# אינפי 2 – תרגיל 6

1)א) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$

כאשר $x=0$ ישנה נקודה בעייתית והאינטגרל יהיה לא אמיתי מסוג שני.

נחשב קודם את האינטגרל הלא מסויים של הפונקציה

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{x^{1\frac{1}{3}}}=\int x^{-1\frac{1}{3}}dx=-3*x^{-\frac{1}{3}}+C$$

כעת נחלק את האינטגרל ל 2 - $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$

נחשב את $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-3*x^{-\frac{1}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right]=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\underbrace{-3*1^{-\frac{1}{3}}}_{-3}-\underbrace{\left(-3*\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right)}_{\infty}\right]=-\infty$$

נחשב את $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^-}\int_{-1}^{0+\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to0-}\left[-3*\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{0+\varepsilon}\right]=\lim_{\varepsilon\to0^-}\left[\underbrace{-3*1^{-\frac{1}{3}}}_{-\infty}-\underbrace{\left(-3*-1^{-\frac{1}{3}}\right)}_{3}\right]=-\infty$$

ולכן $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\underbrace{\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}}_{-\infty}+\underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}}_{-\infty}=-\infty$ האינטגרל מתבדר.

ב) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

כאשר $x=1,3$ ניתן לראות כי המכנה הוא 0 ולכן זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

נחשב את האינטגרל הלא מסוים -

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{(-1)*\left(\underbrace{-4x+x^2+3+1}_{(x-2)^2}-1\right)}_{4x-x^2-3}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

כעת נשתמש בשיטת ההצבה נציב $t=x-2$ ולכן

$\frac{dt}{dx}=\frac{x-2}{1}=x-2 \rightarrow dx=\frac{x-2}{x-2}=1$ נציב באינטגרל ונקבל

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t)+C = \arcsin(x-2)+C$$

נחלק את האינטגרל ל2 חלקים $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

$$\int_2^{3+\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \arcsin(x-2)\Big|_2^{3+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \underbrace{\arcsin(3+\varepsilon-2)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin(2-2)}_{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\arcsin(2-2)}_{0} - \underbrace{\arcsin(1+\varepsilon-2)}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

לכן $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \underbrace{\int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}}_{\frac{\pi}{2}} = \pi$

ג) $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$

ניתן לראות כי זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון.

ננסה לחשב את האינטגרל הלא מסויים – מכיוון שאנו לא רואים דרך לפתור אינטגרל זה ננסה לחסום אותו מלמטה ולהראות כי האינטגרל הקטן יותר מתבדר ולכן גם זה יתבדר (בואו נקווה!!!!)

האינטגרל שלנו הוא בקטע בין 1 לאינסוף ולכן $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(2)}{x}dx \le \int_{1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$ מכיוון שהערך המינימאלי של איקס הוא 1 ולכן $x^2+1=2$, ולכן $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(2)}{x}dx$ קטן יותר מ $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$ לכל $x$

כעת ננסה לברר לאן הולך $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(2)}{x}dx$

נחשב קודם את האינטגרל הלא מסויים

$$\int\frac{\ln(2)}{x}dx=\ln(2)\int\frac{1}{x}dx=\ln(2)*\left[\ln(x)+C\right]$$

כעת נברר עבור האינטגרל שלנו כמה הוא שווה

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(2)}{x}dx=\ln(2)\left[\lim_{k\to\infty}\ln(x)\Big|_{1}^{k}\right]=\ln(2)\left[\lim_{k\to\infty}(\ln k-\ln 1)\right]=\infty$$

מכיוון ש $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(2)}{x}dx$ מתבדר והראנו כי הוא קטן מ $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$

אזי גם $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$ מתבדר. #הצלחנו!!! (מי שמאמין לא מפחד)

ד) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

נשים לב כי זה אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

נפתור קודם את האינטגרל הלא מסויים

כעת נשתמש בשיטת ההצבה נציב $t=\frac{x}{2}$ ולכן

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\rightarrow dt=\frac{dx}{2}$ נציב באינטגרל ונקבל

$$\int \frac{1}{2(t^2+1)}*\underbrace{dt}_{\frac{dx}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}=\frac{1}{2}\left[\arctan(t)+C\right]=\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C\right]$$

