Математика

Павел Зиновьев

9 сентября 2015 г.

Аннотация

Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями. Лучший математик – кто устанавливает аналогии доказательств. Более сильный может заметить аналогии теорий. Но есть и такие, кто между аналогиями видит аналогии.

Стефан Банах ©

Содержание

1 Информация

Преподаватель: Христич Дмитрий Викторович (каб. 12-314)

1.1 Книги

Дмитрий Кузнецов - Сборник задач по высшей математике
Под редакцией Ефимова, Демидович - сборник задач для *ВТУЗ*ов
Данко, Попов, Кожевникова - Высшая математика в упражнениях и задачах
Клетеник - сборник задач по аналитической геометрии

2 Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются элементами матрицы. Матрицы обозначаются $A, B, C, ..$ или $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ..$
Первый индекс - номер строки, второй индекс - номер столбца

2.1 Сложение матриц

Суммой двух матриц A, B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $(a), (b)$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) & 0+6 & -1+8 \\ 3+4 & 4+(-2) & 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

2.2 Вычитание матриц

Разностью двух матриц A, B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A - B$ того же размера, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матриц $(a), (b)$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-3) & 0-6 & -1-8 \\ 3-4 & 4-(-2) & 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -9 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

2.3 Умножение матриц

При умножении матрицы A на действительное число α получается матрица $B = \alpha A$ того же размера

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

$$3 \times \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 & 5 \times 3 \\ 7 \times 3 & -6 \times 3 \\ 1 \times 3 & 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ 21 & -18 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \times \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 6 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 60 \\ 24 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & -51 \\ -25 & -76 \end{pmatrix}$$

2.4 Транспонирование матриц

Транспонирование матрицы состоит в замене строк матрицы её столбцами с соответствующими номерами

$$B = A^T$$

$$b_(ij) = a_(ji) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2.5 Произведение матриц

Произведением матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой равен $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} \times a_{il} \times b_{lj}$ Для выполнения умножения матриц требуется чтобы количество столбцов первого множителя было равно количеству строк второго множителя

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 6 + 5 \times (-2) & 1 \times (-3) + 2 \times 8 + 5 \times 1 \\ 4 \times 2 + 7 \times 6 + (-1) \times (-2) & 4 \times (-3) + 7 \times 8 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 52 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-3) \times 4 & 2 \times 2 + (-3) \times 7 & 2 \times 5 + (-3) \times (-1) \\ 6 \times 1 + 8 \times 4 & 6 \times 2 + 8 \times 7 & 6 \times 5 + 8 \times (-1) \\ -2 \times 1 + 1 \times 4 & -2 * 2 + 1 \times 7 & -2 \times 5 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -17 & 13 \\ 38 & 68 & 22 \\ 2 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

Свойство умножения матриц:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+1 \\ -1+2+2 & -1+2+2 \\ -2+4+3 & -2+4+3 \\ -3+6+4 & -3+6+4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 12+3 \\ 20+5 \\ 28+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Если количество строк и столбцов совпадает, то такая матрица называется квадратной

2.6 Определители

Если в матрице есть чето там, то определитель и детерминант. Формула для вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
Главная диагональ идет из левого верхнего угла в правый нижний. Побочная диагональ идет из правого верхнего угла в левый нижний.

2.6.1 Определитель квадратной матрицы 2-го порядка

Определитель квадратной матрицы 2-го порядка:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали

Примеры:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - 4 \times (-5) = 18$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 - (a^2 - 2 \times a \times b + b^2) =$$
$$= a^2 + 2 \times a \times b + b^2 - a^2 + 2 \times a \times b - b^2 = 4 \times a \times b$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin\alpha \times (-\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

2.6.2 Определитель квадратной матрицы 3-го порядка

Определитель квадратной матрицы 3-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 7 \times 8 + 4 \times (-2) \times 2 + 8 \times$$
$$\times (-1) \times (-5) - (-5) \times 7 \times 2 - 4 \times 8 \times 8 - (-2) \times (-1) \times 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times 5(-1) + 1 \times 2 \times 1 + (-2) \times (-2) \times 1 - 1 \times 5 \times (-1) - 2 \times$$
$$\times (-2) \times 3 - 1 \times (-2) \times (-1) = -15 + 2 - 4 + 5 + 12 - 2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + (-20) + 3 + 5 - 12 - 2 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

2.7 Метод Краймера

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

$$\mathit{\Delta} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 0$$

$$\mathit{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = 76$$

$$\mathit{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 51$$

$$x = \frac{76}{24} = 2\frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\mathit{\Delta} = 0$$

$$\mathit{\Delta}_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 38 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Значит, решений нет

$$\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -6x - 2y = -10 \end{cases}$$

$$\mathit{\Delta} = 0$$

$$\mathit{\Delta}_x = 0$$

$$\mathit{\Delta}_y = 0$$

Значит, бесконечно много решений (прямые лежат друг на друге)

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -105 - 165 + 40 + 90 + 154 + 50 = -36$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 15 & -3 & 2 \\ 36 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -225 - \cdots = -72$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 15 & 3 \\ 5 & 15 & 2 \\ 10 & 36 & 5 \end{vmatrix} = 525 + 540 + 300 - 450 - 375 - 504 = 36$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 15 \\ 5 & -3 & 15 \\ 10 & -4 & 36 \end{vmatrix} = ZED$$

$$x_1 = \frac{\Delta}{\Delta_x} = \frac{-36}{-72}$$

$$x_2 = \frac{\Delta}{\Delta_y} = \frac{-36}{36} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta}{\Delta_z} = \frac{-36}{ZED}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \cdots = 5, \\ x_1 \cdots + 3x_3 = 16, \\ \ldots 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 - 30 = -29$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 0 - 0 + 16 - 75 = -29$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 9 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32 + 0 + 0 - 0 + 5 - 60 = -87$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 25 - 0 - 10 - 160 = -145$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2)(-2)(-2) = -8$$