

Министерство образования и науки РФ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Нижнекамск
2012

УДК 519
С 14

Печатаются по решению редакционно-издательского совета
Нижнекамского химико-технологического института (филиала)
ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

Рецензенты:
Саримов Н.Н., кандидат физико-математических наук;
Бакеева Л.В., кандидат педагогических наук.

Садыков, А.В.
С 14 Решение нелинейных уравнений : методические указания / А.В. Садыков, А.Н. Гайфутдинов. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ». – 2012. - 29 с.

Дано краткое изложение основных методов решения нелинейных уравнений, приведены примеры решения задач, предложены задания для самостоятельной работы.

Предназначены для студентов инженерно-технических специальностей.

Подготовлены на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

УДК 519

© Садыков А.В., Гайфутдинов А.Н., 2012
© Нижнекамский химико-технологический институт
(филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2012

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим нелинейное уравнение с одним неизвестным

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где $x \in [a, b]$. Уравнение называется **алгебраическим**, если функция

$f(x)$ является многочленом, т.е.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где a_i – заданные вещественные числа ($i = \overline{0, n}$). Если в выражение $f(x)$ входят элементарные или специальные функции и уравнение нельзя преобразовать к виду алгебраического уравнения, то его называют **трансцендентным**.

Пример 1. $\left(p + \frac{a}{V^2} \right)(V - b) = RT$ – уравнение состояния Ван-дер-Ваальса. Здесь a, b – параметры Ван-дер-Ваальса для газа; p, V, T – давление, мольный объем, абсолютная температура соответственно; R – газовая постоянная. Данное уравнение является алгебраическим уравнением 3-й степени относительно V и имеет следующий вид: $V^3 - \left(b + \frac{RT}{p} \right) \cdot V^2 + \frac{a}{p} \cdot V - \frac{a \cdot b}{p} = 0$.

Пример 2. $x - c \cdot \sin x - b = 0$ – уравнение Кеплера. Оно является трансцендентным и играет важную роль в астрономии при определении элементов эллиптических орбит планет. К нему приводится также ряд геометрических задач.

Корнем уравнения (1) называется число $x^* \in [a, b]$, при котором $\left(\quad \right)$.

Число $x^* \in [a, b]$ называется **корнем кратности k** , если при $x=x^*$ одновременно с функцией $f(x)$ равны нулю ее производные до $(k-1)$ -го порядка включительно:

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(k-l)}(x^*) = 0.$$

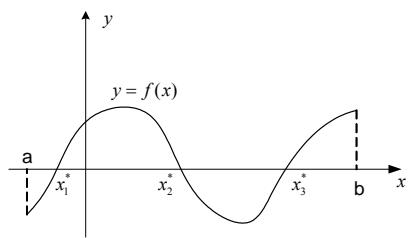


Рис. 1

Однократный корень называется **простым**.

Геометрически решение уравнения (1) эквивалентно нахождению точек пересечения графика $f(x)$ с осью абсцисс (рис. 1).

Трансцендентные уравнения могут быть решены точно лишь в

редких случаях. Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений являются приближенными числами, следовательно, точные корни в таком случае не могут быть найдены. Поэтому большое значение приобретают методы приближенного вычисления корней уравнения (1).

Приближенное решение уравнения проводится в два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней.

1. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Отделение корней уравнения (1) означает выделение отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a, b], i = \overline{1, k}$ содержащих только по одному корню.

Здесь k – количество корней уравнения. Для отделения корней в основном применяют 2 метода: **графический, аналитический**.

1.1. Графический метод

Рассмотрим 2 случая: 1) $f(x)$ – простая функция в смысле построения графика; 2) $f(x)$ – сложная функция в том же смысле.

В первом случае строится график $f(x)$ и за отрезки $[\alpha_i; \beta_i]$ принимаются участки, содержащие точки пересечения графика с осью Ox (рис. 2).

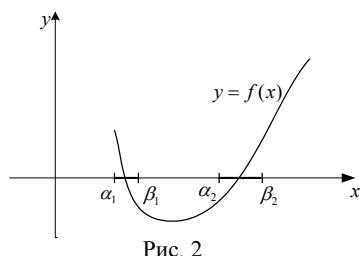


Рис. 2

Во втором случае $f(x)$ разбивается на 2 более простые функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и уравнение (1) приводится к виду $f_1(x) = f_2(x)$ (2)

Затем строят графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и за отрезки $[\alpha_i; \beta_i]$ принимают участки, содержащие абсциссы точек пересечения двух графиков (рис. 3).

Пример 1. Графически отделить корни уравнения $e^x + x - 2 = 0$.

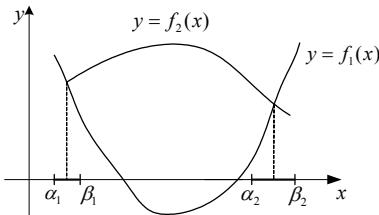


Рис. 3

Решение. Уравнение

перепишем в виде $e^x = -x + 2$. Построим графики функций $y = e^x$, $y = -x + 2$ (рис. 4). Из рисунка видно, что графики пересекаются только в одной точке и абсцисса точки пересечения лежит на отрезке

$[0; 1]$.

Пример 2. Отделить графически корни уравнения $x^3 + x - 3 = 0$.

Решение. Уравнение представим в виде $x^3 = -x + 3$. Построим графики функций $y = x^3$, $y = -x + 3$ (рис. 5). Абсцисса точки пересечения графиков лежит на $[1; 2]$.