כעת נציב באינטגרל המסויים שלנו ונקבל

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-k}^{0}\right]=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\arctan 0}_{0}-\underbrace{\arctan(-k)}_{-\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{2}*\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

ה) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(\beta x)\,dx$ כאשר $a>0$

נשים לב כי זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון.
לכן קודם נמצא את האינטגרל הלא מסוים -

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(\beta x)\,dx=\int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}\,dx$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים $\int_0^\infty \frac{\overbrace{\cos(\beta x)}^{g'}}{\underbrace{e^{ax}}_{f}}\,dx$ כעת נמצא את $g, f'$

$$g=\int\cos(\beta x)=\frac{1}{\beta}\sin(\beta x)$$

$$f'=\left(\frac{1}{e^{ax}}\right)'=-ae^{-ax}$$

ונקבל - $\frac{1}{\beta}\sin(\beta x)*\frac{1}{e^{ax}}-\int\frac{1}{\beta}\sin(\beta x)*-ae^{-ax}=\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}+\frac{a}{\beta}\int\frac{\sin(\beta x)}{e^{ax}}$

כעת נבצע שוב אינטגרציה בחלקים עבור $\int\frac{\overbrace{\sin(\beta x)}^{g'}}{\underbrace{e^{ax}}_{f}}$ כעת נמצא את $g, f'$

$$g=\int\sin(\beta x)=-\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)$$

$$f'=\left(\frac{1}{e^{ax}}\right)'=-ae^{-ax}$$

ונקבל -

$$-\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)*\frac{1}{e^{ax}}-\int-\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)*-ae^{-ax}=-\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\int\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}\to$$

$$\int e^{-ax}\cos(\beta x)=\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}+\frac{a}{\beta}\underbrace{\int\frac{\sin(\beta x)}{e^{ax}}}_{-\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\int\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}}=\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}+\frac{a}{\beta}\left[-\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\int\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}\right]$$

$$\int e^{-ax}\cos(\beta x)=\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}+\frac{a}{\beta}\left[-\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\int\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}\right]\to$$

$$\int e^{-ax}\cos(\beta x)=\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\left(\frac{a}{\beta}\right)^2\int\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}\to$$

$$\underbrace{\left(1+\left(\frac{a}{\beta}\right)^2\right)}_{\frac{\beta^2+a^2}{\beta^2}}\int e^{-ax}\cos(\beta x)=\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}\to$$

$$\int e^{-ax}\cos(\beta x)=\frac{\beta^2}{\beta^2+a^2}\left[\frac{\sin(\beta x)}{\beta e^{ax}}-\frac{a}{\beta}\frac{\cos(\beta x)}{\beta e^{ax}}\right]\to$$

$$\int e^{-ax}\cos(\beta x)=\frac{\beta}{\beta^2+a^2}*\frac{\sin(\beta x)}{e^{ax}}-\frac{a}{\beta^2+a^2}*\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}$$

כעת נציב את התוצאה באינטגרל שלנו $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(\beta x)dx$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(\beta x)dx=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\beta}{\beta^2+a^2}*\frac{\sin(\beta x)}{e^{ax}}-\frac{a}{\beta^2+a^2}*\frac{\cos(\beta x)}{e^{ax}}\Big|_0^\infty\right]=$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{\beta}{\beta^2+a^2}}_{bounded}*\underbrace{\frac{\sin(\beta k)}{e^{ak}}}_{0}}_{0}-\underbrace{\underbrace{\frac{a}{\beta^2+a^2}}_{bounded}*\underbrace{\frac{\cos(\beta k)}{e^{ak}}}_{0}}_{0}}_{0}-\left(\underbrace{\underbrace{\frac{\beta}{\beta^2+a^2}}_{bounded}*\underbrace{\frac{\sin(0)}{e^{0}}}_{0}}_{0}-\underbrace{\underbrace{\frac{a}{\beta^2+a^2}}_{bounded}*\underbrace{\frac{\cos(0)}{e^{0}}}_{1}}_{\frac{a}{\beta^2+a^2}}\right)\right]=\frac{a}{\beta^2+a^2}$$

2)א) $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \mid a>0, \alpha>0$

נבדוק במבחן דיריכלה

נחלק את האינטגרל ל $f=\sin x,\ g=\frac{1}{x^\alpha}$

אנו צריכים להראות כי $|f|\le M \to \left|\int_a^\infty \sin x\right| \le M \to \left|-\cos x|_a^\infty\right| \le M \to \left|-\cos\infty+\cos a\right| \le M$

ואכן הפונקציה חסומה כאשר $M=2$

בנוסף צריך כי $g$ תהיה מונוטונית שואפת לאפס – חזקת ה $x$ גדולה מאפס ולכן לפי משפט שראינו בהרצאה הפונקציה מונוטונית יורדת.

