לינארית 2 – תרגיל 8

(1

בתרגיל הקודם מצאנו כי הפולינום של העתקה הלינארית הוא:

$p_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)$ והמטריצה המייצגת (לפי הבסיס הסטנדרטי) היא $[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

כעת נמצא את הפולינום המינימאלי – נבדוק $m_T(\lambda)=\lambda(\lambda-I)$

$$m_T(\lambda)=\lambda(\lambda-I)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\left[\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&-2&6\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

וזה כמובן לא הפולינום המינימאלי, נבדוק כעת את $m_T(\lambda)=\lambda^2(\lambda-I)$

$$m_T(\lambda)=\lambda^2(\lambda-I)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2*\left[\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

זה כמובן גם כן לא הפולינום המינימאלי ולכן $m_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-I)$ הוא הפולינום המינימלי

נבדוק ליתר ביטחון

$$m_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-I)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}^3*\left[\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת לאחר שמצאנו את הפולינום המינימאלי

אנו יודעים כי הפירוק הפרמרי של $\mathbb{R}_3[x]$ לפי T הוא

$$\mathbb{R}_3[x]=Ker(T^3)\oplus Ker(T-I)$$

נחשב כעת את $Ker(T^3)$

$$Ker\left(T^3\right)=N\left(\left(\left[T\right]_s^s\right)^3\right)=N\left(\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}^3\right)=N\begin{pmatrix}1&1&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} a&b&c&d& \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&6&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to d=x,c=y,b=z,\ \overbrace{a=-z-2y-6x}^{a+z+2y+6x=0\to a=-z-2y-6x}$$

$$\to x\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\to span\left\{\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

כעת נמצא את $Ker\left(T-I\right)$

$$Ker\left(T-I\right)=N\left(\left[T\right]_s^s-I\right)=N\left(\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\to N\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a&b&c&d \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\to d=0,c=0,b=0,a=x\to x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\to span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נבדוק שצדקנו (אכן בת"ל)

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\oplus span\left\{\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\to\begin{pmatrix}1&-6&-2&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-6&-2&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&-2&-1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-6&-2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן הפירוק הפרימרי הינו $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\oplus span\left\{\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ יש לנו מרחב של 4 וקטורים

בת"ל (חיבור ישר) ולכן זהו המרחב $\mathbb{R}_3[x]$

ב)

ראשית נבטא את המרחב הוקטורי ע"י ספאן, נשים לב כי הבסיס הינו $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

כעת נפעיל את העתקה על המרחב ונקבל

$$T(U)=span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow T(U)\subseteq U$$

ולכן המרחב שמור תחת T

ג)

נפעיל את העתקה על המרחב ונקבל

$$T(U)=span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow T(U)\subseteq U$$

ולכן המרחב שמור תחת T

(3

נתון לנו בתור רמז כי הפולינום הינו $p_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)^2$

כעת נשאר למצוא את הפולינום המינימאלי והריבויים של כל ע"ע נמצא את הפולינום המינימאלי

$$m_A(A)=(A-I)(A-2I)(A-4I)=$$

$$\left[\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]*\left[\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\right]$$

$$*\left[\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}6&6&6&0\\0&0&0&0\\-6&-6&-6&0\\6&6&6&0\end{pmatrix}$$

זהו לא הפולינום המינימלי לכן בהכרח $m_A(A)=(A-I)(A-2I)(A-4I)^2$

נבדוק שזה אכן כך

$$m_A(A)=(A-I)(A-3I)(A-4I)^2=$$

$$\left[\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]*\left[\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\right]$$

$$*\left[\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ואכן זהו הפולינום המינימאלי

נבדוק את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי של הערך $\lambda=1$ - החזקה היא 1 ולכן זהו הריבוי האלגברי

כעת נבדוק את הריבוי הגיאומטרי -

$$N\left(\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}4&4&2&1\\0&0&-1&-1\\-1&-1&2&0\\1&1&-1&1\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}4&4&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}a&b&c&d&\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}4&4&2&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\rightarrow d=0,c=0,b=t,\ \overbrace{a=-t}^{4a+4t=0\rightarrow a=-t}\ \rightarrow span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\rightarrow Geo=1$$

כעת נבדוק את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי של הערך $\lambda=2$ - החזקה היא 1 ולכן זהו הריבוי האלגברי

כעת נבדוק את הריבוי הגיאומטרי -

$$N\left(\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}3&4&2&1\\0&-1&-1&-1\\-1&-1&1&0\\1&1&-1&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow \overbrace{d=t}^{3d+4t=0\to d=-\frac{3t}{4}},c=0,\ \overbrace{b=-t}^{b+t=0\to b=-t},\ \overbrace{a=t}^{a-t=0\to a=t}\rightarrow span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\rightarrow Geo=1$$

