Из Балабко ЛВ Численные методы

Численное решение уравнений

Любое уравнение можно представить в виде:

$$f(x) = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь $f(x)$ – нелинейная функция:

– нелинейная алгебраическая функция вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;$$

– трансцендентные функции: тригонометрические, обратные тригонометрические, логарифмические, показательные и гиперболические;

– комбинирование этих функций.

Или

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \qquad (2.2)$$

Решить уравнения (2.1) и (2.2) численными методами, значит:

– установить, имеют ли уравнения корни;

– определить, сколько корней;

– найти значения корней (с заданной степенью точности).

Решение уравнения разбивается на два этапа:

1) отделение корней – определение количества корней и нахождение промежутков, на каждом из которых лежит только один корень уравнения;

2) уточнение корней до заданной степени точности.

Корень ξ (кси) уравнения (2.1) считается отделенным на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке данное уравнение не имеет других корней.

Отделить корни, значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится ровно по одному корню или корней на этом промежутке нет.

2.1. Отделение корней

2.1.1. Графический метод отделения корней

Случай 1. Пусть задано уравнение $f(x) = 0$. Построим график функции $y = f(x)$. Значения действительных корней уравнения есть абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox (рис. 2.1).

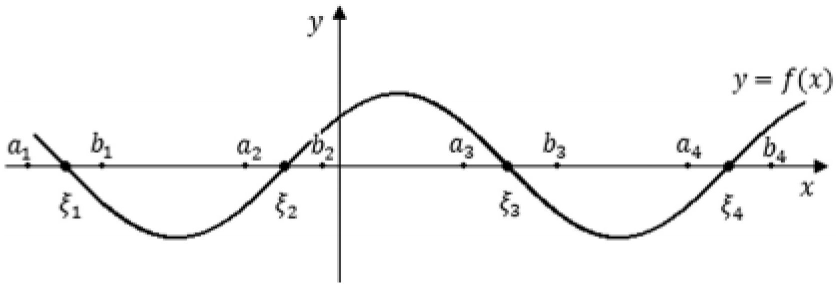

Рис. 2.1

ξ_1 отделен на отрезке $[a_1; b_1]$ и т.д.

Случай 2. Представляем уравнение в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ и строим графики этих функций (рис. 2.2). Значения действительных корней уравнения есть абсциссы точек пересечения графиков функций $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$.

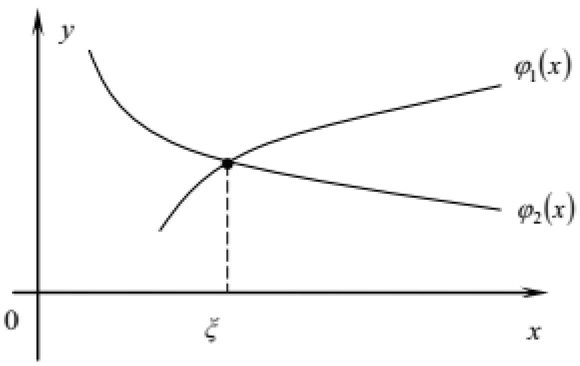

Рис. 2.2

Отметим, что полученные отрезки имеют длину не больше единицы.

Пример 2.1. Отделить корни уравнения $x^2 - 2 + 0{,}5^x = 0$ графически.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^2 - 2 = -0{,}5^x$. Обозначим $y_1 = x^2 - 2$, $y_2 = -0{,}5^x$. Построим графики этих функций (рис. 2.3).

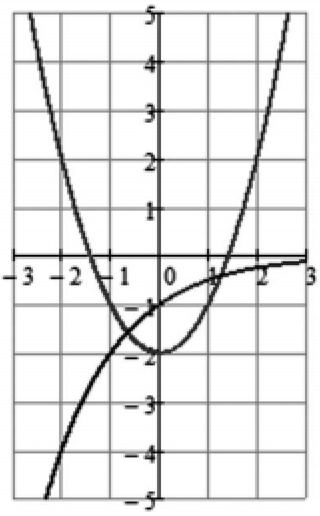

Рис. 2.3

Из графика видно, что уравнение имеет два действительных корня: $\xi_1 \in [-1; 0]$, $\xi_2 \in [1; 2]$.

2.2. Уточнение корней

Уточнить корень, значит довести его значение до заданной степени точности.

2.2.1. Метод половинного деления (дихотомии, проб)

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция и корень ξ отделен на отрезке $[a; b]$, то есть $a < \xi < b$. Пусть $b - a > \varepsilon$, где ε – степень точности. Требуется найти значение корня ξ с точностью до ε.