נבדוק שאיפה ל0

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^\alpha}\right]=0 \mid \alpha>0$$

מבחן דיריכלה מתקיים ולכן $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \mid a>0, \alpha>0$ מתכנס.

ב) $\int_1^\infty \sin x^2 dx$

נשתמש בשיטת ההצבה - $t=x^2$

ולכן $\frac{dt}{dx}=2x \to dx=\frac{dt}{2x}=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ נציב באינטגרל ונקבל

$$\int_1^\infty \sin x^2 dx=\int_1^\infty \sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\left[\int_1^\infty \sin t\frac{1}{\sqrt{t}}dt\right]$$

נשתמש במבחן דיריכלה

נחלק את האינטגרל ל $f=\sin t\ ,g=\frac{1}{\sqrt{t}}$

אנו צריכים להראות כי $|f|\le M \to \left|\int_1^\infty \sin t\right| \le M \to \left|-\cos t|_1^\infty\right| \le M \to \left|-\cos\infty+\cos 1\right| \le M$

ואכן הפונקציה חסומה כאשר $M=2$

בנוסף צריך כי $g$ תהיה מונוטונית שואפת לאפס – חזקת ה $x$ גדולה מאפס ולכן לפי משפט שראינו בהרצאה הפונקציה מונוטונית יורדת.

נבדוק שאיפה ל0

$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t^{0.5}}\right]=0$ ולכן על פי מבחן דיריכלה, האינטגרל מתכנס

ג) $\int_{-1}^{1}\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx$

כאשר $x=1$ קיים אינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

ננסה להשתמש במבחן ההשוואה.

אנו יודעים כי בקטע בין 1 ל 1- $\arcsin x \geq -\frac{\pi}{2} \leftarrow 2^{\arcsin x} \geq \underbrace{2^{-\frac{\pi}{2}}}_{\geq 0.3}$

ולכן $\int_{-1}^{1}\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx \geq \int_{-1}^{1}\frac{0.3}{1-x}dx$

נחשב את האינטגרל (נשים לב שזהו גם אינטגרל לא אמיתי מסוג 2 כאשר $x=1$

$$\int_{-1}^{1}\frac{0.3}{1-x}dx = 0.3\left[\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x}dx\right] = 0.3\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[-\ln|1-x|\Big|_{-1}^{1+\varepsilon}\right] =$$

$$0.3\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[\underbrace{-\ln|\overbrace{1-x+1+\varepsilon}^{\varepsilon}|}_{-\infty}+\ln|2|\right] = 0.3\left[\infty+\ln 2\right] = \infty$$

מכיוון ש $\int_{-1}^{1}\frac{0.3}{1-x}dx$ ו $\int_{-1}^{1}\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx \geq \int_{-1}^{1}\frac{0.3}{1-x}dx$ אזי גם $\int_{-1}^{1}\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx$ מתבדר.

ד) $\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הפונקציה $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

על מנת להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי נצטרך להראות כי גם $\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$ וגם $\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

חיוביות.

$\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$ בקטע בין 1 לאינסוף, $\frac{1}{x}$ הוא בין 1 לבין 0 בשאיפה מימין ולכן סינוס של המספרים הללו תמיד יהיה חיובי. קל לראות כי המכנה עבור כל מספר $x$ חיובי גם כן חיובי ולכן כל הפונקציה בקטע, חיובית.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ בקטע שבין 1 לאינסוף, קל לראות כי המכנה עבור כל מספר $x$ חיובי גם כן חיובי ולכן כל הפונקציה בקטע, חיובית.

