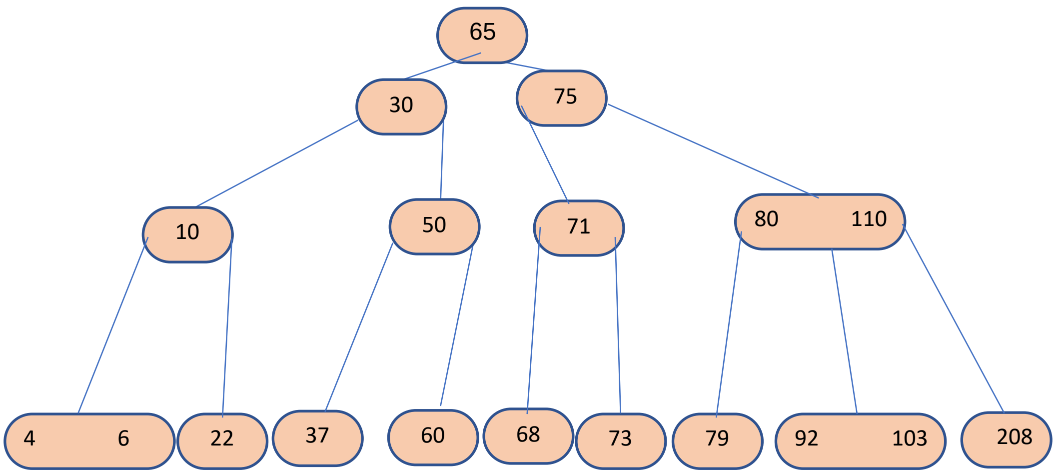
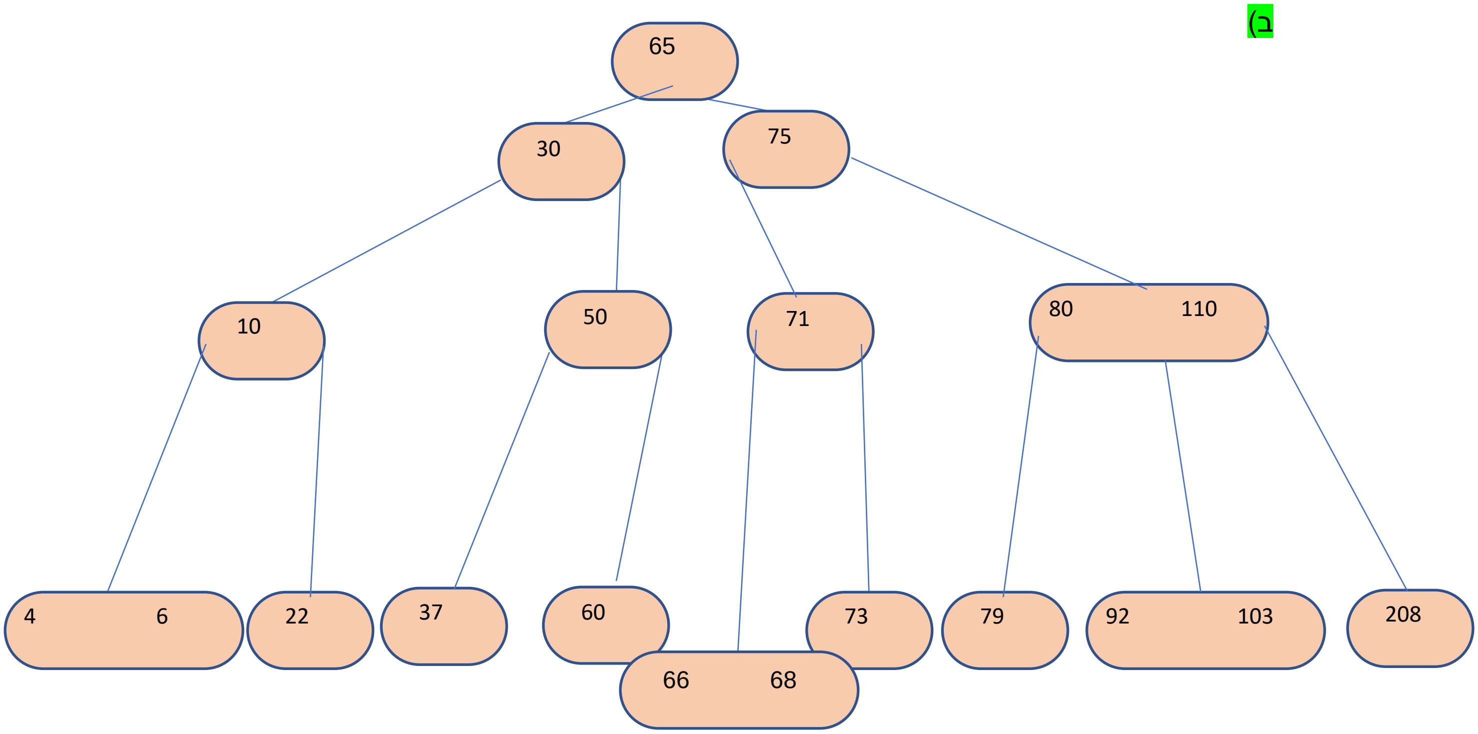
<u>מבנה נתונים – תרגיל 5</u>

