Математика лекции

Павел Зиновьев

8 сентября 2015 г.

Аннотация

Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями. Лучший математик – кто устанавливает аналогии доказательств. Более сильный может заметить аналогии теорий. Но есть и такие, кто между аналогиями видит аналогии.

Стефан Банах ©

Содержание

1 Информация

Преподаватель: Соколова Марина Юрьевна (89105515906). Кафедра математического моделирования (каб. 12-314)
modeling.tula.ru — сайт кафедры

1.1 Книги

Бугров Я. С. и Никольский С. Н. — высшая математика в 3-х томах (на 1 курс нужны 1 и 2 тома)
Пискунов Н. С. — дифференциальное и интегральное исчисления в 2-х томах
Аверин В. В., Соколова М. Ю., Христич В. М. — Математика. Курс лекций (2010)
Кузнецов Л. С. — Сборник заданий по высшей математике
Данко П. Е., Попов А. П., Кожевникова Т. Я. — Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х томах (на 1 курс нужен 1 том)

2 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

2.1 Матрицы и определители

План:

1. Определение матрицы
2. Определение и свойства определителей
3. Ранг матрицы
4. Действия над матрицами
5. Некоторые специальные виды матриц

2.1.1 Определение матрицы

Матрицей называется совокупность чисел, расположенных в прямоугольной таблице, состоящей из m строк и n столбцов.
Обозначается так: (A) или $[A]$

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Это матрица размера $m \times n$ и является прямоугольной. Если $m = n$, то такая матрица называется квадратной матрицей порядка m.
Если матрица имеет только один столбец, то она называется матрицей столбцов (матрица-столбец) $n = 1$, m — высота столбца

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Если матрица имеет только один столбец, то она называется матрицей строк (матрица-строка) $m = 1$, n — длина строки
Два столбца называют равными, если они имеют одинаковую высоту и равные элементы с соответствующими номерами
Две строки называют равными, если они имеют равную длину и равные элементы с соответствующими номерами
Две прямоугольные матрицы равны, если они имеют одинаковые размеры и равные строки и столбцы с одинаковыми номерами

2.1.2 Определение и свойства определителей

Для любой квадратной матрицы порядка m вводят понятие определителя (детерминанта)
Обозначается: $\det A$ или $|A|$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Определителем матрицы m порядка $n > 1$ называют число, равное

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{ak} M_k^1$$

M_1^k называют дополнительным минором элемента a_k^1
При $n = 1$ получаем определитель 1-го порядка.

$$n = 2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{1+2} a_{1k} M_k^1 = (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12} |a_{21}| = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$$

При $n = 3$ получаем определитель 3-го порядка.

$$n = 3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+2} a_{1k} M_k^1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33})$$

Понятие минора для любого элемента определителя
M_j^i - дополнительный минор элемента a_{1j}
Разложение определителя по строке №i

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_k^i$$

Разложение определителя по столбцу №j

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} M_j^k$$

$$M_j^i (-1)^{i+j} = A_j^i$$

Сумма произведения элементов на их алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{k+1}^{n} a_{kj} A_j^k$$

Подсчитать определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 21 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 21 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-42 + 16 + 3 + 4 - 24 - 21)$$

2.1.3 Ранг матрицы

$[A] - m \times n$
Минор порядка r для данной матрицы- это определитель, образованный элементами данной матрицы, расположенными в некоторых выбранных r строках и r столбцах
Строки $i_1, i_2, \dots i_r$
Столбцы $j_1, j_2, \dots j_n$ L - минор по r в матрице $|A|$

$$L_{j_1, j_2, \dots j_n}^{i_1, i_2, \dots i_r} = \begin{vmatrix} a_{i_1 g_1} & a_{i_2 g_1} & a_{i_3 g_1} \end{vmatrix}$$