Пример 3. Графически отделить корни уравнения $x \cdot \sin x - 1 = 0$, лежащие на $[0; 4]$.

Решение. Уравнение заменим равносильным ему уравнением $\sin x = \frac{1}{x}$. Графики функций

$y = \sin x$, $y = \frac{1}{x}$ изображены на рис. 6. Как

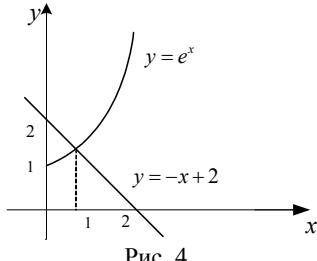


Рис. 4

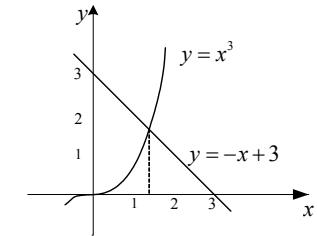


Рис. 5

видно из рисунка, уравнение имеет бесчисленное множество решений.

На $[0; 4]$ уравнение имеет два корня

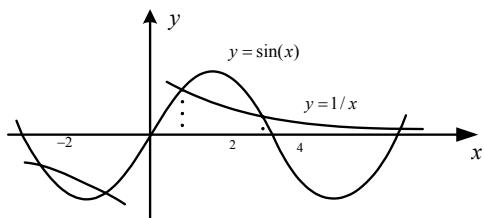


Рис. 6

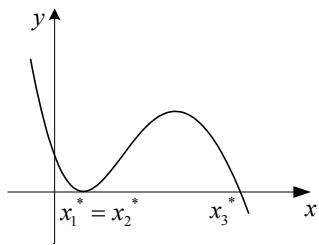


Рис. 7

$$x_1^* \in [0, 5; 1], x_2^* \in [2; 3].$$

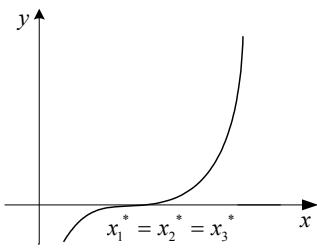


Рис. 8

Примечание 1. Если кривая $f(x)$

касается оси OX , то уравнение (1) имеет двукратный корень (рис. 7). Если при этом в точке касания кривая $f(x)$ имеет точку перегиба, то уравнение в этой точке имеет трехкратный корень (рис. 8).

Примечание 2. Для отделения корней уравнений вида $x^n + ax + b = 0$ удобен графический метод.

1.2.Аналитический метод

Для отделения корней можно применить следующую теорему из курса математического анализа.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает разные знаки на его концах, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка x^* такая, что $f(x^*) = 0$.

Геометрической иллюстрацией теоремы может служить рис. 1. Для того чтобы на (a, b) находился только один корень, в теорему

надо еще добавить условие монотонности $f(x)$ на (a, b) или условие сохранения знака производной $f'(x)$ на (a, b) .

Для отделения корней можно предложить следующий алгоритм:

- 1) проверка функции $f(x)$ на непрерывность на отрезке $[a, b]$;
- 2) нахождение $f'(x)$ и определение областей монотонности, т.е. решение неравенств $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;
- 3) выбор таких интервалов монотонности, на концах которых $f(x)$ принимает разные знаки;
- 4) сужение выбранных в п.3 интервалов.

Из курса математического анализа известно, что любой алгебраический многочлен является непрерывной функцией на всей числовой оси. Поэтому для алгебраических уравнений 1-й пункт алгоритма можно пропустить.

Отрезки $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a, b], i = \overline{1, k}$, найденные таким образом, будут содержать только по одному корню. Эти отрезки можно рассматривать как начальные приближения корней уравнения (1).

Пример 1. Аналитически отделить корни уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = 0.$$

Решение.

$$\text{Найдем } f'(x) : f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3).$$

Критические точки $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$. На интервалах $(-\infty; -3)$, $(1; \infty)$ функция $f(x)$ возрастает, а на $(-3; 1)$ – убывает.

Составим таблицу знаков $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	∞
$f(x)$	–	+	–	+

Отсюда видно, что уравнение имеет три действительных корня, так как происходит три перемены знака $f(x)$. Составим новую таблицу с

более мелкими интервалами изоляции корня:

x	-5	-4	-3	0	1	2
$f(x)$	-	+	+	+	-	+

Таким образом, $x_1^* \in (-5; -4)$; $x_2^* \in (0; 1)$; $x_3^* \in (1; 2)$.

Пример 2. Отделить корни уравнения $x^3 + 5x + 2 = 0$ аналитическим методом.

Решение. Найдем первую производную $f'(x)$:

$f'(x) = 3x^2 + 5$. Выражение $f'(x)$ всегда положительно. При

$x = \mp\infty$ функция принимает знаки "−", "+" соответственно.

Следовательно, данное уравнение имеет только один действительный корень. Для сужения интервала $(-\infty; \infty)$ составим таблицу:

x	-1	0	1
$f(x)$	-	+	+

Отсюда имеем: $x^* \in (-1; 0)$.

