Численное интегрирование

1. Постановка задачи

Многие задачи науки техники часто приводят к интегрированию неэлементарных функций. Эта проблема решается с помощью численных методов. С геометрической точки зрения определенный интеграл от функции, заданной аналитически, удается вычислить непосредственно по формуле Ньютона - Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен разности значений первообразной функции на отрезке интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Однако на практике этой формулой часто невозможно воспользоваться по двум основным причинам:

1) вид функции f(x) не допускает непосредственного интегрирования, то есть первообразную невозможно выразить в элементарных функциях;

2) значения функции f(x) заданы дискретно, на конечном множестве x_i , то есть функция задана в виде таблицы.

В этих случаях используются методы численного интегрирования, основанные на аппроксимации подынтегральной функции с помощью интерполяционных многочленов. В этом случае подынтегральная функция приближенно заменяется более простой (прямой или параболой), что позволяет заменить определенный интеграл интегральной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получаются разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапецией, парабол и др.).

2. Формула прямоугольников

Этот метод является простейшим методом, который непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Принимая в качестве ξ_i значения левых или правых концов отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, получим соответственно формулы левых или правых прямоугольников (рисунок.1).

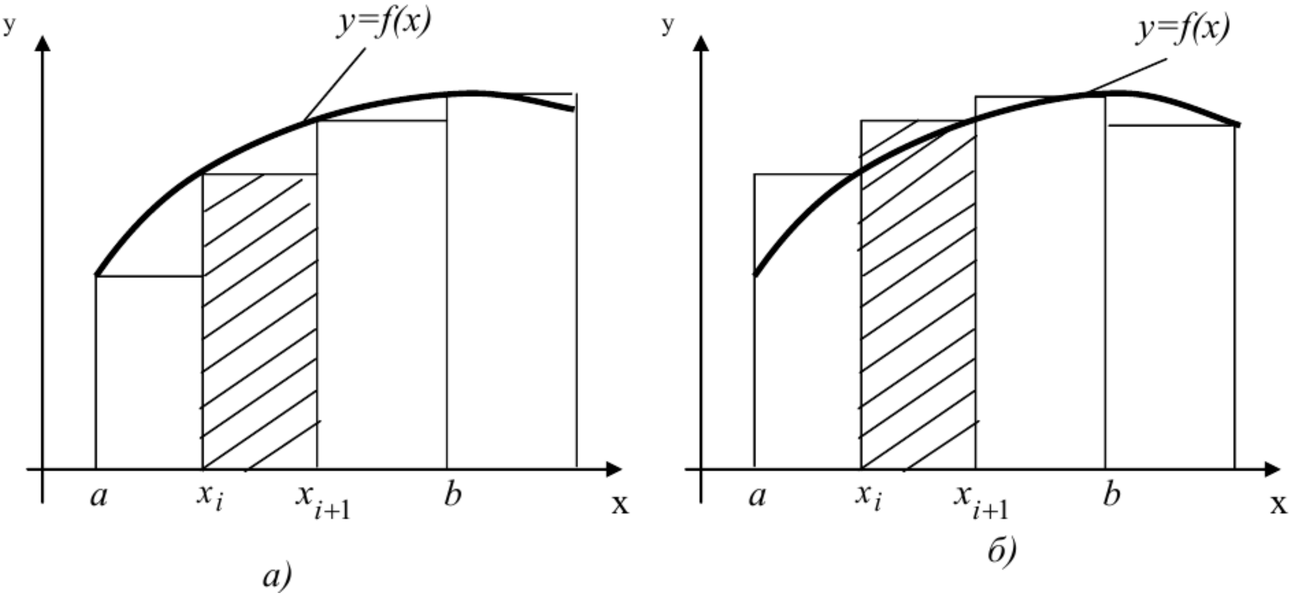

Рисунок 1 - Метод прямоугольников: а) левых, б) правых

Часто используется формула прямоугольников, где в качестве ξ_i берут середины отрезков [x_i , x_{i+1}] (метод средних прямоугольников).

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = | I - I_n | \le \frac{\Delta x}{2}(b-a)M_1,$$

где $M_1 = \max\limits_{[a,b]} | f'(x) |$.

Чем меньше интервал Δx, на которые разбивается отрезок [a, b], тем точнее вычисляется интеграл.

