





LUIZ BRANDÃO

Desenvolvendo → habilidades ←

Exercícios para
Diversas Áreas



Neste problema, vamos abordar a análise de um sistema mecânico composto por molas em série e paralelo, utilizando o **Método dos Elementos Finitos (FEM)** para determinar os deslocamentos em pontos específicos do sistema. O problema consiste em encontrar os deslocamentos em três nós de um sistema estrutural composto por molas de diferentes rigidezes, sujeitas a forças aplicadas.

A análise do comportamento de sistemas de molas é fundamental em várias áreas da engenharia mecânica e civil, pois permite prever como a estrutura responderá a diferentes cargas. Neste caso, a estrutura é modelada como uma rede de molas interconectadas que estão sujeitas a forças externas. A formulação do problema envolve a aplicação do conceito de **rigidez**, que relaciona a força aplicada em um ponto da estrutura com o deslocamento desse ponto.

Para resolver o problema, seguiremos os seguintes passos:

1. **Modelagem do Sistema de Molas:** Cada mola será re-

presentada por uma matriz de rigidez local, que descreve a relação entre as forças e os deslocamentos dos nós conectados por aquela mola.

2. **Montagem da Matriz de Rígidez Global:** Combinamos as contribuições das diferentes molas para formar uma matriz de rigidez global, que relaciona os deslocamentos em todos os nós do sistema com as forças aplicadas.
3. **Aplicação das Condições de Contorno:** As condições de contorno, como nós fixos, serão incorporadas ao sistema, permitindo simplificar a equação para apenas os nós com deslocamentos desconhecidos.
4. **Resolução do Sistema de Equações:** Utilizando técnicas de álgebra linear, resolveremos o sistema de equações para determinar os deslocamentos nos nós de interesse.

Neste estudo, focaremos no cálculo dos deslocamentos nos pontos B , C e D , que estão sujeitos a forças externas conhecidas e conectados por molas de rigidez K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 e K_6 . A resolução envolverá o uso da matriz de rigidez global, que combina todas as influências das molas, e o vetor de forças, que reflete as cargas aplicadas. O método utilizado é uma forma eficiente de analisar o comportamento de sistemas estruturais complexos, permitindo uma solução numérica precisa para o problema de deslocamentos.

I | Lista I - Rígidez

Dessa forma, ao final do processo, obteremos os deslocamentos nos nós B , C e D , que indicam a deformação do sistema sob as forças aplicadas.

RESOLUÇÃO

Quando se está modelando um sistema de molas ou uma estrutura com nós fixos (ou seja, nós onde o deslocamento é zero), as linhas e colunas correspondentes a esses nós na **matriz de rigidez global** podem ser removidas ou ajustadas. Isso se deve ao fato de que, para nós fixos, não há deslocamento, o que simplifica o sistema de equações.

Nesse exercício, os pontos A e E são fixos, o que implica que os deslocamentos U_A e U_E são zero. Portanto:

1. As **linhas** correspondentes aos nós fixos (A e E) podem ser removidas da matriz de rigidez global porque não precisa resolver para os deslocamentos nesses pontos (já que são conhecidos: $U_A = 0$ e $U_E = 0$).
2. As **colunas** correspondentes a esses nós também podem ser removidas, pois as forças aplicadas nesses nós (forças de reação) não são de interesse direto no cálculo dos deslocamentos.

PROCESSO:

1. Inicialmente, se monta uma **matriz de rigidez global** 5×5

(supondo que os nós do sistema são A, B, C, D, E).

2. Em seguida, como os deslocamentos em A e E são fixos ($U_A = U_E = 0$), se remove as linhas e colunas correspondentes aos nós A e E .
3. O que resta é um **sistema reduzido** (matriz 3×3), onde resolve para os deslocamentos nos nós B, C e D .

Vamos fazer o passo a passo da resolução desse problema de sistemas de molas.

PASSO A PASSO:

1. Modelagem do Sistema de Molas

Primeiro, precisa representar cada mola do sistema por sua matriz de rigidez local. Para uma mola com rigidez K , conectando dois nós i e j , a matriz de rigidez local será:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \quad (\text{o.1})$$

2. Montagem da Matriz de Rigidez Global

Para o sistema com cinco nós A, B, C, D, E , precisa montar uma matriz de rigidez global \mathbf{K}_{global} com dimensão 5×5 . Vamos rotular as molas e suas constantes de rigidez conforme a figura, e então montar a matriz global.