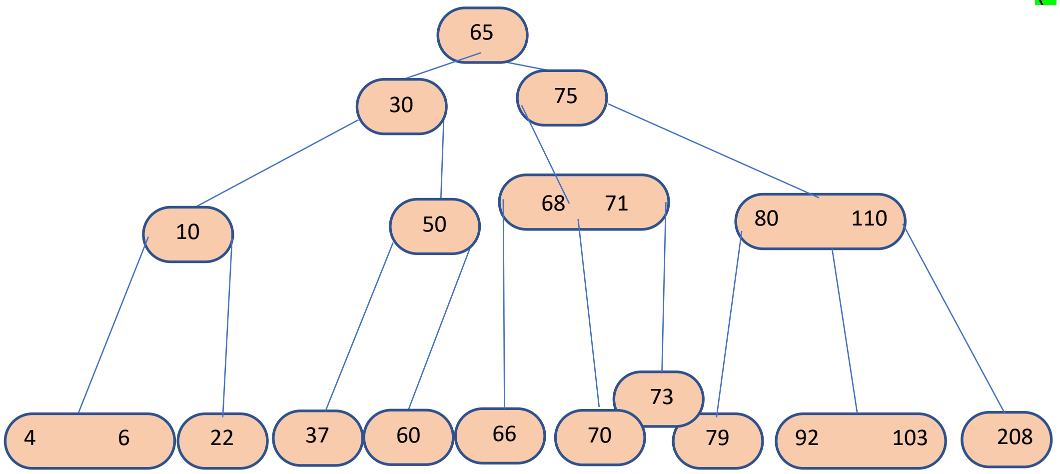
1)א)



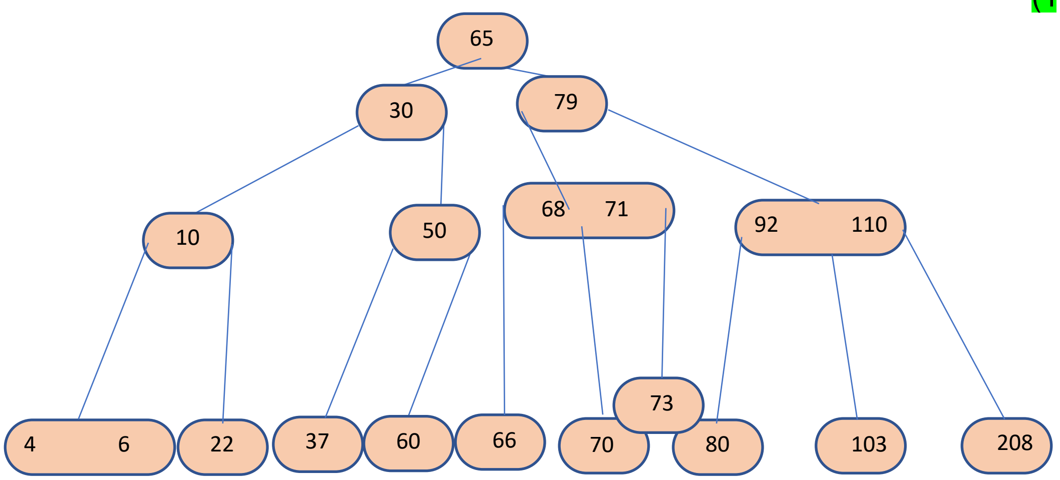
ב)



