1)א)

ראשית נבחר את ה9 שישבו בשולחן העגול הראשון $\binom{16}{9}$ לאחר מכן נושיב אותם בשולחן (זהו שולחן עגול ולכן הושבת הראשון אינה משנה) $(9-1)!=8!$ לאחר מכן ניקח את הנותרים ונושיב אותם סביב השולחן העגול השני (נותרו 7) $(7-1)!=6!$ לכן בסה"כ קיבלנו -

$$\binom{16}{9}*8!*6!$$

ב)

תחילת החישוב היא אותה דבר כמו התרגיל הקודם לכן נקבל $\binom{16}{9}*8!$

כעת עלינו להושיב את הנותרים (7) בספסל ישר ולכן זה יהיה $7!$ (שלא כמו בשולחן עגול שם הושבת הראשון לא משנה)

לכן בסה"כ נקבל -

$$\binom{16}{9}*8!*7!$$

2)

נבחר את מספר האפשרויות לבחור 7 אנשים מתוך 20 (10 זוגות)

לאחר מכן נחסיר את מספר האפשרויות לבחור 7 גברים או 7 נשים ונחסיר את מספר האפשרויות של בחירת זוג.

מספר האפשרויות לבחור 7 מתוך 20 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר הוא $\binom{20}{7}$

מספר האפשרויות לבחור 7 גברים הוא $\binom{10}{7}$ וכך גם נשים

מספר האפשרויות לבחור זוג הוא (נבחר זוג כללי ולאחר מכן ישארו לנו 18 אנשים ומתוכם נבחר 5) $\binom{18}{5}$

ולכן סה"כ נקבל - $\underbrace{\binom{20}{7}}_{77520}-2\underbrace{\binom{10}{7}}_{120}-\underbrace{\binom{18}{5}}_{8568}=68712$

(3

ראשית נחשב את מספר הדרכים האפשריות לחלק 50 כדורים ל3 תאים.
לאחר מכן ניקח את קבוצת האפשרויות כך ש-
50 כדורים ל3 תאים כאשר בתא 1 יש לנו מעל 10 כדורים
50 כדורים ל3 תאים כאשר בתא 2 יש לנו מעל 20 כדורים
50 כדורים ל3 תאים כאשר בתא 3 יש לנו מעל 30 כדורים

לאחר מכן ניקח את כל האפשרויות ונחסיר מהן את האפשרויות שמנינו למעלה.
ראשית נשתמש בחישוב המולטי קבוצה על מנת לחשב את מספר האופציות הכולל

$$\binom{3+50-1}{3-1}=\binom{52}{2}$$

לאחר מכן נרצה לחשב את מספר האפשרויות שאנו רוצים להוריד (אופציות לא טובות)
נשתמש בכעת בעיקרון ההכלה והדחה, ראשית ניתן סימון לכל קבוצה
.... מעל עשר כדורים - $G_{10}$

.... מעל עשרים כדורים $G_{20}$ וכך גם עבור 30 - $G_{30}$

לאחר מכן נרצה לאחד את קבוצת האפשרויות $G_{10}\cup G_{20}\cup G_{30}$
על מנת לעשות זאת אכן נשתמש בעיקרון ההדחה ונקבל את המשוואה הבאה -

$$|G_{10}\cup G_{20}\cup G_{30}|=|G_{10}|+|G_{20}|+|G_{30}|-|G_{10}\cap G_{20}|-|G_{20}\cap G_{30}|-|G_{10}\cap G_{30}|+|G_{10}\cap G_{20}\cap G_{30}|$$

כעת נחשב כל עוצמה של קבוצה שכתבנו מעל -
$|G_{10}|=\binom{40+3-1}{40}=\binom{42}{40}$ - נשים 10 כדורים בחלק הראשון נשארנו עם 40 כדורים להכנסה ל3
תאים (חישוב פשוט של מולטי קבוצה) ולכן גם -

$$|G_{20}|=\binom{30+3-1}{30}=\binom{32}{30}\qquad |G_{30}|=\binom{20+3-1}{20}=\binom{22}{20}$$

$|G_{10}\cap G_{20}|=\binom{20+3-1}{20}=\binom{22}{20}$ - נשים 10 כדורים בחלק הראשון, 20 בחלק השני נשארנו עם 20
כדורים להכנסה ל3 תאים

$|G_{20}\cap G_{30}|=1$ שמנו 20 בתא השני, 30 בתא השלישי וסיימנו את חלוקת התאים.

$$|G_{10}\cap G_{30}|=\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{10}$$

$|G_{10}\cap G_{20}\cap G_{30}|=0$ אין מספיק כדורים בשביל סידור זה.
ולכן סה"כ נקבל -

$$\underbrace{\binom{52}{2}}_{1326}-\underbrace{\left[\underbrace{\binom{42}{40}}_{861}+\underbrace{\binom{32}{30}}_{496}+\cancel{\underbrace{\binom{22}{20}}_{231}}-\cancel{\underbrace{\binom{22}{20}}_{231}}-1-\underbrace{\binom{12}{10}}_{66}\right]}_{1290}=36$$

(4

ראשית נבין מה אנו צריכים לחפש, נחפש את מספר האופציות הכולל להוציא 3 נורות מתוך 50 ונוריד את מספר האופציות להוציא 3 פעמים נורה מקולקלת.

