

## תרגיל 2

חשוביות וסיבוכיות תשע"ט

להגשה עד לתאריך 28.4.19

הנחיות להגשה:

- יש להגיש את פתרון התרגיל לתאים 16 או 27 (שימו לב שכתוב על התאים "חשוביות סיבוכיות").
- יש לשלוח עותק גיבוי של הפתרון לכתובת הדואר האלקטרוני complexitybiu19@gmail.com.
- על כל סטודנט לכתוב את הפתרון בעצמו ובמילותיו שלו. חל איסור מוחלט להעזר בפתרון כתוב של סטודנט אחר.

**שאלה 1.** נגדיר את בעיית ההכרעה הבאה:

$$S'_u = \{(M, x) \mid M(x, y) = 1 \text{ ש-} y \text{ וקיים}\}$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$S'_u \in \text{NPH} \quad (\text{א})$$

$$S'_u \in \text{NPC} \quad (\text{ב})$$

**שאלה 2.** בהנחה ש- $P \neq \text{NP}$ , הוכיחו או הפריכו כי הבעיות הבאות NP-שלמות:

$$\text{VCVIS} = \{(G, k) \mid \text{ב-} G \text{ קבוצה בגודל } k \text{ שהיא כיסוי קודקודים או בלתי תלויה}\} \quad (\text{א})$$

$$\text{VCAIS} = \{(G, k) \mid \text{ב-} G \text{ קבוצה בגודל } k \text{ שהיא כיסוי קודקודים וגם בלתי תלויה}\} \quad (\text{ב})$$

$$\text{VC}\wedge\frac{1}{2}\text{IS} = \{(G, k) \mid \text{ב-} G \text{ קבוצה בגודל } k \text{ שהיא כיסוי קודקודים וגם חצי בלתי תלויה}\} \quad (\text{ג})$$

כאשר קבוצת קודקודים  $S$  נקראת "חצי בלתי תלויה" אם כמות הקשתות ששני הקצוות שלהם בקבוצה היא לכל היותר חצי מהקשתות בגרף. כלומר,

$$|\{\{u, v\} \in E \mid u \in S \wedge v \in S\}| \leq \frac{|E|}{2}$$

**שאלה 3.** בהנחה ש- $P \neq \text{NP}$ , הוכיחו או הפריכו כי הבעיות הבאות NP-שלמות:

$$\text{Subset+1-Sum} = \left\{ (A, b) \mid \begin{array}{l} \text{רבי-קבוצה של מספרים טבעיים, } b \text{ מספר טבעי וקיים} \\ \text{איבר } a \in A \text{ כך ש-} (A \cup \{a\}, b) \in \text{Subset-Sum} \end{array} \right\} \quad (\text{א})$$

$$\text{1.5-Partition} = \left\{ A \mid \begin{array}{l} \text{רבי-קבוצה של מספרים טבעיים, וקיימת רבי-קבוצה } B \subseteq A \\ \text{בגודל לכל היותר } |A|/2 \text{ כך ש-} A \cup B \in \text{Partition} \end{array} \right\} \quad (\text{ב})$$

**שאלה 4.** נגדיר את בעית "סיום התואר תוך שלוש שנים" באופן הבא: בהנתן רשימת קורסים  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , כאשר לכל קורס  $c_i \in C$  נתונה רשימה  $R_i \subset C$  של קורסי קדם הנדרשים עבורו, ונתונה כמות מקסימלית של קורסים בכל שנה  $m_1, m_2, m_3$ , צריך להכריע האם ניתן לסיים את התואר תוך שלוש שנים. כלומר, האם ניתן לחלק את הקורסים לשלוש שנים  $Y_1, Y_2, Y_3 \subseteq C$  כך שכל התנאים הבאים מתקיימים:

(1) כל הקורסים נלמדים בתוך שלוש שנים. כלומר,  $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = C$ .

(2) כל קורס נלמד רק לאחר שכל קורסי הקדם שלו כבר נלמדו. כלומר, לכל  $c_i \in Y_1$  מתקיים  $R_i \subseteq Y_1$ , לכל  $c_i \in Y_2$  מתקיים  $R_i \subseteq Y_1 \cup Y_2$ , ולכל  $c_i \in Y_3$  מתקיים  $R_i \subseteq Y_1 \cup Y_2$ .

(3) מספר הקורסים בכל שנה לא חורג מהמספר המקסימלי. כלומר, לכל  $i \in \{1, 2, 3\}$  לכל  $|Y_i| \leq m_i$ .

הוכיחו כי בעית סיום התואר תוך שלוש שנים היא NP-שלמה.

**בהצלחה!**