כעת נבדוק את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי של הערך $\lambda=4$ - החזקה היא 2 ולכן זהו הריבוי האלגברי

כעת נבדוק את הריבוי הגיאומטרי -

$$N\left(\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&-3&-1&-1\\-1&-1&-1&0\\1&1&-1&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow d=t,\ \overbrace{c=t}^{c+t=0\to c=-t},b=0,\ \overbrace{a=t}^{a-t=0\to a=t}\rightarrow span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\rightarrow Geo=1$$

נכין טבלה של סיכום הנתונים

λ	$Alg=\#\lambda$	$Block\ Geo.=\#\lambda$	$in\ Power\ m_A=\ Block\ Biggest$
1	1	1	**1**
2	1	1	**1**
4	2	1	**2**

כעת נוכל לבנות את מטריצה הזורדן

$$\left(\begin{array}{c|c|cc}1&&&\\\hline&2&&\\\hline&&4&1\\&&&4\end{array}\right)$$

(4

ננסה למצוא את A^2

$$A^2 = A*A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & x^2 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & x^2 & 2x \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

אנו יודעים כי למטריצות יש אותם ע"ע (רמז) ולכן אנו יודעים כי $x = x^2 \rightarrow x = 1/0$

כעת נבדוק עבור איזה מהערכים הפולינום המינמלי שווה וכך נדע איזה מהערכים מתאים

ראשית נבדוק עבור $x = 0$

נמצא את הפולינום האופייני של A

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^4$$

כעת נמצא את הפולינום המינמלי של A

נבדוק $m_A(\lambda) = \lambda$ מיד רואים שזה לא נכון - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

נבדוק $m_A(\lambda) = \lambda^2$ - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ וזה גם לא מתאים

נבדוק $m_A(\lambda) = \lambda^3$ - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

זה גם לא מתאים לכן בהכרח $m_A(\lambda) = \lambda^4$ - נבדוק ליתר ביטחון

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת נמצא את הפולינום של A^2

$$p_{A^2}(\lambda)=|\lambda I-A^2|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&-1&0\\0&\lambda&0&-1\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^4$$

כעת נמצא את הפולינום המינימלי של A^2

נבדוק $m_{A^2}(\lambda)=\lambda$ מיד רואים שזה לא נכון - $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

נבדוק $m_{A^2}(\lambda)=\lambda^2$ - $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ וזה אכן מתאים, כעת

אנו יודעים כי הפולינום המינימאלי של A (λ^4) לא שווה לפולינום המינימלי A^2 (λ^2)

לכן הערך $x=1$ הוא המתאים, נאמת זאת.

נמצא את הפולינום האופייני של A

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0&0\\0&\lambda-1&-1&0\\0&0&\lambda-1&-1\\0&0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^4$$

כעת נמצא את הפולינום המינמלי של A

נבדוק $m_A(\lambda)=\lambda-I$ מיד רואים שזה לא נכון -

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נבדוק $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$ -
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
וזה גם לא מתאים

נבדוק $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$ -
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
עדיין לא מתאים ולכן בהכרח

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^4$ - נבדוק ליתר ביטחון
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
אכן מתאים

כעת נבדוק מהו הפולינום האופייני של A^2

$$p_{A^2}(\lambda)=|\lambda I-A^2|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&0&0\\0&\lambda-1&-2&0\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^4$$

כעת נמצא את הפולינום המינימאלי של

נבדוק $m_{A^2}(\lambda)=\lambda-I$ מיד רואים שזה לא נכון -
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נבדוק $m_{A^2}(\lambda)=(\lambda-1)^2$ -
$$\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&4&4\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
וזה גם לא מתאים

נבדוק $m_{A^2}(\lambda)=(\lambda-1)^3$ -

$$\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ עדיין לא מתאים ולכן בהכרח

$m_{A^2}(\lambda)=(\lambda-1)^4$ - נבדוק ליתר ביטחון

$$\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ אכן

מתאים

הפולינומים המינימליים שווים ולכן זהו הערך העצמי המתאים למטריצות שאנו מחפשים $x=1$

ולכן $$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},A^2=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

5)ב)

נתון $\forall_i A_i$ הפיכה ($|A_i|\neq 0$)ולכן נובע כי A הפיכה (מכיוון שכל הכפולות של מספרים שהם לא 0 גם נותנים מספר שהוא לא 0)

