שם: עמרי צור

ת.ז: 206575854

מספר שיעורי בית: 5

מספר תרגול: 89133-07

אינפי 2 – תרגיל 5

א)

$$\int_0^{0.5} \arccos x \, dx$$

תחילה נמצא את הפונקציה הקדומה של האינטגרל ע"י אינטגרציה בחלקים

נחשב את f', g $\underbrace{\arccos x}_{f} \underbrace{}_{g'=1}$

$$f' = (\arccos x)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g = \int 1 = x$$

כעת נציב בנוסחה $f*g - \int f'*g$

$$\arccos x * x - \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה נבחר את $t = x^2 - 1$

ולכן $dt = 2x\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt$

$$= x*\arccos x - \int -\frac{x}{\sqrt{t}} * \frac{1}{2x} dt = x*\arccos x + \int \frac{1}{2\sqrt{t}} = x*ar\cos x - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{0.5}$$

כעת נציב את נקודות הקטע ונקבל

$$\underbrace{\underbrace{0.5*ar\cos(0.5)}_{0.5235} - \underbrace{\sqrt{1-0.5^2}}_{0.866}}_{-0.3424} - \underbrace{\left[\underbrace{0*ar\cos(0)}_{0} - \underbrace{\sqrt{1-0^2}}_{1}\right]}_{-1} = 0.6576$$

ב)

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|$$

נפצל למקרים מ0 עד $\frac{\pi}{4}$ (הפונקציה שלילית) מ $\frac{\pi}{4}$ עד π (הפונקציה חיובית) – על מנת שלא השטח

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x - \cos x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x - \cos x = -\cos x - \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left[-\cos(0) - \sin(0)\right] + \left[-\cos(\pi) - \sin(\pi) - \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right] = 2\sqrt{2}$$

ג)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3}\,dx$$

נשתמש בהצבה האוניברסאלית - $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ כפי שמצאנו בכיתה

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

ולכן נציב את מה שמצאנו באינטגרל ונקבל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} * \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+t^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3\right)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\underbrace{1-t^2+4t+3+3t^2}_{2t^2+4t+4}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2+2t+2} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\underbrace{\arctan\left(\underbrace{\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)}_{1}+1\right)}_{1.107} - \left[\underbrace{\arctan\left(\underbrace{\tan\left(\frac{0}{2}\right)}_{0}+1\right)}_{\frac{\pi}{4}}\right] = 0.3216$$

(2

נשתמש באינטגרציה בחלקים

$\underbrace{f(x)}_{f}\underbrace{\cos(nx)}_{g'}$ נחשב את f', g

$$f' = f(x)'$$

$$g = \int \cos(nx) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

כעת נציב בנוסחה $f * g - \int f' * g$

$$\lim_{n\to 0} \frac{f(x)*\sin(nx)}{n} - \int_0^{2\pi} f(x)*\frac{\sin(nx)}{n}dx = \lim_{n\to 0}\frac{f(x)*\sin(nx)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x)'\sin(nx)dx$$

החלק הראשון סופי כי הפונקציה רציפה והיא מכופלת במספר מוגבל ($\sin$)

החלק של האינטגרל סופי מאותן סיבות,

את 2 החלקים אנו מחלקים במספר אינסופי ולכן 2 החלקים = 0 כמו שהיינו צריכים להוכיח

3)

