מודלים חישוביים – תרגיל 1

חלק ראשון

א)1(
לא נכון, מכיוון שהמילה 000 -

$$\underbrace{000}_{\#_0(w)\bmod 3=0} \cdot \underbrace{\varepsilon}_{|w|\bmod 3=0} \in L_1 \cdot L_2$$

אך $000 \notin L_3$ מכיוון שמספר הפעמים ש0 מופיע במילה הוא 3 ו $3\%6 \neq 0$

2(
נכון, מכיוון שמספר המופעים של 0 יהיה $\bmod 6 = 0$ ולאחר מכן $\bmod 3 = 0$ אם מספר המופעים הוא $\bmod 6 = 0 \rightarrow \bmod 3 = 0$ ולכן זה יהיה שירשור של 2 מילים שלהם מס' האפסים יהיה $\bmod 3 = 0$ בדיוק כמו L_2

3(
לא מכיוון שהמילה 1 -

$$\underbrace{1}_{\#_0 \bmod 6=0} \cdot \underbrace{\varepsilon}_{\#_0 \bmod 3=0} \in L_3 \cdot L_2$$

אך $1 \notin L_1$ מכיוון שמספר האותיות במילה לא מתחלק ב3 ללא שארית.

ב(
על מנת להוכיח את השיוויון נוכיח הכלה משני הצדדים.

$$(\subseteq)$$

נניח כי $w \in \left(L^R\right)^*$ ונוכיח כי $w \in \left(L^*\right)^R$

לכל שירשור מילים בגודל n (קליני) זה יראה כך

$$w = \left\{w_1^R w_2^R \ldots . w_n^R\right\}$$

מכיוון ש $w_1^R, w_2^R \ldots, w_n^R \in L \rightarrow w_1, w_2 \ldots, w_n \in L$ ולכן ניקח את המילים רוורס ועל מנת שזה יהיה אותה המילה הכוללת נעשה רוורס על סדר המילים

$$\Bigg(\underbrace{w_n w_{n-1} \ldots w_1}_{L^*}\Bigg)^R \in \left(L^*\right)^R.$$

כעת נוכיח מהצד השני $(\supseteq)$

נניח כי $w \in \left(L^*\right)^R$ ונוכיח כי $w \in \left(L^R\right)^*$

לכן $w=\left(\underbrace{w_1w_2...w_n}_{L^*}\right)^R$

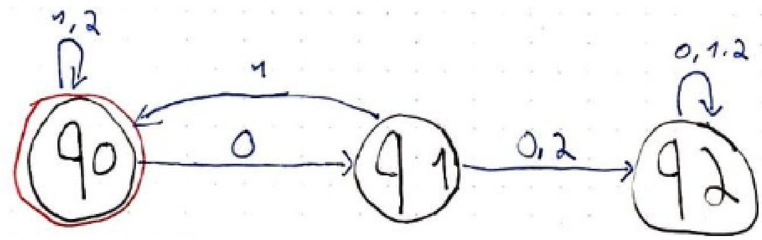
מכיוון ש $w_1,w_2...,w_n\in L\to w_1^R,w_2^R...,w_n^R\in L$

ולכן ניקח את האותיות ברוורס ונעשה רוורס על סדר המילים כדי שהמילה הכוללת תישאר דומה ונקבל

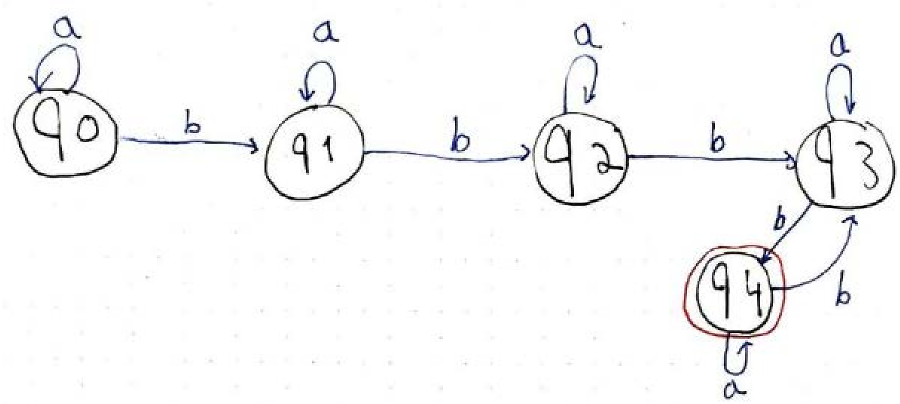
$\left(w_n^Rw_{n-1}^R...w_1^R\right)\in\left(L^R\right)^*$

<u>חלק שני</u>

א(1)



א(2)



ב(1)

שפת כל המילים שלאחר השירשור ab מופיע a

ב(2)

השפה שמתחילה ומסתיימת באותה האות (תתחיל בa ותסיים בa או תתחיל בb ותסיים בb), כולל המילה הריקה.

