אינפי 2 – תרגיל 4

1)

$\int xe^{-x}dx$

נפתור לפי אינטגרציה בחלקים $\underbrace{x}_{f}\underbrace{e^{-x}}_{g'}$ נחשב את f', g

$f' = (x)' = 1$

$g = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

כעת נציב בנוסחה $f * g - \int f' * g$ ונקבל

$-xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

2)

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx$$

נפתור לפי אינטגרציה בחלקים $\underbrace{e^{2x}}_{g'}\underbrace{\sin^2 x}_{f}$ נחשב את f', g

$$f' = \left(\sin^2 x\right)' = \sin\left(2x\right)$$

$$g = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

כעת נציב בנוסחה $f*g - \int f'*g$ ונקבל

$$\frac{\sin^2\left(x\right)*e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int \sin\left(2x\right)e^{2x}$$

כעת נמצא את $\int \sin\left(2x\right)e^{2x}dx$

נפתור לפי אינטגרציה בחלקים $\underbrace{\sin\left(2x\right)}_{g'}\underbrace{e^{2x}}_{f}$ נחשב את f', g

$$f' = \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$$

$$g = \int \sin\left(2x\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x\right)$$

כעת נציב בנוסחה $f*g - \int f'*g$ ונקבל

$$-\frac{e^{2x}*\cos\left(2x\right)}{2} + \int e^{2x}\cos\left(2x\right)dx$$

כעת נמצא את $\int e^{2x}\cos\left(2x\right)dx$

נפתור לפי אינטגרציה בחלקים $\underbrace{e^{2x}}_{f}\underbrace{\cos\left(2x\right)}_{g'}$ נחשב את f', g

$$f' = \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$$

$$g = \int \cos\left(2x\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x\right)$$

כעת נציב בנוסחה $f*g - \int f'*g$ ונקבל

$$\frac{e^{2x}\sin\left(2x\right)}{2} - \int e^{2x}\sin\left(2x\right)dx$$

כעת נראה מה מצאנו -

$$\frac{\sin^2(x)*e^{2x}}{2}-\underbrace{\frac{1}{2}\int\sin(2x)e^{2x}dx}_{-\frac{e^{2x}*\cos(2x)}{2}+\underbrace{\int e^{2x}\cos(2x)dx}_{\frac{e^{2x}\sin(2x)}{2}-\int e^{2x}\sin(2x)dx}}=\frac{\sin^2(x)*e^{2x}}{2}-\left[-\frac{e^{2x}*\cos(2x)}{2}+\left(\frac{e^{2x}\sin(2x)}{2}-\int e^{2x}\sin(2x)\,dx\right)\right]$$

$$\frac{\sin^2(x)*e^{2x}}{2}-\left[-\frac{e^{2x}*\cos(2x)}{2}+\left(\frac{e^{2x}\sin(2x)}{2}-\int e^{2x}\sin(2x)\,dx\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\sin^2(x)e^{2x}+\frac{1}{4}\cos(2x)*e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\sin(2x)-\underbrace{\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin(2x)\,dx}_{=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}\left[\cos(2x)-\sin(2x)\right]}$$

מצאנו כבר את האינטגרל ולכן יש לנו פה מחזוריות, נשווה אותן ונמצא

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}e^{2x}\left(\cos(2x)-\sin(2x)\right)\right)=-\frac{1}{8}e^{2x}\left(\cos(2x)-\sin(2x)\right)\rightarrow$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin^2(x)\right)*e^{2x}-\frac{e^{2x}}{8}\left(\cos(2x)-\sin(2x)\right)+c$$

(3

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=9-x^2$

$dt=2xdx \to dx=\frac{1}{2x}dx$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int x^3\sqrt{t}\,\frac{1}{2x}dt=\frac{1}{2}\int\frac{x^3}{x}\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int\underbrace{(9-t)}_{9-(9-x^2)=x^2}*\sqrt{t}dt=$$

$$\frac{1}{2}*\left[\int 9\sqrt{t}dt-\int\underbrace{t^{1.5}}_{t^1*t^{0.5}=t^{1.5}}dt\right]=\frac{1}{2}*\left[9*\frac{t^{1.5}}{1.5}-\frac{t^{2.5}}{2.5}\right]+c=3t^{1.5}-0.2t^{2.5}+c$$

$$3t^{1.5}-0.2t^{2.5}+c=$$

$$3\left(9-x^2\right)^{1.5}-0.2\left(9-x^2\right)^{2.5}$$

(4

$$\int\frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=\sqrt{2x-3}$

$dt=\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}dx=\to dx=dt\sqrt{2x-3}$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int\frac{1}{t}dt\underbrace{\sqrt{2x-3}}_{t}=\int 1dt=t+c$$

$$=\sqrt{2x-3}+c$$

(5

$$\int x^7\sqrt{5+3x^4}\,dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=5+3x^4$