I | Lista I - Rígidez

- $K_1 = 200 \text{ Kgf/mm}$ (entre A e B)
- $K_2 = 100 \text{ Kgf/mm}$ (entre B e C)
- $K_3 = 150 \text{ Kgf/mm}$ (entre B e C)
- $K_4 = 300 \text{ Kgf/mm}$ (entre B e D)
- $K_5 = 400 \text{ Kgf/mm}$ (entre C e D)
- $K_6 = 500 \text{ Kgf/mm}$ (entre D e E)

Matriz de rigidez de cada (n) elemento, fica:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & 200 & -200 \\ B & -200 & 200 \end{array}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{array}{c|cc} & B & C \\ \hline B & 100 & -100 \\ C & -100 & 100 \end{array}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 150 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{array}{c|cc} & B & C \\ \hline B & 150 & -150 \\ C & -150 & 150 \end{array}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 300 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{array}{c|cc} & B & D \\ \hline B & 300 & -300 \\ D & -300 & 300 \end{array}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{array}{c|cc} & C & D \\ \hline C & 400 & -400 \\ D & -400 & 400 \end{array}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{array}{c|cc} & D & E \\ \hline D & 500 & -500 \\ E & -500 & 500 \end{array}$$

A matriz de rigidez global K_{global} antes da remoção dos nós fixos será:

1. Definir $K_A = K_1$.
2. Definir $K_B = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$.
3. Definir $K_C = K_2 + K_3 + K_5$.
4. Definir $K_D = K_4 + K_5 + K_6$.
5. Definir $K_E = K_6$.

$$\mathbf{K}_{global} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_B & -K_2 - K_3 & -K_4 & 0 \\ 0 & -K_2 - K_3 & K_C & -K_5 & 0 \\ 0 & -K_4 & -K_5 & K_D & -K_6 \\ 0 & 0 & 0 & -K_6 & K_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{global} = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ B & -K_1 & K_B & -K_2 - K_3 & -K_4 & 0 \\ C & 0 & -K_2 - K_3 & K_C & -K_5 & 0 \\ D & 0 & -K_4 & -K_5 & K_D & -K_6 \\ E & 0 & 0 & 0 & -K_6 & K_6 \end{array}$$

Substituindo os valores das rígidezes:

1. Definir $K_B = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 750$.
2. Definir $K_C = K_2 + K_3 + K_5 = 650$.
3. Definir $K_D = K_4 + K_5 + K_6 = 1200$.

$$\mathbf{K}_{global} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 750 & -250 & -300 & 0 \\ 0 & -250 & 650 & -400 & 0 \\ 0 & -300 & -400 & 1200 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix}$$

3. Aplicação das Condições de Contorno

Como os nós A e E são fixos ($U_A = 0$ e $U_E = 0$), removemos as linhas e colunas correspondentes a esses nós. Isso significa remover a primeira linha/coluna (nó A) e a última linha/coluna (nó E).

A matriz de rigidez reduzida será 3×3 , representando os deslocamentos dos nós B, C, D :

$$\mathbf{K}_{reduzida} = \begin{bmatrix} 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix}$$

4. Forças Aplicadas

As forças aplicadas nos nós B, C, D são fornecidas na figura:

i. $F_B = 400 \text{ Kgf}$

I | Lista I - Rígidez

2. $F_C = 300 \text{ Kgf}$

3. $F_D = 500 \text{ Kgf}$

Então, o vetor de forças \mathbf{F} é:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

5. Resolução do Sistema de Equações

Agora que temos a matriz de rigidez reduzida e o vetor de forças, podemos resolver para os deslocamentos U_B, U_C, U_D resolvendo o sistema:

$$\mathbf{K}_{\text{reduzida}} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_D \end{bmatrix} = \mathbf{F}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

