

תרגיל 3

חישוביות וסיבוכיות תשע"ט

להגשה עד לתאריך 20.5.19

הנחיות להגשה:

- יש להגיש את פתרון התרגיל לתאים 16 או 27 (שימו לב שכתוב על התאים "חישוביות סיבוכיות").
- יש לשלוח עותק גיבוי של הפתרון לכתובת הדואר האלקטרוני complexitybiu19@gmail.com.
- על כל סטודנט לכתוב את הפתרון בעצמו ובמילותיו שלו. חל איסור מוחלט להעזר בפתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1. תהינה $S_1, S_2 \in \text{NPC}$, ותהי $S_3 \in \text{P}$ כך ש- $S_1 \subseteq S_3$ ו- $S_2 \subseteq \overline{S_3}$. בהנחה ש- $\text{P} \neq \text{NP}$, הוכיחו או הפריכו כי $S_1 \cup S_2 \in \text{NPC}$.

שאלה 2. בהנחה ש- $\text{P} \neq \text{NP} \cap \text{coNP}$, הוכיחו כי קיימות שתי בעיות חיפוש $R_1, R_2 \in \text{PC}$ בעלות אותה בעית הכרעה מתאימה (כלומר, $S_{R_1} = S_{R_2}$) כך של- R_1 קיימת רדוקציה עצמית ול- R_2 לא קיימת רדוקציה עצמית.

שאלה 3. נאמר כי בעית הכרעה S היא coNP -קשה אם לכל $S' \in \text{coNP}$ קיימת רדוקציה קארפ מ- S' ל- S . נאמר כי S היא coNP -שלמה אם S היא coNP -קשה וגם $S \in \text{coNP}$.

נאמר כי נוסחה בוליאנית ϕ היא תמיד ספיקה אם כל השמת אמת מספקת אותה (כלומר, לכל השמה למשתנים של ϕ ערך הנוסחה הוא אמת).

הוכיחו כי בעית ההכרעה הבאה היא coNP -שלמה:

$$\text{AlwaysSAT} = \{\phi \mid \phi \text{ בוליאנית שהיא תמיד ספיקה}\}$$

שאלה 4. נגדיר "רדוקציה קארפ חלשה" באופן הבא: תהינה $S, S' \subseteq \{0, 1\}^*$ שתי בעיות הכרעה. רדוקציה קארפ חלשה מ- S' ל- S הינה פונקציה $f : \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* \cup \{\perp\}$ הניתנת לחישוב בזמן פולינומי ומקיימת את התנאים הבאים:

$$(1) \text{ קיים פולינום } p \text{ כך שלכל } x \in \{0, 1\}^* \text{ קיים } y \in \{0, 1\}^* \text{ כזה ש-} |y| \leq p(|x|), \text{ ו-} f(x, y) \neq \perp.$$

$$(2) \text{ לכל } x, y \in \{0, 1\}^* \text{ כך ש-} f(x, y) \neq \perp \text{ מתקיים } x \in S' \iff f(x, y) \in S.$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו או הראו שקילות לבעיה פתוחה:

- אם קיימת רדוקציה קארפ מ- S' ל- S אז קיימת רדוקציה קארפ חלשה מ- S' ל- S .
- קיימת $S \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ כך שלכל $S' \in \text{NP}$ קיימת רדוקציה קארפ חלשה מ- S' ל- S .
- קיימת $S \in \text{P}$ כך שלכל $S' \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ קיימת רדוקציה קארפ חלשה מ- S' ל- S .

בהצלחה!