2. УТОЧНЕНИЕ КОРНЕЙ

2.1. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Метод половинного деления состоит в следующем. Допустим, что корень уравнения (1) отделен и лежит на отрезке $[\alpha, \beta]$. За начальное

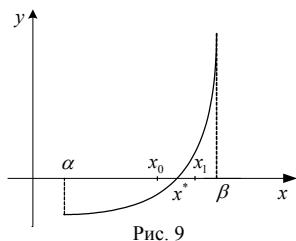


Рис. 9

приближение x_0 примем середину этого отрезка, т.е. $x_0 = (\alpha + \beta)/2$. Тогда $[\alpha, \beta]$ разделится на два отрезка $[\alpha, x_0]$ и $[x_0, \beta]$ (рис. 9). Если $f(x_0) = 0$, то $x^* = x_0$. Если

$f(x_0) \neq 0$, то из двух отрезков $[\alpha, x_0]$ и $[x_0, \beta]$ выберем тот, на концах которого $f(x)$ принимает разные знаки. Обозначим этот отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ (для рис. 9: $\alpha_1 = x_0$, $\beta_1 = \beta$). Новый отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ снова делим пополам, при этом ход рассуждений тот же, что и в предыдущем случае. Получим отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$, длина которого равна $(\beta - \alpha)/2^2$ (на рис. 9: $\alpha_2 = x_0$, $\beta_2 = x_1$). Процесс деления отрезка продолжим до тех пор, пока не получим отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$ такой, что $\beta_n - \alpha_n = (\beta - \alpha)/2^n \leq \varepsilon$. За приближенное значение корня с точностью ε следует взять $x^* = (\alpha_n + \beta_n)/2$.

Пример 1. Найти положительный корень уравнения $x^3 - 5x - 1 = 0$ методом половинного деления с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Отделим корни уравнения аналитическим методом. Найдем производную от $f(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 5$. $f'(x) = 0$ при

$x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$. Составим таблицу знаков $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	∞
$f(x)$	-	+	-	+

Отсюда видно, что уравнение имеет три корня. Положительный корень лежит на $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \infty\right)$, так как $f(0) < 0$. Для сужения этого интервала

составим таблицу:

x	2	3	4
$f(x)$	-	+	+

Таким образом, $[\alpha, \beta] = [2; 3]$.

Тогда $x_0 = 2,5$. Вычисления сведем в табл. 1.

Таблица 1.

i	α_i	β_i	x_i	$f(x_i)$	Знаки		
					$f(\alpha_i)$	$f(x_i)$	$f(\beta_i)$
0	2	3	2,5	2,125	-	+	+
1	2	2,5	2,25	-0,8594	-	-	+
2	2,25	2,5	2,375	0,5215	-	+	+
3	2,25	2,375	2,313	-0,196	-	-	+
4	2,313	2,375	2,344	0,1559	-	+	+
5	2,313	2,344	2,328	-0,0218	-	-	+
6	2,328	2,344	2,336	0,0666	-	+	+
7	2,328	2,336	2,332	0,0223	-	+	+
8	2,328	2,332	2,330	0,0002	-	+	+
9	2,328	2,330	2,329	-0,0108	-	-	+
10	2,329	2,330	2,3295	-0,0053	-	-	+

Отсюда $x^* = 2,330$.

Вычисления по методу половинного деления можно проводить в табличном процессоре Excel.

Пример 2. На диаметре полукруга взята точка M (рис. 10), причем $OM = R/3$. Провести через точку M прямую, делящую площадь полукруга в отношении m/n , положив $m = 3$, $n = 4$.

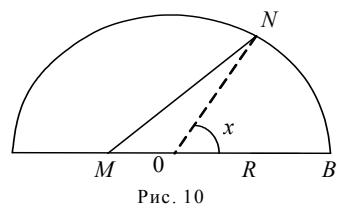


Рис. 10

Решение. Положение точки N определяется углом x . Отношение площади фигуры MBN к площади полукруга будет равно $n/(m+n)$. Обозначим эту величину через λ : $\lambda = n/(m+n)$. Если $m = 3$ и

$n = 4$, то $\lambda = 4/7$.

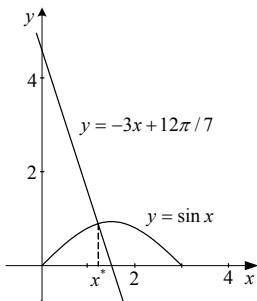


Рис. 11

Площадь полукруга составляет $\pi R^2 / 2$.

Площадь S фигуры MBN равна

$$S = \frac{1}{2} R^2 x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \left(x + \frac{1}{3} \cdot \sin x \right)$$

. Из условия задачи получаем

$$\frac{1}{2} R^2 \left(x + \frac{1}{3} \cdot \sin x \right) = \frac{\lambda}{2} \pi R^2 \quad \text{или же}$$

$$x + \frac{1}{3} \cdot \sin x = \lambda \pi. \quad \text{Это уравнение является}$$

частным случаем уравнения Кеплера. Найдем его приближенное решение.

Корни уравнения отделим графически, для чего его представим в виде

$$\sin x = -3x + \frac{12}{7}\pi$$

и построим графики функций $y = \sin x$, $y = -3x + 12\pi/7$ (рис. 11). Графики пересекаются в одной точке. Абсцисса этой точки лежит на участке $[1; 2]$.

Уточним корень уравнения методом половинного деления. Приближенное значение корня x^* , полученное с использованием программы на компьютере, с точностью до $\varepsilon = 0,001$ равно 1,464 (радиан).

На рис. 12 приведена блок-схема метода половинного деления.