Берем точку $c = (a + b) / 2$ и рассматриваем два отрезка $[a; c]$ и $[c; b]$, длина которых $(b - a) / 2$. Если функция $f(c) = 0$, то c − точный корень. В противном случае выбираем из отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ тот, на концах которого функция имеет разные знаки, и этот отрезок обозначим $[a_1; b_1]$. Теперь отрезок $[a_1; b_1]$ делим пополам и т.д. Получаем систему вложенных отрезков $[a; b]$, $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, …, $[a_n; b_n]$. Длина отрезка $[a_n; b_n]$ равна $(b - a) / 2^n = b_n - a_n$. Как только $b_n - a_n$ будет $\leq \varepsilon$, вычисления заканчивают, и число $\xi = (a_n + b_n) / 2$ – корень, взятый с точностью до $\varepsilon / 2$.

Пример 2.3. Отделить корни уравнения $x^4 - x - 1 = 0$ аналитически и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,01.

Решение. Полагая $f(x) = x^4 - x - 1$, имеем $f'(x) = 4x^3 - 1$. Найдем корни производной:

$$4x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$x \approx 0{,}63$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
sign $f(x)$	+	+	–	–	+

Из таблицы видно, что уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 \in [-2;\, 0] \text{ и } x_2 \in [1;\, +\infty].$$

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни. Для этого составим новую таблицу знаков функции:

x	-1	0	1	2
sign $f(x)$	+	–	–	+

Следовательно, $x_1 \in [-1;\, 0]$ и $x_2 \in [1;\, 2]$.

Уточним один из корней, например $x_2 \in [1;\, 2]$, методом проб с точностью до 0,01:

n	a_n^-	b_n^+	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1,5	−1	13	2,56	1
1	1	1,5	1,25	−1	2,56	0,19	0,5
2	1	1,25	1,125	−1	0,19	−0,52	0,25
3	1,125	1,25	1,188	−0,52	0,19	−0,20	0,125
4	1,188	1,25	1,219	−0,20	0,19	−0,01	0,062
5	1,219	1,25	1,234	−0,01	0,19	0,09	0,031
6	1,219	1,234	1,227	−0,01	0,09	0,04	0,015
7	1,219	1,227	1,223	−0,01	0,04	0,01	0,008

Ответ. $x \approx 1{,}22$.

2.2.2. Метод хорд (ложного положения, линейного интерполирования, пропорциональных частей)

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция, имеющая в интервале $(a; b)$ производные $f'(x)$ и $f''(x)$. Корень отделен на отрезке $[a; b]$, то есть $f(a) \cdot f(b) < 0$ и корень единственный на этом отрезке.

Случай 1. $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки, $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

a) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

b) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

Проводим хорду AB, которая пересекает ось Ox в точке x_1 (рис. 2.5).

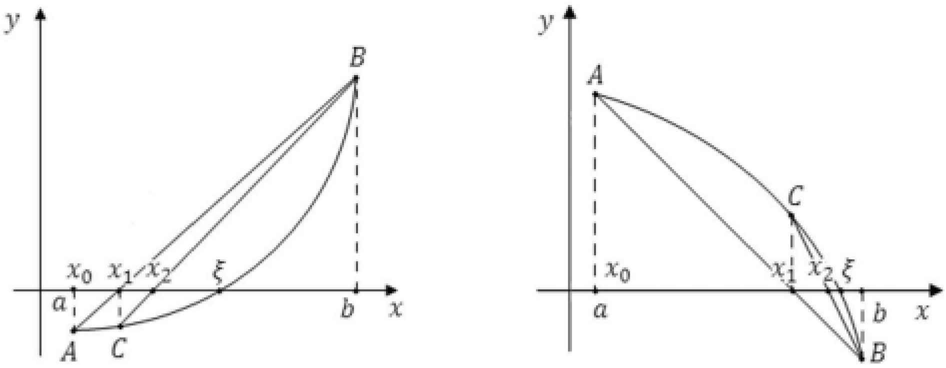

Рис. 2.5

Пусть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_0$, где x_0 – нулевое приближение к корню $A(x_0; f(x_0))$; $B(b; f(b))$. B – неподвижная точка. Тогда уравнение прямой AB получаем как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{b - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}.$$

Требуется найти точку x_1, расположенную на хорде AB и одновременно на оси Ox:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)}.$$

Точка x_1 – первое приближение к истинному значению корня. Ищем на кривой $y = f(x)$ точку с абсциссой x_1 и проводим хорду, которая пересекает ось Ox в точке x_2. Таким образом, получаем общую формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \qquad (2.3)$$

Случай 2. $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разные знаки, $f'(x)\cdot f''(x)<0$.
a) $f'(x)<0, f''(x)>0$
b) $f'(x)>0, f''(x)<0$
A – неподвижная точка (рис. 2.6).

