חישוביות וסיבוכיות – תרגיל 5

1)

ראשית על פי משפט אימרמן שלמדנו אנו יודעים כי $NL = CO - NL$ לכן נותר להוכיח כי $\overline{2COLOR} \in NL \rightarrow 2COLOR \in NL$.

על פי ההגדרה $\overline{2COLOR}$ זהו בעיית גרף אי צביע 2 שזה שקול לקיים מעגל באורך אי זוגי.

נשאר להראות אלגוריתם לא דטרמיניסטי שחסום לוגריתמית שיכריע את הבעיה:

האלגוריתם:

1) נבחר קשת כלשהי בגרף
2) נשמור את הקודקוד השני בקשת בתור x
3) נגדיר מונה ונאתחל אותו להיות "זוגי"
4) כעת נבצע לפי מספר הקודקודים בגרף את הפעולות הבאות:
   a. נבחר קשת נוספת שמתחילה מקודקוד x
   b. אם הקשת זוהי הקשת שבחרנו בשלב 1, אזי החזר 0
   c. אם הקודקוד השני בקשת החדשה שווה לקודקוד הראשון בקשת הראשונה אזי:
      i. אם המונה שלנו הוא "אי-זוגי" החזר 1
      ii. אם המונה שלנו הוא "זוגי" החזר 0
   d. אחרת בחר את להיות הקודקוד השני בקשת החדשה והחלף את הסימן של המונה.
5) אם הגענו לפה, החזר 0.

הוכחת נכונות:

צריך להוכיח כי המכונה אכן מכריעה את $\overline{2COLOR}$ ובנוסף כי המכונה פועלת חסומה לוגריתמית.

<u>הכרעת $\overline{2COLOR}$:</u>

- אם הגרף כן צביע 2 – אזי בהכרח אין בו מעגלים אי-זוגיים, לכן בכל ריצה של האלגוריתם הוא תמיד ירוץ לפי מספר כמות הקודקודים ויחזיר 0.
- אם הגרף לא צביע 2 – אזי בהכרח קיים מעגל אי-זוגי ולכן קיימת ריצה של האלגוריתם שבה הוא יעבור על המעגל והמונה יהיה "אי-זוגי" ולכן נחזיר 1.

<u>האלגוריתם חסום לוגריתמית:</u>

סך כל השמירה המקסימלית שתהיה לנו היא 4 קודקודים (2 קשתות), ערך המונה (זוגיות) ומספר הצעדים שהוא גם כן בגודל לוגריתמי.
ולכן סך הכל על סרט העבודה אנחנו משתמשים במקום שחסום לוגריתמית ע"י גודל הקלט.

2)

<u>ראשית נוכיח כי $shortest-path \in NL$:</u>

אפשר לנסח את הבעיה בצורה הבאה – לא קיים מסלול באורך של לכל היותר k-1 בין הקודקוד s לקודקוד t. ניסוח זה מראה לנו כי זה בעצם דרישת $\overline{ST-CON}$ כאשר יש לנו k-1.

אנו יודעים כי $ST-CON \in NLC \subseteq NL$ ובנוסף אנו יודעים כי NL סגורה למשלים וחיתוך ולכן נריץ את האלגוריתם של $ST-CON$ עם k ובנוסף נריץ גם את $\overline{ST-CON}$ עם k-1.

<u>כעת נשאר להוכיח כי $shortest-path \in NLC$:</u>

נוכיח זאת ע"י רדוקציית $\log-space$ מהבעיה $\overline{ST-CON}$ אנו יודעים כי $\overline{ST-CON} \in CO-NLC$ בנוסף לפי מה שראינו בתרגול נובע כי $NL = CO-NL$ ולכן לכל בעיה ששייכת ל NLC גם המשלימה שלה שייכת ל NLC ולכן לסיום $\overline{ST-CON} \in NLC$.

<u>הגדרת הרדוקציה:</u>

בהינתן קלט לבעיה $\overline{ST-CON}$ נגדיר את הקלט לבעיה $shortest-path$ כך:

- G יהיה הגרף שקיבלנו בקלט שאליו נוסיף קודקודים חדשים (לפי מספר הקודקודים בגרף המקורי), ונמתח קשתות מs אל t שעובר דרך הקודקודים החדשים (בסך הכל מספר הקשתות החדשות יהיה כמספר הקודקודים בגרף המקורי ועוד 1)
- k – יהיה מספר הקודקודים בגרף המקורי ועוד 1.
- s,t – יישארו כמו שהיו

<u>הוכחות נכונות:</u>

הרדוקציה חסומה לוגריתמית במקום (לא שנינו כלום).

