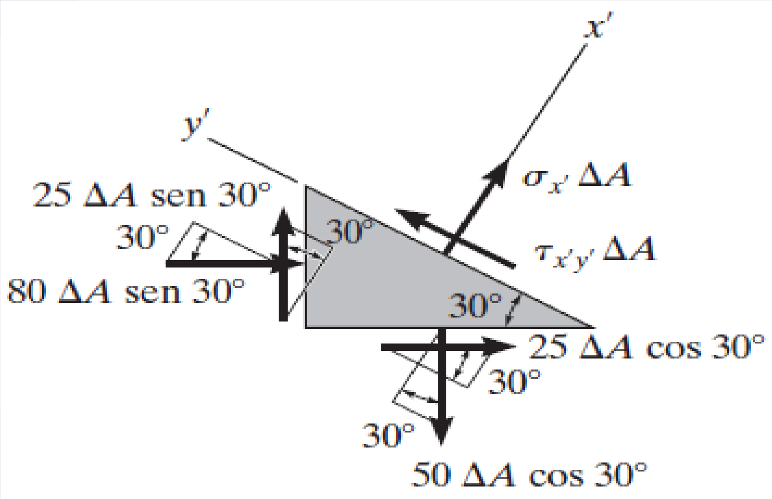


Solução:

O elemento é secionado pela reta *a*–*a* (eixo *y*′).

Diagrama de corpo livre (força = tensão x área):

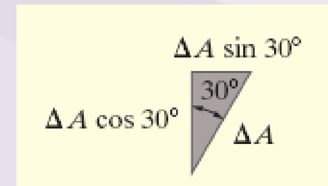




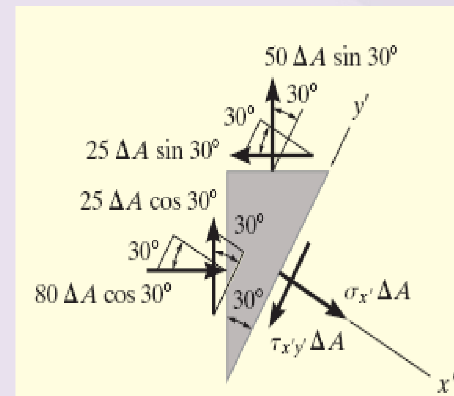
$$\sum F_{x'}=0; \quad \sigma_{x'}\Delta A-(50\,\Delta A\cos 30°)\cos 30°+(25\,\Delta A\cos 30°)\,\mathrm{sen}\,30°$$
$$+(80\,\Delta A\,\mathrm{sen}\,30°)\,\mathrm{sen}\,30°+(25\,\Delta A\,\mathrm{sen}\,30°)\cos 30°=0$$
$$\boxed{\sigma_{x'}=-4{,}15\ \mathrm{MPa}}$$

$$\sum F_{y'}=0; \quad \tau_{x'y'}\Delta A-(50\,\Delta A\cos 30°)\,\mathrm{sen}\,30°-(25\,\Delta A\cos 30°)\cos 30°$$
$$-(80\,\Delta A\,\mathrm{sen}\,30°)\cos 30°+(25\,\Delta A\cos 30°)\,\mathrm{sen}\,30°=0$$
$$\boxed{\tau_{x'y'}=68{,}8\ \mathrm{MPa}}$$

Repita o procedimento para obter a tensão no plano *perpendicular b–b*.

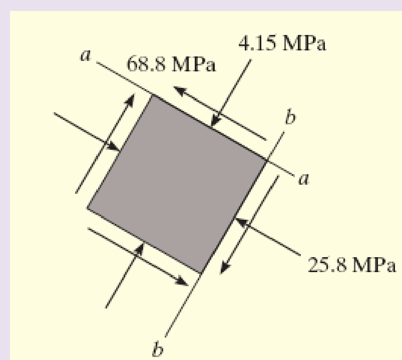


$$\sum F_{x'}=0; \qquad \sigma_{x'}\,\Delta A-(25\,\Delta A\cos 30°)\,\text{sen}30°+(80\,\Delta A\cos 30°)\cos 30°$$
$$-(25\,\Delta A\cos 30°)\cos 30°-(50\,\Delta A\,\text{sen}30°)\,\text{sen}30°=0$$
$$\boxed{\sigma_{x'}=-25{,}8\text{ MPa}}$$