$dt=12x^3dx \rightarrow dx=\frac{dt}{12x^3}$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int x^7\sqrt{t}*dt\frac{1}{12x^3}=\frac{1}{12}\int\underbrace{\frac{x^7}{x^3}}_{x^4}\sqrt{t}dt=\frac{1}{12}\int\underbrace{\frac{t-5}{3}}_{\frac{3x^4+5-5}{3}=x^4}\sqrt{t}dt=\frac{1}{36}\int(t-5)\sqrt{t}dt$$

$$\frac{1}{36}\left[\int t^{1.5}dt-5\int t^{0.5}dt\right]=\frac{1}{36}\left[\frac{t^{2.5}}{2.5}-\frac{5t^{1.5}}{1.5}\right]=\frac{t^{2.5}}{90}-\frac{5t^{1.5}}{54}+c$$

$$=\frac{\left(5+3x^4\right)^{2.5}}{90}-\frac{5\left(5+3x^4\right)^{1.5}}{54}+c$$

(6

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=x^2$

$dt=2xdx \to dx=\frac{dt}{2x}$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2 * 2x}dt=\frac{1}{2}\int \frac{x^2 e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{te^t}{\left(t+1\right)^2}dt$$

כעת נפתור לפי אינטגרציה בחלקים $\underbrace{\frac{\overbrace{te^t}^{f}}{\left(t+1\right)^2}}_{g'}$ נחשב את $f^{'}, g$

$$f^{'}=\left(te^t\right)^{'}=te^t+t$$

$$g=\int \frac{1}{\left(t+1\right)^2}dt=-\frac{1}{t+1}$$

כעת נציב בנוסחה $f*g-\int f^{'}*g$ ונקבל

$$\frac{1}{2}\left[te^t*\left(-\frac{1}{t+1}\right)-\int\left(te^t+t\right)\left(-\frac{1}{t+1}\right)dt\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{te^t}{t+1}-\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[te^t*\left(-\frac{1}{t+1}\right)-\int\underbrace{\left(te^t+t\right)}_{e^t\left(t+1\right)}\left(-\frac{1}{t+1}\right)dt\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{te^t}{t+1}+\int e^t dt\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{te^t}{t+1}+e^t\right]$$

$$-\frac{te^t}{2t+2}+\frac{e^t}{2}+c=-\frac{x^2e^{x^2}}{2x^2+2}+\frac{e^{x^2}}{2}+c$$

(7

$$\int \sin^6 x\cos^2 xdx$$

נעזר ב –

$$\int \sin^n x\cos^2 xdx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos^3 x}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\int \sin^{n-2}\cos^2 xdx$$

$$\int \sin^6 x\cos^2 xdx = -\frac{\sin^5 x\cos^3 x}{8}+\frac{5}{8}\int \sin^4\cos^2 xdx$$

$$\int \sin^4\cos^2 xdx = -\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6}+\frac{3}{6}\int \sin^2 x\cos^2 xdx$$

$$\int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\cos^2 xdx = \int \cos^2 x-\cos^4 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}-\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4}-\frac{\cos^2 2x}{4}dx = \int \frac{1}{4}-\frac{\frac{1+\cos 4x}{2}}{4}dx = \int \frac{1}{8}-\frac{\cos 4x}{8}dx = \frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$$

$$= -\frac{\sin^5 x\cos^3 x}{8}+\frac{5}{8}\underbrace{\int \sin^4\cos^2 xdx}_{-\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6}+\frac{3}{6}\underbrace{\int \sin^2 x\cos^2 xdx}_{\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}}} =$$

$$-\frac{\sin^5 x\cos^3 x}{8}+\frac{5}{8}\left[-\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}\right)\right]$$

(8

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$$

$$\int \frac{\overbrace{\cos 2x}^{1-2\sin^2 x}}{\cos^2 x\sin^2 x}dx = \int \frac{\overbrace{1}^{\cos^2 x+\sin^2 x}-2\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sin^2 x}dx}_{-\cot x}-\underbrace{\int \frac{1}{\cos^2 x}}_{\tan x} = -\cot x-\tan x+c$$

(9

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$dt=\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx \to dx=\left(1+\cos x\right)dt$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\left(1+\cos x\right)dt=\int \frac{\frac{1}{1+\sin x+\cos x}}{1+\cos x}dt=\int \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin x}{1+\cos x}}_{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}+\underbrace{\frac{1+\cos x}{1+\cos x}}_{1}}dt$$

$$\int \frac{1}{1+t}dt=\ln|1+t|+c=\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