נראה את 2 הכיוונים:

1) $x \notin \overline{ST-CON} \rightarrow f(x) \notin shortest-path$:

על פי הנתון, קיים מסלול בין הקודקודים בגרף והאורך המקסימלי שלו כמובן הוא כמספר הקודקודים בגרף, ולכן על פי הגדרת הרדוקציה המסלול שניצור לא יהיה הקצר ביותר ולכן $f(x) \notin shortest-path$

2) $x \in \overline{ST-CON} \rightarrow f(x) \in shortest-path$:

על פי הנתון, לא קיים בגרף מסלול בין הקודקודים ולכן לאחר פונקציית הרדוקציה שלנו יהיה מסלול בודד ובהכרח הוא יהיה הקצר ביותר ואורכו על פי ההגדרה יהיה כמספר הקודקודים + 1 ולכן $f(x) \in shortest-path$

3(

הוכחה, נוכיח את 2 הכיוונים:

$Pad\left(S,n^c\right)\in NL\rightarrow S\in NL$: כאשר $c\geq 1$

נתון כי $Pad\left(S,n^c\right)\in NL$ זאת אומרת כי קיימת מכונת טיורינג שמכריעה את $Pad\left(S,n^c\right)$ באופן לא דטרמיניסטי (נקרא לה A), ונרצה להראות מכונה שמכריעה את S

הגדרת המכונה:

1) נשמור את הגודל של x במונה
2) נקבע את c ונשמור אותה במונה נוסף
3) כעת נפעיל את $A\left(x\right)$ אך בכל מקום שמשתמשים במידע מהסרט של שכעט זהו החלק המרופד, נבצע חישוב על פי הריפוד שלנו ונמצא את המידע שאותו רצינו לבדוק מלכתחילה. ונחזיר את התשובה.

הוכחת נכונות:

נוכיח כי המקום הדרוש חסום לוגריתמית –

2 הפעולות הראשונות של המנייה והשמירה לוקחת בסך הכל $\log\left(|x|\right)+\log\left(c\right)$ מקום, והפעולה השלישית לא לוקחת מקום כלל מעבר לפעולה הרגילה של A ולכן סך הכל המקום חסום לוגריתמית.

נוכיח נכונות המכונה -

המכונה בנויה על פי מכונה A והיא רק מסדרת את בדיקת המידע ולכן בוודאי שהיא נכונה ומכריעה.

$S\in NL\rightarrow Pad\left(S,n^c\right)\in NL$: כאשר $c\geq 1$

נתון כי $S\in NL$ זאת אומרת כי קיימת מכונת טיורינג שמכריע את S באופן לא דטרמיניסטי ובזמן לוגריתמי (נקרא לה A) ונרצה להראות מכונה שמכריעה את $Pad\left(S,n^c\right)$

הגדרת המכונה:

1) בדוק שהקלט של הבעיה הוא מהצורה $x10^{|x|^c}$ אם לא, החזר 0
2) אחרת הפעל את $A\left(x\right)$ והחזר את תשובתה.

הוכחת נכונות:

נוכיח כי המקום הדרוש חסום לוגריתמית – עבור המונה של כמות האפסים נשתמש ב $\log\left(n^c\right)$ ובנוסף נשתמש בA שגם הוא חסום לוגריתמית ולכן סך כל המיקום חסום גם כן לוגריתמית.

נוכיח נכונות המכונה –
המכונה בנויה על פי מכונה A ופועלת באופן לא דטרמיניסטי אז בוודאי שהיא נכונה ומכריעה.

4)

ראשית נניח כי $PSPACE = PH$ כעת נרצה להראות כי ההיררכיה הפולינומית קורסת לרמה k כלשהי.
על מנת להראות קריסה נרצה להראות כי $PH = \Sigma_k$ לכן נראה הכלה דו כיוונית.

- נראה כי עבור k כלשהו $PH = \Sigma_k$, אנו יודעים כי על פי ההגדרה $\Sigma_k \subseteq PH$.

- כעת נרצה להראות כי $PH \subseteq \Sigma_k$ -

נשתמש בבעיה QBF שאנו יודעים כי $QBF \in PSPACE = PH$ לכן אנו יודעים כי קיים k כלשהו שעבורו מתקיים $QBF \in \Sigma_k$ כעת ניקח בעיה S כך ש $S \in PH = PSACE$.

אנו יודעים כי $QBF \in PSPACE - C$ ולכן בהכרח קיימת רדוקציה מS לQBF ולכן עבור כל בעיה ב $S \in PH$ לאחר רדוקציה אנו יודעים כי $S \in \Sigma_k$ וזה גורר $PH \subseteq \Sigma_k$

לכן $PH = \Sigma_k$ וסיימנו.