מבני נתונים – תרגיל 1

1)א)

$$3n^2+5n-2\in O\left(n^2\right)$$

$$f\left(n\right)\in O\left(g\left(n\right)\right)\Leftrightarrow \exists c>0,n_0\geq 0:\forall n\geq 0:$$
$$f\left(n\right)\leq c*g\left(n\right)$$

כלומר, קיימים c ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $f\left(n\right)\leq c*g\left(n\right)$

$$3n^2+5n-2\leq 5n^2+5n^2=10n^2$$
$$n_0=1,c=10$$

ב)

$$n^3\log^2 n+n^2\in\Omega\left(n^3\right)$$

קיימים c ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $f\left(n\right)\geq c*g\left(n\right)$

$$n^3\log^2 n+n^2\geq n^3\log^2 n\geq n^3=\frac{1}{5}5n^3$$

עבור $n_0=3,c=\frac{1}{5}$

ג)

$$n^2\log\left(n\right)+5n-1\in\Theta\left(n^2\log\left(n\right)\right)$$

קיימים $c_2>c_1$ ו n_0 כך ש

$$c_1*g\left(n\right)\leq f\left(n\right)\leq c_2*g\left(n\right)$$

כאשר $c_2=\frac{1}{2}$ ו $n_0=1$

$$n^2\log\left(n\right)+5n-1\leq n^2\log n+n^2\log n=2n\log n$$

כאשר $c_1=\frac{1}{3}$ ו $n_0=1$

$$n^2\log\left(n\right)+5n-1\geq\frac{1}{3}\left(n^2\log\left(n\right)\right)$$

ולכן $n_0 = 1$ $c_1 = \frac{1}{3}$ $c_2 = \frac{1}{2}$

ד)

$$5n^2 + \frac{n^2}{\log(n)} \in \Theta(n)$$

קיימים $c_2 > c_1$ ו n_0 כך ש

$$c_1 * g(n) \le f(n) \le c_2 * g(n)$$

כאשר $c_2 = 2$ ו $n_0 = 2$

$$5n^2 + \frac{n^2}{\log(n)} \le 5n^2 + \frac{n^2}{\log(n)} * \log(n) = 6n^2$$

כאשר $c_1 = \frac{1}{2}$ ו $n_0 = 2$

$$5n^2 = 5n^2 + \underbrace{\frac{n^2}{\log n} - \frac{n^2}{\log n}}_{0} \le 5n^2 + \frac{n^2}{\log(n)}$$

ולכן $n_0 = 2$ $c_1 = \frac{1}{2}$ $c_2 = 2$

ה)

נוכיח ע"י הכלה מ2 הכיוונים, מצד אחד

($\subseteq$) נניח כי $g(n)\in\Theta(f(n))$ ונוכיח כי $g(n)\in\left(O(f(n))\cap\Omega(f(n))\right)$

מכיוון ש $g(n)\in\Theta(f(n))$ על פי הגדרת חסם אדוק $g(n)\in O(f(n))\wedge g(n)\in\Omega(f(n))$ ולכן

$g(n)\in\left(O(f(n))\cap\Omega(f(n))\right)$, סיום צד ראשון.

($\supseteq$) נניח כי $g(n)\in\left(O(f(n))\cap\Omega(f(n))\right)$ ונוכיח כי $g(n)\in\Theta(f(n))$

מכיוון ש $g(n)\in\left(O(f(n))\cap\Omega(f(n))\right)$ אזי $g(n)\in O(f(n))\wedge g(n)\in\Omega(f(n))$ ולכן על פי הגדרת חסם אדוק אם הפונקציה מקיימת תנאים אלו היא $g(n)\in\Theta(f(n))$

ו)

נניח כי $g(n)\in\Theta(f(n))$ ונוכיח כי $f(n)\in\Theta(g(n))$

מכיוון ש $g(n)\in\Theta(f(n))$ אזי קיימים c_1,c_2 ו n_0 כך ש- $c_1*f(n)\le g(n)\le c_2*f(n)$ שזה בעצם

$c_1*f(n)\le g(n)$ ו- $g(n)\le c_2*f(n)$ נעביר את הcים אגפים ונקבל

$$\frac{g(n)}{c_2}\le f(n)$$

$$f(n)\le\frac{g(n)}{c_1}$$

ולכן נשלב את 2 הפסוקים ונקבל $\frac{g(n)}{c_2}\le f(n)\le\frac{g(n)}{c_1}$ ולכן אם ניקח

$n_1=n_0$

$c_3=\frac{1}{c_1}$ המשפט יתקיים ו $f(n)\in\Theta(g(n))$

$c_4=\frac{1}{c_2}$

ז)

צריך לחלק ל3 מקרים.