Пример 1.4. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность вычисления интеграла.

Решение. Имеем $f(x)=\sqrt{x}$; $n=10$; $\Delta x=(2-1)/10=0{,}1$. Точками деления интеграла будут: $x_0=1$, $x_1=x_0+\Delta x=1{,}1$; $x_2=1{,}2,\ldots, x_9=1{,}9$. Вычислим значения подынтегральной функции: $y_0=\sqrt{x_0}=1$; $y_1=\sqrt{1{,}1}=1{,}049,\ldots$.

Полученные значения поместим в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	–
y_i	1	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	11,981

Используя формулу прямоугольников, получим

$$I_n=\Delta x\sum_{i=0}^{9} y_i=0{,}1\cdot 11{,}981=1{,}198.$$

Оценим погрешность метода:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\max_{[1;2]} f'(x)=f'(1)=0{,}5;\quad R_n\le\frac{0{,}1}{2}(2-1)\cdot 0{,}5=0{,}025.$$

Таким образом, $\int_1^2\sqrt{x}\,dx\approx 1{,}198\pm 0{,}025.$

3. Формула трапеций

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, при которой реальная функция на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется отрезком прямой, проходящей через точки с координатами $(x_i; f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. В этом случае площадь криволинейной трапеции складывается из площадей элементарных трапеций (рисунок 2).

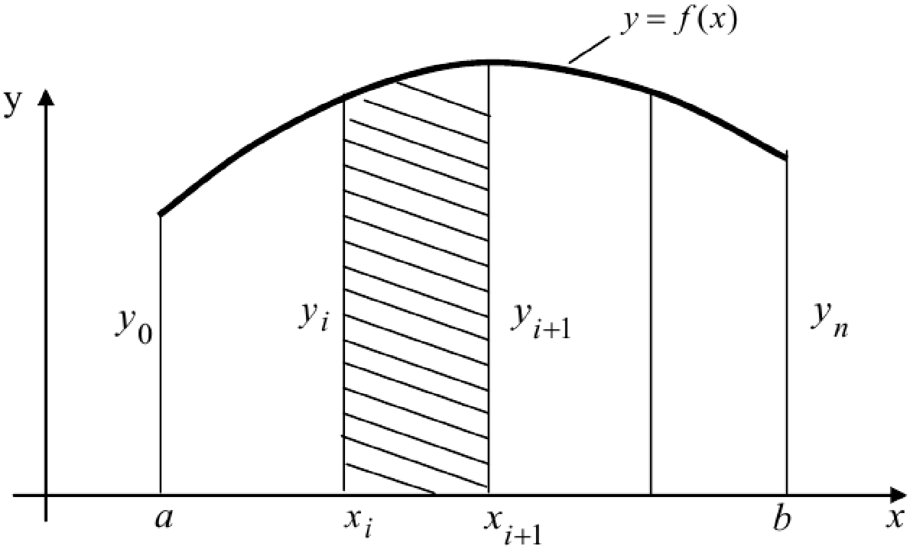

Рисунок 2 - Иллюстрация метода трапеций

Площадь каждой элементарной трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$\Delta S_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x .$$

Складывая элементарные площади, получаем формулу трапеций для численного интегрирования

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = | I - I_n | \le \frac{\Delta x^2}{12}(b-a)M_2 ,$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} | f''(x) |$.

Пример 1.5. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей $(n = 10)$.

Решение. Имеем $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

$\Delta x=0{,}1,\ x_0=a=0;\ x_1=x_0+\Delta x=0{,}1,\ldots,\ x_9=0{,}9,\ x_n=b=1{,}0.$

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.3)

Таблица 1.3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,000	0,990	0,962	0,917	0,862	0,800	0,735	0,671	0,609	0,552	0,500

$$\sum_{n=1}^{i=9} y_1 = 7{,}0998$$

Используя формулу трапеций (3.11), получим

$$I_n=\Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)=0{,}1(0{,}5(1{,}000+0{,}500)+7{,}0998)=0{,}78498.$$

Оценим погрешность. Предварительно найдем производные:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2};\quad f''(x)=2\frac{8x^2-1}{(1+x^2)^3};\quad \max_{[a,b]}|f''(x)|=|f''(0)|=2;$$

отсюда $R_n\le\dfrac{0{,}1^2}{12}(1-0)\cdot 2=0{,}0016.$

Следовательно, $I_n=0{,}7850\pm 0{,}0016$.