נבדוק - $$\frac{\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}} = \frac{\sin\frac{1}{x}*x^2\sqrt{x}}{\underbrace{2+x\sqrt{x}}_{x\sqrt{x}\left(\frac{2}{x\sqrt{x}}+1\right)}} = \frac{x*\cancel{x\sqrt{x}}*\sin\frac{1}{x}}{\cancel{x\sqrt{x}}\left(\frac{2}{x\sqrt{x}}+1\right)} = \frac{x*\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x\sqrt{x}}+1} \to \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\overbrace{x*\overbrace{\sin\frac{1}{x}}^{0}}^{\infty*0=0}}{\underbrace{\frac{2}{x\sqrt{x}}}_{0}+1}\right] = 0$$

כעת אנו יודעים כי אם $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2.5}} = \int_1^\infty x^{-2.5} = \lim_{k\to\infty}\left.\frac{x^{-1.5}}{-1.5}\right|_1^k = \lim_{k\to\infty}\left[\underbrace{\frac{k^{-1.5}}{-1.5}}_{0} - \underbrace{\frac{1^{-1.5}}{-1.5}}_{-\frac{1}{1.5}}\right] = \frac{1}{1.5}$$

לכן ניתן לראות כי הוא מתכנס ולפי מבחן ההשוואה הגבולי גם $\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$ מתכנס

ה) $\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}dx$

ניתן לראות כי זה אינטגרל לא אמיתי מסוג שני כאשר $x=0$

נמצא קודם את את האינטגרל הלא מסויים.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot(x)+C$$

כעת נציב את האינטגרל שלנו –

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\cot(x)\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\underbrace{-\cot(1)}_{\approx -57}+\underbrace{\cot(\varepsilon)}_{\infty}\right]=\infty$$

וניתן לראות כי האינטגרל שלנו מתבדר.

ו) $\int_1^\infty \frac{1}{(\ln(x)+1)(x^2+1)}$

ניתן לראות כי זה אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון.

$\int_1^\infty \frac{1}{(\ln(x)+1)(x^4+2x^2+1)} = \int_1^\infty \frac{1}{(\ln(x)+1)(x^2+1)}$ ניתן לראות כי המכנה הכי גבוה הוא $x^4$ מכיוון שאנו בקטע בין 1ל $\infty$ אזי כל $x$ נוסף יגדיל את המספר ויקטין את השבר (מכנה גדל, שבר קטן) ולכן נחסום את האינטגרל ע"י אינטגרל גדול יותר (מכנה קטן יותר) $\frac{1}{x^4}$ ובנוסף האינטגרל המקורי בקטע שבין 1ל $\infty$ הוא חיובי ולכן לא יכול לשאוף לאינסוף שלילי.

כעת נשאר להראות כי האינטגרל שלקחנו מתכנס ולגם גם האינטגרל המקורי יתכנס.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} = \int_1^\infty x^{-4} = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^\infty = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^k\right] = \lim_{k\to\infty}\left[\underbrace{\frac{k^{-3}}{-3}}_{0}-\underbrace{\frac{1^{-3}}{-3}}_{-\frac{1}{3}}\right]=\frac{1}{3}$$

מכיוון שהאינטגרל שמצאנו מתכנס והוא גדול מהאינטגרל המקורי, אזי גם האינטגרל המקורי מתכנס.

3) $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^a} dx$

נפצל למקרים

כאשר $a>1$

הערך המקסימאלי של $\sin^2(x)$ הוא 1 ולכן אם $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}$ מתכנס גם $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^a} dx$ יתכנס,

כאשר $a>1$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}$ מתכנס ולכן $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^a} dx$ יתכנס.

כאשר $a \le 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^a} dx \underset{a\le 1}{\ge} \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x} dx = \frac{1}{2}\left[\int_1^{\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x} dx\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx}_{\infty, a\le 1} - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx}_{*}\right]$$

נשאר רק להראות כי * מתכנס ולכן כל האינטגרל יתבדר.

נשתמש במבחן דיריכלה

$\int_1^{\infty} \cos(2x)$ חסום ע"י 2 ולכן קיים $M$ כך ש $\int_1^{\infty} \cos(2x) dx \le M$

ובנוסף $\frac{1}{x}$ מונוטוני יורד ו $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

ולכן האינטגרל מתכנס.

ולכן לסיכום אינטגל מתבדר פחות אינטגרל מתכנס הינו אינטגרל מתבדר

לכן

כאשר $a>1$ - האינטגרל מתכנס

כאשר $a \le 1$ - האינטגרל מתבדר