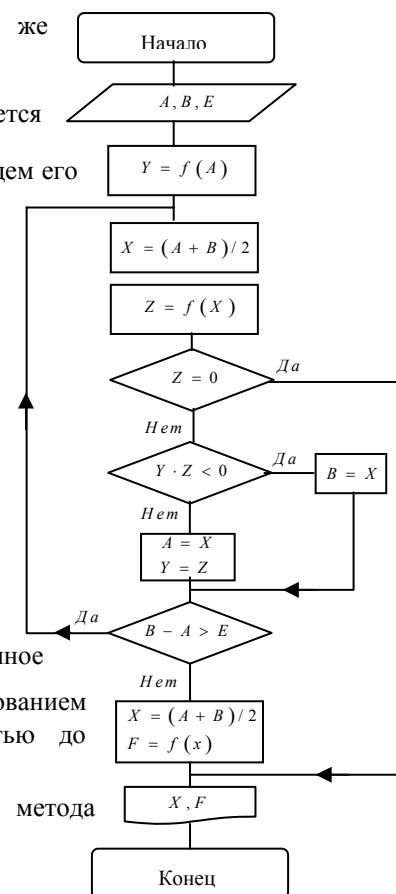


Рис. 12

2.2. МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ (НЬЮТОНА)

Последовательные приближения по методу касательных определяются по формуле

Начальное приближение x_0 выбирается из условия

$$\text{Обычно за } x_0 \text{ принимают один из концов отрезка } [\alpha; \beta], \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$\text{удовлетворяющий условию (3).} \quad f(x_0) \times f''(x_0) > 0. \quad (3)$$

Геометрическая иллюстрация метода дана на рис. 13. Здесь $x_0 = \beta$, так как $f(\beta) \cdot f''(\beta) > 0$. В точке $A_0(x_0, f(x_0))$ проводится касательная к кривой и точка пересечения с осью OX принимается за x_1 . С новой точкой поступаем аналогично предыдущей и получаем x_2 . Продолжая этот процесс, находим x_3 , x_4 и т.д.

Вычисления по формуле (2) продолжаются до достижения заданной точности. Используя разложение в ряд Тейлора, можно получить

$$|x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2,$$

$$\text{где } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1 \varepsilon}{M_2}}$$

гарантирует выполнение условия $|x^* - x_n| \leq \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Нетрудно установить следующую связь абсолютных погрешностей двух соседних приближений:

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x^* - x_n)^2.$$

Отсюда следует, что метод касательных имеет второй порядок сходимости.

Если производная $f'(x)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ изменяется незначительно, то можно положить, что $f'(x_n) \approx f'(x_0)$. Тогда вычисления можно проводить по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n=0,1,2, \dots \quad (4)$$

Пример 1. Методом касательных уточнить корень уравнения $x^3 + 4x + 1 = 0$, лежащий на отрезке $[-0,5; 0]$, с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Выберем начальное приближение x_0 .

$f'(x) = 3x^2 + 4$; $f''(x) = 6x < 0$ при $x < 0$. Поэтому за x_0 возьмем тот конец отрезка, где $f(x) < 0$. Этому условию удовлетворяет конец α , следовательно, $x_0 = -0,5$. Вычисления производим по формуле (2) в табличном процессоре Excel и сводим в табл. 2.

Таблица 2.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$-f(x_i)/f'(x_i)$
0	-0,5	-0,125	4,750	0,23684
1	-0,26316	-0,070866	4,2078	0,01684
2	-0,24632	-0,00002	4,1820	$52,389 \cdot 10^{-6}$
3	-0,24627			

Из таблицы видно, что $|x_3 - x_2| < \varepsilon$. Поэтому $x^* \approx -0,246$.

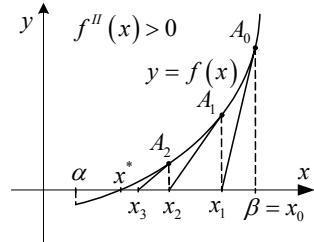


Рис. 13

Пример 2. Уточнить наименьший положительный корень уравнения $x^3 + 6x^2 - 15x + 1 = 0$ методом касательных с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Сначала отделим корни уравнения. Применим аналитический метод: $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$; $f'(x) = 0$ при $x = -5$ и $x = 1$. Составим таблицу:

x	$-\infty$	-5	1	∞
$f'(x)$	-	+	-	+

Отсюда видно, что уравнение имеет 3 корня. Для сужения корней составим таблицу:

x	-8	-7	-5	0	1	2
$f'(x)$	-	+	+	+	-	+

Уравнение имеет один отрицательный $x_1^* \in [-8; -7]$ и два положительных корня $x_2^* \in [0; 1]$, $x_3^* \in [1; 2]$. Наименьший положительный корень лежит на отрезке $[0; 1]$. Уточним этот корень.

Выберем x_0 . Вторая производная функции $f''(x)$: $f''(x) = 6x + 12 > 0$ при всех $x \in [0; 1]$, $f'(0) > 0$. Следовательно, $x_0 = 0$. Последовательные приближения, найденные по формуле (2), приведены в табл. 3.

Таблица 3.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$-f(x_i)/f'(x_i)$
0	0	1	-15	0,06667
1	0,06667	0,02696	-14,187	0,00190
2	0,06857	$2,24 \cdot 10^{-5}$	-14,163	$1,582 \cdot 10^{-6}$

Из таблицы видно, что $|x_3 - x_2| \leq \varepsilon$.

Следовательно, $x^* \approx 0,069$.