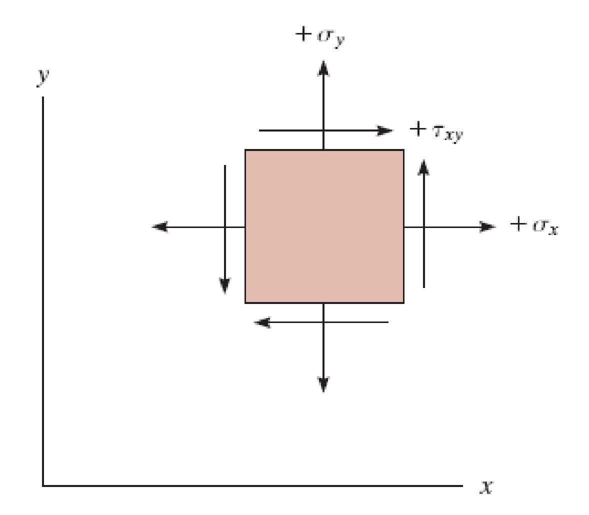


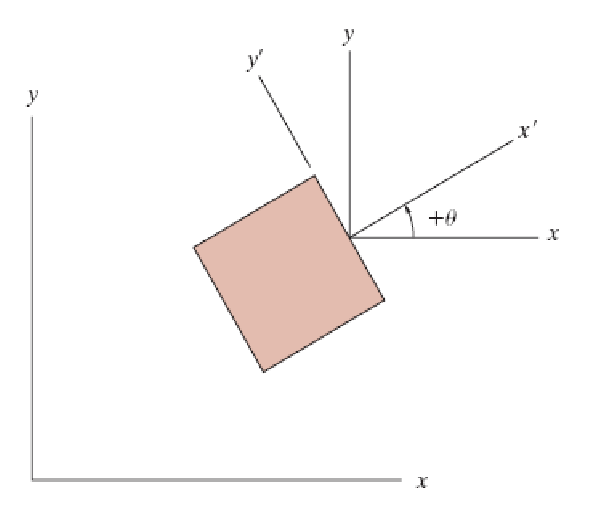
$$\sum F_{y'}=0; \qquad -\tau_{x'y'}\,\Delta A+(25\,\Delta A\cos 30°)\cos 30°+(80\,\Delta A\cos 30°)\,\text{sen}30°$$
$$-(25\,\Delta A\,\text{sen}30°)\,\text{sen}30°+(50\,\Delta A\,\text{sen}30°)\cos 30°=0$$
$$\boxed{\tau_{x'y'}=68{,}8\text{ MPa}}$$

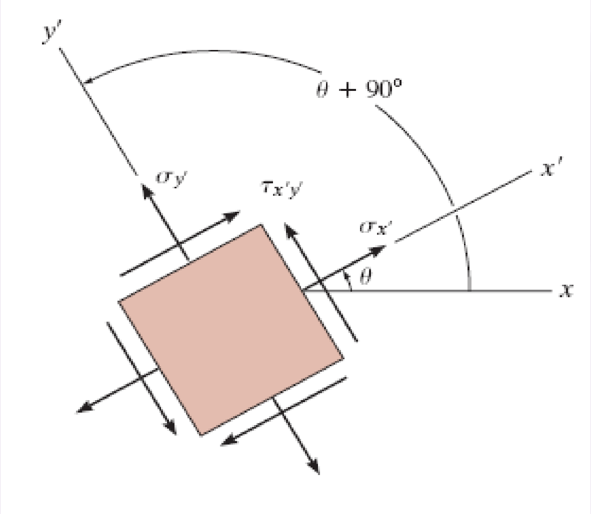
O estado de tensão no ponto pode ser representado na nova orientação.



Equações gerais de transformação de tensão no plano







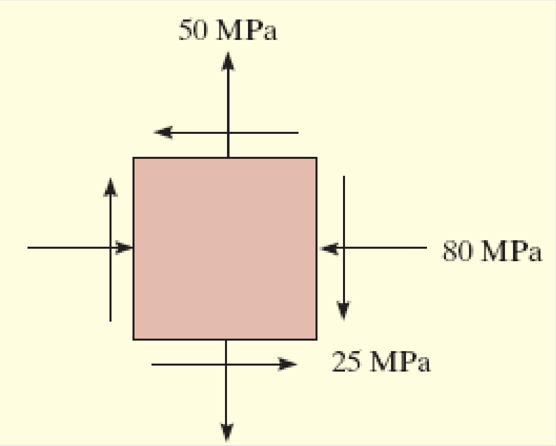
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Exemplo 9.2

