בדידה 2 – תרגיל 4

1)א)

נוכיח כי עוצמת הקבוצה היא $\aleph_0$ -

צד ראשון -

נבנה פונקציה חח"ע כך ש - $f:\mathbb{N}\to G$ המוגדרת כך $f(a)=\mathbb{N}/\{a\}$

נראה שהפונקציה היא חח"ע בעזרת כך $f(a)=f(b)\to a=b$

מכיוון ש $\underbrace{\mathbb{N}/\{a\}}_{f(a)}=\underbrace{\mathbb{N}/\{b\}}_{f(b)}$ על מנת שהשיוויון יהיה שווה חובה על ה $a=b$ מכיוון שרק חיסור של מספר שווה מ2 קבוצות שוות יקיים את השיוויון.

צד שני -

ניקח את הקבוצה $\mathbb{N}^*=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^i$ כך שהקבוצה מכילה את כל תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$

מכיוון שזהו איחוד קבוצות בנות מנייה ומספר הקבוצות הוא בן בנייה אזי כלל האיחוד הוא בן מנייה ולכן $\mathbb{N}^*=\aleph_0$

כעת נבנה פונקציה דומה $F:G\to C$ כך ש $F\left(\mathbb{N}\setminus\left\{\underbrace{x_1,x_2...x_n}_{finite}\right\}\right)=(x_1,x_2...x_n)$

אנו מקבלים קבוצה כלשהי של G (המספרים הטבעיים בלי חלק מהמספרים ומחזירים את המספרים החסרים.

ברגע שנוכיח שהיא חח"ע נקבל מצב בו $\mathbb{N}^*\ge G\wedge G\ge\mathbb{N}\to G=\mathbb{N}\to G=\aleph_0$

נראה שהפונקציה היא חח"ע בעזרת כך $F(X_1)=F(X_2)\to X_1=X_2$

מכיוון ש $\underbrace{(x_1,x_2....x_n)}_{F(X_1)}=\underbrace{(x_1,x_2...x_n)}_{F(X_2)}$

על מנת ליצור את אותה קבוצה אנו צריכים לקחת את קבוצת המספרים הטבעיים ולהחסיר מהם את אותם מספרים ולכן הקבוצה $X_1=X_2$

הוכחנו שהפונקציה היא חח"ע ולכן $\mathbb{N}^*\ge G\wedge G\ge\mathbb{N}\to G=\mathbb{N}\to G=\aleph_0$ מתקיים

ב)

ידוע לנו שעוצמת תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$ ($A=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\}$ האינסופיות היא $|A|=\aleph_1$

בנוסף מסעיף קודם הראנו כי $B=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\wedge|\overline{X}<\aleph_0\}$ $|B|=\aleph_0$

ולפי הסעיף שלנו $F=\{X\subseteq\mathbb{N}:|X|=\aleph_0\wedge|\overline{X}|=\aleph_0\}$ ניתן לראות כי $A=F\cup B$

ולכן על מנת ש $\underbrace{A}_{\aleph_1}=F\cup\underbrace{B}_{\aleph_0}\to|F|=\aleph_1$

ג)

ניקח את הקבוצה $A=\forall_{n\in\mathbb{N}}18*n+1=\{1,19,37...18*n+1\}$ ולכן כל זוג מספרים שניקח חיסור ביניהן יוביל למספר שמתחלק ב18. $A\in L$

מכיוון ש A בנויה ממספרים ב $\mathbb{N}$ והיא בת מניה אזי $|A|=\aleph_0$

ולכן לפי ההדרכה בשאלה עוצמת תתי הקבוצות הסופיות של A הן $\aleph_1$

ולכן $|P(A)|=\aleph_1 \ \wedge \ P(A)\subseteq L \ \rightarrow |L|\geq\aleph_1$

מצד שני, ידוע לנו כי $L\subseteq \underbrace{P(\mathbb{N})}_{\aleph_1}\rightarrow |L|\leq\aleph_1$

ולכן לפי משפט ק.ש.ב נובע כי $|L|=\aleph_1$

2)א)