מכיוון ש A הפיכה אנו יודעים כי קיימת A^{-1} נבדוק אם אכן $$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&A_n^{-1}\end{pmatrix}$$

נבדוק זאת ע"י השמת $A^{-1}*A=I$

$$\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&A_n\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&A_n^{-1}\end{pmatrix}=I$$ הראינו (לא באמת #סמיילי_קורץ) בסעיף א כי ניתן לעשות

את הפעולה הזאת $$\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&A_n\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&A_n^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1*A_1^{-1}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&A_n*A_n^{-1}\end{pmatrix}$$

אנו יודעים כי $\forall_i A_i * A_i^{-1} = 1$ לכן אכן נקבל את מטריצת היחידה ואכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_n^{-1} \end{pmatrix}$

ג)

נתון כי A מטריצת בלוקים כך שכל A_i הינה מטריצה לכסינה מכיוון שכל מטריצה לכסינה נובע כי -
קיימות $A_i = P_i D_i P_i^{-1}$ קיימות המטריצות הללו ולכן ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} P_1 A_1 P_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_n A_n P_n^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} P_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_n^{-1} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

(מעבר זה התאפשר לפי סעיף א)
כעת $A = PDP^{-1}$ D אלכסונית P הפיכה וההופכית שלה ה P^{-1} (לפי סעיף ב)
ולכן A דומה למטריצה אלכסונית – A לכסינה.

6) ראשית נמצא את הפולינום האופייני של A - ניזכר בשיעורי בית 4 ונראה כי הע"ע של מטריצה ניל"
מסדר k הוא $\lambda = 0$.
בנוסף אנו יודעים כי המטריצה היא מסדר 7 לכן הפולינום האופייני יהיה $p_A(\lambda) = \lambda^7$
כעת נמצא את הפולינום המינימלי –

נסתכל אלו אפשרויות עבור הפולינום המינימלי קיימות וננסה להשתמש בשיטת האלמינציה.
$m_A(\lambda) = \lambda / \lambda^2 / \lambda^3 / \lambda^4 / \lambda^5 / \lambda^6 / \lambda^7$

עבור $m_A(\lambda) = \lambda$

אנו יודעים כי הוא לא יכול להיות $m_A(\lambda) = \lambda$ מכוון שדבר זה יגרור $A = 0 \to A^2 = 0$ בסתירה לנתון.

עבור $m_A(\lambda) = \lambda^2$

אנו יודעים כי הוא לא יכול להיות $m_A(\lambda) = \lambda$ מכוון שדבר זה יגרור $A^2 = 0$ בסתירה לנתון.

כעת נשארנו עם $m_A(\lambda) = \cancel{\lambda} / \cancel{\lambda^2} / \lambda^3 / \lambda^4 / \lambda^5 / \lambda^6 / \lambda^7$
נמשיך לנסות לפסול, נבדוק מהו הריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda = 0$
$N(A - 0I) = N(A)$ נתון לנו כי הדרגה של A היא 4 ולכן יש לנו 4 משתנים תלויים וישאר לנו 3
משתנים חופשיים, גורר את זה שמימד של $N(A)$ הוא 3 וכך גם הריבוי הגיאומטרי.
כעת ננסה להמשיך לפסול -

אנו יודעים כי המטריצה שלנו מחולקת ל3 בלוקים (מכך שהריבוי הגיאומטרי לע"ע היחיד שיש לנו הוא 3)

ולכן אם הפולינום המינימלי יהיה λ^7,λ^6 אזי ישאר לנו רק עוד בלוק בגודל 1 או בגודל 0 (בהתאמה) ולא יהיה לנו עוד בלוקים (לא נגיע ל3) לכן הערכים נפסלים.

המצב כרגע הוא $m_A(\lambda)=\cancel{\lambda}/\cancel{\lambda^2}/\lambda^3/\lambda^4/\lambda^5/\cancel{\lambda^6}/\cancel{\lambda^7}$

כעת נבנה את הטבלה של מטריצת הגורדן

λ	$Alg=\#\lambda$	$Block$ Geo.=$\#\lambda$	in Power $m_A =$ Block Biggest
0	7	3	**3/4/5**

כעת עבור $m_A(\lambda)=\lambda^3$ המטריצות גורדן שנוכל לקבל יהיו –

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

או

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

-כמובן אותן מטריצות בסדר חלוקה אחר

עבור $m_A(\lambda)=\lambda^4$ המטריצות גורדן שנוכל לקבל יהיו –

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

- כמובן אותן מטריצות בסדר חלוקה אחר

עבור $m_A(\lambda)=\lambda^5$ המטריצות גורדן שנוכל לקבל יהיו –

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right)$$