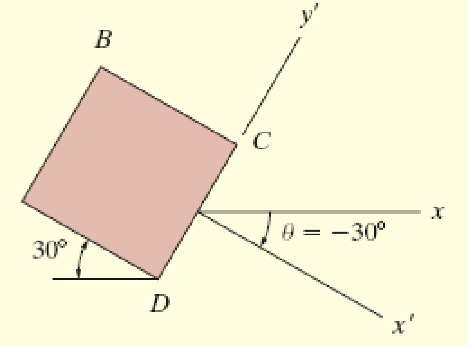
O estado plano de tensão em um ponto é representado pelo elemento mostrado na figura. Determine o estado de tensão no ponto em outro elemento orientado a 30º no sentido anti-horário em relação à posição mostrada.



Solução:

Pela convenção de sinal, temos

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa} \quad \theta = -30\,°$$



Para obter as componentes de tensão no plano *CD*,

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = -25{,}8 \text{ MPa} \quad (\text{Resposta})$$

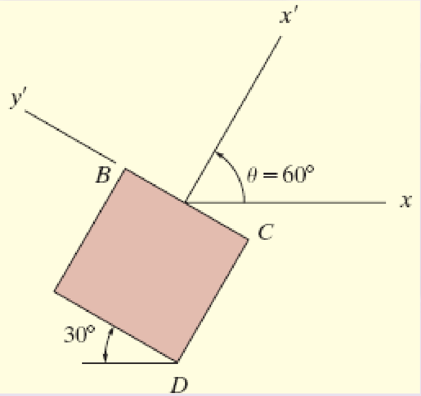
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -68{,}8 \text{ MPa} \quad (\text{Resposta})$$

Para obter os componentes de tensão no plano *BC*,

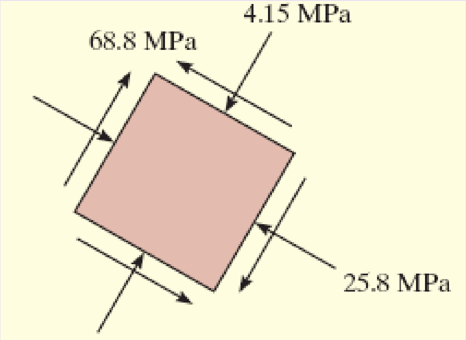
$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa} \qquad \theta = -60^\circ$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta = -4{,}15 \text{ MPa} \quad (\text{Resposta})$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = 68{,}8 \text{ MPa} \quad (\text{Resposta})$$

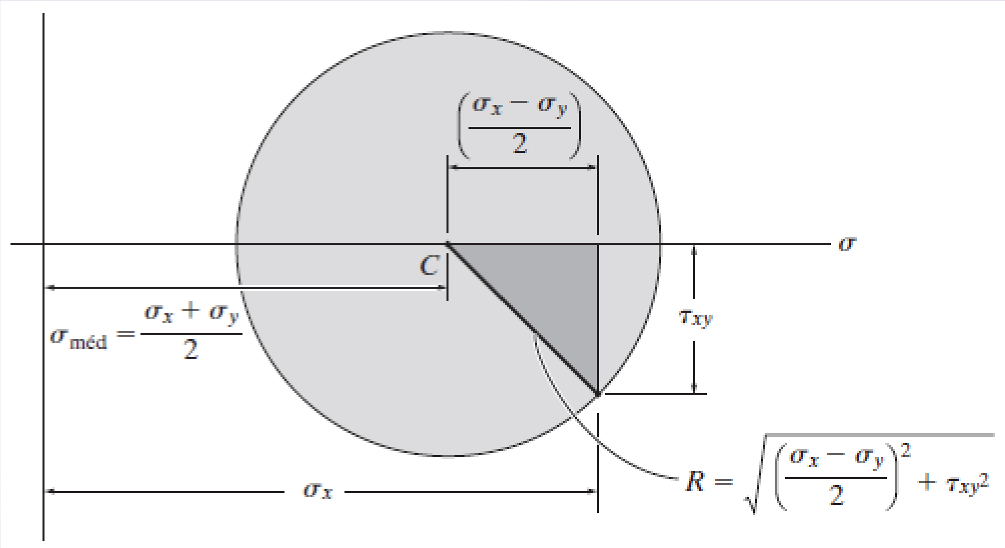


Os resultados são mostrados na figura abaixo.



Círculo de Mohr — tensão no plano

- A transformação da tensão no plano têm uma solução gráfica que é fácil de lembrar.



