

Численное интегрирование

1. Постановка задачи

Многие задачи науки техники часто приводят к интегрированию неэлементарных функций. Эта проблема решается с помощью численных методов. С геометрической точки зрения определенный интеграл от функции, заданной аналитически, удастся вычислить непосредственно по формуле Ньютона - Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен разности значений первообразной функции на отрезке интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Однако на практике этой формулой часто невозможно воспользоваться по двум основным причинам:

1) вид функции $f(x)$ не допускает непосредственного интегрирования, то есть первообразную невозможно выразить в элементарных функциях;

2) значения функции $f(x)$ заданы дискретно, на конечном множестве x_i , то есть функция задана в виде таблицы.

В этих случаях используются методы численного интегрирования, основанные на аппроксимации подынтегральной функции с помощью интерполяционных многочленов. В этом случае подынтегральная функция приближенно заменяется более простой (прямой или параболой), что позволяет заменить определенный интеграл интегральной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получаются разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол и др.).

2. Формула прямоугольников

Этот метод является простейшим методом, который непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Принимая в качестве ξ_i значения левых или правых концов отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, получим соответственно формулы левых или правых прямоугольников (рисунок.1).

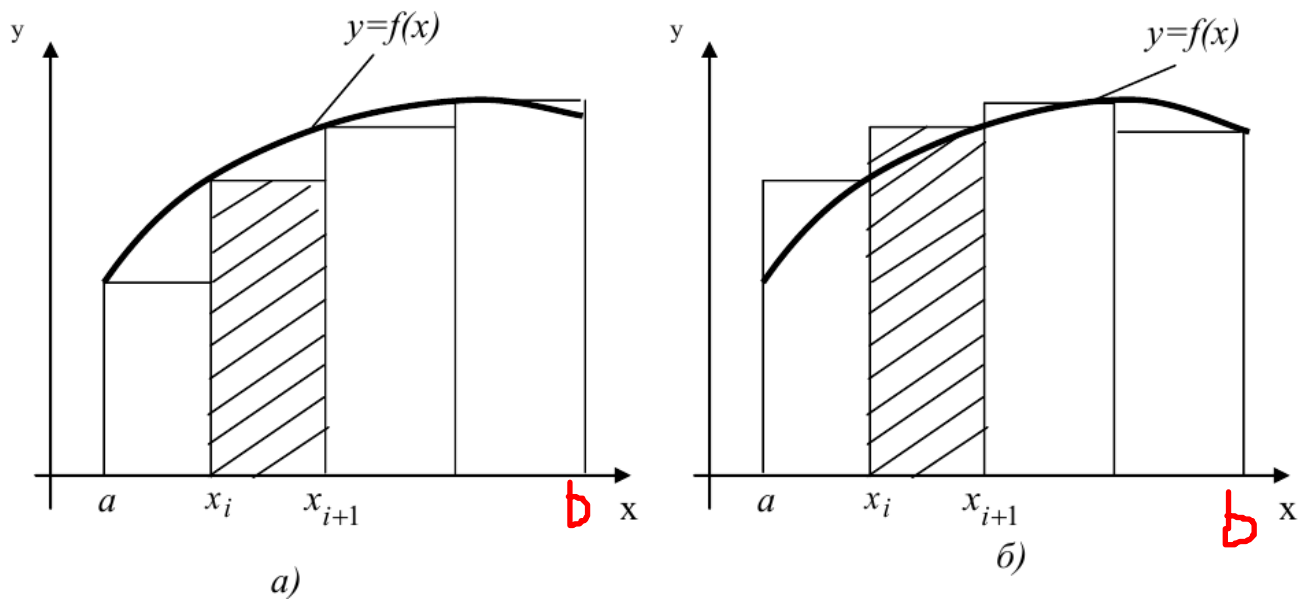


Рисунок 1 - Метод прямоугольников: а) левых, б) правых

Часто используется формула прямоугольников, где в качестве ξ_i берут середины отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ (метод средних прямоугольников).

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = |I - I_n| \leq \frac{\Delta x}{2} (b - a) M_1,$$

$$\text{где } M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Чем меньше интервал Δx , на которые разбивается отрезок $[a, b]$, тем точнее вычисляется интеграл.