<u>כאשר</u> $c=1$ - אזי ניקח $c_1=c_2=1, n_0=1$

וכן $f(n)\in\Theta\left(c\left(f(n)\right)\right)$

<u>כאשר</u> $c>1$ - אזי ניקח $c_1=\frac{1}{c^2}, c_2=c^2, n_0=1$ וניתן לראות כי

$$\frac{1}{c^2}*cf(n)\le f(n)\le c^2*cf(n)$$
$$\frac{f(n)}{c}\le f(n)\le c^3*f(n)$$

<u>כאשר</u> $0<c<1$ - אזי ניקח $c_1=c^2, c_2=\frac{1}{c^2}, n_0=1$ וניתן לראות כי

$$c^2*cf(n)\le f(n)\le\frac{1}{c^2}*cf(n)$$
$$c^3*f(n)\le f(n)\le\frac{f(n)}{c}$$

ולכן עבור כל אחד מהמקרים הראנו כי $f(n)\in\Theta\left(c\left(f(n)\right)\right)$

2)א)

הלולאה החיצונית מתבצעת $\log_3 n$ פעמים, הלולאה הפנימית מתבצעת $\log_3 i$ נסמן $k = \log_3 i$ כלומר $i = 3^k$

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log_3 n} \sum_{j=1}^{\log_3 3^k} 1 = \sum_{k=0}^{\log_3 n} k = \frac{(\log_3 n)(\log_3 n + 1)}{2}$$

נמצא חסם

$$\frac{(\log_3 n)(\log_3 n + 1)}{2} = \frac{(\log_3 n)^2 + \log_3 n}{2} = \Theta\left((\log_3 n)^2\right)$$

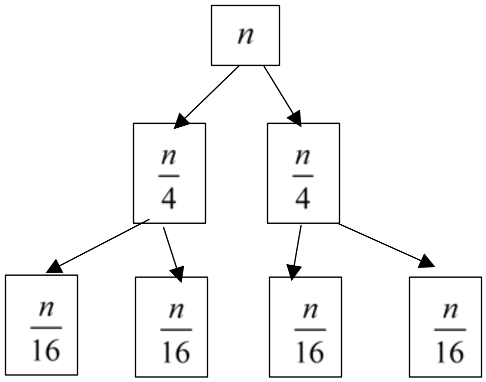
ב)

הלולאה החיצונית מתבצעת n פעמים, הלולאה הפנימית מתבצעת n ולכן

$$T(n) = \sum_1^n \sum_1^n 1 = \sum_1^n n = n * n = n^2$$

סיבוכיות הזמן ריצה שלנו תהיה $n^2 = \Theta(n^2)$

<u>חלק ב – נוסחאות נסיגה</u>



(3

ניתן לראות כי לעץ יהיו $\log_4 n$ שלבים

בשלב הראשון הכמות תהיה n בשלב השני $\frac{n}{2}$

ובשלב השלישי $\frac{n}{4}$

החסום ההדוק יהיה –

$$n*\sum_{i=0}^{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

מכיוון ש $\sum_{i=0}^{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ הוא מספר כלשהו נוכל לחסום אותו בין c_1, c_2 ולכן החסם יהיה $\Theta(n)$

ולכן קיבלנו כי $T(n) = \Theta(n)$

4)

ראשית אנו צריכים הנחה מסוימת כדי לבדוק אם היא נכונה ולכן ניקח את מה שיצא לנו בשאלה הקודמת - $T(n)\in\Theta(n\log n)$

