1)א

הוכחה

נראה כי $SSS \le_m^p S_u^{'}$

נקבל קלט לSSS $\left(A,b\right)$ נבנה את הקלט ל $S_u^{'}$ כך:

הקלט יהיה $\left(M,x\right)$ - M יהיה מכונה טיורינג שעוברת על כל תתי הקבוצות של A ותחזיר כן אם קיימת תת קבוצה שסכום האיברים שלה הוא b אחרת היא תחזיר לא.

$x=\left(A,b\right)$

הוכחת נכונות:

$\left(A,b\right)\in SSS \rightarrow \left(M,x\right)\in S_u^{'}\ \left(\leftarrow\right)$

מכיוון ש $\left(A,b\right)\in SSS$ אזי בהכרח קיימת תת קבוצה של A כך שסכום האיברים שלה הוא b ולכן על פי הגדרה $\left(M,x\right)\in S_u^{'}$

$\left(A,b\right)\in SSS \leftarrow \left(M,x\right)\in S_u^{'}\ \left(\rightarrow\right)$

מכיוון ש $\left(M,x\right)\in S_u^{'}$ על פי בניית הרדוקציה קיימת תת קבוצה של A כך שסכום האיברים שלה הוא b וזהו בדיוק ההגדרה של SSS ולכן $\left(A,b\right)\in SSS$

1)ב

הפרכה

נראה כי $S_u^{'}\notin NP$ ולכן בהכרח $S_u^{'}\notin NPC$

עבור M מכונה שמקבלת את הקלט x – כך ש M מגרילה מספרים בטווח כלשהו בין 1 לz ו0 ובודקת בלולאה $while\left(x,random\right)$ (המספר שהוגרל) אם היא עוצרת או לא, אם המכונה עצרה וy=1 אז המכונה תחזיר 1 אחרת אם היא לא עוצרת וy=0 המכונה תחזיר 0.

עבור כל x שמגריל מספרים שכוללים את 0 המכונה מחזירה 1, אך לא קיים מוודא שיוודא זאת בזמן פולינומאלי. ולכן כמו שאמרנו $S_u^{'}\notin NP$

ולכן $S_u^{'}\notin NPC$

2א)

<u>הוכחה:</u>

נוכיח כי $VC \vee IS \in NP$

המוודא יקבל קבוצת קודקודים יבדוק אם היא בגודל K (אם לא יחסיר "לא") האם קיים כיסוי קודקודים (אם כן יחזיר "כן") אם היא קבוצה בלתי תלויה (אם כן יחזיר "כן").

המוודא הנ"ל פולינומי כי כל אחת מהבדיקות היא פולונומיאלית.

נוכיח כי $VC \vee IS \in NPH$

נראה רדוקציה אל IS

בניית הרדוקציה – בהינתן קלט עבור IS (G,k) ונבנה את הקלט באופן הבא נגדיר גרף קליק בגודל k+2 בתור K_{k+2}. ולכן נגדיר את $G'=G \cup K_{k+2}$ ואת $k'=k+1$

<u>הוכחת נכונות:</u>

נוכיח כי $IS \Leftrightarrow NP \vee IS$ (עם הבנייה)

$(\leftarrow)$ נניח כי $(G,k) \in IS$ אזי קיימת קבוצה X בגודל k, כך שX קבוצה בלתי תלויה בגרף G.

ומתקיים כי $G'=K_{k+2} \cup G \supseteq G$ יהי $v \in K_{k+2}$ ולכן אין קשתות בינו לבין הקודקודים בG. ולכן הקבוצה שלנו תהיה $X'=X \cup \{v\}$ בהכרח הקבוצה תהיה בתל ומספר האיברים בה יהיה $|X|+1=k+1=k'$ כמו שצריך.

$(\rightarrow)$ נניח כי $(G',k') \in VC \vee IS$

לכן או ש ב G' קיימת קבוצה עם כיסוי קודקודים בגודל $k+1$ ואז מתקיימת סתירה מכיוון ש $G'=G \cup K_{k+2}$ ואז קבוצת הכיסוי תהיה חייבת לפחות להיות בגודל $k+2$.

לכן בהכרח - ב G' קיימת קבוצה בתל בגודל k+1 ובקבוצה זאת יש לכל היותר קודקוד אחד מתוך הקליק וזה גורם לכך שבגרף G עצמו בהכרח יש לפחות k קודקודים בתל שזה אותו דבר כמו לומר כי $(G,k) \in IS$.