Блок-схема метода Ньютона приведена на рис. 14.

Задача. В шаровом реакторе радиуса $R = 0,1\text{ м}$ выделяется энергия с мощностью $P = 100\text{ Bm}$. Эта энергия с помощью излучения и конвекции передается в окружающую среду с температурой $T_1 = 300\text{ K}$. Коэффициент теплоотдачи от поверхности шара $\alpha = 10\text{ Bm}/(\text{м} \cdot \text{K})$, степень черноты его поверхности $\varepsilon = 0,7$. Требуется определить температуру поверхности шара T_w .

Решение. Уравнение баланса тепла имеет вид

$$\alpha(T_w - T_1) + \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_1^4) = \frac{P}{S}, \quad \text{где}$$

$$\alpha(T_w - T_1), \quad \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_1^4)$$

конвективный и лучистый тепловые потоки, отдаваемые единицей

поверхности; $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8}$ постоянная Стефана-Больцмана,

$$Bm/(\text{м}^2 \cdot \text{K}); S = 4\pi R^2$$
 – площадь

поверхности шара, м^2 . Относительно T_w это уравнение является алгебраическим

$$T_w^4 + \frac{\alpha}{\varepsilon\sigma} T_w - \left(\varepsilon\sigma T_1^4 + \alpha T_1 + \frac{P}{4\pi R^2} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon\sigma} = 0. \text{ Решим это уравнение.}$$

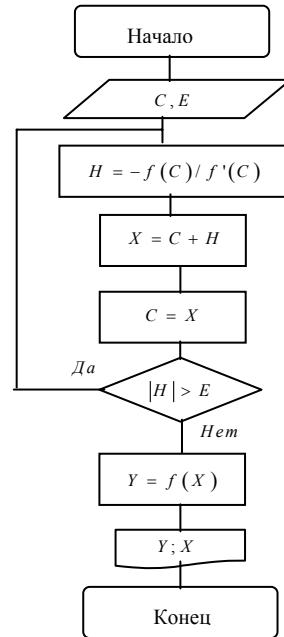


Рис. 14

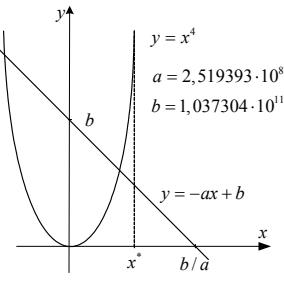


Рис. 15

Подставляя числовые значения всех величин и обозначая $x = T_w$, получаем $f(x) \equiv x^4 + 2,519393 \cdot 10^8 \cdot x - 1,037304 \cdot 10^{11} = 0$.

Отделим корни графически (см. рис. 15). Положительный корень x^* лежит на участке $[0; b/a]$. Из физического смысла задачи ясно, что

$T_w > T_1$. Поэтому $x^* \in (T_1; b/a)$, где $b/a = 411,7$. Для сужения интервала $(T_1; b/a)$ протабулируем $f(x)$ с переменным шагом:

x	300	350	360	400
$f(x)$	-	-	+	+

Отсюда $x^* \in (350; 360)$. Продолжая процесс сужения, получаем $x^* \in (351; 351,5)$; $f(351) < 0$, $f(351,5) > 0$.

Для уточнения корня применим метод касательных. Выберем x_0 .

Найдем первую и вторую производную $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + ax - b; \quad f''(x) = 12x^2 + a > 0. \quad \text{Следовательно,}$$

$x_0 = 351,5$. Приближенное значение корня x^* с точностью до $\varepsilon = 0,0001$, полученное с помощью программы равно 351,2851. Таким образом, $T_w = 351,285(K)$.

2.3. МЕТОД ХОРД

Допустим, что корень уравнения (1) лежит на отрезке $[\alpha, \beta]$. Последовательные приближения по методу хорд находятся по формулам:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(\beta - x_n) \cdot f(x_n)}{f(\beta) - f(x_n)}, \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (5)$$

если $x_0 = \alpha$, β – неподвижный конец;

$$x_{n+1} = \alpha - \frac{(x_n - \alpha) \cdot f(\alpha)}{f(x_n) - f(\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

если $x_0 = \beta$, α – неподвижный конец.

Неподвижным является тот конец отрезка $[\alpha; \beta]$, для которого выполняется условие $f(x) \cdot f''(x) > 0$. Если один конец неподвижен, то другой конец следует взять за начальное приближение x_0 . Нетрудно показать, что если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ ($x \in [\alpha; \beta]$), то $x_0 = \alpha$. Если же $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то $x_0 = \beta$.

Вычисления по формуле (5) или (6) проводятся до достижения заданной точности $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$.

Геометрическая иллюстрация метода хорд дана на рис.16. Здесь $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, $f''(x) > 0$.

Конец β является неподвижным, так

как $f'(\beta) \cdot f''(\beta) > 0$. Тогда

$x_0 = \alpha$.

Пример 1. Методом хорд уточнить больший корень уравнения $x^3 + 6x^2 - 15x + 1 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Больший корень этого уравнения лежит на отрезке $[1; 2]$. Первая и вторая производные функции $f(x)$: $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 > 0$; $f''(x) = 6x + 12 > 0$ при всех $x \in [1; 2]$.

$f(x) \cdot f''(x) > 0$ при всех $x = \beta$, следовательно $\beta = 2$ – неподвижный конец, $x_0 = 1$, а последовательные приближения следует находить по формуле (5).