Пример 1.4. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_1^2 \sqrt{x} dx$,

разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность вычисления интеграла.

Решение. Имеем $f(x) = \sqrt{x}$; $n = 10$; $\Delta x = (2 - 1) / 10 = 0,1$. Точками деления интеграла будут: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + \Delta x = 1,1$; $x_2 = 1,2, \dots, x_9 = 1,9$. Вычислим значения подынтегральной функции: $y_0 = \sqrt{x_0} = 1$; $y_1 = \sqrt{1,1} = 1,049, \dots$

Полученные значения поместим в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	–
y_i	1	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	11,981

Используя формулу прямоугольников, получим

$$I_n = \Delta x \sum_{i=0}^9 y_i = 0,1 \cdot 11,981 = 1,198.$$

Оценим погрешность метода:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\max_{[1;2]} f'(x) = f'(1) = 0,5; \quad R_n \leq \frac{0,1}{2} (2 - 1) \cdot 0,5 = 0,025.$$

Таким образом, $\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,198 \pm 0,025$.

3. Формула трапеций

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, при которой реальная функция на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется отрезком прямой, проходящей через точки с координатами $(x_i; f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. В этом случае площадь криволинейной трапеции складывается из площадей элементарных трапеций (рисунок 2).

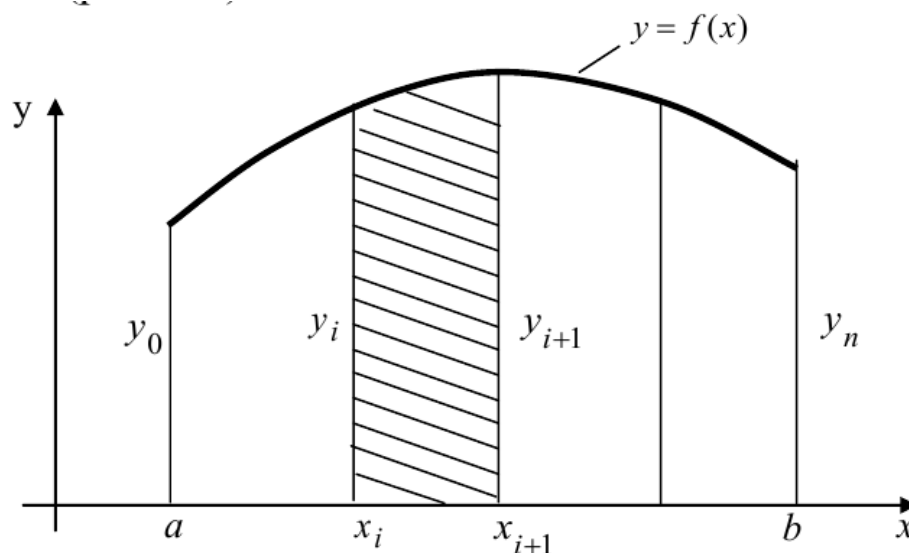


Рисунок 2 - Иллюстрация метода трапеций

Площадь каждой элементарной трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$\Delta S_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x.$$

Складывая элементарные площади, получаем формулу трапеций для численного интегрирования

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = |I - I_n| \leq \frac{\Delta x^2}{12} (b - a) M_2,$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Пример 1.5. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей ($n=10$).

Решение. Имеем $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

$\Delta x = 0,1$, $x_0 = a = 0$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 0,1, \dots$, $x_9 = 0,9$, $x_n = b = 1,0$.

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.3)

Таблица 1.3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,00 0	0,99 0	0,96 2	0,91 7	0,86 2	0,80 0	0,73 5	0,67 1	0,60 9	0,55 2	0,50 0

$$\sum_{n=1}^{i=9} y_1 = 7,0998$$

Используя формулу трапеций (3.11), получим

$$I_n = \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0,1(0,5(1,000 + 0,500) + 7,0998) = 0,78498.$$

Оценим погрешность. Предварительно найдем производные:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad f''(x) = 2 \frac{8x^2 - 1}{(1+x^2)^3}; \quad \max_{[a,b]} |f''(x)| = |f''(0)| = 2;$$

$$\text{отсюда } R_n \leq \frac{0,1^2}{12} (1-0) \cdot 2 = 0,0016.$$

Следовательно, $I_n = 0,7850 \pm 0,0016$.

