לינארית 2 – תרגיל 7

מספר תרגול: 89113-07

1)

נראה כי המטריצה המייצגת $[T]_B^B$ לכסינה כאשר B הוא הבסיס הסטנדרטי.

$$[T]_B^B=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_B\left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_B\right)=\left(\left[\begin{pmatrix}\frac{3(1)-(0)}{2}\\\frac{3(0)-(1)}{2}\end{pmatrix}\right]_B\left[\begin{pmatrix}\frac{3(0)-(1)}{2}\\\frac{3(1)-(0)}{2}\end{pmatrix}\right]_B\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

כעת נרצה למצוא את הוקטורים העצמיים שירכיבו לנו את הבסיס המתאים.

נמצא את הערכים העצמאיים תחילה -

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\lambda-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right|=\underbrace{\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2}_{\lambda^2+3\lambda+\frac{9}{4}}-\frac{1}{4}=\lambda^2-3\lambda+2$$

$$\underbrace{\lambda^2-3\lambda+2}_{-2,-1}=(\lambda-1)(\lambda-2)\rightarrow\lambda=2,1$$

<u>כעת נמצא את הוקטורים העצמאיים -</u>

עבור $\lambda=1$

$$N(A-\lambda I)=N\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow N\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\overset{a}{\frac{1}{2}}&\overset{b}{-\frac{1}{2}}&0\\0&0&0\end{array}\right)\rightarrow b=t,\overbrace{\frac{a}{2}-\frac{t}{2}=0}^{\frac{a}{2}=\frac{t}{2}\rightarrow a=t}\rightarrow a=t\rightarrow sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda=2$

$$N(A-\lambda I)=N\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow N\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\overset{a}{-\frac{1}{2}}&\overset{b}{-\frac{1}{2}}&0\\0&0&0\end{array}\right)\rightarrow b=t,\overbrace{-\frac{a}{2}-\frac{t}{2}=0}^{\frac{a}{2}=-\frac{t}{2}\rightarrow a=-t}\rightarrow a=-t\rightarrow sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כעת נבנה את הבסיס מהוקטורים העצמאיים $B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

נבדוק אם אכן $[T]_{B'}^{B'}$ אכן לכסינה -

$$[T]_{B'}^{B'}=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{B'}\left[T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_{B'}\right)=\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{B'}\left[\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right]_{B'}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

אכן המטריצה אלכסונית וסיימנו.

(2

נניח כי המטריצות A,B דומות ונוכיח כי הפולינום המינימלי שלהן שווה.
הוכחנו בהרצאה כי למטריצות דומות פולינום אופייני שווה ולכן –

מכיוון ש A,B דומות אזי $A=P^{-1}BP$
ניקח פולינום של A $f(A)$ מהדמיון נובע כי
הפולינום האופייני של B הינו $P^{-1}f(B)P$
לכן כל הפולינומים $f(A),f(B)$ דומים ובכך גם הפולינום המינימאלי,
נעזר במשפט קיילי המילטון $P_A(A)=0$ ובכל שרק מטריצת האפס דומה לעצמה.

$$\underbrace{M_A(A)}_{P_A(A)=0}\sim P^{-1}M_A(B)P\rightarrow M_A(B)=0$$

$$M_B(A)\sim P^{-1}\underbrace{M_B(B)}_{P_B(B)=0}P\rightarrow M_B(A)=0$$

(3

$$f\left(A\right)=A^{2}+4A+3I$$

כעת מכיוון שידוע לנו פולינום מינימאלי של המטריצה אנו יודעים כי $\left(A-1\right)^{2}=0$

ולכן ננסה להכניס אותו לפונקציה

$$A^{2}+4A+3I=\overbrace{\underbrace{\left(A-1\right)^{2}}_{A^{2}-2A+I}}^{0}+6A+2I$$

כעת נניח בשלילה כי המטריצה **אינה** הפיכה זאת אומרת $\left|f\left(A\right)\right|=0$

ולכן $|6A+2I|=0\rightarrow 6|A+\frac{2}{6}I|=0\rightarrow \lambda=-\frac{2}{6}$

וזה בסתירה לכך שהפולינום המינימאלי מראה לנו כי הערך העצמי היחידי שיש לנו הוא $\lambda=1$