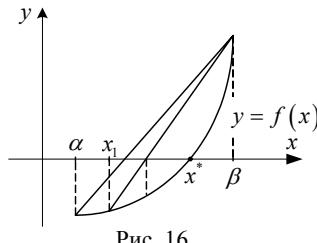


Рис. 16

Результаты вычислений, проведенных в табличном процессоре Excel, приведены в табл. 4.

Таблица 4.

i	x_i	$f(x_i)$	$\beta - x_i$	$-\frac{(\beta - x_i) \cdot f(x_i)}{f(\beta) - f(x_i)}$
0	1	-7	1	0,7
1	1,7000	-2,2470	0,3	0,12847
2	1,82847	-0,25405	0,17153	0,01339
3	1,84186	-0,02471	0,15814	0,00129
4	1,84316	-0,00237	0,15684	0,00012
5	1,84328	-0,0023		

Из таблицы видно, что $|x_5 - x_4| < \varepsilon$. Следовательно,

$$x^* = 1843.$$

Пример 2. Методом хорд уточнить корень уравнения $e^x + x - 2 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Единственный корень уравнения лежит на отрезке $[0; 1]$.

$$f^I(x) = e^x + 1 > 0, \quad f^{II}(x) = e^x > 0 \text{ для всех } x \in (-\infty; \infty).$$

$x_0 = \alpha$, так как $f^I(x) \cdot f^{II}(x) > 0$. Следовательно, для уточнения корня надо использовать формулу (5).

Вычисления сводим в табл. 5.

Таблица 5.

i	x_i	$f(x_i)$	$\beta - x_i$	$-\frac{(\beta - x_i) \cdot f(x_i)}{f(\beta) - f(x_i)}$
0	0	-1	1	0,36788
1	0,36788	-0,18745	0,63212	0,06218
2	0,43006	-0,03260	0,56944	0,01061
3	0,44067	-0,00559	0,55933	0,00181
4	0,44248	-0,00096	0,55752	0,00031
5	0,44279	-0,00016		

Из таблицы видно, что $|x_5 - x_4| < \varepsilon$. Поэтому $x^* = 0,443$.

2.4. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

Пусть корень уравнения (1) отделен и находится на $[\alpha; \beta]$.

Построение итерационного процесса по комбинированному методу осуществляется по формулам

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{(\beta_n - \alpha_n) \cdot f(\alpha_n)}{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{f(\beta_n)}{f'(\beta_n)}, \quad (8)$$

если на исходном отрезке $f(\beta) \cdot f''(\beta) > 0$

или

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_n - \frac{(\beta_n - \alpha_n) f(\alpha_n)}{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}, \quad (10)$$

если $f(\alpha) \cdot f''(\alpha) > 0$. В этих

формулах $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$. Процесс вычисления прекращается, как только будет выполнено неравенство $\beta_n - \alpha_n \leq \varepsilon$. За приближенное значение корня x^* следует принять $x^* = (\alpha_n + \beta_n)/2$. Геометрическая

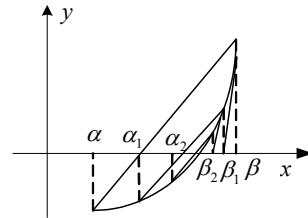


Рис. 17

иллюстрация метода представлена на рис. 17 ($f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$). Вторая производная $f''(x) > 0$ при $x \in [\alpha; \beta]$ ($f(x)$ -вогнута вверх).

Пример 1. Комбинированным методом хорд и касательных найти наибольший корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Отделим корни уравнения аналитическим методом. Первая производная $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$. $f'(x) = 0$ при $x = -4$ и $x = 2$. $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4)$, $x \in (2; \infty)$;

$f'(x) < 0$ при $x \in (-4; 2)$. Составим таблицу знаков $f(x)$:

x	- ∞	-4	2	∞
$f(x)$	-	+	-	+

Отсюда видно, что данное уравнение имеет три действительных корня:

$x_1^*(-\infty; -4)$, $x_2^*(-4; 2)$, $x_3^*(2; \infty)$. Уменьшим эти интервалы до длины равной 1. для этого протабулируем функцию.

x	-7	-6	-5	-4	0	1	2	3	4
$f(x)$	-	+	+	+	+	-	-	-	+

Итак, $x_1^*(-7; -6)$, $x_2^*(0; 1)$, $x_3^*(3; 4)$. Наибольший корень уравнения лежит на участке $(3; 4)$. Уточним этот корень. Вторая производная $f''(x) = 6x + 6 > 0$ на $(3; 4)$; $f(4) \cdot f''(4) > 0$. Поэтому вычисления будем вести по формулам (7), (8). Результаты расчетов сводим в табл. 6.

Таблица 6.

i	α_i	β_i	$f(\alpha_i)$	$f(\beta_i)$	$f'(\beta_i)$
0	3	4	-17	17	48
1	3,5000	3,6458	-3,3750	1,8360	37,7505

i	α_i	β_i	$f(\alpha_i)$	$f(\beta_i)$	$f^I(\beta_i)$
2	3,5944	3,5972	-0,0679	0,0338	36,4026
3	3,5963	3,5963			

i	$-\frac{f(\beta_i)}{f^I(\beta_i)}$	$-\frac{f(\alpha_i) \cdot (\beta_i - \alpha_i)}{f(\beta_i) - f(\alpha_i)}$
0	-0,3542	0,5
1	-0,0486	0,0944
2	-0,0009	0,0019
3		

За приближенное значение корня с точностью до 0,001 можно принять $x^* = 3,596$.

