אינפי 2 – תרגיל 3

1)

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx \le \frac{1}{2}(e-1)$$

נעזר במשפט שלמדנו בכיתה אם $f(x) \ge g(x)$ ו2 הפונקציות אינטגרבליות בקטע $[a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x) \ge \int_a^b g(x)$$

ניקח את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\underbrace{(1+x)(2-x)}_{-x^2+x+2}}$

ונמצא את הערך המינמאלי והמקסימאלי שלה, נגזור את הפונקציה

$$u = 1, u' = 0$$
$$v = -x^2 + x + 2, v' = -2x + 1$$
$$f'(x) = \frac{\left[0*\left(-x^2\right)+x+2\right]+2x-1}{\left((1+x)(2-x)\right)^2} = \frac{2x-1}{\left((1+x)(2-x)\right)^2}$$

נמצא נקודות חשודות:

הנגזרת לא קיימת – הנגזרת לא קיימת כאשר $x=-1, x=2$ אך זה לא בקטע שבו אנו מחפשים ולכן לא אכפת לנו

הנגזרת מתאפסת - $f'(x)=0 \to 2x-1=0 \to 2x=1 \to x=\frac{1}{2}$ לכן יש לנו נקודה חשודה ב $x=\frac{1}{2}$

נקודות בקצה (קטע סגור) – הקטע שלנו אכן סגור ולכן הנקודות $x=0, x=1$ הן נק' קצה.

ולכן בסהכ יש לנו 3 נקודות קצה ב $x=0, x=\frac{1}{2}, x=1$

נמצא את ערכי הע של הנקודות

$$f(0) = \frac{1}{(1)(2)} = \frac{1}{2} \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(1.5)(1.5)} = \frac{1}{2.25} \to \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right)$$

$$f(1) = \frac{1}{(2)(1)} = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

לכן לפי משפט ווירשטראס שלמדנו יש את נקודות קיצון הבאות

נקודת מינימום ב $\left(\frac{1}{2},\frac{4}{9}\right)$

נקודות מקסימום ב $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ו $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

לכן על פי המשפט נקבל כי

$$\int_0^1 \frac{4}{9} \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(2-x)}dx \le \int_0^1 \frac{1}{2}$$

מכיון ש $f(x)$ חיובית בתחום נוכל להכפיל את הפונקציה במספר חיובי והאי שוויונות ישמרו

נכפול ב e^x

$$\int_0^1 \frac{4e^x}{9} \le \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx \le \int_0^1 \frac{e^x}{2}$$

כעת נשאר להראות כי

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 \frac{4e^x}{9} = \frac{4}{9}(e-1)$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2} = \left.\frac{e^x}{2}\right|_0^1 = \frac{e^1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 \frac{4e^x}{9} = \left.\frac{4e^x}{9}\right|_0^1 = \frac{4e^1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}(e-1)$$

ולכן

$$\frac{4}{9}(e-1) = \int_0^1 \frac{4e^x}{9} \le \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx \le \int_0^1 \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx \le \frac{1}{2}(e-1)$$

ב) $0 \le \int_0^x e^{-t^2}dt \le \arctan x$

לכל t $0 < e^{t^{-2}}$ לכן על פי המשפט שנעזרנו בו בשאלה קודמת $0 = \int_0^x 0 < \int_0^x e^{t^{-2}}$

לכן נשאר להוכיח כי $\int_0^x e^{-t^2}dt \le \arctan x$ נמצא את הנגזרת של $\arctan(x)$ על מנת שנוכל להוכיח כי

$e^{-t^2} \le (\arctan(x))'$ ואז

$$\int_0^x e^{-t^2}dt \le \int_0^x (\arctan x)' = \arctan(x)\Big|_0^x = \arctan(x) - \underbrace{\arctan(0)}_{0} = \arctan(x)$$

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ נביע אותו באמצעות t $\frac{1}{1+t^2}$

לכן נשאר רק להוכיח כי $e^{t^{-2}} \le \frac{1}{1+t^2}$ לכל t

$$e^{t^{-2}} \le \frac{1}{1+t^2} \to \frac{1}{\underbrace{e^{t^2}}_{e^{t^2}>0}} \le \frac{1}{\underbrace{1+t^2}_{1+t^2>0}} \to 1+t^2 \le e^{t^2}$$

כעת עלינו להוכיח כי $1+t^2 < e^{t^2}$, נגדיר את הפונקציה t ונראה כי $f(t) > 0$ לכל t

$$f(t)' = 2te^{t^2} - 2t = 2t\left(e^{t^2} - 1\right)$$

נמצא נקודות חשודות

הנגזרת לא קיימת – הנגזרת קיימת לכל t

הנגזרת מתאפסת -

$$f(t)' = 0 \to 2t\left(e^{t^2} - 1\right) = 0 \to$$
$$2t = 0 \to t = 0$$
$$e^{t^2} - 1 = 0 \to e^{t^2} = 1 \to t^2 = \ln(1) \to t^2 = 0 \to t = 0$$

לכן יש לנו נקודה חשודה ב $t = 0$

נקודות בקצה (קטע סגור) – הקטע שלנו פתוח והוא לכל t ולכן אי נקודות קצת ולכן הנקודה החשודה היחידה שלנו היא $t = 0$

למבחן מבחן השוואה ראשוני

t	-2	0	2
$f(t)'$	-	-------	+
$f(t)$	יורדת	מינימום	עולה

לכן קיימת נקודת מינימום ב $t=0$ אם בנקודה זאת ערך $f(t)$ יהיה גדול או שווה ל0 אז לכל t ב $f(t)$ הערך גדול או שווה ל0

$f(0)=e^{0^2}-0^2-1=0$ ואכן כך.