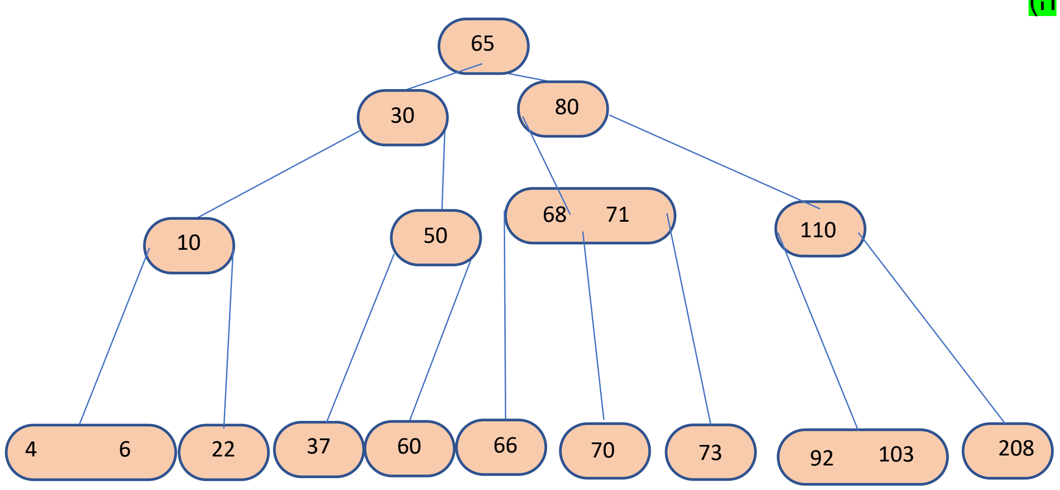
ג)


65
30
75
10
50
68 71
80 110
73
4 6
22
37
60
66
70
79
92 103
208

ד)


65
30
79
10
50
68 71
92 110
73
4 6
22
37
60
66
70
80
103
208

ה)


65
30
80
10
50
68 71
110
4 6
22
37
60
66
70
73
92 103
208

2)א)

ראשית נתון כי בהתחלה יש לנו מערך בגודל n שכולו מלא ולכן $\varnothing(D_0)=\underbrace{n}_{size}-\underbrace{n}_{num}=0$

בנוסף תמיד גודל המערך יהיה גדול (או שווה) למספר האיברים שבו ולכן עבור כל i אנו יודעים כי

$$size_i \ge num_i \to \underbrace{size_i - num_i}_{\varnothing(D_i)} \ge 0 \to \varnothing(D_i) \ge 0 \to \varnothing(D_i) \ge \underbrace{\varnothing(D_0)}_{0}$$

ב)

נשים לב כי הגדרנו את $\hat{c}_i$ להיות העלות האמיתית ועוד הפרש הפוטנציאלים בין המצב הקודם למצב העכשווי ($\hat{c}_i = c_i + \left(\varnothing(D_i)-\varnothing(D_{i-1})\right)$)

צ"ל כי לכל m מתקיים $\sum_{i=1}^{m}\hat{c}_i \ge \sum_{i=1}^{m}c_i$, נפתח את $\sum_{i=1}^{m}\hat{c}_i$