נשווה את הפונקציות על מנת להביע את a

$$e^x = ax \rightarrow a = \frac{e^x}{x}$$

אנו יודעים כי השיפוע של המשיק לפונקציה לכן נשווה את השיפועים

$$e^x = \frac{e^x}{x} \rightarrow x = 1$$

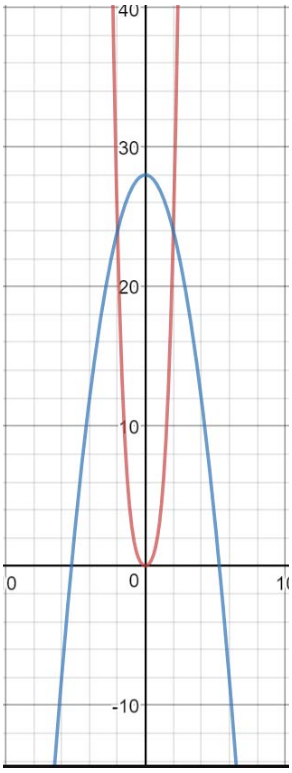
על מנת למצוא את הנקודה נציב במשוואה

$$(1, e)\ y = e^x \rightarrow y = e$$

נחשב קודם את השטח שנחסיר והוא $\int_0^1 ax = \frac{ax^2}{2} |_0^1 = \frac{e^1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{e}{2}$

לאחר מכן נמצא את השטח בין הגרף למשיק $\int_0^1 e^x = e^x |_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

ולכן השטח הסופי יהיה $e - 1 - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1$



(4

נמצא את נקודות החיתוך של הגרפים

$$x^4+2x^2=28-x^2\rightarrow x^4+3x^2-28=0$$

$$t=x^2,t^2+3t-28=0\rightarrow\frac{-3\pm\sqrt{9-4*1*-28}}{2}=\frac{-3\pm11}{2}$$

$$t=-7\rightarrow\otimes$$

$$t=4\rightarrow x=\pm2$$

נסתכל על הגרפים ונראה כי $g(x)$ מעל $f(x)$ ולכן נבצע את האינטגרל הבא

$$\int_{-2}^{2}28-x^2-\left[\int_{-2}^{2}x^4+2x^2\right]=28x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}-\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right]=$$

$$28*2-\frac{2^3}{3}-\left[28*-2-\frac{(-2)^3}{3}\right]-\left[\frac{2^5}{5}+\frac{2*2^3}{3}-\left[\frac{(-2)^5}{5}+\frac{2*(-2)^3}{3}\right]\right]=$$

$$56-\frac{8}{3}-\left[-56+\frac{8}{3}\right]-\left[\frac{32}{5}+\frac{16}{3}-\left[-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right]\right]=83.2$$

(5

נשתמש בנוסחה $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

ולכן ראשית נחשב את y'

$$y' = \left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$ כעת נציב בנוסחה

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{\underbrace{1}_{\frac{4-x^2}{4-x^2}} + \frac{x^2}{4-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\overbrace{4-x^2+x^2}^{4}}{4-x^2}}\,dx =$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{2}{\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{x^2}{4}}_{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}}\,dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{\sqrt{3}}$$

$$\underbrace{2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\frac{2\pi}{3}} - \left[\underbrace{2\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)}_{-\frac{\pi}{3}}\right] = \frac{2\pi}{3} - -\frac{\pi}{3} = \pi$$

6)

נשתמש בנוסחה $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

נמצא לפונקציה $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ את הנגזרת $y'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}*\left(e^x+e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}*\left(e^x-e^{-x}\right)$

כעת נציב בנוסחה :

$$\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{\underbrace{1}_{\frac{4}{4}}+\left(\frac{e^{2x}\overbrace{-2e^xe^{-x}}^{-2}+e^{-2x}}{4}\right)}dx=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2}{4}\right)}dx=$$

$$\int_a^b\sqrt{\left(\frac{e^{4x}+1+2e^{2x}}{4e^{2x}}\right)}dx=\int_a^b\sqrt{\underbrace{\left(\frac{e^{4x}+1+2e^{2x}}{4e^{2x}}\right)}_{\left(\frac{e^{2x}+1}{4e^{2x}}\right)^2}}dx=\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{2e^x}dx=\frac{1}{2}\int_a^b e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b e^x+e^{-x}dx=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\Big|_a^b\right]=\frac{1}{2}\left[e^b-e^{-b}-e^a+e^{-a}\right]$$

נמצא את השטח שכלוא בין העקום ציר x

$$\int_a^b\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\int_a^b e^x+e^{-x}=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\Big|_a^b\right]=\frac{1}{2}\left[e^b-e^{-b}-e^a+e^{-a}\right]$$

ניתן לראות כי השטחים יצאו זהים.