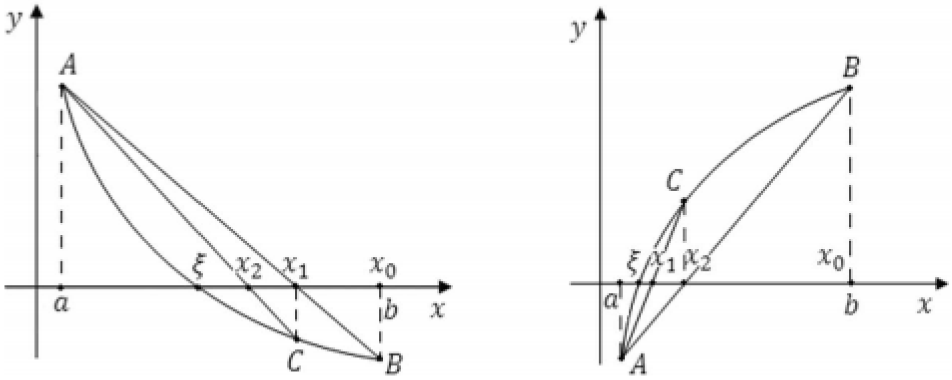

Рис. 2.6

Тогда $\boldsymbol{b = x_0}$ принимаем за нулевое приближение к истинному значению корня. Тогда $B(x_0; f(x_0))$; $A(a; f(a))$. Проводим хорду AB:

$$\frac{x-x_0}{a-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{f(a)-f(x_0)}.$$

x_1 – точка пересечения с осью Ox. Так как $x_1 \in AB$, то ее координаты удовлетворяют уравнению AB:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)(a-x_0)}{f(a)-f(x_0)}.$$

x_1 – первое приближение к истинному значению корня. Находим на графике точку C с абсциссой x_1. Строим хорду AC. Проводя аналогичные действия, получим формулу:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)}. \qquad (2.4)$$

При оценке погрешности пользуются формулой:

$$|\xi-x_n|<|x_n-x_{n-1}|,$$

то есть процесс последовательного приближения к корню следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon.$$

Пример 2.5. Отделить корни уравнения $\sqrt{x}-\cos(0{,}387x)=0$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

Р е ш е н и е. Отделим корень уравнения графически. Для этого перепишем его в виде

$$\sqrt{x}=\cos(0{,}387x).$$

Обозначим $y_1=\sqrt{x}$, $y_2=\cos(0{,}387x)$. Построим графики этих функций (рис. 2.7).

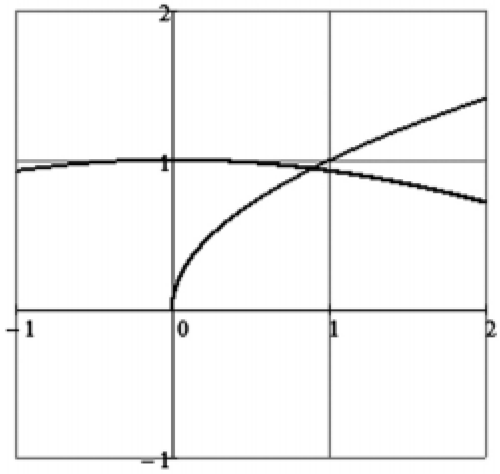

Рис. 2.7

Из графика видно, что уравнение имеет один действительный корень $x \in [0{,}8;\ 1]$.

Чтобы уточнить корень методом хорд, определим знаки функции $f(x)=\sqrt{x}-\cos(0{,}387x)$ на концах промежутка [0,8; 1] и знак второй производной данной функции в этом промежутке:

$$f(0{,}8)=\sqrt{0{,}8}-\cos(0{,}387\cdot 0.8)=-0{,}058<0$$

$$f(1)=\sqrt{1}-\cos(0{,}387)=0{,}074>0$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+0{,}387\sin(0{,}387x)$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0{,}387\sin(0{,}387x)\right)'=\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+$$

$$+0{,}387^2\cos(0{,}387x)=-\frac{1}{4\cdot x^{\frac{3}{2}}}+0{,}387^2\cos(0{,}387x).$$

Поскольку $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ при $x \in [0{,}8;\ 1]$, то неподвижным остается конец $a = 0{,}8$.