לא ניתן לעשות זאת באוטומט עם פחות מצבים מכיוון שיש לפצל את 2 המקרים (אם התחלנו עם a או עם b) ולכן זה כבר **3 מצבים** (1 לכל התחלה והמצב ההתחלתי), לאחר מכן הבדיקה עבור סיום המילה גוזלת גם עוד מצב 1 מכל פיצול ולכן זה יהיה **5 מצבים**.

<u>חלק 3</u>

א)

נגדיר את החמישייה של L להיות $L=\left[\sum,Q,q_0,F,\delta\right]$

כעת נגדיר את החמישייה של L_1

$$\begin{aligned}
&\sum{}^{'}=\sum \\
&Q^{'}=Q\cup\left\{q_0^{'},q_F^{'}\right\} \\
&q_0^{'}=q_0^{'} \\
&F^{'}=q_F^{'}
\end{aligned}$$

כעת נשאר רק להגדיר את פונקציית המעברים,

נתחיל בכך שמהמצב ההתחלתי החדש נעבור למצב ההתחלתי הישן בעת קבלת a ואם נקבל אות שונה מa נעבור למצב בור

$$\begin{aligned}
&\delta^{'}\left(q_0^{'},a\right)=\left\{q_0\right\} \\
&\delta^{'}\left(q_0^{'},\sigma\in\sum\backslash\left\{a\right\}\right)=\varnothing
\end{aligned}$$

כעת נגדיר את המעברים הרגילים מהפונקציה הקודמת

$$\delta^{'}\left(q\in Q\backslash\left\{F\right\},\sigma\in\sum\right)=\delta\left(q,\sigma\right)$$

כעת נטפל במצבים בהם אנו נמצאים במצב המקבל המקורי – אם נקבל a נעבור גם לפי הפונקציה המקורית וגם נעבור למצב המקבל החדש.

$$\delta^{'}\left(q\in F,\sigma\in a\right)=\delta\left(q,a\right)\cup q_F^{'}$$

אם קיבלנו אות שהיא לא a נמשיך רק באוטומט הישן

$$\delta^{'}\left(q\in F,\sigma\in\sum\backslash\left\{a\right\}\right)=\delta\left(q,a\right)$$

כעת נשאר רק לטפל במקרה בו קיבלנו אות לאחר שאנו במצב המקבל החדש – דבר שיוביל אותנו למצב בור

$$\delta^{'}\left(q_F^{'},\sigma\in\sum\right)=\varnothing$$

משל

ב)

נתון כי L שפה רגולרית נרכיב את השפה $Split(L)$ כך, $(w_1 \in L \wedge w_2 \in L) \cap (w_1 \circ w_2 \in L)$

כעת נוכיח כי $(w_1 \in L \wedge w_2 \in L)$ - נתון כי L שפה רגולרית ולכן w_1 הוא מילה של שפה רגולרית וגם w_2 מילה של שפה רגולרית ולכן שניהם שפה רגולרית

כעת נוכיח כי $(w_1 \circ w_2 \in L)$ - נתון כי L שפה רגולרית, הוכחנו בכיתה כי שרשור של 2 שפות רגולריות (הוכחנו קודם כי הם שפות רגולריות) היא גם שפה רגולרית

כעת החיתוך של 2 השפות הרגולרית ($(w_1 \in L \wedge w_2 \in L)$ ו $(w_1 \circ w_2 \in L)$) גם שפה רגולרית – הוכחנו זאת בכיתה.

חלק רביעי

4)

1)המצב ההתחלתי שלנו מכיל מעבר אפסילון ולכן המצב ההתחלתי יהיה $\{q_0, q_1, q_3\}$

אם נקבל a במצב ההתחלתי

$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2, q_3\}$

$\delta(q_1, a) = \varnothing$ לכן נגיע למצב $\{q_1, q_2, q_3\}$

$\delta(q_3, a) = \varnothing$

אם נקבל b במצב ההתחלתי אין משם מעבר מוגדר ולכן נגיע למצב בור.