הוכחנו כי $VC \vee IS \in NP \wedge VC \vee IS \in NPH \rightarrow VC \vee IS \in NPC$

2)ב)

נשים לב כי עבור כל קודקוד בגרף ונבחר אותו לקבוצה שאנו חושבים שהיא תהיה הVC וגם IS ולכן בהכרח לא נבחר את השכנים שלו אחרת נפר את האי-תלות. את השכנים שלהם כן נכניס לקבוצה על מנת לקיים את הכיסוי קודקודים, ואת השכנים שלהם לא וכך הלאה.

לעומת זאת אם **לא** נסמן את הקודקוד שלנו כל השכנים שלו יהיו בקבוצה והשכנים שלהם ולא, וכך הלאה.

לכן – עבור כל רכיב קשירות בגרף על מנת לדעת אם קיימת בו קבוצה שהיא VC וIS צריך לבחור קודקוד אחד בלבד ברכיב הקשירות ולבדוק מה קורה אם מצרפים אותו לקבוצה ואם לא מצרפים אותו לקבוצה.

אם מצאנו אזי יש קבוצה כזאת, אם לא מצאנו אזי בוודאות אין כי ניסנו את 2 האופציות היחידות של הקודקוד ולכן גם אלו יהיו אופציות אחרות מקודקודים אחרים כי זה יהיה אותו דבר.

לכן $VC \wedge IS \in P$ נראה אלגוריתם הכרעה:

עבור כל רכיב קשירות –

בחר קודקוד שרירותי בו –

סמן אותו כחשוד, סמן את שכניו כלא, את שכניהם סמן גם כחשודים וכך הלאה. אם **לא** היינו צריכים לשנות צבע של אף אחד מהקודקודים אזי החזר 1.

אחרת – בטל את הסימונים וסמן את הקדקוד הנבחר כלא חשוד ובדוק באותה צורה כמו למעלה.

החזר 0

אם כולם החזירו 1 החזר 1 אחרת החזר 0.

אלגוריתם זה הוא פולונומיאלי כי כל חלק בו הוא כך (חלוקה לרכיבי קשירות, בחירת קודקוד, ובדיקה [מעבר על קודקודים]).

מכיוון שהנחנו כי $P \neq NP$ ולכן $P \cap NPC = \varnothing$ והוכחנו כי $VC \wedge IS \in P$ לכן למסקנה מתקיים כי $VC \wedge IS \notin NPC$

2)ג

הוכחה:

נראה כי $VC \wedge \frac{1}{2} IS \in NP$

בהינתן קלט לבעיה (G,k,A) נבדוק אם הקבוצה בגודל K ,נעבור על כל זוג קודקודים אם לכל זוג כזה לפחות אחד מהקודקודים הוא בקבוצה נמשיך את הבדיקה (אחרת נחזיר לא). [בדיקת VC]

נבדוק אם מספר הקשתות קטן או שווה לחצי מהקשתות אם כן נחזיר 1 אחרת נחזיר לא

נראה כי $VC \wedge \frac{1}{2} IS \in NPH$

נבנה גרף כוכב עם מספר הקשתות שיש בG (קודקוד אחד שיוצאות ממנו G קשתות) [הכוונה למספר הקשתות בG], ונסמנו בX

כעת נגדיר את הקלט לבעיה החדשה בתור - $\begin{array}{l} G' = G \cup X \\ k' = k+1 \end{array}$

הוכחת נכונות:

נראה כי $VC \wedge \frac{1}{2} IS \Leftrightarrow VC$

$(\leftarrow)$ולכן קיימת קבוצה שהיא הפתרון ונסמנה בS. ניקח את הקודקוד שהוא מרכז הכוכב ונסמנו בv. אזי v יכול לשמש את ככיסוי לגרף A ולכן מתקיים $S' = S \cup \{v\}$ כיסוי קודקודים לגרף G' ומתקיים כי $|S'| = |S \cup \{v\}| = k+1 = k'$ בנוסף מספר הקשתות בקבוצה הוא במקסימום מספר הקשתות בגרף G (כי אין קשתות בין G ל X) ולקחנו מX קודקוד בודד ולכן בסך הכל מספר הקשתות שנקבל הוא קטן מחצי או במילים אחרות $\frac{1}{2} IS$ והוכחנו כי $S' \in VC \wedge \frac{1}{2} IS$

$(\rightarrow)$נוכיח באמצעות כך ש $(G,k) \notin VC$

אזי לא קיימת קבוצה S בגודל k שהיא כיסוי קודקודים. נניח בשלילה כי כן קיימת כיסוי קודקודים לגרף הבנוי לפי הרדוקציה – מכיוון שצריך לכסות גם את הקשתות בA וגם את הקשתות בגרף G וקבוצת הכיסוי המינימלי לגרף X היא המרכז שלו (שסימנו קודם בv) ולכן מספר הקודקודים המקסימלי שניתן לכסות את G הינו k אך זה בסתירה להנחה שלנו ולכן לא קיימת קבוצה לכיסוי קודקודים לגרף לאחר הבנייה ובהכרח נובע מזה כי $(G',k') \notin VC \wedge \frac{1}{2} IS$