$\sum_{i=1}^{m}\hat{c}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(c_i+\varnothing(D_i)-\varnothing(D_{i-1})\right)$ - על פי ההגדרה

נוכל לחלק את הסכומים לשתיים

$\sum_{i=1}^{m}\left(c_i+\varnothing(D_i)-\varnothing(D_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{m}(c_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\varnothing(D_i)-\varnothing(D_{i-1})\right)}_{=\varnothing(D_i)-\varnothing(D_0)}$ - הפיתוח למטה נובע

מהטור הטלסקופי (האיברים מבטלים אחד את השני חוץ מהקצוות)

הוכחנו בסעיף הקודם כי עבור כל i $\varnothing(D_i)\ge\varnothing(D_0)$

ולכן $\sum_{i=1}^{m}\hat{c}_i = \sum_{i=1}^{m}(c_i) + \underbrace{\varnothing(D_i)-\varnothing(D_0)}_{+} \to \sum_{i=1}^{m}\hat{c}_i \ge \sum_{i=1}^{m}c_i$

ג)

נחלק ל2 מקרים

כאשר הוצאתי פחות מחצי מהאיברים וכאשר הוצאתי יותר מחצי איברים

i)כאשר הוצאנו פחות מחצי מהאיברים – הוצאנו מספר איברים בין $n-1$ לבין $\frac{n}{2}$

כעת נחשב את ההפרש – בפוטינציאל

$$\hat{c}_i = c_i + \varnothing(D_i) - \varnothing(D_{i-1}) = 1 + \underbrace{\left(\underbrace{size_i}_{size_{i-1}} - \underbrace{num_i}_{num_{i-1}-1} - \left[size_{i-1}-num_{i-1}\right]\right)}_{1} = 2$$

העלות האמיתית של הסרה היא 1

הגודל (size) ככל שi גדל אינו משתנה כי אמרנו שלא עברנו את פחות מחצי המערך ולכן לא שינינו את גודל המערך.

מספר האיברים (num) בו ככל שi גדל באחד כך מספר האיברים שיש במערך קטן באחד כי הוציאנו איבר.

ii)כעת במקרה שהוצאנו יותר מחצי מהאיברים והיינו צריכים להקטין את המערך – הוצאנו מספר איברים גדול מ $\frac{n}{2}$

נקבל כי העלות היא

$$\hat{c}_i = c_i + \varnothing\left(D_i\right) - \varnothing\left(D_{i-1}\right) = \frac{size(i-1)}{2} + 1 + \underbrace{\left(\underbrace{size_i}_{\frac{size_{i-1}}{2}} - \underbrace{num_i}_{num_{i-1}-1} - \left[size_{i-1} - num_{i-1}\right]\right)}_{\frac{size_{i-1}}{2} - num_{i-1} + 1 - size_{i-1} + num_{i-1}} = \frac{size_{i-1}}{2} + 1 + \left(1 - \frac{size_{i-1}}{2}\right) = 2$$

העלות האמיתית היא עבור העברת $\frac{size\left(i-1\right)}{2}$ איברים למערך החדש ובנוסף בניית המערך החדש שזה 1.

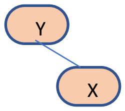
הגודל (size) – לאחר מחיקת האיבר שהיווה את החצי הקטנו את המערך בחצי ולכן גם הגודל קטן בחצי $\frac{size\left(i-1\right)}{2}$

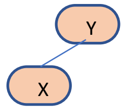
מספר האיברים (num) כמו מקודם - מספר האיברים (num) בi ככל שi גדל באחד כך מספר האיברים שיש במערך קטן באחד כי הוציאנו איבר.