4. Формула Симпсона (метод парабол)

Метод Симпсона базируется на замене подынтегральной функции f(x) квадратичной параболой, которая строится по трем точкам (крайние точки и средняя точка) (рисунок 3) По этим точкам строится интерполяционная функция φ(x) - полином второй степени.

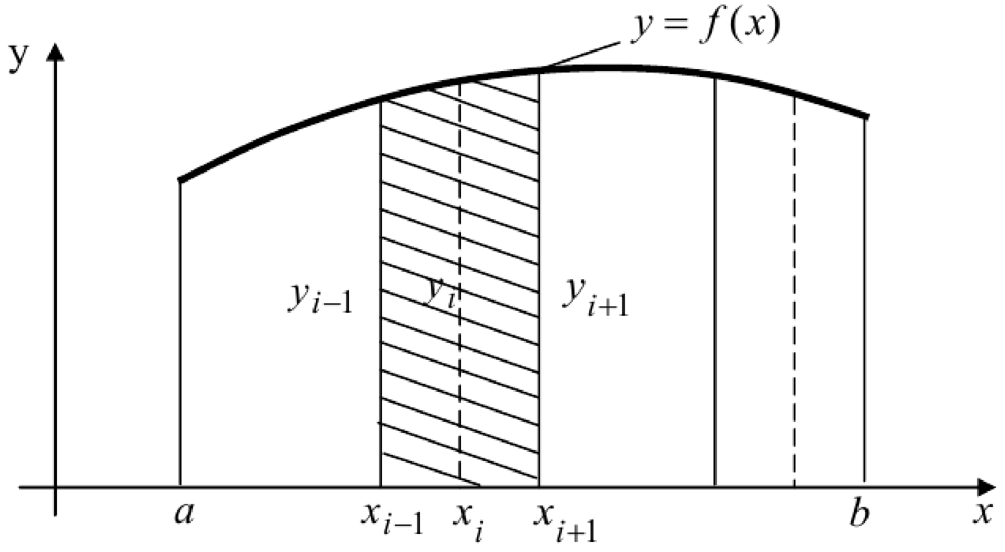

Рисунок 3 - Иллюстрация метода Симпсона

Формула Симпсона будеть иметь следующий вид

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} S_i = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots$$
$$+ 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле:

$$| I - I_n | \le \frac{\Delta x^4}{180}(b-a)M,$$

где $M = \max\limits_{[a,b]} | f^{(4)}(x) |$.

Пример 1.6. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на четыре части ($n = 4$). Оценить погрешность методом двойного пересчета.

Решение. Имеем: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\Delta x = 0,25$; $x_0 = 0$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 0,25$; ...; $x_n = x_4 = 1,0$.

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.4).

Таблица 1.4

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1,0	0,9412	0,8	0,6400	0,5

Подставляя в формулу (3.14), получим

$$I_n = \frac{0,25}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) =$$

$$= \frac{0,25}{3}(1 + 4 \cdot 0,9412 + 2 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,64 + 0,5) = 0,78533.$$

Теперь возьмем $\Delta x = 0,1$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$, ..., $x_n = x_{10} = 1,0$.

Значение подынтегральной функции приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0	0,9900	0,9615	0,9174	0,8620	0,8	0,7353	0,6711	0,6097	0,5525	0,5

$$I_{n/2} = \frac{0,1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}) =$$

$$= \frac{0,1}{3}(1,0 + 0,5 + 4(0,9900 + 0,9174 + 0,8 + 0,6711 + 0,5525) +$$

$$+ 2(0,9615 + 0,8620 + 0,7353 + 0,6097) = 0,78537.$$

Погрешность метода

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|0,78533 - 0,78537|}{15} = 0,000003.$$

Видео-лекции на данную тему:
https://www.youtube.com/watch?v=W0j7ABiGL-E
https://www.youtube.com/watch?v=6A49ToXBFqM&t=186s
https://www.youtube.com/watch?v=c38pnCjh2Q8&t=28s
https://www.youtube.com/watch?v=Zs2eEvloINc