ולכן הוכחנו כי $\left(VC \wedge \frac{1}{2} IS\right) \in NP \wedge \left(VC \wedge \frac{1}{2} IS\right) \in NPC \to VC \wedge \frac{1}{2} IS \in npc$

3(א) נקרא לבעיה $SSS+1$

ראשית נראה כי $SSS+1 \in NP$

המוודא יקבל (A,b) ואיבר a ששייך לA וקבוצה B ויבדוק האם $B \subseteq A \cup \{a\}$ ואם כן אז האם $b=\sum_{x\in B} x$ זהו כמובן בזמן פולינומיאלי.

כעת נראה כי $SSS+1 \in NPH$

בהינתן קלט ל SSS (A,B) כעת נבנה את הקלט עבור $SSS+1$ (A',B) כך ש

$$A'=A\cup\{x\}$$
$$x=2\left(\sum_{a\in A} a\right)$$
$$b'=b+2x$$

<u>הוכחת נכונות:</u>

$(\leftarrow)$ נראה כי $(A,b)\in SSS \rightarrow (A',b')\in SSS+1$

מכיוון ש $(A,b)\in SSS$ קיימת קבוצה X כך ש $\sum_{x\in X} x=b$ ולכן הקבוצה $Y=X\cup\{x\}$ תהיה קבוצה כך שסכומה יהיה שווה ל b' ולכן $(Y\cup\{x\},b')\in SSS$ כעת בהכרח ב $Y\cup\{x\}$ יש את איברי A ופעמיים את x לכן על מנת שנקבל את b' נצטרך את כל איברי הקבוצה, מכיוון ש$Y\subseteq A'$ לפי הרכבת פונקציית הרדוקציה התנאי יתקיים גם עבור $(A',b')\in SSS+1$

$(\rightarrow)$ $(A',b')\in SSS+1 \rightarrow (A,b)\in SSS$

הגדרנו כי x גדול מסכום איברי A ובנוסף הגדרנו כי $b'=2x+b$ ולכן עבור כל $a\in A'$ כלשהו שיקיים $A\cup\{a\}\in SSS$ בהכרח $\{x,x\}\in A'\cup\{a\}$ אחרת, הסכום יהיה בהכרח קטן מb' כי אין אף איבר אחר (y) שנקבל $\sum_{a\in A} a+y+x\geq b'$ ולכן הוכחנו כי a יהיה x וכמובן ש $x\notin A$ לכן בהכרח על מנת להגיע לb' השתמשנו פעמיים בx ולכן בהכרח שאר האיברים שיהיו בתת הקבוצה של $A'\cup\{x\}$ שסכום האיברים 'b יגיע לסכום $b'-2x=b$ וכל האיברים הללו יהיו שייכים לA ולכן בהכרח לA יש תת קבוצה של איברים שסכום האיברים שלהם הואb או במילים אחרות $(A,b)\in SSS$.

הוכחנו כי $SSS+1\in NP \wedge SSS+1\in NPH \rightarrow SSS+1\in NPC$

3)ב(

ראשית נראה כי $Partition1.5 \in NP$

המוודא יקבל את הבעיה A , ואת 2 תתי הקבוצות (B,, ויבדוק אם $B \cap C = \varnothing \quad B \cup C = A$ וסכום איבריהן שווה.

כעת נראה כי $Partition1.5 \in NPH$

נקבל קלט לבעיה Partition (A) ונבנה B קלט ל $Partition1.5 \in NPH$ באופן הבא:

יהיה x האיבר המקסימלי בקבוצה A, כעת ניקח $y = 3X^*|A|$ כעת הקבוצה תיהיה $B = A \cup \{y^1, y^2 ... y^{|A|}\}$

<u>הוכחת נכונות:</u>

$(\leftarrow)$ נראה כי $A \in Partition \to B \in Partition1.5$

יהי A קלט לPartiton נחשב את

יהיו תתי קבוצות Y,X תתי קבוצות של A כך ש $\begin{matrix} Y \cap X = \varnothing \\ Y \cup X = A \end{matrix}$ והסכומים של 2 תתי הקבוצות שווים,

אזי הקבוצות של $X \cup \{y^1, y^2 .... y^{|A|}\}, Y \cup \{y^1, y^2 .... y^{|A|}\}$ יהיו הפתרון עבור Partition1.5

האיברים המשוכפלים יהיו $\{y^1, y^2 .... y^{|A|}\}$ ובכך גם כן יהיה פתרון.