לכן הוכחנו כי $0=\int_0^x 0<\int_0^x e^{t^{-2}}$ ובנוסף עכשיו הוכחנו כי $\int_0^x e^{-t^2}dt \le \arctan x$ לכן נקבל באי שיוויונות

$$0 \le \int_0^x e^{t^{-2}} \le \arctan(x)$$

2)א)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=1+\ln x$

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\to dx=xdt$ כעת לאחר הצבת s האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{t}}=\int\underbrace{\frac{xdt}{x\sqrt{t}}}_{dx=xdt}=\int\underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}}_{\left(2\sqrt{t}\right)'=\frac{1}{\sqrt{t}}}*dt=2\sqrt{t}=2\underbrace{\sqrt{1+\ln x}}_{\sqrt{t}}+c$$

ב)

$$\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=\sqrt{x}+1$

$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\to dx=2\sqrt{x}dt$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int\frac{x}{\underbrace{t}_{\sqrt{x}+1}}\underbrace{2\sqrt{x}dt}_{dx}=\int\frac{x}{t}2(t-1)dt=\int\frac{2x(t-1)}{t}dt=\int\frac{2x(t-1)}{t}dt=$$

$$\int\frac{2x(t-1)}{t}dt=\int\frac{2\overbrace{\sqrt{x}^2}^{x}(t-1)}{t}dt=\int\frac{2(t-1)^2(t-1)}{t}dt=\int\frac{2(t-1)^3}{t}dt=$$

$$\int\frac{2(t-1)^3}{t}dt=\int\frac{2t^3-6t^2+6t-2}{t}dt=\int 2t^2dt-\int 6tdt+\int 6dt-\int\frac{2}{t}dt$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{3}-3\left(\sqrt{x}+1\right)^2+6\left(\sqrt{x}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$$

$$\int 2t^2dt=\frac{2t^3}{3}=\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{3}$$

$$\int 6tdt=\frac{6t^2}{2}=3t^2=3\left(\sqrt{x}+1\right)^2$$

$$\int 6dt=6t=6\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$\int\frac{2}{t}dt=-2\ln(t)=-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$$

ג)

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=2x+3$

לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך $dt=2dx\rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

$$\int x\sqrt[6]{t}\frac{dt}{2}=\int\left(\frac{t-3}{2}\right)*t^{\frac{1}{6}}*\frac{dt}{2}=\int\frac{1}{4}\left(t^{\frac{7}{6}}-3t^{\frac{1}{6}}*dt\right)=\frac{1}{4}\int t^{\frac{7}{6}}dt-\int 3t^{\frac{1}{6}}dt$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{t^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}}-\frac{3t^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{6t^{\frac{13}{6}}}{13}-\frac{18t^{\frac{7}{6}}}{7}\right)=\frac{6}{52}*(2x+3)^{\frac{13}{6}}-\frac{18}{28}*(2x+3)^{\frac{7}{6}}+c$$

$$\int t^{\frac{7}{6}}dt=\frac{t^{\frac{7+6}{6}}}{\frac{7+6}{6}}=\frac{t^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}}$$

$$\int 3t^{\frac{1}{6}}dt=\frac{3t^{\frac{1+6}{6}}}{\frac{1+6}{6}}=\frac{3t^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}$$

ד)

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=\sqrt{x+1}$

לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך $dt=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx\rightarrow dx=2\sqrt{x+1}dt$

$$\int\frac{t+2}{t^2-t}*2\underbrace{\sqrt{x+1}}_{t}dt=\int\frac{2t(t+2)}{t(t-1)}dt=2\int\frac{t+2}{t-1}dt=2\left(\overbrace{\int\frac{t-1}{t-1}dt+\int\frac{3}{t-1}dt}^{t+2=t-1+3}\right)$$

$$=2\left(t+3\ln(t-1)\right)=2t+6\ln(t-1)=t\sqrt{x+1}+6\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)+c$$

$$\int\frac{t-1}{t-1}dt=\int 1dt=t$$

$$\int\frac{3}{t-1}dt=3\ln(t-1)$$

ה)

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=x^2$

$dt=2xdx \to dx=\frac{dt}{2x}$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int\frac{t-2x+1}{2xt}dt=\int\frac{t}{2xt}dt-\int\frac{2x}{2xt}dt+\int\frac{1}{2xt}dt$$

$$=x-\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{x}+c$$

$$\int\frac{t}{2xt}dt=\int\frac{1}{2x}\underbrace{dt}_{2xdx}=\int\frac{2x}{2x}dx=\int 1dx=x$$

$$\int\frac{2x}{2xt}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln t=\ln\left(x^2\right)$$

$$\int\frac{1}{2xt}\underbrace{dt}_{2xdx}=\int\frac{2x}{2x^3}dx=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}$$