(4

נתון כי המטריצה אידמפוטנטית ולכן

$$\underbrace{A=A^{2}}_{A(A-I)}\rightarrow M_{A}\left(\lambda\right)=x\left(x-1\right)\rightarrow M_{A}(\lambda)=\left\{\lambda,(\lambda-1)\right\}$$

(5

נמצא תחילה את הפולינום האופייני

$$P_A(\lambda)=(\lambda I-A)=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&2&0&0&1\\0&0&2&0&1\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0&0&-2\\0&\lambda-2&0&0&-1\\0&0&\lambda-2&0&-1\\0&0&0&\lambda-3&-1\\0&0&0&0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|=$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0&0&-2\\0&\lambda-2&0&0&-1\\0&0&\lambda-2&0&-1\\0&0&0&\lambda-3&-1\\0&0&0&0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)*\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0&-1\\0&\lambda-2&0&-1\\0&0&\lambda-3&-1\\0&0&0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|=$$

$$(\lambda-1)*(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-3&-1\\0&0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)*(\lambda-2)*(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&-1\\0&\lambda-3\end{pmatrix}\right|$$

$$=(\lambda-1)*(\lambda-2)*(\lambda-2)*(\lambda-3)^2=(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$$

כעת ננסה להציב את המטריצה בפולינום ולקוות שקיבלנו 0

נתחיל ב

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\to M_A(A)=(A-I)(A-2I)(A-3I)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}}_{A-I}\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0&0&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}}_{A-2I}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&0&0&0&2\\0&-1&0&0&1\\0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{A-3I}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לא קיבלנו את מטריצת האפס ולכן נמשיך לנסיון אחר

$$(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)\to M_A(A)=(A-I)(A-2I)(A-3I)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}}_{A-I}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}}_{(A-2I)^2}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&0&0&0&2\\0&-1&0&0&1\\0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{A-3I}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לא קיבלנו את מטריצת האפס ולכן נמשיך לנסיון אחר

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2 \to M_A(A)=(A-I)(A-2I)(A-3I)^2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}}_{A-I}\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0&0&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}}_{A-2I}\underbrace{\begin{pmatrix}4&0&0&0&-4\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{(A-3I)^2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו את מטריצת האפס ולכן זהו הפולינום המינימאלי.

6)

ניקח את הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2, x^3\}$

כעת נמצא את המטריצה המייצגת $[T]_B^B$ כאשר B הוא הבסיס הסטנדרטי.

$$[T]_B^B = \left([T(1)]_B \ [T(x)]_B \ [T(x^2)]_B \ [T(x^3)]_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נמצא את הערכים העצמאיים של המטריצה

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = .$$

$$(\lambda-1) * \left| \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda-1) * \lambda * \left| \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda-1)\lambda^2 \rightarrow \lambda = 1, 0$$

נמצא את הוקטור העצמי של ה $\lambda = 0$

$$N(A - \lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \overset{a}{1} & \overset{b}{1} & \overset{c}{0} & \overset{d}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow a = t, \ \overbrace{d = 0}^{3d=0 \rightarrow d=0}, \ \overbrace{c = 0}^{2c=0 \rightarrow c=0}, \ \overbrace{b = -t}^{t+b=0 \rightarrow b=-t} \rightarrow sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ הוא 1 מכיוון שמימד המרחב הוא 1

נמצא את הוקטור העצמי של ה $\lambda = 1$

$$N(A - \lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \overset{a}{0} & \overset{b}{1} & \overset{c}{0} & \overset{d}{0} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow a = t, \ \overbrace{d = 0}^{-d=0 \rightarrow d=0}, \ \overbrace{c = 0}^{-c+3(0)=0 \rightarrow c=0}, \ \overbrace{b = 0}^{-b+2(0)=0 \rightarrow b=0} \rightarrow sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 1$ הוא 1 מכיוון שמימד המרחב הוא 1 , סכום הריבויים הגיאומטריים קטן מ n ולכן המטריצה אינה לכסינה