לינארית 2 – תרגיל 5

(1

נוכיח רפלקסיביות

נוכיח כי מתקיים $A \sim A$ -

נבחר את $P = I$ ולכן $P^{-1} = I$ והנה $A = \underbrace{IAI}_{A}$

נוכיח סימטריות

נוכיח כי אם מתקיים $A \sim B$ אזי גם מתקיים $B \sim A$ -

מכיוון ש $A \sim B$ אזי קיימת P כך ש $A = P^{-1}BP$ נבצע מספר מעברים מתמטיים ונקבל

$$A = P^{-1}BP \to PA = \underbrace{PP^{-1}}_{I}BP \to PA = BP \to PAP^{-1} = B\underbrace{PP^{-1}}_{I} \to PAP^{-1} = B$$

ולכן המטריצה P עבור הדמיון $B \sim A$ תהיה P^{-1} של הדמיון $A \sim B$

נוכיח טרנזטיביות

נוכיח כי אם מתקיים $A \sim B$ ו $B \sim C$ אזי מתקיים $A \sim C$

מכיוון ש $A \sim B$ אזי קיימת P_1 כך ש $A = P_1^{-1}BP_1$

מכיוון ש $B \sim C$ אזי קיימת P_2 כך ש $B = P_2^{-1}CP_2$

כעת נבחר את המטריצה P_3 של הדמיון $A \sim C$ להיות $P_3 = P_1P_2$ נבדוק האם אכן הדמיון מתקיים

$\left(P_1P_2\right)^{-1}AP_1P_2 = P_2^{-1}\underbrace{P_1^{-1}AP_1}_{B}P_2 = \underbrace{P_2^{-1}BP_2}_{C} = C$ אכן הדמיון מתקיים.

הוכחנו כי היחס ~ בעל מאפייני רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות ולכן הוא יחס שקילות.

(2

הוכחנו בתרגיל הקודם של2 מטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה,

ולכן נחלק את המרחב $\mathbb{R}^{2x2}$ למחלקות שקילות לפי מטריצות דומות, שזה אותה חלוקה לפי דטרמיננטה שווה.

ולכן נמצא 6 מטריצות במרחב $\mathbb{R}^{2x2}$ עם דטרמיננטה שונה -

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1*1 = 1$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2*1 = 2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 3*1 = 3$$

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 4*1 = 4$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 5*1 = 5$$

$$\left|\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 6*1 = 6$$

3)א)

נבדוק לאן לוקחת העתקה הלינארית את הוקטורים הבאים $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

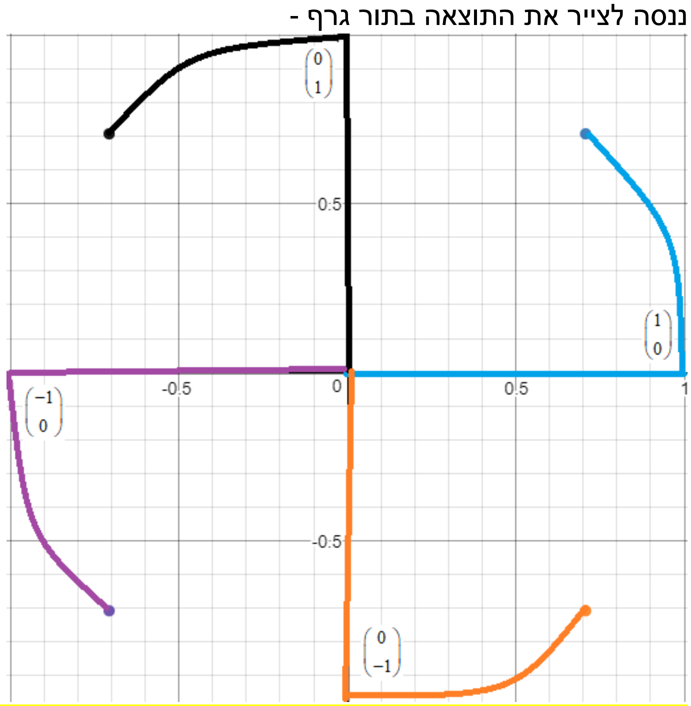
$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*1-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*0\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*0-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*1\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*0+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*-1-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*0\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*0-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*-1\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)*0+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)*-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

ננסה לצייר את התוצאה בתור גרף -



ניתן לראות כי העתקה מסובבת את הוקטור כנגד כיוון השעון ב 45°

ב)

לא יהיה קיים וקטור וערך עצמיים כאלו מכיוון שאם יהיה קיים וקטור עצמי כזה אזי הערך העצמי יהיה כמו סקלר עבור הווקטור והוא לא יסובב אותו ב45 מעלות.