ולכן בסה"כ העלות ללא קשר לחצי איברים או לא היא 2

3)א)

לא תמיד, נראה אפשרות שאכן הדבר קורה ונראה גם אפשרות שהדבר לא קורה -
קורה – במקרה זה – x הוא אכן בנו הימני של y ואכן ההדפסה היא xy
לא קורה – במקרה זה x **אינו** בנו הימני של y ואכן ההדפסה היא xy



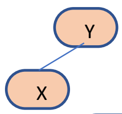


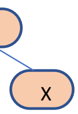
ב)

אף פעם, מכיוון שאם x יהיה ההורה של y בהכרח לפי post-order ההדפסה של y תהיה לפני x וזה בניגוד לכך שy מופיע מיד לאחר x

ג)

לא תמיד, ניעזר בדוגמאות של סעיף א ונראה שלפעמים הדבר קורה ולפעמים לא
קורה – במקרה זה – x הוא כן בו השמאלי של y ואכן ההדפסה היא xy
לא קורה – במקרה זה – x **אינו** בנו השמאלי של y ואכן ההדפסה היא xy





ד)

אף פעם, מכיוון שאם x הוא צאצא של y אזי בעת ההדפסה ב post-order
נדפיס תחילה את x ולאחר מכן לפני שנגיע ל y נהיה חייבים לעבור באבא של x ולהדפיס אותו
מכיוון ש y לא יכול להיות האבא של x אזי בין ההדפסה של x לבין ההדפסה של y נדפיס איבר כלשהו
וזה לא לפי המבוקש בשאלה.

ה)

אף פעם, מכיוון שאם y הינו צאצא של x בהכרח ההדפסה של y תתקיים לפני ההדפסה של x (מכיוון שההדפסה של חלק שמאל וחלק ימין של העץ תתבצע לפני ההדפסה של השורש) וזה בניגוד למבוקש בשאלה

4)א)

נתחיל לולאה מ $k-1$ עד 0 נשמור את הריצה ב i וכל ריצה נפחית את i באחד

ראשית אם $b_i = 0$ נדלג לריצה הבאה

אם $b_i = 1$ נבדוק שהמספר בטווח של המערך (כי הוא ממוין) אם כן נבצע בו חיפוש בינארי.

אם מצאנו – סיימנו

אחרת – הרץ שוב את הלולאה

כעת ננסה להבין מה המקרה הגרוע ביותר -

כאשר כל ה $b_i = 1$ (כל המערכים מלאים)

בנוסף עבור כל i יתקיים - $A_i[0] < x < A_i[1] \vee A_i\left[2^i - 1\right] < x < A_i\left[2^i\right]$

ודבר אחרון – x לא נמצא במערכים.

ננסה למצוא את החסם ההדוק -

יהיו לנו $k-1$ חיפושים בינאריים במערכים, עבור כל חיפוש זמן ריצת החיפוש יהיה $\log\left(2^i\right)$

לכן בסה"כ זה יהיה $\sum_{i=1}^{k} \log\left(2^i\right)$ נפתח את הביטוי

$$\sum_{i=1}^{k} \log\left(2^i\right) = \sum_{i=1}^{k} i * \underbrace{\log(2)}_{1} = \sum_{i=1}^{k} i \underbrace{=}_{Geometric} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2} \to \Theta\left(\underbrace{k}_{\log n}{}^2\right) = \Theta\left(\log^2 n\right)$$

ב)

נתחיל לולאה מ 0 עד $k-1$ נשמור את הריצה ב i וכל ריצה נגדיל את i באחד

ראשית אם $b_0 = 0$ נכניס את האיבר החדש ל A_0 וסיימנו

אחרת, נמשיך לעבור בלולאה עד שנמצא $b_i = 0$

ברגע שמצאנו נעביר את כל האיברים מ $A_0 - A_{i-1}$ אל המערך A_i ונכניס אליו גם את המספר שקיבלנו

(לא לשכוח לעדכן את $b_0 - b_{i-1}$ שיהיו שווים ל0) – מיזוג*

אם עברנו על כל $b_0 - b_{k-1}$ ולא מצאנו מערך פנוי נפתח מערך חדש A_k ונתייחס אליו כמו שהתייחסנו אל המערכים הקודמים.

