

תרגיל 1

חישוביות וסיבוכיות תשע"ט

להגשה עד לתאריך 24.3.19

הנחיות להגשה:

- יש להגיש את פתרון התרגיל לתאים 16 או 27 (שימו לב שכתוב על התאים "חישוביות סיבוכיות").
- יש לשלוח עותק גיבוי של הפתרון לכתובת הדואר האלקטרוני complexitybiu19@gmail.com.
- על כל סטודנט לכתוב את הפתרון בעצמו ובמילותיו שלו. חל איסור מוחלט להעזר בפתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1. נגדיר אלגוריתם "שיודע לשאול" באופן הבא: נאמר כי אלגוריתם A הינו אלגוריתם שיודע לשאול עבור בעית חיפוש R אם בהנתן פתרון, A מחזיר שאלה שהפתרון הינו פתרון חוקי עבורה. כלומר, בהנתן y , A מחזיר x כך ש- $(x, y) \in R$, או \perp אם אין x כזה.

נגדיר את המחלקה PA (Polynomial Ask) באופן הבא:

$$PA = \{R \mid R \text{ חסום פולינומית וקיים אלגוריתם פולינומי שיודע לשאול עבור } R\}$$

הוכיחו או הפריכו: $PA = PF$.

שאלה 2. תהיינה $S_1, S_2 \in NP$ ויהיו V_1, V_2 מוודאים פולינומיים עבור S_1, S_2 בהתאמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אלגוריתם V אשר בהנתן (x, y) מריץ את $V_1(x, y)$ ואת $V_2(x, y)$ ומחזיר 1 אם"ס לפחות אחד מהם החזיר 1 (אחרת מחזיר 0) הינו מוודא פולינומי עבור $S_1 \cup S_2$.

(ב) אלגוריתם V אשר בהנתן (x, y) מריץ את $V_1(x, y)$ ואת $V_2(x, y)$ ומחזיר 1 אם"ס שניהם החזירו 1 (אחרת מחזיר 0) הינו מוודא פולינומי עבור $S_1 \cap S_2$.

שאלה 3. יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. חתך בגרף הינו חלוקה של הקודקודים לשתי קבוצות זרות $C = (S, V \setminus S)$. הגודל של החתך הינו מספר הקשתות החוצות אותו, כלומר

$$|\{ \{u, v\} \mid u \in S, v \in V \setminus S \}|$$

נגדיר את היחס הבא המתאר בעית חיפוש של חתך בגרף:

$$R_{\text{CUT}} = \{((G, k), C) \mid G \text{ בגרף } k \text{ בגודל } C\}$$

תארו רדוקציה עצמית עבור הבעיה הנ"ל.

שאלה 4. נגדיר את בעית ההכרעה הבאה:

$$\text{Almost-VC} = \{(G, k) \mid k \text{ כמעט כיסוי קודקודים בגודל } k\}$$

כאשר קבוצת קודקודים S נקראת "כמעט כיסוי קודקודים" אם יש ב- G לכל היותר קשת אחת שאינה מכוסה ע"י S . תארו רדוקצית קארפ מ- VC ל- Almost-VC והוכיחו את נכונותה.

שאלה 5. עבור שני גרפים $G = (V_G, E_G)$ ו- $H = (V_H, E_H)$, נאמר כי G מכיל עותק של H אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית $\varphi : V_H \rightarrow V_G$ כך שלכל $u, v \in V_H$ מתקיים

$$\{u, v\} \in E_H \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_G$$

נגדיר את בעית ההכרעה הבאה:

$$\text{SubGraph} = \{(G, H) \mid H \text{ מכיל עותק של } G\}$$

תארו רדוקצית קארפ מ- VC ל- SubGraph והוכיחו את נכונותה.

בהצלחה!