(10

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=1+\sin^2 x$

$dt=\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}dx \to dx=\frac{1}{\sin 2x}dt$ לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}*\frac{1}{\sin 2x}dt=\int \frac{\sin 2x}{\left(1+\sin^2 x\right)\sin 2x}dt=\int \frac{1}{t}dt$$

$$=\ln|t|+c=\ln|1+\sin^2 x|+c$$

(11

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים $\int \frac{1}{\underbrace{(x-a)(x+a)}_{x^2-a^2}} \to \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$

$$(x-a)B+(x+a)A \to Bx-Ba+Ax+Aa \to x(A+B)+a(A-B)$$

$$x(A+B)+a(A-B)=1 \to x(A+B)=0, a(A-B)=1$$

$$(A-B)=\frac{1}{a} \to A=\frac{1}{a}+B$$

$$(A+B)=\frac{0}{x} \to \overbrace{A}^{\frac{1}{a}+B}+B=0 \to \frac{1}{a}+2B=0 \to 2B=-\frac{1}{a} \to B=-\frac{1}{2a}$$

$$A=\frac{1}{a}+\overbrace{B}^{-\frac{1}{2a}} \to A=\frac{1}{a}-\frac{1}{2a} \to A=\frac{2}{2a}-\frac{1}{2a} \to A=\frac{1}{2a}$$

$$=\int \frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}=\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+c$$

(12

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$$

נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים

$$\int 1+\frac{x^4}{x^4-1}-1dx=\underbrace{\int 1dx}_{x}+\underbrace{\int \frac{x^4}{x^4-1}-1dx}_{\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}}\to \frac{Ax+B}{x^2-1}+\frac{C}{\left(x-1\right)}+\frac{D}{\left(x+1\right)}$$

$$Ax+B\left(x^2-1\right)+C\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)+D\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)=$$

$$Ax^3-Ax+Bx^2-B+\left(Cx^2+C\right)\left(x+1\right)+\left(Dx^2+D\right)\left(x-1\right)=$$

$$Ax^3-Ax+Bx^2-B+Cx^3+Cx^2+Cx+C+Dx^3-Dx^2+Dx-D$$

$$x^3\left(A+C+D\right)+x^2\left(B+C-D\right)+x\left(-A+C+D\right)+1\left(-B+C-D\right)$$

$$A+C+D=0\to C=-A-D$$

$$B+\underbrace{C}_{-A-D}-D=0\to B-A-D-D=0\to B=A+2D$$

$$\underbrace{-B}_{-A-2D}+\underbrace{C}_{-A-D}-D=1\to -A-2D-A-D-D=1\to -4D=1\to D=-\frac{1}{4}$$

$$-A+\underbrace{C}_{-A--\frac{1}{4}}+\underbrace{D}_{-\frac{1}{4}}=0\to -A-A+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\to A=0$$

$$C=\underbrace{-A}_{0}\underbrace{-D}_{\frac{1}{4}}\to C=\frac{1}{4}$$

$$B+\underbrace{C}_{\frac{1}{4}}\underbrace{-D}_{\frac{1}{4}}=0\to B+\frac{1}{2}=0\to B=-\frac{1}{2}$$

$$-\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}}_{\frac{1}{2}\arctan x}+\underbrace{\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx}_{\frac{1}{4}\ln|x-1|}-\underbrace{\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx}_{\frac{1}{4}\ln|x+1|}=-\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|$$

(13

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$$

נשתמש בחילוק פולינומים

מכנה ראשון יהיה x ונשאר עם $3x^2+3x+7$

מכנה שני יהיה 3 ונשאר עם $3x+1$ לכן נקבל $x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}$

כעת נעשה לתוצאה אינטגרל

$$\underbrace{\int xdx}_{\frac{x^2}{2}}+\underbrace{\int 3dx}_{3x}+\int \frac{3x}{x^2+2}+\int \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{3x}{x^2+2}$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=x^2+2$

לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך $dt=2xdx \to dx=\frac{1}{2x}dt$

$$\int \frac{3x}{t}*\frac{1}{2x}=\int \frac{3x}{t*2x}=\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}=\frac{3}{2}\left[\ln|t|\right]=\frac{3}{2}\left[\ln|x^2+2|\right]$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}$$

נשתמש בשיטת ההצבה ונקבע כי $t=\frac{x}{\sqrt{2}}$

לאחר הצבת t האינטגרל שלנו יראה כך $dt=\sqrt{2}xdx \to dx=\sqrt{2}dt$

$$\int \frac{1}{\underbrace{2t^2+2}_{x=\sqrt{2}t}}\sqrt{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