כעת ננסה להבין מה המקרה הגרוע ביותר -

כאשר כל ה $b_i = 1$

ולכן כל בדיקות המערכים (אם מערך ריק או מלא) יהיו $o\left(\underbrace{k-1}_{\log n}\right)$

העברת כל האיברים למערך החדש ומיזוגם (ניתן רק למזג כי כל המערכים ממוינים) - $o(n)$

המיזוג יתבצע ע"י בניית מערך חדש, השמת פוינטרים לתחילת כל אחד מ2 המערכים העבר הערך הקטן מבין 2 הפוינטרים למערך וקידום אותו הפוינטר ובסה"כ זהו o של גודל של 2 המערכים. לכן יצא מצב שנמזג את המערך בגודל 1 עם מערך בגודל 2 ונקבל מערך בגודל 3, אותו נמזג עם מערך בגודל 4 (כל פעם נמזג את גודל הקודמים + הגודל של המערך הגדול בסדרה)
ניתן להוכיח בקלות כי סכום גדלי המערכים עד מערך בגודל X מסויים קטן מ 2X.
כל המערכים ביחד שלנו הם בסה"כ בעלי n איברים ולכן בסה"כ $O\left(2n\right)=O\left(n\right)$

ולכן סה"כ מקרה הריצה הגרועה יהיה $o\left(n\right)$

כעת נחשב את העלות לשיעורין -

נשתמש בשיטת החיובים,

עיקרון -
עבור כל הכנסה נשלם עבור ההכנסה ובנוסף לפי גודל המערך שאליו אנחנו מכניסים
נגיד וכרגע המערך בגודל 1 פנוי, נשלם 1 עבור ההכנסה ועוד 1 עבור העברה העתידית.
עבור מערך בגודל 2 פנוי, נשלם 1 עבור ההכנסה ועוד 2 עבור העברה העתידית וכך הלאה.

כעת נעבור לחישוב עלות של סדרה של n הכנסות –

לשם הנוחות נניח כי ניתן לבטא $n=2^t$

נשים לב כעת כי את המערך בגודל n נמלא פעם אחת עבור כל האיברים וכך גם את המערך בגודל $\frac{n}{2}$

ואת שאר המערכים הקטנים יותר $\left(\frac{n}{4},\frac{n}{8}...\right)$ נצטרך למלא מספר פעמים, לדוגמה עבור מערך בגודל $\frac{n}{4}$

נצטרך למלא פעם אחת עובר מילוי המערך $\frac{n}{2}$ ופעם אחת עובר מילוי המערך n

ולכן באופן כללי עבור מערך בגודל $\frac{n}{2^i}$ נמלא את המערך 2^{i-1} פעמים

ולכן נקבל את הסדרה הבאה –

$$\underbrace{n}_{c_i}+n+\sum_{i=1}^{\log\frac{n}{2}}\overbrace{\underbrace{2^{i-1}}_{\text{number of fills}}*\underbrace{\frac{n}{2^i}}_{\text{size of array}}}^{=\frac{n}{2}}=2n+\sum_{i=1}^{\log\frac{n}{2}}\frac{n}{2}=2n+\frac{n}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{\log\frac{n}{2}}1}_{\log\frac{n}{2}}=2n+\frac{n}{2}*\log\frac{n}{2}$$

כעת נחלק את סה"כ התשלום בn פעולות ונקבל –

$$\frac{2n+\frac{n}{2}*\log\frac{n}{2}}{n}=\frac{n\left(2+\frac{1}{2}*\log\frac{n}{2}\right)}{n}=2+\frac{1}{2}*\log\frac{n}{2}\rightarrow O\left(\overbrace{\log\frac{n}{2}}^{\log\frac{n}{2}=\log n-\log 2}\right)\rightarrow O(\log n)$$

לכן עלות השיעורין של הכנסה היא $O(\log n)$.