(b)

- σ é positivo para a direita e τ é positivo para baixo

1) Centro do círculo: $$a = \sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\ ,\ b = 0\,.$$

2) Raio do círculo: $$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

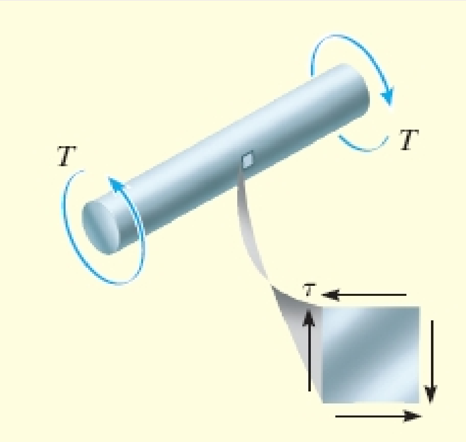
3) Ponto $A\left(\sigma_x, \tau_{xy}\right)$

4) Tensões principais: $$\sigma_1 = a + R\ ,\quad \sigma_2 = a - R$$

5) Orientações das tensões principais: $$2\theta = arctg\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

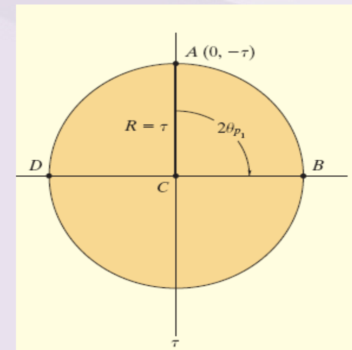
Exemplo 9.5

A carga de torção *T* produz o estado de tensão no eixo como mostrado na figura abaixo. Construa o círculo de Mohr para esse caso.



Solução:

Estado plano de tensões na orientação dada:



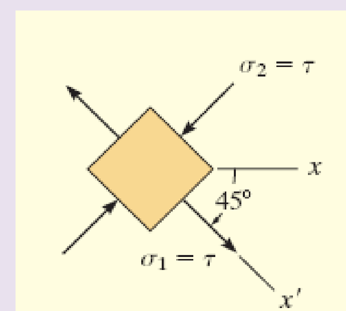
$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0 \ \text{e} \ \tau_{xy} = -\tau$$

1) Centro do círculo: $\sigma_{\text{méd}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0$

2) Raio do círculo: $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau$

3) Ponto A: $(0, \tau)$

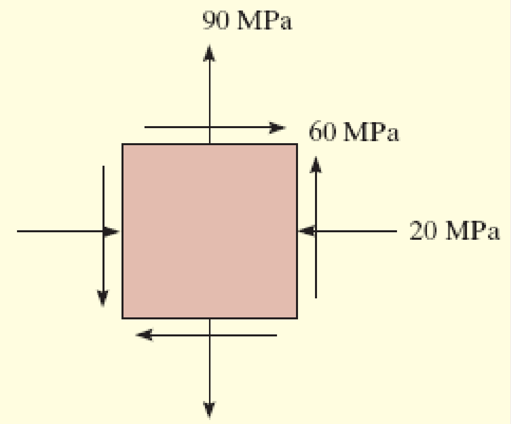
4) Tensões principais: $\sigma_1 = a + R = \tau, \sigma_2 = a - R = -\tau$



5) Orientação: $2\theta = arctg\left(\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \Rightarrow \theta = 45^\circ$

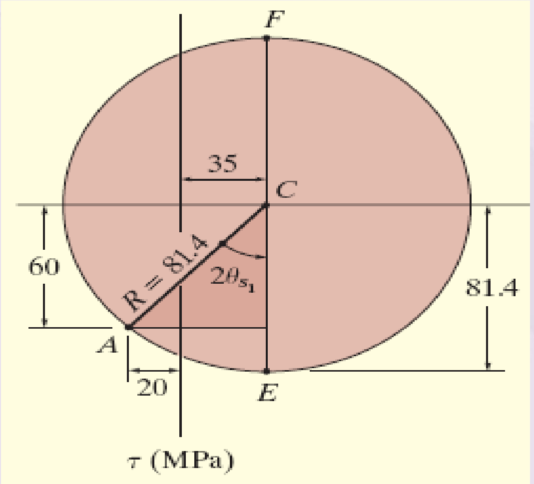
Exemplo 9.6

O estado plano de tensão em um ponto é mostrado no elemento na figura abaixo. Determine a tensão de cisalhamento máxima no plano e a orientação do elemento sobre o qual ela age.