$\delta(q_0, b) = \varnothing$

$\delta(q_1, b) = \{q_1, q_3\}$ לכן נגיע למצב $\{q_1, q_3\}$

$\delta(q_3, b) = \varnothing$

$\{q_1, q_2, q_3\}$ (2.1

כעת מהמצב של קבוצת המצבים $\{q_1, q_2, q_3\}$ אם נקבל a בכל אחד מהמצבים נוכל להגיע ל

$\delta(q_1, a) = \varnothing$

$\delta(q_2, a) = \varnothing$ לכן האיחוד שלהם יהיה גם $\varnothing$

$\delta(q_3, a) = \varnothing$

אם נקבל מהמצב של קבוצת המצבים $\{q_1, q_2, q_3\}$ b בכל אחד מהמצבים נוכל להגיע ל

$\delta(q_1, b) = \{q_3, q_1\}$

$\delta(q_2, b) = \{q_3, q_1\}$ לכן האיחוד שלהם יהיה $\{q_3, q_1\}$

$\delta(q_3, b) = \{q_3, q_1\}$

2.2) כעת נבדוק את המעברים עבור קבוצת המצבים $\{q_1, q_3\}$

אם נקבל a

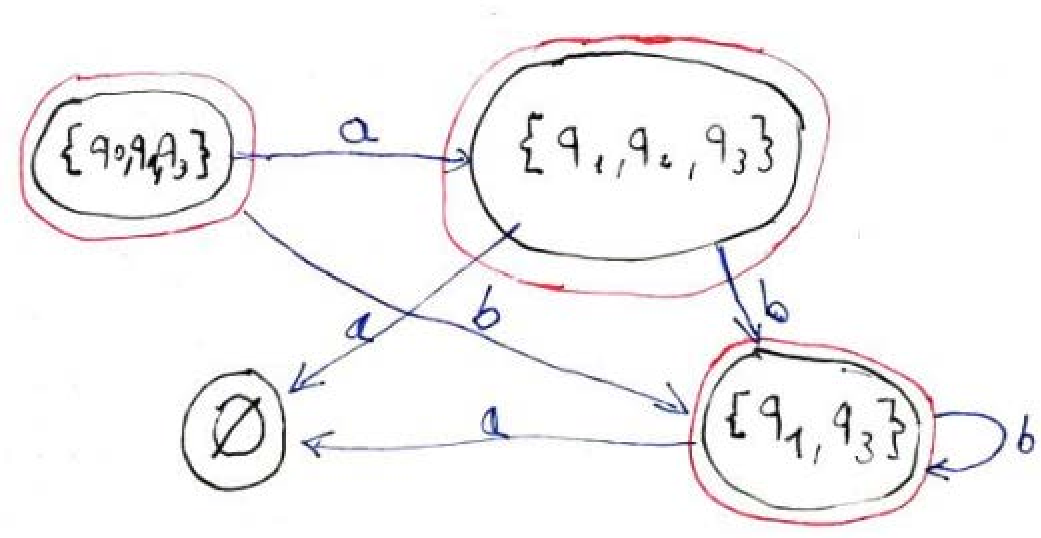
$\delta(q_1, a) = \varnothing$

$\delta(q_3, a) = \varnothing$ לכן נעבור למצב $\varnothing$

אם נקבל b

$\delta(q_1,b)=\{q_1,q_3\}$
$\delta(q_3,b)=\{q_1,q_3\}$ לכן נעבור למצב $\{q_1,q_3\}$

כעת כל מצב שהוא קבוצת מצבים מהאוטומט המקורי שמכיל מצב מקבל הוא גם מצב מקבל.



<u>חלק חמישי</u>

5)

$L=\{0^i10^i \mid i\geq 0\}$

נניח בשלילה ש L רגולרית. יהיה n הקבוע שקיומו מובטח מלמת הניפוח.

נבחר $w=0^n10^n$, $w\in L$, $|w|\geq n$ ויהי פירוק המילה $w=xyz$ כך ש: $|xy|\leq n$, $1\leq|y|$

ז"א
$$x=0^s \mid s\geq 0$$
$$y=0^t \mid t\geq 1$$
$$z=0^{n-(s+t)}10^n \mid s+t\leq n$$

כאשר $i=1$ - $w^2=0^s0^{2t}0^{n-(s+t)}10^n=0^{n+t}10^n$ והמילה אכן בשפה

נבחר $i=2$ וע"פ למת הניפוח $xy^2z\in L$. נרצה להראות כי $xy^iz\notin L$ ובכך להגיע לסתירה.

כאשר $i=2$ - $w^2=0^s0^{2t}0^{n-(s+t)}10^n=0^{n+t}10^n$ והמילה אינה בשפה.