ג)

ניקח בסיס B להיות בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$

כעת נציב וקטורי בסיס במטריצה לפי בסיס B

$$\begin{pmatrix} | & | \\ T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

כעת הפולינום האופייני יהיה

$$P_A(\lambda) = |\lambda I - [T]_B| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right|$$

$$\left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}}_{-0.5}\right) = \lambda^2 - \lambda\sqrt{2} + 0.5 + 0.5 = \lambda^2 - \lambda\sqrt{2} + 1$$

נמצא את הפתרונות של λ

$\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{2}^2 - 4*1}}{2}$ אין פתרון לשורש ולכן אין פתרון למשוואה.

אין ערכים עצמאיים להעתקה הלינארית.

4)א)

נבדוק לאן לוקחת העתקה הלינארית את הווקטורים הבאים $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

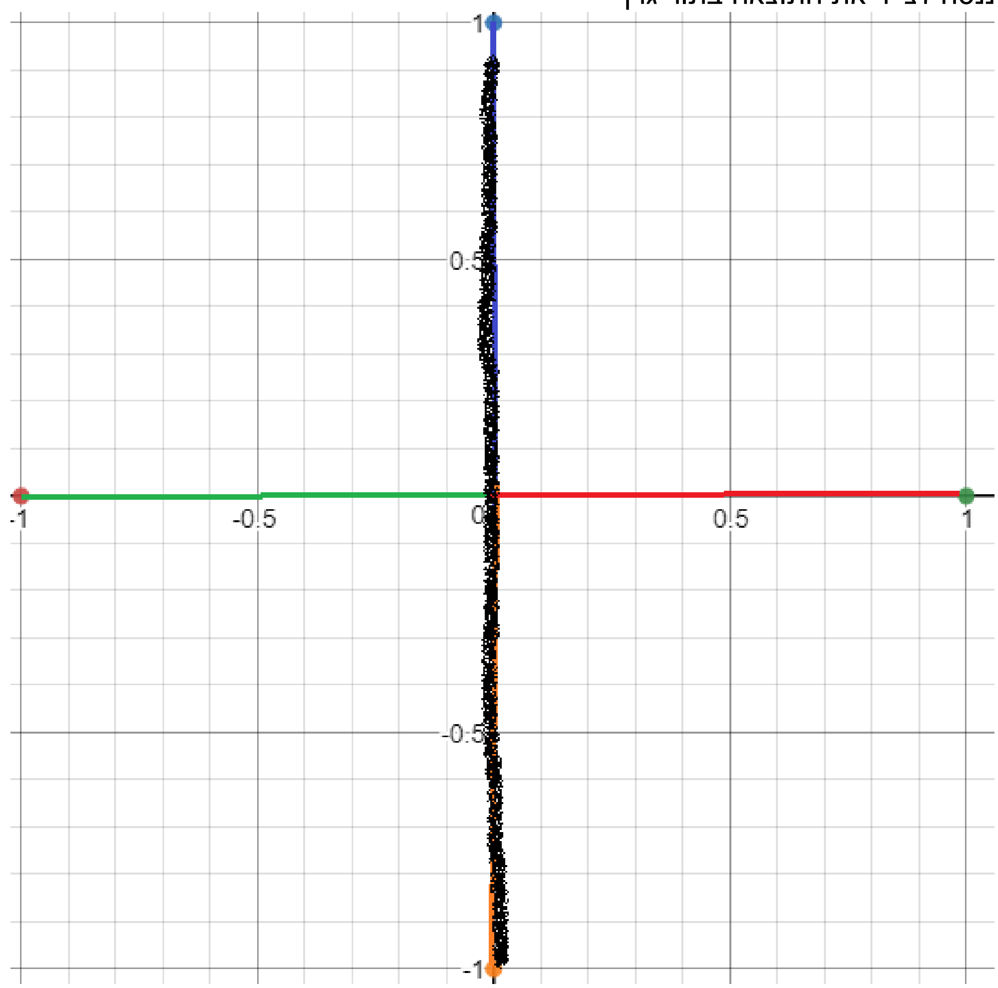
$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

ננסה לצייר את התוצאה בתור גרף -



ניתן לראות כי ערכי ה y לא השתנו אך ערכי ה x התהפכו ויצרו מעין תמונת מראה (הקו השחור בציור)

