

Математика

Павел Зиновьев

3 сентября 2015 г.

Аннотация

Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями. Лучший математик – кто устанавливает аналогии доказательств. Более сильный может заметить аналогии теорий. Но есть и такие, кто между аналогиями видит аналогии.

Стефан Банах ©

Содержание

1	Информация	3
1.1	Книги	3
2	Матрицы	3
2.1	Сложение матриц	3
2.2	Вычитание матриц	3
2.3	Умножение матриц	3
2.4	Транспонирование матриц	4
2.5	Произведение матриц	4
2.6	Определители	4
2.6.1	Определитель квадратной матрицы 2-го порядка	5
2.6.2	Определитель квадратной матрицы 3-го порядка	5
2.7	Задание на дом	6
	Содержание	

1 Информация

Преподаватель: Христич Дмитрий Викторович (каб. 12-314)

1.1 Книги

Дмитрий Кузнецов - Сборник задач по высшей математике

Под редакцией Ефимова, Демидович - сборник задач для ВТУЗов

Данко, Попов, Кожевникова - Высшая математика в упражнениях и задачах

Клетеник - сборник задач по аналитической геометрии

2 Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются элементами матрицы. Матрицы обозначаются A, B, C, \dots или $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$

Первый индекс - номер строки, второй индекс - номер столбца

2.1 Сложение матриц

Суммой двух матриц A, B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $(a), (b)$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) & 0+6 & -1+8 \\ 3+4 & 4+(-2) & 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

2.2 Вычитание матриц

Разностью двух матриц A, B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A - B$ того же размера, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матриц $(a), (b)$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-3) & 0-6 & -1-8 \\ 3-4 & 4-(-2) & 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -9 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

2.3 Умножение матриц

При умножении матрицы A на действительное число α получается матрица $B = \alpha A$ того же размера

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

$$3 \times \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 & 5 \times 3 \\ 7 \times 3 & -6 \times 3 \\ 1 \times 3 & 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ 21 & -18 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \times \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 6 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 60 \\ 24 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & -51 \\ -25 & -76 \end{pmatrix}$$

2.4 Транспонирование матриц

Транспонирование матрицы состоит в замене строк матрицы её столбцами с соответствующими номерами

$$B = A^T$$
$$b_{(ij)} = a_{(ji)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2.5 Произведение матриц

Произведением матриц А и В называется матрица С, каждый элемент которой равен

$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \times b_{lj}$ Для выполнения умножения матриц требуется чтобы количество столбцов первого множителя было равно количеству строк второго множителя

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 6 + 5 \times (-2) & 1 \times (-3) + 2 \times 8 + 5 \times 1 \\ 4 \times 2 + 7 \times 6 + (-1) \times (-2) & 4 \times (-3) + 7 \times 8 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 52 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-3) \times 4 & 2 \times 2 + (-3) \times 7 & 2 \times 5 + (-3) \times (-1) \\ 6 \times 1 + 8 \times 4 & 6 \times 2 + 8 \times 7 & 6 \times 5 + 8 \times (-1) \\ -2 \times 1 + 1 \times 4 & -2 \times 2 + 1 \times 7 & -2 \times 5 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & -17 & 13 \\ 38 & 68 & 22 \\ 2 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

Свойство умножения матриц:

$$A \times B \neq B \times A$$
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+1 \\ -1+2+2 & -1+2+2 \\ -2+4+3 & -2+4+3 \\ -3+6+4 & -3+6+4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 12+3 \\ 20+5 \\ 28+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Если количество строк и столбцов совпадает, то такая матрица называется квадратной

2.6 Определители

Если в матрице есть что-то там, то определитель и детерминант. Формула для вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.

Главная диагональ идет из левого верхнего угла в правый нижний. Побочная диагональ идет из правого верхнего угла в левый нижний.

2.6.1 Определитель квадратной матрицы 2-го порядка

Определитель квадратной матрицы 2-го порядка:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали

Примеры:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - 4 \times (-5) = 18$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 - (a^2 - 2 \times a \times b + b^2) = \\ = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 - a^2 + 2 \times a \times b - b^2 = 4 \times a \times b$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha - \sin \alpha \times (-\sin \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

2.6.2 Определитель квадратной матрицы 3-го порядка

Определитель квадратной матрицы 3-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{21} \times a_{32} - a_{13} \times a_{22} \times a_{31} - a_{12} \times a_{21} \times a_{33} - a_{11} \times a_{23} \times a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 7 \times 8 + 4 \times (-2) \times 2 + 8 \times 2 \times (-1) - (-5) \times 7 \times 2 - 4 \times 8 \times 8 - (-2) \times (-1) \times 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times (-1) + 1 \times 2 \times 1 + (-2) \times (-2) \times 1 - 1 \times 5 \times (-1) - 2 \times (-1) \times 3 - 1 \times (-2) \times (-1) = -15 + 2 - 4 + 5 + 12 - 2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 1 + (-2) \times (-2) \times 5 - 1 \times 2 \times 5 - 1 \times 1 \times (-1) - 2 \times (-3) \times (-2) - 2 \times 5 \times (-1) = 2 + (-20) + 3 + 5 - 12 - 2 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

2.7 Задание на дом

Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos 8x & \sin 5x \\ -\sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, a \in R = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n, a \in R$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$$