Solução:

Estado plano de tensões: $\sigma_x = -20, \sigma_y = 90$ e $\tau_{xy} = 60$



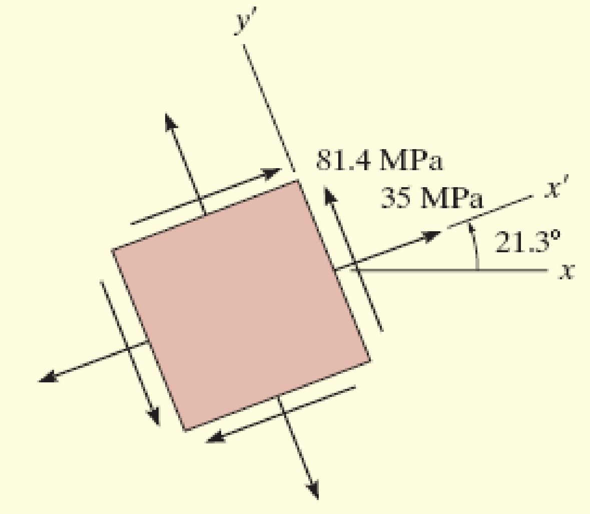
1) Centro do círculo: $\sigma_{méd} = \dfrac{-20+90}{2} = 35\text{ MPa}$

2) Ponto de referência *A*: $(\sigma_x = -20, \tau_{xy} = 60)$

3) Raio: $R = \sqrt{60^2 + 55^2} = 81{,}4\text{ MPa}$

4) Tensão de cisalhamento máxima no plano (ponto F):

$$\boxed{\tau_{máx} = 81{,}4\ MPa,\quad \sigma_{méd} = 35\ MPa}$$

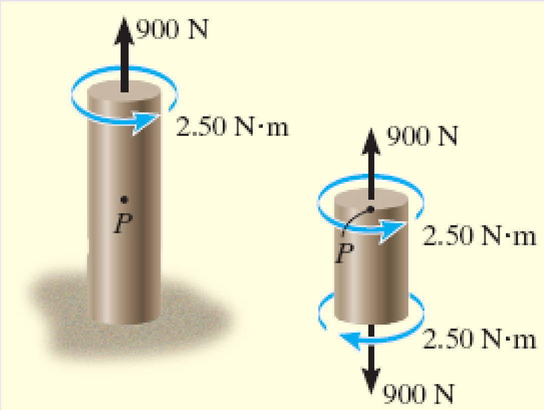


5) O ângulo em sentido anti-horário é

$$2\theta = tg^{-1}\left(\frac{20+35}{60}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 21{,}3°}$$

Exemplo 9.7

Uma força axial de 900 N e um torque de 2,5 Nm são aplicados ao eixo. Se o diâmentro do eixo for de 40 mm, determine as tensões principais em um ponto *P* sobre sua superfície.



Solução:

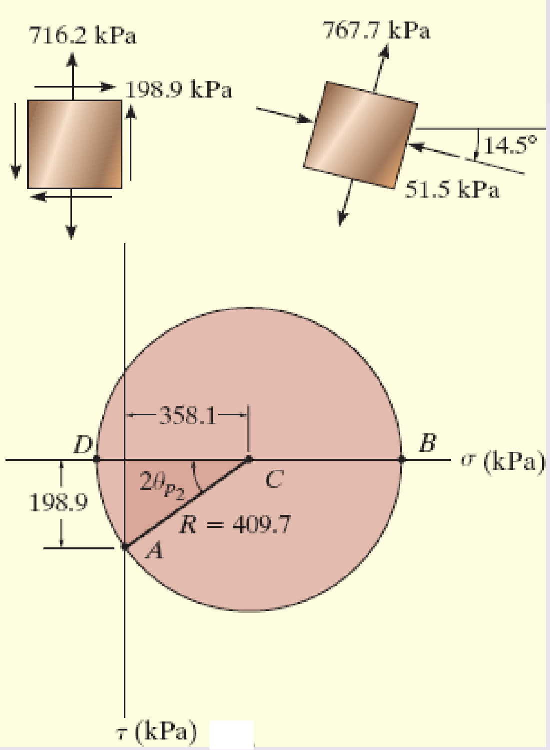
Estado plano de tensão no ponto:

$$\tau_{xy}=\frac{Tc}{J}=\frac{2,5\left(0,02\right)}{\frac{\pi}{2}\left(0,02\right)^4}=198,9\text{ kPa},\quad \sigma_y=\frac{P}{A}=\frac{900}{\pi\left(0,02\right)^2}=716,2\text{ kPa},\quad \sigma_x=0.$$