ב)כן,

עבור וקטורים מהצורה $sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ הערך העצמי יהיה -1, כמו הדוגמה שבדקנו קודם

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-1*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ובנוסף עבור וקטורים מהצורה $sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הערך העצמי יהיה 1 כמו הדוגמה שבדקנו קודם

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1*\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ג)

ניקח בסיס B להיות בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$

כעת נציב וקטורי בסיס במטריצה לפי בסיס B

$$\begin{pmatrix} | & | \\ T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כעת הפולינום האופייני יהיה

$$P_A(\lambda)=|\lambda I-[T]_B|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+1&0\\0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)$$

נמצא את הפתרונות של λ - $\lambda=-1,\lambda=1$

נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$

הווקטור העצמי צריך לקיים $([T]_B-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N([T]_B-\lambda I)$

$$([T]_B-\lambda I)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}-2&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה (היא מדורגת) ולכן

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \end{array}\qquad \left(\begin{array}{cc|c}-2&0&0\\0&0&0\end{array}\right)\to a=0,b=t\to sp\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$ הוא $sp\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=-1$

הווקטור העצמי צריך לקיים $\left([T]_B-\lambda I\right)v=0$ כלומר $v\in N\left([T]_B-\lambda I\right)$

$$\left([T]_B-\lambda I\right)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה (היא מדורגת) ולכן

$$\begin{array}{cc} a & b & \\ \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{cc|c}0&0&0\\0&2&0\end{array}\right)}\end{array}\rightarrow a=t,b=0\rightarrow sp\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=-1$ הוא $sp\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

(5

נמצא את הפולינום האופייני למטריצה

$$P_A(\lambda)=|\lambda I-[T]_B|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&8&1\\0&0&0&0&8\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0&0&0\\0&\lambda-3&-1&0&0\\0&0&\lambda-3&0&0\\0&0&0&\lambda-8&-1\\0&0&0&0&\lambda-8\end{pmatrix}\right|$$

למדנו בתחילת שנה כי ניתן לקחת מטריצת בלוקים, ניתן לקחת את המטריצות על האלכסון לחשב את הדטרמיננטות שלהן ולכפול בין הדטרמיננטות ונקבל את הדטרמיננטה של המטריצה השלמה.

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0\\0&\lambda-3&-1\\0&0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|=(\lambda-3)*\underbrace{\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-1\\0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|}_{(\lambda-3)^2}=(\lambda-3)^3$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-8&-1\\0&\lambda-8\end{pmatrix}\right|=(\lambda-8)^2$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0&0&0\\0&\lambda-3&-1&0&0\\0&0&\lambda-3&0&0\\0&0&0&\lambda-8&-1\\0&0&0&0&\lambda-8\end{pmatrix}\right|=(\lambda-3)^3(\lambda-8)^2$$

נמצא את הפתרונות של λ **-** $\lambda=8,\lambda=3$

<u>עבור הערך העצמי</u> $\lambda=3$

הריבוי האלגברי הינו 3

והריבוי הגיאומטרי הוא

$$N(A-3I)=N\left(\begin{pmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&8&1\\0&0&0&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&5&1\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} a & b & c & d & e & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \to e=0, \overbrace{d=0}^{5d+0=0\to d=0}, c=0, b=0, a=t \to sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}-$$

לכן הריבוי הגיאומטרי הינו 1.

<u>עבורך הערך העצמי</u> $\lambda=8$

הריבוי האלגברי הינו 2

והריבוי הגיאומטרי הוא

$$N(A-3I)=N\left(\begin{pmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&8&1\\0&0&0&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&0&0&0&0\\0&8&0&0&0\\0&0&8&0&0\\0&0&0&8&0\\0&0&0&0&8\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}-5&1&0&0&0\\0&-5&1&0&0\\0&0&-5&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} a & b & c & d & e & \\ \hline -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to e=0, c=0.\ \overbrace{b=0}^{-5b+0=0\to b=0}\ ,\ \overbrace{a=0}^{-5a+0=0\to a=0}\ , d=t \to sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}-$$

לכן הריבוי הגיאומטרי הינו 1.

לסיכום

עבור הע"ע $\lambda=3$: הריבוי האלגברי – 3, הריבוי הגיאומטרי – 1.

עבור הע"ע $\lambda=8$: הריבוי האלגברי – 2, הריבוי הגיאומטרי – 1.