Задача. Найти абсциссу точки перегиба $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Область определения функции $f(x) : (0; \infty)$. В точке перегиба $f''(x) = 0$. Поэтому для решения поставленной задачи нужно определить корни уравнения $f''(x) = 0$. Найдем $f''(x)$:

$$f'(x) = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right), \quad f''(x) = e^{-x} \left(\ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\text{Таким образом, получим уравнение } e^{-x} \left(\ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Учитывая, что $e^{-x} \neq 0$ ни при каком значении x , получаем

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Решим это уравнение.

Корни уравнения отделим аналитическим методом:

$$\left. \begin{array}{l} g^I(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0 \\ g^{II}(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{6}{x^4} < 0 \end{array} \right\} \quad \text{при всех } x \in (0; \infty)$$

При $x = e^2$: $g(x) > 0$; а при $x = 1$: $g(x) < 0$. Протабулируем

$g(x)$ на участке $[1; e^2]$:

x	1	2	3	4	e^2
$f(x)$	-	-	+	+	+

Функция $g(x)$ меняет свой знак на участке $[2; 3]$.

Корень $x^* \in [2; 3]$ уточним комбинированным методом. Так как $g^I(x) \cdot g^{II}(x) < 0$, то используем формулы (9)–(10).

Приближенное значение корня x^* с точностью до $\varepsilon = 0,001$, полученное на компьютере с использованием табличного процессора Excel, равно 2,552.

2.5. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Допустим, что корень уравнения (1) отделен и лежит на отрезке $[\alpha; \beta]$. Уравнение (1) приведем к виду

$$x = \varphi(x). \quad (11)$$

Выберем начальное приближение $x_0 \in [\alpha, \beta]$, в частности можно положить $x_0 = (\alpha + \beta)/2$. Последовательное приближения к корню уравнения определяем по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Эта последовательность сходится к корню x^* при выполнении условия: $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ при всех $x \in [\alpha; \beta]$.

Для приведения уравнения (1) к виду (11) можно применить достаточно универсальный способ, заключающийся в следующем. Пусть $f^I(x) > 0$ при $x \in [\alpha; \beta]$ и $m_1 = \min_{[\alpha; \beta]} f^I(x)$,

$$M_1 = \max_{[\alpha; \beta]} f^I(x).$$

Уравнение (1) заменим эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda \cdot f(x).$$

Параметр λ выбираем так, чтобы выполнялось условие сходимости.

Решая неравенство $|1 - \lambda f^I(x)| \leq q < 1$, получаем $0 < \lambda < \frac{2}{f^I(x)}$.

Отсюда видно, что за λ и q можно принять соответственно

$$\lambda = \frac{1}{M_1}; \quad q = 1 - m_1 / M_1. \quad \text{Тогда последовательные приближения}$$

можно находить по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M_1}. \quad (13)$$

Пусть $f^I(x) < 0$ при $x \in [\alpha; \beta]$, $M_1 = \min_{[a, b]} f'(x)$,

$$m_1 = \max_{[a, b]} f'(x).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{M_1}. \quad (14)$$

Для приведения уравнения (1) к виду (11) можно также использовать метод подбора, суть которого поясняется в нижеприведенных примерах.

Вычисления по формуле (12) продолжают до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$, где $0 < q < 1$.

Пример 1. Методом итераций найти корень уравнения $\lg x + x - 2 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Отделим корни уравнения графически. Представим уравнение в виде $\lg x = -x + 2$ и построим графики функций $y = \lg x$, $y = -x + 2$. Из рис. 18 видно, что графики этих функций пересекаются только в одной точке, абсцисса которой лежит на участке $[1; 2]$.

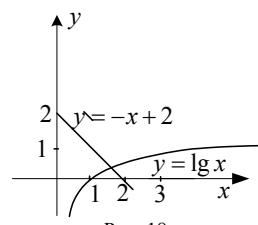


Рис. 18

Исходное уравнение запишем в виде $x = 2 - \lg x$, т.е.

$$\varphi(x) = 2 - \lg x. \text{ Найдем производную: } \varphi'(x) = -1/(x \cdot \ln 10).$$

Очевидно $|\varphi'(x)| < 1$ при всех $x \in [1; 2]$. За x_0 примем середину отрезка $[1; 2]$, т.е. $x_0 = 1,5$. Последовательные приближения x_i вычисляем по формуле $x_{i+1} = 2 - \lg x_i$. Вычисления сведем в табл. 7.

Таблица 7.

i	x_i	$\lg x_i$	i	x_i	$\lg x_i$
0	1,5	0,1761	4	1,7546	0,2442
1	1,8239	0,2610	5	1,7558	0,2445
2	1,7390	0,2403	6	1,7555	
3	1,7597	0,2454			

Таким образом, $x^* = 1,756$.

Пример 2. Методом итераций найти корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Корни уравнения отделим графически. Представим уравнение в виде $x^3 = x + 1$. Графики функций $y = x^3$, $y = x + 1$ пересекаются в одной

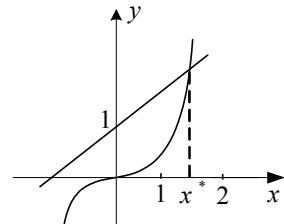


Рис. 19

точке (рис. 19) абсцисса которой лежит на отрезке $[1; 2]$. Видно, что $x^* \in [1; 1,5]$. За x_0 примем середину отрезка, т.е. $x_0 = 1,25$.