Для вычислений применяем формулу:

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)} \cdot (a - x_n).$$

Вычисления оформим в виде таблицы:

n	x_n	$f(x_n)$	$f(0{,}8) - f(x_n)$	$0{,}8 - x_n$	$\frac{f(x_n)}{f(0{,}8) - f(x_n)} \cdot (0{,}8 - x_n)$
0	1	0,0740	−0,1320	−0,2000	0,1121
1	0,8879	0,0008	−0,0588	−0,0879	0,0012
2	0,8867	0,0000	−0,0580	−0,0867	0,0000
3	0,8867	–	–	–	–

$|x_3 - x_2| \le \varepsilon$, следовательно, округляя x_3 до тысячных, получаем, что $x \approx 0{,}887$.

Ответ. $x \approx 0{,}887$.

2.2.3. Метод касательных (Ньютона)

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a; b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки на всем отрезке $[a; b]$. Геометрический смысл метода касательных состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к этой кривой.

Случай 1. $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки: $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

a) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

b) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

$\boldsymbol{x_0 = b}$ – нулевое приближение к истинному значению корня. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B(b; f(b))$ и найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Оx (рис. 2.8).

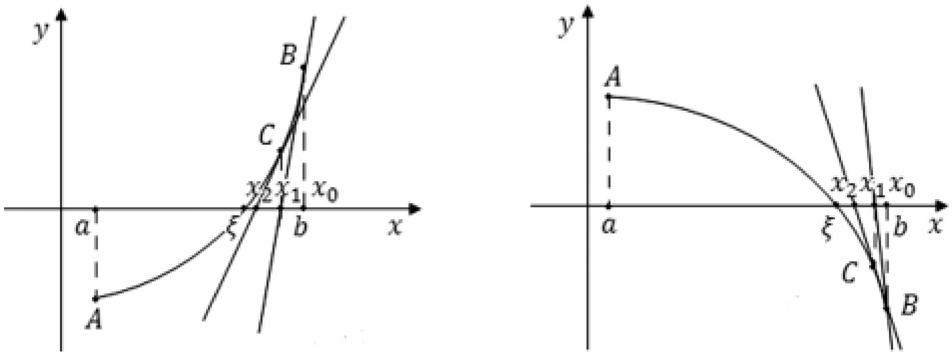

Рис. 2.8

Уравнение касательной в точке B имеет вид:

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Точка x_1 принадлежит касательной, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению касательной:

$$0 = f(b) + f'(b)(x_1 - b) \text{ или } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

x_1 – первое приближение к корню и корень уравнения находится на отрезке $[a;\ x_1]$. Проведем касательную в точке $C(x_1;\ f(x_1))$. Аналогичным образом получаем x_2 и т.д. Общая формула имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2.5)$$

Получаем последовательность приближенных значений x_1, x_2, ..., x_n, каждый последующий член которой ближе к корню ξ, чем предыдущий, однако все x_n – е приближения остаются больше истинного значения корня ξ, то есть x_n – это приближенное значение корня ξ с избытком.

С л у ч а й 2. $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разные знаки, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

a) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

b) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

За нулевое приближение принимаем левый конец отрезка $[a;\ b]$, то есть $\boldsymbol{a = x_0}$. Проведем касательную в точке $A(a;\ f(a))$ (рис. 2.9).

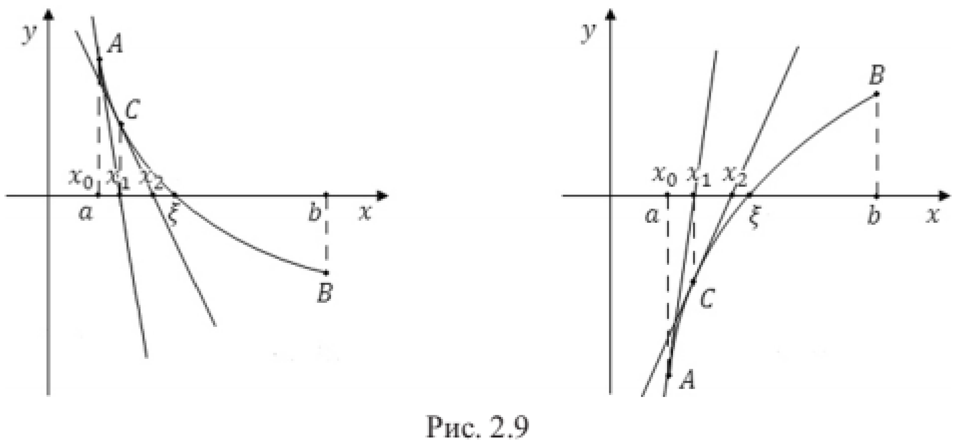

Рис. 2.9

Тогда ее уравнение: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

x_1 – первое приближение к истинному значению корня. Точка x_1 принадлежит касательной, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению касательной:

$$0 = f(a) = f'(a)(x_1 - a) \text{ или } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Теперь корень ξ находится на отрезке $[x_1; b]$. Проведем касательную в точке $C(x_1; f(x_1))$. Аналогично получаем формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.6}$$

Получаем последовательность приближенных значений: x_1, x_2, ..., x_n, каждый последующий член которой ближе к истинному значению корня ξ, чем предыдущий, то есть x_n, однако все x_n – е приближения остаются меньше истинного значения корня ξ, то есть x_n – это приближенное значение корня ξ с недостатком.

Данные формулы отличаются только выбором начального приближения. За исходную точку следует брать тот конец отрезка $[a; b]$, в котором знак функции совпадает со знаком второй производной. Для оценки погрешности можно пользоваться общей формулой.

Замечание. Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a; b]$, то для упрощения вычислений пользуются формулой:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \tag{2.7}$$

то есть значение производной в начальной точке достаточно вычислить только один раз.

Пример 2.7. Отделить корни уравнения $\sqrt{x} - \cos(0{,}387x) = 0$ графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001.

Решение. Отделим корень уравнения графически. Для этого перепишем его в виде $\sqrt{x} = \cos(0{,}387x)$. Из примера 2.5 уравнение имеет один действительный корень $x \in [0{,}8; 1]$.

$$f(0{,}8) = \sqrt{0{,}8} - \cos(0{,}387 \cdot 0{,}8) = -0{,}058 < 0$$

$$f(1) = \sqrt{1} - \cos(0{,}387) = 0{,}074 > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0{,}387\sin(0{,}387x)$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0{,}387\sin(0{,}387x)\right)'=\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+$$

$$+0{,}387^2\cos(0{,}387x)=-\frac{1}{4\cdot x^{\frac{3}{2}}}+0{,}387^2\cos(0{,}387x).$$

Поскольку $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ при $x \in [0{,}8;\ 1]$, то неподвижным остается конец $b = 1$, $x_0 = 0{,}8$.

Для вычислений применяем формулу:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Вычисления оформим в виде таблицы:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,8000	–0,0580	0,6769	–0,0857
1	0,8857	–0,0007	0,6614	–0,0011
2	0,8868	0,0000	0,6610	0,0000
3	0,8868	–	–	–

$|x_3 - x_2| \le \varepsilon$, поэтому $x \approx 0{,}887$.

Ответ. $x \approx 0{,}887$.

2.2.4. Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных дают приближение корня с разных сторон, поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом и уточнение происходит быстрее. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, корень ξ отделен и находится на отрезке $[a;\ b]$. Если $f'(x)\cdot f''(x) > 0$, то метод хорд дает приближение корня с недостатком, а метод касательных – с избытком. Если $f'(x)\cdot f''(x) < 0$, то метод хорд дает приближение корня с избытком, а метод касательных – с недостатком. Однако во всех случаях истинный корень заключен между приближенными корнями, полученными по методу хорд и методу касательных, то есть выполняется неравенство $a < \underline{x}_n \le \xi < \overline{x}_n < b$, где $\underline{x}_n$ – приближенное значение корня с недостатком, $\overline{x}_n$ – с избытком.

Случай 1. $f'(x)\cdot f''(x) > 0$, то есть со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу хорд, а со стороны конца b – значения, полученные по методу касательных (рис. 2.10).

a) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

b) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

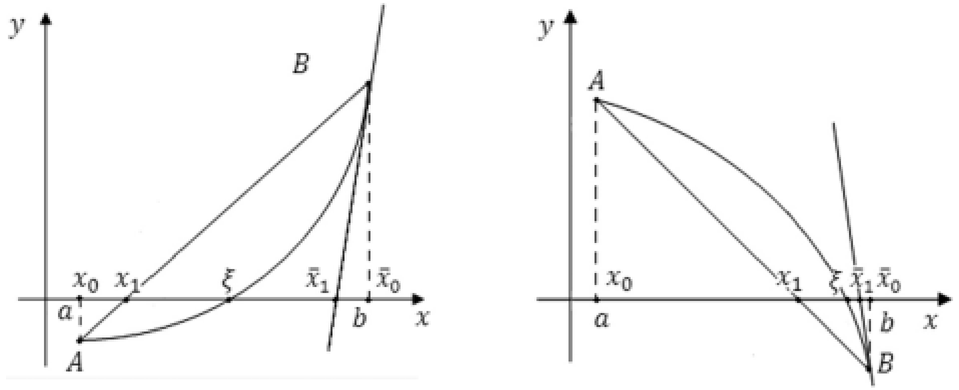

Рис. 2.10

$[x_n;\ \overline{x}_{n+1}]$ – отрезок, на котором находится исходный корень. Получаем формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\overline{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\overline{x}_n - x_n),$$

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)}. \qquad (2.7)$$

Случай 2. $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то есть со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу касательных, а со стороны конца b – значения, полученные по методу хорд. Тогда получатся формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (2.8)$$

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\overline{x}_n)} \cdot (x_n - \overline{x}_n).$$

Процесс вычислений прекращается, как только выполняется неравенство $|\overline{x}_n - x_n| < \varepsilon$. За приближенное значение корня следует принять $\xi = (\overline{x}_n - x_n) / 2$.

Пример 2.9. Комбинированным методом хорд и касательных решить уравнение третьей степени $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$, вычислив корни с точностью до 0,001.

Решение. Отделим корни аналитически. Обозначим $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Вычислим корни производной:

$3x^2 - 6x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
sign $f(x)$	–	+	–	+

Таким образом, уравнение имеет три действительных корня: $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in [0; 2]$, $x_3 \in [2; +\infty)$. Уменьшим данные промежутки до единичной длины:

x	–1	0	1	2	3
sign $f(x)$	–	+	+	–	+

Следовательно, $x_1 \in [-1; 0]$, $x_2 \in [1; 2]$, $x_3 \in [2; 3]$.

Уточним корни комбинированным методом хорд и касательных.

1. $x_1 \in [-1; 0]$

$f(-1) = -1 < 0$

$f(0) = 3 > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x > 0$

$f''(x) = 6x - 6 < 0$ при $x_1 \in [-1; 0]$

Для расчета применяем формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} \cdot (x_n - \bar{x}_n),$$

где x_n и $\bar{x}_n$ – значения корня по недостатку и избытку соответственно.

Полагаем $x_0 = -1$; $\bar{x}_0 = 0$. Вычисления располагаем в таблице, обозначив

$$h_{1n} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad h_{2n} = \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} \cdot (x_n - \bar{x}_n)$$

n	x_n	$x_n - \bar{x}_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n) - f(\bar{x}_n)$	h_{1n}
	$\bar{x}_n$		$f(\bar{x}_n)$			h_{2n}
0	–1	–1	–1	9	-4	–0,111
	0		3			–0,250
1	–0,889	–0,139	–0,074	7,705	–0,965	–0,010
	–0,750		0,891			–0,011
2	–0,879	–0,001	0,003	7,592	–0,008	0,0004
	-0,878		0,011			0,004
3	–0,8794	0	0,000	–	–	–
	–0,8794		0,000			–

$x_1 = \approx -0{,}879.$

2. $x_2 \in [1;\, 2]$.

$f(1) = 1 > 0$

$f(2) = -1 < 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x < 0$

$f''(x) = 6x - 6 > 0$ при $x_2 \in [1;\, 2]$

Для расчета применяем формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} \cdot (x_n - \bar{x}_n),$$

где x_n и $\bar{x}_n$ – значения корня по недостатку и избытку соответственно.

Полагаем $x_0 = 1$, $\bar{x}_0 = 2$. Вычисления располагаем в таблице, обозначив

$$h_{1n} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad h_{2n} = \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} \cdot (x_n - \bar{x}_n)$$

n	x_n	$x_n - \bar{x}_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n) - f(\bar{x}_n)$	h_{1n}
	$\bar{x}_n$		$f(\bar{x}_n)$			h_{2n}
0	1	–1	1	–3	2	–0,333
	2		–1			–0,500
1	1,333	–0,167	0,038	–2,667	0,413	–0,014
	1,500		–0,375			–0,015
2	1,347	–0,001	0,001	–2,639	0,003	–0,0004
	1,348		–0,002			–0,0003
3	1,3474	–0,0001	0,000	–	–	–
	1,3473		0,000			–

$x_2 = \approx 1{,}347.$

3. $x_3 \in [2;\,3]$.
$f(2) = -1 < 0$
$f(3) = 3 > 0$
$f'(x) = 3x^2 - 6x > 0$
$f''(x) = 6x - 6 > 0$ при $x_3 \in [2;\,3]$
Для расчета применяем формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n), \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

где x_n и $\bar{x}_n$ – значения корня по недостатку и избытку соответственно.