ו)

$$\int\frac{e^x}{e^x+e^{\frac{x}{2}}}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=e^{\frac{x}{2}}$

$dt=\frac{e^x}{2e^{\frac{x}{2}}}dx \to dx=\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{e^x}dt=\frac{2t}{t^2}dt=\frac{2}{t}dt$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int\frac{t^2}{t^2+t}*\frac{2dt}{t}=\int\frac{2t^2}{t^2\left(t+1\right)}dt=\int\frac{2}{t+1}dt$$

$$=2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)+c$$

$$\int\frac{2}{t+1}dt=2\ln\left(t+1\right)=2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)$$

ז)

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1}$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=x+2$

$dt=1dx \to dx+dt$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int\frac{1}{t^2+1}*dt=artc\tan\left(x+2\right)+c$$

$$\int\frac{1}{t^2+1}dt=atc\tan\left(t\right)=\arctan\left(x+2\right)$$

ח)

$$\int x(1-x)^{100}\,dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=1-x$

לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך $dt=-1dx \rightarrow dx=-dt$

$$\int \underbrace{-x}_{t-1}(t)^{100}\,dt=\int (t-1)t^{100}dt=\int t^{101}-t^{100}dt=\int t^{101}dt-\int t^{100}dt$$

$$=\frac{(1-x)^{102}}{102}-\frac{(1-x)^{101}}{101}+c$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int t^{101}dt=\frac{t^{102}}{102}=\frac{(1-x)^{102}}{102}\\ \int t^{100}dt=\frac{t^{101}}{102}=\frac{(1-x)^{101}}{101}\end{array}}$$

ט)

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$$

נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים $\underbrace{\arcsin x}_{f}*\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}_{g'}$ נחשב את f' ו g

$$f'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g=\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}$$

כעת נציב בנוסחה $f*g-\int f'*g$ ונקבל

$$\arcsin x*2\sqrt{x+1}-\int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{x+1}*\sqrt{x-1}}}dx*2\sqrt{x+1}=2\left(\arcsin x*\sqrt{x+1}\right)-2\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}*\sqrt{x-1}}dx$$

$$=2\left(\arcsin x*\sqrt{x+1}\right)-2\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=-2\sqrt{x-1}+c}$$

$$=2\left(\arcsin x*\sqrt{x+1}\right)-2\left(-2\sqrt{x-1}\right)+c=2\left(\arcsin x*\sqrt{x+1}\right)+4\sqrt{x+1}+c$$

י)

$$\int xe^{-x}dx$$

נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים $\underbrace{x}_{f}*\underbrace{e^{-x}}_{g'}$ נחשב את f' ו g

$$f' = (x)' = 1$$

$$g = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

כעת נציב בנוסחה $f*g-\int f'*g$ ונקבל

$$\boxed{\int e^{-dx} = -e^{-x}+c}$$

$$-xe^{-x}-\int -e^{-x}dx = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x}-e^{-x}+c$$

יא)

$$\int \sin(\ln x)dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=\ln x$

$dt=\frac{1}{x}dx \rightarrow dx=xdt$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int \sin txdt=\int \sin t * e^t dt$$

כעת נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים $\underbrace{\sin t}_{g'} * \underbrace{e^t}_{f}$ נחשב את f' ו g

$$f'=\left(e^t\right)'=e^t$$

$$g=\int \sin tdt=-\cos t$$

כעת נציב בנוסחה $f*g-\int f'*g$ ונקבל

$$e^t*-\cos t-\int e^t*-\cos t=-\left(e^t*\cos t\right)+\int \cos t*e^t dt$$

כעת נשתמש שוב בשיטת האינטגרציה בחלקים $\underbrace{\cos t}_{g'} * \underbrace{e^t}_{f}$ נחשב את f' ו g

$$f'=e^t$$

$$g=\int \cos t=\sin t$$

כעת נציב בנוסחה $f*g-\int f'*g$ ונקבל

$e^t*\sin t-\int e^t*\sin tdt$ לכן $\int \cos t*e^t dt=e^t*\sin t-\int e^t*\sin tdt$ נציב את זה במה שיצא לנו
מקודם ונקבל $-e^t*\cos t+e^t*\sin t-\int e^t*\sin tdt$ וכל זה שווה ל $\int \sin te^t dt$

זאת אומרת

$$\int \sin te^t dt=-e^t*\cos t+e^t*\sin t-\int e^t*\sin tdt$$
$$2\int e^t*\sin tdt=-e^t\cos t+e^t\sin t$$
$$\frac{x\left(\sin\ln x-\cos\ln x\right)}{2}=\int e^t*\sin tdt$$
$$\int \sin\left(\ln x\right)=\frac{x\left(\sin\ln x-\cos\ln x\right)}{2}$$