Исходное уравнение можно привести к виду (11) различными способами. Попробуем записать уравнение в виде $x = x^3 - 1$, т.е. $\varphi(x) = x^3 - 1$. Тогда $\varphi'(x) = 3x^2 > 1$ при всех $x \in [1; 1,5]$, следовательно, такое выражение для $\varphi(x)$ неприменимо.

Теперь запишем уравнение в виде $x = \sqrt[3]{x+1}$, т.е. $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

Тогда $\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$ на $[1; 1,5]$. Следовательно,

последовательные приближения можно находить по формуле

$$x_{i+1} = (x_i + 1)^{1/3}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Результаты вычислений, проведенных в процессоре Excel, сведем в таблицу

i	0	1	2	3	4
x_i	1,25	1,3104	1,3220	1,3242	1,3246

Таким образом, $x^* = 1,325$.

3. ЗАДАНИЯ

Таблица 8.

Уточнить корни заданных в таблице уравнений указанными методами с точностью до ε .

№ п/п	Уравнение	$[\alpha; \beta]$, ε	Метод численного решения	Ответ
1	$\ln x - x + 1,8 = 0$	$[2; 3]; 0,0001$	итераций	2,8459
№ п/п	Уравнение	$[\alpha; \beta]$, ε	Метод численного решения	Ответ

2	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg}x = 0$	$[0;1]; 0,0001$	половин. деления	0,5768
3	$3 \ln^2 x + 6 \ln x - 5 = 0$	$[1;3]; 0,0001$	Ньютона	1,8832
4	$0,25x^3 + x - 1,2502 = 0$	$[0;2]; 0,0001$	Ньютона	1,0001
5	$x - 2 + \sin \frac{1}{x} = 0$	$[1,2;2]; 0,0001$	итераций	1,3077
6	$4x - 5 \ln x - 5 = 0$	$[2;2,5]; 0,005$	хорд	2,280
7	$\sin x^2 + \cos x^2 - 10x = 0$	$[0;1]; 0,0001$	половин. деления	0,1010
8	$2x \sin x - \cos x = 0$	$[0,4;1]; 0,0001$	касательных	0,6533
9	$x^2 - \ln(x+1) - 3 = 0$	$[2;3]; 0,0001$	итераций	2,0267
10	$x^3 - 12x - 3 = 0$	$[3;4]; 0,001$	касательных	3,583
11	$x - e^{x-1} + 3 = 0$	$[-3;-2]; 0,001$	хорд	-2,981
12	$e^x + \sqrt{1+e^{2x}} - 2 = 0$	$[-1;0]; 0,0001$	половин. деления	-0,2877
13	$0,4 + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - x = 0$	$[1;2]; 0,0001$	итераций	1,2388
14	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$	$[0;1]; 0,001$	Ньютона	0,881
15	$x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$	$[1;1,5]; 0,002$	хорд	1,198
№ п/п	Уравнение	$[\alpha; \beta], \varepsilon$	Метод численного решения	Ответ

16	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} - c \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x = 0$	$[1; 2]; 0,0001$	половин. деления	1,0769
17	$\sin x - x - \ln(x+1) + 1 = 0$	$[0; 1,5]; 0,0001$	итераций	1,1474
18	$x^3 + 5x + 10 = 0$	$[-2; -1]; 0,001$	Ньютона	-1,423
19	$2x^3 - 6x + 15 = 0$	$[-3; -2]; 0,001$	половин. деления	-2,460
20	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$	$[-7; -6]; 0,001$	комбинир.	-6,638
21	$x - \sin x - 0,25 = 0$	$[0; \pi/2]; 0,001$	хорд	1,171
22	$xtgx - \frac{1}{3} = 0$	$[0,2; 1]; 0,0001$	касательных	0,5472

Литература

1. Поршинев, С.В. Вычислительная математика : курс лекций / С.В. Поршинев. – СПб. : БХВ–Петербург, 2004. – 320 с.
2. Турчак, Л.И. Основы численных методов : учебное пособие / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М. : Физматлит, 2002. – 304 с.
3. Лапчик М.П. Численные методы : учебное пособие для студентов вузов / М.П. Лапчик [и др.] ; под ред. М.П. Лапчика. – М. : Издат. центр «Академия», 2004. – 384 с.
4. Ракитин, В.И. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров : учебное пособие / В.И. Ракитин, В.Е. Первушин. – М. : Высш. школа, 1998. – 383 с.
5. Пирумов, У.Г. Численные методы : учебное пособие для студентов втузов / У.Г. Пирумов. – М. : Дрофа, 2003. – 224 с.

Содержание

Общие сведения и основные определения.....	3
1. Отделение корней.....	4
1.1. Графический метод.....	4
1.2. Аналитический метод.....	6
2. Уточнение корней.....	8
2.1. Метод половинного деления.....	8
2.2. Метод касательных (Ньютона).....	12
2.3. Метод хорд.....	16
2.4. Комбинированный метод хорд и касательных.....	19
2.5. Метод итераций.....	22
3. Задания.....	25
4. Литература.....	28

Учебное издание

Садыков А.В.

кандидат технических наук, доцент

Гайфутдинов А.Н.

кандидат физико-математических наук, доцент

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ.редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 20.11.2012
Подписано в печать 27.11.2012.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. 1,8. Тираж 100.
Заказ №57.

НХТИ (филиал) ФГОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а.