Полагаем $x_0 = 2$, $\bar{x}_0 = 3$. Вычисления располагаем в таблице, обозначив

$$h_{1n} = \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n), \quad h_{2n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

n	x_n / $\bar{x}_n$	$x_n - \bar{x}_n$	$f(x_n)$ / $f(\bar{x}_n)$	$f'(\bar{x}_n)$	$f(x_n) - f(\bar{x}_n)$	h_{1n} / h_{2n}
0	2	1	–1	9	4	–0,250
	3		3			0,333
1	2,250	0,167	–0,797	5,337	1,428	–0,093
	2,667		0,631			0,118
2	2,343	0,206	–0,607	4,198	0,677	–0,185
	2,549		0,070			0,017
3	2,528	0,004	–0,016	4,041	0,016	–0,004
	2,532		0,000			0,000
4	2,532	0,000	0,000	–	–	–
	2,532		0,000			–

$x_3 = \approx 2{,}532$.

О т в е т. $x_1 = \approx 0{,}879$; $x_2 = \approx 1{,}347$; $x_3 = \approx 2{,}532$.

2.2.5. Метод итераций (последовательных приближений)

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Требуется определить вещественный корень этого уравнения, заключенный на отрезке $[a;\,b]$. Заменим данное уравнение равноценным

$$x = \varphi(x). \tag{2.9}$$

Выберем каким-либо способом $x_0 \in [a; b]$ и подставим его в правую часть уравнения (2.9), тогда получим $x_1 = \varphi(x_0)$, затем значение x_1 подставим снова в правую часть уравнения (2.9) и получим второе приближение $x_2 = \varphi(x_1)$, повторяя этот процесс, получим последовательность чисел $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Возможны два случая:

1) последовательность $x_0, x_1, ..., x_n$ сходится, то есть имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x) = 0$;

2) последовательность расходится, то есть не имеет предела.

***Теорема* (*условие сходимости итерационного процесса*).** Пусть на отрезке $[a; b]$ имеется единственный корень уравнения $x = \varphi(x)$ и во всех точках этого отрезка производная $|\varphi'(x)|$ удовлетворяет неравенству: $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Если при этом выполняется условие $a \le \varphi(x) \le b$, то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x_0 можно взять любое число из отрезка $[a; b]$. Последнее условие означает, что все приближения $x_0, x_1, ..., x_n$ также находятся на отрезке $[a; b]$, чем меньше $|\varphi'(x)|$, тем лучше сходимость итерационного процесса.

Случай 1. Процесс сходится (рис. 2.11).

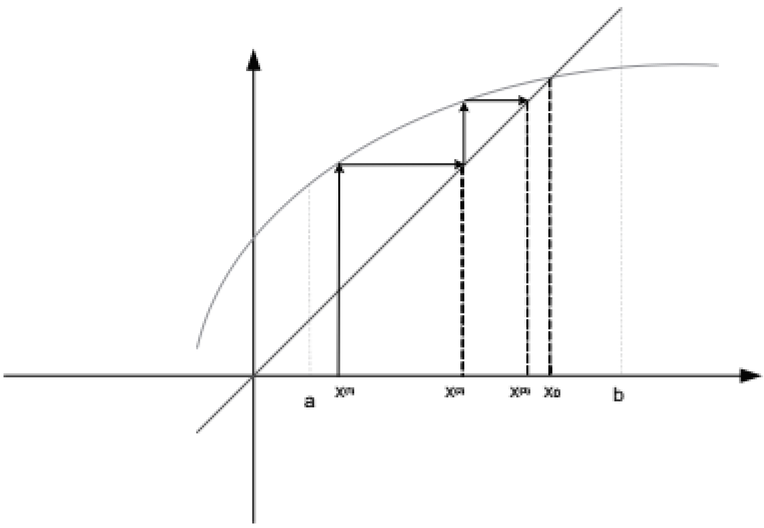

Рис. 2.11

Случай 2. Процесс сходится (рис. 2.12).