לכן נבדוק מהו מספר האפשרויות הכולל (אין חזרות ואין חשיבות לסדר) ולכן - $\binom{50}{3}$

כעת נחשב מה הסיכוי להוציא 3 נורות מקולקלות - (אין חזרות ואין חשיבות לסדר) - $\binom{18}{3}$

כעת נחסר בין ה2 ונקבל בסה"כ - $\underbrace{\binom{50}{3}}_{19600}-\underbrace{\binom{18}{3}}_{816}=18784$

(5

ניקח את קבוצת המספרים שמכילה את המספרים מ1 עד 500 ונקרא לה $G_{500}$

כעת ניקח את קבוצת המספרים שמתחלקים ב 3 ונקרא לה $D_3$ כך גם עבור 5 ו7 $(D_5,D_7)$ (מספרים עד 500)

כעת ניקח את קבוצת כל המספרים שמתחלקים ב3 וב7 ונחסיר ממנה את קבוצת כל המספרים שמתחלקים ב3 וב5 או שמתחלקים ב7 וב5. זה יראה כך -

$$|D_3\cup D_7|-|(D_3\cap D_5)\cup(D_7\cap D_5)|$$

ראשית נחשב את קבוצת כל המספרים שמתחלקים ב3 או ב7 -

$|D_3\cup D_7|=\underbrace{|D_3|}_{\left\lfloor\frac{500}{3}\right\rfloor}+\underbrace{|D_7|}_{\left\lfloor\frac{500}{7}\right\rfloor}-\underbrace{|D_3\cap D_7|}_{\left\lfloor\frac{500}{21}\right\rfloor}=166+71-23=214$ - (עיקרון ההכלה והדחה)

כעת נחשב את את עוצמת קבוצה כל המספרים שמתחלקים ב5 {ו3 או 7}

$$|(D_3\cap D_5)\cup(D_7\cap D_5)|=|(D_3\cap D_5)|+|(D_7\cap D_5)|-|(D_3\cap D_5)\cap(D_7\cap D_5)|=$$

$$\underbrace{|(D_3\cap D_5)|}_{\left\lfloor\frac{500}{15}\right\rfloor}+\underbrace{|(D_7\cap D_5)|}_{\left\lfloor\frac{500}{35}\right\rfloor}-\underbrace{|D_3\cap D_5\cap D_7|}_{\left\lfloor\frac{500}{105}\right\rfloor}=33+14-4=43$$

(שוב על פי עיקרון ההכלה והדחה) ולכן בסה"כ נקבל -

$214-43=171$

6)

ננסה למצוא בעיה קומבינטורית דומה, נשים לב כי הביטוי נראה כמו תוצאה לאחר חישוב choose
ניתן לראות כי המונה (הסה"כ) הוא $2n!$ ולכן נניח כי סה"כ אצלנו הוא $2n$
כעת נשים לב כי הביטוי $n$ מופיע מספר פעמים למטה ולכן נבדוק מה קורה כאשר הבחירה היא n (תמיד חלמתי להמציא שאלה) ערימות מתוך $2n$ ערימות, (לאחר בחירה יהיו לי 2 קבוצות של n – את הערימות שבחרתי נצבע בכחול, ואת השאר בצהוב)

מכיוון שאין חשיבות לסדר הבחירה של הערימות ואין חזרות נקבל - $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\underbrace{(2n-n)!}_{n!}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

כעת נראה שקיבלנו כמעט את התשובה הרצויה אך פי 2 (חסר לנו במכנה פי 2)
לכן נזכור כי אנו בוחרים ל2 קבוצות נחליט כי אין חשיבות לסדר הקבוצות) – גורר מבחינה קומבינטורית את השאלה הבאה. יש לנו $2n$ ערימות נרצה לבחור קבוצה של ערימות בגודל $n$ נצבע אותה בכחול וגם את השאר נצבע בכחול (אין חשיבות לסדר בחירת הקבוצה)

ונקבל $\frac{(2n)!}{(n!)^2}\to\frac{(2n)!}{2(n!)^2}$

7)

ראשית נשים לב כי אם $7\le z\le 14$ שקול להחליט כי $z\le \underbrace{7}_{14-7}$ כך גם עבור 2 הנעלמים האחרים

$x\le \underbrace{6}_{8-2}$ ו $y\le \underbrace{9}_{12-3}$

למדנו לעבוד עם נתונים כאלו.
כעת נחשב את כל הפתרונות עבור המשוואה הנתונה ונחסיר את המשוואות בהן $x\ge 7, y\ge 10, z\ge 8$ (אפשרויות לא טובות)

לכן נחשב את מספר פתרונות המשוואה בלי הגבלות נקבל - $\binom{3+13-1}{13}=\binom{15}{13}$

כעת עבור מספר הפתרונות כאשר $x\ge 7$ זה כמו בחירה בלי הגבלת x אבל השיוויון הוא $13-7=6$

ולכן מספר הפתרונות יהיה $\binom{3+6-1}{6}=\binom{8}{6}$

כך גם עבור $z\ge 8$ - $\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}$ ועבור $y\ge 10$ - $\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}$

כעת נחסר את האפשרויות הלא מתאימות מהסה"כ ונקבל -

$$\underbrace{\binom{15}{13}}_{105}-\underbrace{\binom{8}{6}}_{28}-\underbrace{\binom{7}{5}}_{21}-\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}=47$$

8)א)

נשים לב כי כל קבוצה יכולה להחיל או לא להחיל את האיבר הראש, אותו דבר עבור האיבר השני והלאה ולכן עבור בחירת קבוצה אחת נקבל $2^m$ כעת יש לנו 4 קבוצות ולכן נקבל $2^m * 2^m * 2^m * 2^m = \left(2^m\right)^4$

ב)

ג)

נשים לב כי לכל איבר יש 4 אופציות (להיות בקבוצה הראשונה/שניה/שלישית/רביעית) ויש לנו m איברים ולכן נקבל $4^m$

ד)

ניקח מספר n שיהיה אי-זוגי ונחשב את מספר האופציות

9)