הוכחה עבור $T(n)\in O(n\log n)$

נניח שקיים c כלשהו כך ש $T(n)\le cn\log n$ לכל $n>n_0$

הבסיס לאינדוקציה - $1=T(2)\le c*2\underbrace{\log 2}_{1}=2c$, זה נכון ל $c\ge 1$

נניח שהטענה נכונה לכל $n>n^{'}$ לכן גם ל $\frac{n}{4}$

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{4}\right)+n\le 2c\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}+n\le 2cn(\log n)+cn(\log n)=3c(n\log n)$$

לכן עבור $c=2$ ו $n_0=2$ הטענה נכונה

הוכחה עבור $T(n)\in\Omega(n\log n)$

נניח שקיים c כלשהו כך ש $T(n)\ge cn\log n$ לכל $n>n_0$

הבסיס לאינדוקציה $1=T(2)\ge c*2\underbrace{\log 2}_{1}=2c$, זה נכון ל $0<c<\frac{1}{2}$

נניח שהטענה נכונה לכל $n>n^{'}$ לכן גם ל $\frac{n}{4}$

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{4}\right)+n\ge 2c\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}+n\ge c\frac{n}{2}\left(\log\frac{n}{4}\right)=\frac{cn}{8}\left(4\log\frac{n}{4}\right)=\frac{cn}{8}\left(\log\left(\frac{n}{4}\right)^4\right)\underbrace{\ge}_{n\ge 3}\frac{cn}{8}(\log n)=8c*n\log n$$

לכן עבור $c=1$ ו $n_0=3$ הטענה נכונה

הוכחנו עבור $T(n)\in O(n\log n)$ וגם עבור $T(n)\in\Omega(n\log n)$ ולכן $T(n)\in\Theta(n\log n)$

(5

ננסה להריץ את הפונקציה כמה פעמים –

$$T(n)=5T\left(\frac{n}{3}\right)+n^2$$

$$T\left(\frac{n}{3}\right)=5T\left(\frac{n}{9}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

$$T\left(\frac{n}{9}\right)=5T\left(\frac{n}{27}\right)+\left(\frac{n}{9}\right)^2$$

ולכן דוגמה של חישוב כל אלו עד כה היא –

$$T(n)=5\left(5\left(5T\left(\frac{n}{27}\right)+\left(\frac{n}{9}\right)^2\right)+\left(\frac{n}{3}\right)^2\right)+n^2$$

ולכן הנוסחה הכללית תהיה

$$T(n)=5^kT\left(\frac{n}{3^k}\right)+n^2*\sum_{i=0}^{k-1}5^i\frac{1}{3^{2i}}$$

ידוע כי $T(1)=1$ ולכן $\frac{n}{3^k}=1\rightarrow k=\log_3 n$

ולכן הסיבוכיות תהיה $T(n)=5^{\log_3 n}+n^2\sum_{i=0}^{\log_3 n-1}\frac{5^i}{9^i}=5^{\log_3 n}+n^2\sum_{i=0}^{\log_3 n-1}\left(\frac{5}{9}\right)^i$

$$5^{\log_3 n}+n^2\sum_{i=0}^{\log_3 n-1}\left(\frac{5}{9}\right)^i=\Theta\left(n^2\right)$$

כעת צריך להוכיח נכונות של חישוב זה – נוכיח באמצעות אינדוקציה,

נוכיח כי לכל $1\le k\le\log 3n-1$ מתקיים -

$T(n)=5^kT\left(\frac{n}{3^k}\right)+n^2*\sum_{i=0}^{k-1}5^i\frac{1}{3^{2i}}$ - כמו שחישבנו קודם.

בסיס האינדוקציה $(k=1)$

$T(n)=5T\left(\frac{n}{3}\right)+n^2$ וזה אכן נכון.