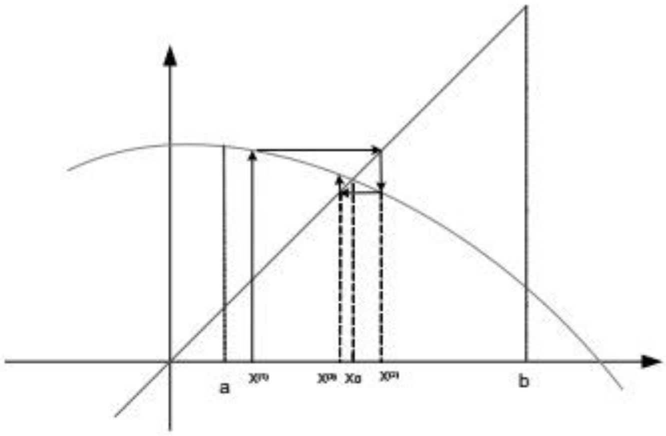

Рис. 2.12

Случай 3. Процесс расходится (рис. 2.13).

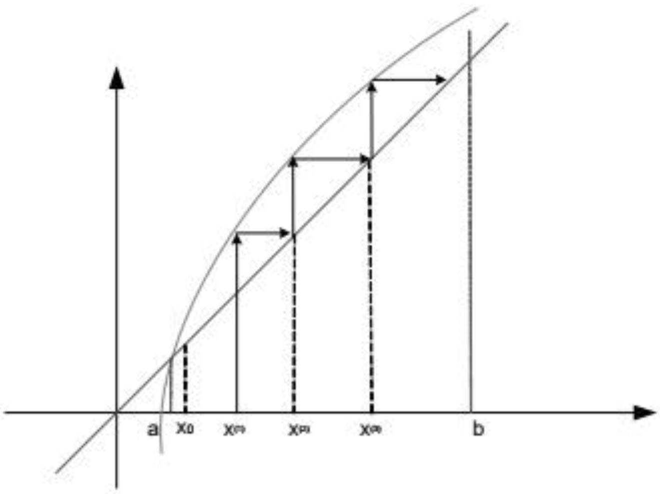

Рис. 2.13

Уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = f(x)$ можно привести следующим способом:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \qquad (2.10)$$

где k следует выбирать так, чтобы $|k| \geq Q / 2$, где $Q = \max|f'(x)|$ на отрезке $[a; b]$ и знак k совпадал бы со знаком $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$. Уточнение корня происходит по формуле:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.11)$$

Пример 2.11. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.

$$x^3 - 2x + 2 = 0$$

Решение. Отделим корни аналитически. Обозначим $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 2$. Вычислим корни производной:

$3x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \frac{2}{3}$

$x_1 \approx 0{,}816$ или $x_2 \approx -0{,}816$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
sign $f(x)$	–	–	+	+	+

Таким образом, уравнение имеет один действительный корень $x \in [-2; -1]$. Для уточнения его методом итераций приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}$, считая, что $|k| \geq \frac{Q}{2}$, где $Q = \max|f'(x)|$. Число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке $x \in [-2; -1]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$Q = \max_{[-2;\,-1]}|f'(x)| = 3 \cdot (-2)^2 - 2 = 10$$

Примем $k = 10$, тогда

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k} = x - 0{,}1x^3 + 0{,}2x - 0{,}2 = -0{,}1x^3 + 1{,}2x - 0{,}2\,.$$

За начальное приближение возьмем $x_0 = -2$, а остальные приближения определим из равенства $x_{n+1} = -0{,}1x_n^{\,3} + 1{,}2x_n - 0{,}2$. Вычисления продолжаем до тех пор, пока

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \xi \cdot \frac{1-q}{q},$$

где $|\varphi'(x)| = (-0{,}1x^3 + 1{,}2x - 0{,}2)' = -0{,}3x^2 + 1{,}2 \leq q = 0{,}9$.

Тогда $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le 0{,}001 \cdot \dfrac{1-0{,}9}{0{,}9} = 0{,}00011$.

n	x_n
0	–2
1	–1,8
2	–1,7768
3	–1,77122
4	–1,76979
5	–1,76942
6	–1,76933
7	–1,76930
8	–1,76929

Ответ. $x \approx -1{,}769$.

Вопросы и задания

1. В чем заключается этап отделения корней при использовании численных методов решения уравнений?
2. Какими методами производится отделение корней?
3. Какие идеи лежат в основе методов уточнений корней уравнения?
4. Какие существуют методы уточнения корней уравнения?
5. Какие особенности имеют методы?
6. Какие условия используются в качестве критериев для определения достижения заданной точности?