Centro do círculo de Mohr: $$\sigma_{méd}=\frac{0+716,2}{2}=358,1\text{ kPa}$$

Raio do círculo de Mohr:

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\sqrt{\left(\frac{0-716,2}{2}\right)^2+198,9^2}=409,7\,kPa$$

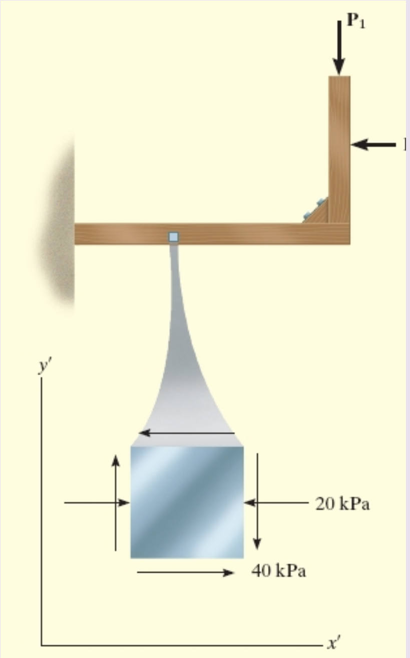


As tensões principais estão representadas pelos pontos *B* e *D*, portanto

$$\sigma_1=358,1+409,7=767,7\text{ kPa}\quad(\text{Resposta})$$
$$\sigma_2=358,1-409,7=-51,5\text{ kPa}\quad(\text{Resposta})$$

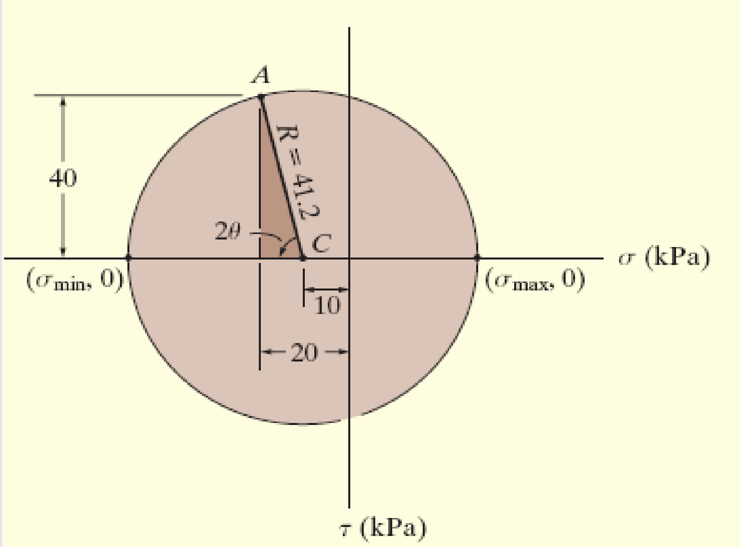
Exemplo 9.9

Devido ao carregamento aplicado, o elemento no ponto sobre a estrutura está sujeito ao estado plano de tensão mostrado na figura. Determine as tensões principais.



Solução:

O centro do círculo é $\sigma_{méd} = \dfrac{-20+0}{2} = -10 \text{ kPa}$

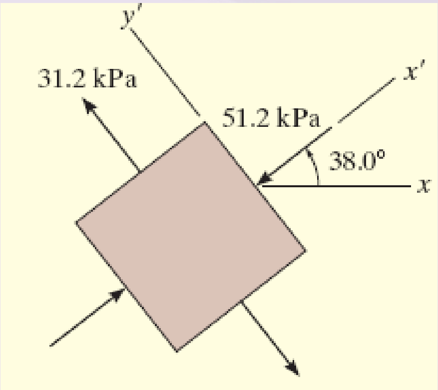


O ponto de referência é A (–20, –40).

O raio é $R = \sqrt{(20-10)^2 + 40^2} = 41{,}2 \text{ kPa}$

As tensões principais encontram-se nos pontos onde o círculo intercepta o eixo σ:

$$\sigma_{\text{máx}} = -10 + 41{,}2 = 31{,}2 \text{ kPa}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -10 - 41{,}2 = -51{,}2 \text{ kPa}$$



Pelo círculo, o ângulo *anti-horário* é

$$2\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{40}{20-10}\right) \Rightarrow \theta = 38{,}0\,°$$