4. Формула Симпсона (метод парабол)

Метод Симпсона базируется на замене подынтегральной функции $f(x)$ квадратичной параболой, которая строится по трем точкам (крайние точки и средняя точка) (рисунок 3) По этим точкам строится интерполяционная функция $\varphi(x)$ - полином второй степени.

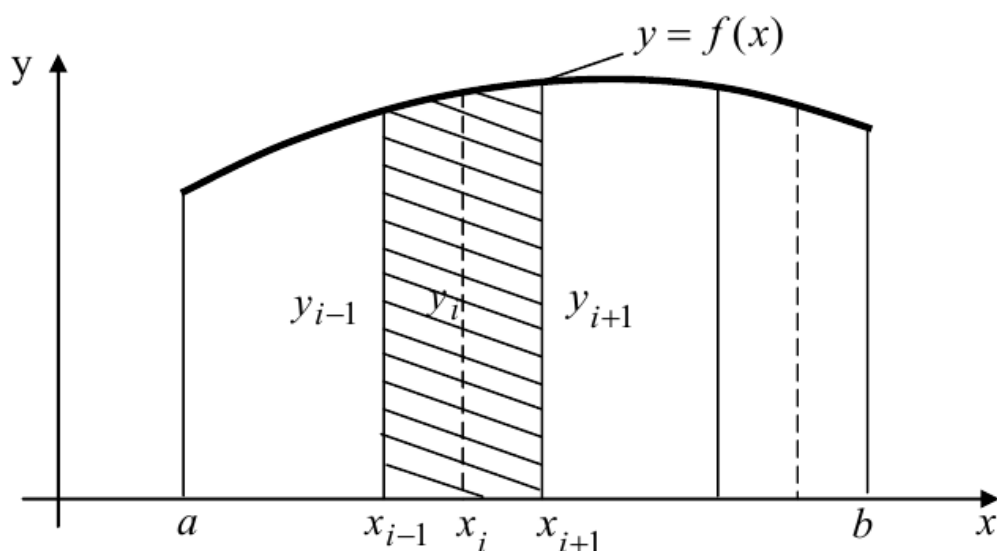


Рисунок 3 - Иллюстрация метода Симпсона

Формула Симпсона будет иметь следующий вид

$$I_n = \sum_{i=0}^n S_i = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле:

$$|I - I_n| \leq \frac{\Delta x^4}{180} (b - a) M,$$

$$\text{где } M = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Пример 1.6. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на четыре части ($n=4$). Оценить погрешность методом двойного пересчета.

Решение.

Имеем:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad \Delta x = 0,25;$$

$$x_0 = 0; \quad x_1 = x_0 + \Delta x = 0,25; \quad \dots; \quad x_n = x_4 = 1,0.$$

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.4).

Таблица 1.4

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1,0	0,9412	0,8	0,6400	0,5

Подставляя в формулу (3.14), получим

$$I_n = \frac{0,25}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) =$$

$$= \frac{0,25}{3}(1 + 4 \cdot 0,9412 + 2 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,64 + 0,5) = 0,78533.$$

Теперь возьмем $\Delta x = 0,1$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$, ..., $x_n = x_{10} = 1,0$.

Значение подынтегральной функции приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0	0,9900	0,9615	0,9174	0,8620	0,8	0,7353	0,6711	0,6097	0,5525	0,5

$$I_{n/2} = \frac{0,1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}) =$$

$$= \frac{0,1}{3}(1,0 + 0,5 + 4(0,9900 + 0,9174 + 0,8 + 0,6711 + 0,5525) +$$

$$+ 2(0,9615 + 0,8620 + 0,7353 + 0,6097)) = 0,78537.$$

Погрешность метода

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|0,78533 - 0,78537|}{15} = 0,000003.$$

Видео-лекции на данную тему:

<https://www.youtube.com/watch?v=W0j7ABiGL-E>

<https://www.youtube.com/watch?v=6A49ToXBFqM&t=186s>

<https://www.youtube.com/watch?v=c38pnCjh2Q8&t=28s>

<https://www.youtube.com/watch?v=Zs2eEvloINc>