לכן לסיכום האינטגרל של התרגיל שווה ל –

$$\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\left[\ln|x^2+2|\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]+c$$

(14

$$\int \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)\left(x^3+8\right)}$$

נשתמש תחילה בשיטת ההצבה ונקבע כי x^3

כך יראה שלנו האינטגרל t הצבת לאחר $dt=3x^2dx \rightarrow dx=\frac{1}{3x^2}dt$

$$\frac{1}{3}\int \frac{x^5}{\left(t+1\right)\left(t+8\right)}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3}\int \frac{\cancel{x^2}x^3}{\left(t+1\right)\left(t+8\right)\cancel{x^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{t}{\left(t+1\right)\left(t+8\right)}$$

כעת נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים

$$\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+8}=t \rightarrow A\left(t+8\right)+B\left(t+1\right) \rightarrow At+8A+Bt+B$$

$$t\left(A+B\right)+1\left(8A+B\right) \rightarrow$$

$$8A+B=0 \rightarrow B=-8A$$

$$A+\underbrace{B}_{-8A}=1 \rightarrow -7A=1 \rightarrow A=-\frac{1}{7}$$

$$B=\frac{8}{7}$$

נחזור לאינטגרל -

$$=\frac{1}{3}*-\frac{1}{7}\left[\underbrace{\int \frac{1}{t+1}}_{\ln|t+1|}\right]+\frac{1}{3}*\frac{8}{7}\left[\underbrace{\int \frac{1}{t+8}}_{\ln|t+8|}\right]=-\frac{1}{21}\left[\ln|t+1|\right]+\frac{8}{21}\left[\ln|t+8|\right]$$

$$=-\frac{1}{21}\left[\ln|3x^2+1|\right]+\frac{8}{21}\left[\ln|3x^2+8|\right]$$

נשתמש ב:

$$\cos(x_1)\cos(x_2)=\frac{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}{2}$$

(15

$$\int \cos 3x \cos 2x\,dx$$

$$\int \frac{\cos\left(\overbrace{5x}^{3x+2x}\right)+\cos\left(\overbrace{x}^{3x-2x}\right)}{2}dx=\frac{1}{2}\int \cos(5x)+\cos(x)=\frac{1}{2}\underbrace{\int \cos(5x)\,dx}_{\frac{1}{5}\sin(5x)}+\frac{1}{2}\underbrace{\int \cos x\,dx}_{\sin(x)}$$

$$=\frac{1}{10}\left[\sin(5x)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(x)\right]+c$$

נשתמש ב:

$$\cos(x_1)\cos(x_2)=\frac{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}{2}$$

(16

$$\int \cos x \cos 2x \cos 4x$$

$$\int \cos x \underbrace{\cos 2x \cos 4x}_{\frac{\cos(6x)+\cos(-2x)}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int \cos x\cos(6x)+\cos x\cos(-2x)\,dx=\underbrace{\frac{1}{2}\int \cos x\cos(6x)\,dx}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2}\int \cos x\cos(-2x)\,dx}_{2}$$

$$\overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{\int \cos x\cos(6x)}_{\frac{\cos(7x)+\cos(-5x)}{2}}\,dx}^{1}=\frac{1}{4}\int \cos(7x)+\cos(-5x)\,dx=\frac{1}{4}\underbrace{\int \cos(7x)\,dx}_{\frac{1}{7}\sin(7x)}+\frac{1}{4}\underbrace{\int \cos(-5x)\,dx}_{\frac{1}{5}\sin(5x)}$$

$$=\frac{1}{28}\left[\sin(7x)\right]+\frac{1}{20}\left[\sin(5x)\right]$$

$$\overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{\int \cos x\cos(-2x)}_{\frac{\cos(-x)+\cos(3x)}{2}}\,dx}^{2}=\frac{1}{4}\int \cos(x)+\cos(3x)\,dx=\frac{1}{4}\underbrace{\int \cos(x)\,dx}_{\sin(x)}+\frac{1}{4}\underbrace{\int \cos(3x)\,dx}_{\frac{1}{3}\sin(3x)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sin(x)\right]+\frac{1}{12}\left[\sin(3x)\right]$$

$$=\underbrace{\frac{1}{28}\left[\sin(7x)\right]+\frac{1}{20}\left[\sin(5x)\right]}_{1}+\underbrace{\frac{1}{4}\left[\sin(x)\right]+\frac{1}{12}\left[\sin(3x)\right]}_{2}$$

(17

$$\int \tan^2 x \, dx$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}_{\tan^2 x} dx = \underbrace{\int \frac{1}{\cos^2 x}}_{\tan x} - \underbrace{\int 1 dx}_{x} = \tan x - x + c$$