כעת נניח עבור $k=x-1$ ונוכיח עבור $k=x$

$$T(n)=5^{x-1}T\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)+n^2*\sum_{i=0}^{x-2}5^i\frac{1}{3^{2i}}$$

הנחנו עבור $k=x-1$ ולכן נוכל לחשב את $T\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)$

$$T\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)=5T\left(\frac{\frac{n}{3^{x-1}}}{3}+\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)^2\right)$$

$$T(n)=5^{x-1}\underbrace{T\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)}_{5T\left(\frac{\frac{n}{3^{x-1}}}{3}+\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)^2\right)}+n^2*\sum_{i=0}^{x-2}5^i\frac{1}{3^{2i}}=5^{x-1}\left(5T\left(\frac{\frac{n}{3^{x-1}}}{3}+\left(\frac{n}{3^{x-1}}\right)^2\right)+n^2*\sum_{i=0}^{x-2}5^i\frac{1}{3^{2i}}\right)$$

$$T(n)=5^xT\left(\frac{n}{3}\right)+5^{x-1}\left(\frac{n^2}{9^{x-1}}\right)+n^2*\sum_{i=0}^{x-2}5^i\frac{1}{3^{2i}}$$

$$5^{x-1}\left(\frac{n^2}{9^{x-1}}\right)=\left(\frac{5^{x-1}*n^2}{9^{x-1}}\right)=n^2*\left(\frac{5^{x-1}}{9^{x-1}}\right)=n^2*\left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}$$

$$T(n)=5^xT\left(\frac{n}{3}\right)+\underbrace{5^{x-1}\left(\frac{n^2}{9^{x-1}}\right)}_{n^2*\left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}}+n^2*\sum_{i=0}^{x-2}5^i\frac{1}{3^{2i}}$$

$n^2*\left(\frac{5}{9}\right)^{x-1}=5^i\frac{1}{3^{2i}}\mid i=x-1$ לכן נוכל לצרף אותו לסכימה ונקבל

$T(n)=5^xT\left(\frac{n}{3}\right)+n^2\sum_{i=0}^{x-1}5^i\frac{1}{3^{2i}}$ והוכחנו מה שהיינו צריכים.

6)

נתון כי $T(12)=1$

לכן ניקח $n=12$ ונקבל

$2T\left(\frac{12}{2}-5\right)+12$ לכן $14<12c$ לכן זה נכון עבור $\frac{7}{6}\le c$

נוכיח באמצעות אינדוקציה –

נניח ש $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}-5\right)+n\in O(n\log n)$ לכל $n>n'$

ולכן זה יהיה נכון גם עבור $\frac{n}{2}$

מכיוון שאנו עוסקים במספרים גדולים -5 זניח ונוכל להוריד אותו

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n\le \underbrace{2c\left(\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\right)}_{2c*\frac{n}{2},\log\frac{n}{2}=\log n-\log 2}+n\le cn(\log n-\log 2)+n=cn\log n-cn+n$$

נבחר את $c=4$ ולכן $0>\underbrace{n-n*c}_{n*c>n}$ ולכן $cn\log n-cn+n<n\log n$

והסיבוכיות תהיה $2T\left(\frac{n}{2}-5\right)+n\in O(n\log n)$.

(7

נקבע כי $x=\log n$ ולכן $\overbrace{T\left(\underbrace{2^x}_{n}\right)}^{T(n)}=\overbrace{2T\left(2^{\frac{x}{2}}\right)+1}^{2T\left(\sqrt{n}\right)+1}$

נסמן את $T\left(2^x\right)$ באמצעות פונקציה חדשה שנקרא לה $Q\left(x\right)$ זאת אומרת $Q\left(x\right)=T\left(2^x\right)$

ונקבל כי $Q\left(x\right)=\Theta\left(x\right)$ $Q\left(x\right)=2Q\left(\frac{x}{2}\right)+1\rightarrow$ ולכן לפי מה שקבענו $x=\log n$ אזי

$\Theta\left(\underbrace{x}_{x=\log n}\right)=\Theta\log n$.

8)א

$a = 4, b = 2$ לכן $n^{\underbrace{\log_2 4}_{2}} = n^2$

$n^2 \geq n$ לכן , $\Theta\left(n^2\right)$

ב)

$a = 4, b = 2$ לכן $n^{\underbrace{\log_2 4}_{2}} = n^2$

$n^2 = n^2$ לכן $\Theta\left(n^2 \log n\right)$

ג)

$a = 4, b = 2$ לכן $n^{\underbrace{\log_2 4}_{2}} = n^2$

$n^2 \leq n^3$ לכן $\Theta\left(n^3\right)$