$(\rightarrow)$ נראה כי $B \in Partition1.5 \to A \in Partition$

יהי קלט B עבור Partition1.5

בהכרח X,Y יהיו $X \cup Y = A \cup \{y^1, y^2 .... y^{|A|}\} \cup \{y^1, y^2 .... y^{|A|}\}$

הסבר:

$y^{|A|}$ בהכרח האיבר הכי גדול בקבוצה B ובנוסף גם יותר גדול מכל סכום כל שאר האיברים פעמיים ולכן נצטרך לשכפל אותו ולבחור גם לקבוצה X וגם לקבוצה Y, אחרת לא תוכל להתקיים שיוויון בין תתי הקבוצות.

בדומה לכך $y^{|A|-1}$ יהיה האיבר הכי גדול בקבוצה B ובנוסף גם יותר גדול מכל שאר האיברים B פעמיים (למעט $y^{|A|}$, אך אותו כבר שמנו ב2 הקבוצות – הוכחנו קודם, ולכן אין לזה השפעה).

בדומה להוכחות אלו נראה לכל y^i ולכן אלו יהיו בדיוק B/2 איברים שנהיה חייבים לשכפל חייב ולא נוכל לשכפל יותר.

הוכחנו כי $Partition1.5 \in NP \wedge Partition1.5 \in NPH \to Partition1.5 \in NPC$

(4

נסמן את הבעיה בשם $3Y$

נראה כי $3Y \in NP$

המוודא יקבל את החלוקה לקבוצות Y ויבדוק שאיחוד הY שווה לC שסכום כל קבוצה בY קטן מהM המתאים ובנוסף כי לא רשום קורס בקבוצה Y_i כך שקיים לו קורס קדם ב Y_j כך ש $j > i$

נוכיח כי $3Y \in NPH$

נראה רדוקציה מבעיית Partition , עבור קלט קבוצה A לבעיית Parition נגדיר כי:

עבור C: לכל $a \in A$ נוסיף לC את $\{a_1, a_2 ... a_a, a_1^{'}, a_2^{'}, a_a^{'}\}$ בעצם לכל איבר $a \in A$ נוסיף את עצמו a פעמים כקורס רגיל (a) וקורס המשך a')

עבור R: עבור כל איבר שיש לו ' הוא יהיה הקורס המשך לקורס הקודם לו שהוא לא ' , לדוגמה עבור $a_1^{'}$ הוא קורס המשך עבור a_1.

עבור M: ראשית סכום האיברים של A נסמנו בX וכעת נגדיר

$$M_1 = \frac{X}{2}$$
$$M_2 = X$$
$$M_3 = \frac{X}{2}$$

כעת נרצה להראות כי $3Y \Leftrightarrow Partition$

$(\rightarrow)$

נניח כי קיימות 2 קבוצות (P, Q) שסכומן שווה והן זרות ואיחודן שווה לA (מכיוון ש $A \in Partition$)
לפיכך סכום כל אחת מהן שווה ל $\frac{X}{2}$

ולכן על פי הבנייה לכל קבוצה שתיווצר מהבנייה סכום האיברים שלה יהיה X ($\frac{X}{2}$ קורסי קדם ו $\frac{X}{2}$ קורסי המשך), כעת פתרון מתאים לבעיה יהיה –

- Y_1 יכיל את כל קורסי הקדם מP ($\frac{X}{2}$)
- Y_2 יכיל את כל קורסי ההמשך מP וקורסי הקדם של Q ($\frac{X}{2} + \frac{X}{2}$)
- Y_3 יכיל את כל קורסי ההמשך של Q ($\frac{X}{2}$).

ניתן לשים לב כי כל הסכומים עומדים בדרישות של M וגם בדרישת קורסי הקדם של R וגם כי אלו כל הקורסים.

$(\leftarrow)$

נניח בשלילה כי $a \notin Partition$ לפי ההגדרה אנו יודעים כי $M_1 = \frac{S}{2}$ ובנוסף אנו יודעים כי Y_1 חייב להכיל רק קורסי קדם, אך מכיוון שלא קיימת חלוקה עבור A (על פי ההנחה) ולכן ב Y_2 נעשה פחות מ $\frac{S}{2}$ קורסי המשך ולכן בהכרח נצטרך לעשות יותר קורסי קדם בשנה השלישית מה שלא אפשרי כי $M_3 = \frac{S}{2}$ ולכן הגענו לכך שאין פתרון ל $3Y$ בסתירה להנחה הראשונית.

הוכחנו כי $3Y \in NP \wedge 3Y \in NPH \rightarrow 3Y \in NPC$