6. Código Scilab para Resolver o Sistema

Listing 1: Código para Resolver o Problema em Scilab

```
clear, clc  
// Definindo as rígidezes das molas  
K1 = 200; // Kgf/mm  
K2 = 100; // Kgf/mm  
K3 = 150; // Kgf/mm  
K4 = 300; // Kgf/mm  
K5 = 400; // Kgf/mm  
K6 = 500; // Kgf/mm  
  
// Criando as matrizes de rigidez locais  
K_local1 = [K1, -K1; -K1, K1];  
K_local2 = [K2, -K2; -K2, K2];  
K_local3 = [K3, -K3; -K3, K3];  
K_local4 = [K4, -K4; -K4, K4];  
K_local5 = [K5, -K5; -K5, K5];  
K_local6 = [K6, -K6; -K6, K6];  
  
disp("K_1", K_local1);  
disp("K_2", K_local2);  
disp("K_3", K_local3);  
disp("K_4", K_local4);  
disp("K_5", K_local5);  
disp("K_6", K_local6);
```

```
// Montando a matriz de rigidez global
K_global = zeros(5, 5);
// 5 n s (A, B, C, D, E)
disp("K_global", K_global)

// A e E são os nós fixos, então
// suas linhas e colunas são zeradas
K_global(1, 1) = K1; // K_A (A)
disp("K_global(1,1)", K_global(1, 1))

K_global(1, 2) = -K1; // -K_A (A, B)
disp("K_global(1,2)", K_global(1, 2))

K_global(2, 1) = -K1; // -K_A (B, A)
disp("K_global(2,1)", K_global(2, 1))

// K_B (B)
K_global(2, 2) = K1 + K2 + K3 + K4;
disp("K_global(2,2)", K_global(2, 2))

K_global(2, 3) = -K2 - K3; // -K_C (B, C)
disp("K_global(2,3)", K_global(2, 3))
```

```
K_global(2, 4) = -K4; // -K_D (B, D)
disp("K_global(2,4)",K_global(2, 4))

K_global(3, 2) = -K2 - K3; // -K_C (C, B)
disp("K_global(3,2)",K_global(3, 2))

K_global(3, 3) = K2 + K3 + K5; // K_C (C)
disp("K_global(3,3)",K_global(3,3))

K_global(3, 4) = -K5; // -K_D (C, D)
disp("K_global(3,4)",K_global(3, 4))

K_global(4, 2) = -K4; // -K_D (D, B)
disp("K_global(4,2)",K_global(4, 2))

K_global(4, 3) = -K5; // -K_D (D, C)
disp("K_global(4,3)",K_global(4, 3))

K_global(4, 4) = K4 + K5 + K6; // K_D (D)
disp("K_global(4,4)",K_global(4, 4))

K_global(4, 5) = -K6; // -K_E (D, E)
disp("K_global(4,5)",K_global(4, 5))

K_global(5, 4) = -K6; // -K_E (E, D)
```

I | Lista I - Rígidez

```
disp("K_global(5, 4)", K_global(5, 4))

K_global(5, 5) = K6; // K_E (E)
disp("K_global(5, 5)", K_global(5, 5))

// Removendo as linhas e colunas
// correspondentes aos n s fixos (A e E)
K_reduced = K_global(2:4, 2:4); // 3x3
disp("K_reduced", K_reduced)

// Definindo o vetor de for as aplicadas
F = [0; 400; 300; 500];
// For as aplicadas em B e C
disp("F", F)

// Ajustando o vetor de for as
F_reduced = F(2:4);
// Removendo for as em A e E
disp("F_reduced", F_reduced)

// Resolvendo o sistema de
// equa es K * U = F
U_reduced = inv(K_reduced) * F_reduced;
disp("U_reduced", U_reduced)
```

Listing 2: Resposta do Problema em Scilab

```
"K_"
 200.   -200.
 -200.    200.

"K_2"
 100.   -100.
 -100.    100.

"K_3"
 150.   -150.
 -150.    150.

"K_4"
 300.   -300.
 -300.    300.

"K_5"
 400.   -400.
 -400.    400.

"K_6"
 500.   -500.
 -500.    500.

"K_global"
 0.     0.     0.     0.     0.
 0.     0.     0.     0.     0.
 0.     0.     0.     0.     0.
```

I | Lista I - Rigidez

```
0.      0.      0.      0.      0.  
0.      0.      0.      0.      0.  
  
"K_global(1,□1)"  
200.  
"K_global(1,□2)"  
-200.  
"K_global(2,□1)"  
-200.  
"K_global(2,□2)"  
750.  
"K_global(2,□3)"  
-250.  
"K_global(2,□4)"  
-300.  
"K_global(3,□2)"  
-250.  
"K_global(3,□3)"  
650.  
"K_global(3,□4)"  
-400.  
"K_global(4,□2)"  
-300.  
"K_global(4,□3)"  
-400.
```

```
"K_global(4,□4)"  
1200.  
"K_global(4,□5)"  
-500.  
"K_global(5,□4)"  
-500.  
"K_global(5,□5)"  
500.  
  
"K_reduced"  
750.    -250.    -300.  
-250.    650.    -400.  
-300.    -400.    1200.  
  
"F"  
0.  
400.  
300.  
500.  
  
"F_reduced"  
400.  
300.  
500.
```

1 | Lista 1 - Rigidez

```
"U_reduced"  
1.9208103  
2.2044199  
1.6316759
```