נבחר תחילה 6 אנשים מתוך 16 שישבו בשולחן הראשון $\binom{16}{6}$, לאחר מכן נסדר אותם בשולחן (אין חשיבות למיקום הראשון – שולחן עגול) - $5!$

לאחר מכן את האנשים הנותרים נסדר להושבה בשולחן השני (אין חשיבות למיקום הראשון – השולחן עגול) - $9!$

ולכן לסיכום $9!*5!*\binom{16}{6}$

ב)

ננסה לזהות את השינוי מהסעיף הקודם ונשים לב כי הושבת האנשים בשולחן השני היא ספסל ולא שולחן עגול ולכן תהיה קיימת חשיבות להושבת האדם הראשון, לכן במקום $9!$ האפשרויות יהיו $10!$

ובסה"כ $10!*5!*\binom{16}{6}$

ג)

אין חשיבות לסדר ואין חזרות

נבחר ראשית את קבוצת האנשים שיקבלו את כובע הליצן והם יהיו - $\binom{30}{7}$ לאחר מכן ניקח את הנותרים

ונבחר מתוכם את האנשים שיקבלו את מצנפות השינה - $\binom{23}{18}$ לנותרים נחלק את הסומבררוס

ולסיכום $\binom{23}{18}*\binom{30}{7}$

ד)

נשים לב כי יש חשיבות לסדר וקיימות חזרות

נתחיל עם הספרות – קיימות 10 אופציות נצטרך לבחור 6 (לפי מה שנאמר תחילה) ולכן זה יהיה - 10^6

לאחר מכן נוסיף את האותיות – קיימות 52 אופציות נצטרך לבחור 12 (לפי מה שנאמר תחילה) ולכן זה יהיה - 52^{12}

בנוסף נרצה לבחור את המיקומים של הספרות בתוך הסיסמה (מספר הספרות – 6, אורך הסיסמה 18)

ולכן נקבל $\binom{18}{6}$ ולסיכום $\binom{18}{6}*10^6*52^{12}$

3)

נשים לב כי יחס סדר מלא הינו סימטרי,רפלקסיבי, וטרנזיטיבי.

מכיוון שהיחס הינו רפלקסיבי הוא מכיל (a,a) לכל $a\in A$ ולכן יש לנו מהרפלקסיביות n איברים.

נוסף על כך מכיוון שהיחס הינו אנטי-סימטרי הוא מכיל $(a,b) or (b,a)$ לכל $a\neq b\in A$ על מנת לחשב את מספר האופציות נצטרך לבצע בחירה של 2 איברים מתוך כל איברי A שזה $\binom{n}{2}$

מכיוון שהיחס הינו טרנזטיבי – אין תוספת זוגות סדורים מכיוון שהם כבר מוכלים בזוגות של רפלקסיביות וסימטריות.

ולכן בסה"כ יש לנו $n+\binom{n}{2}$ איברים ביחס סדר מלא

4)א)

נשים לב שעל מנת לקבל סכום זוגי אנו צריכים או 2 מספרים זוגיים או 2 מספרים שליליים

ולכן נחלק את 100 ב 2 עבור כל קבוצה, ומכל קבוצה נוכל לבחור 2 מספרים ללא חשיבות לסדר ועם חזרות ולכן זה יהיה $\binom{50}{2}$ הבחירה מתבצעת או מהזוגיים או מהאי-זוגיים ולכן יש לנו 2 אופציות

בסה"כ יש לנו $2*\binom{50}{2}$

ב)

נשים לב שעל מנת לקבל סכום זוגי מ3 מספרים אנו צריכים או 3 מספרים זוגיים או 2 מספרים אי-זוגיים ומספר אחד זוגי. מכיוון שזה או נחבר בין 2 האפשרויות.

נחשב את מספר האפשרויות עבור 3 מספרים זוגיים מבין 50 אפשריים (ללא חשיבות סדר וחזרות)

$\binom{50}{3}$

כעת נחשב את מספר האפשרויות עבור 2 מספרים אי-זוגיים ומספר זוגי אחד

$\binom{50}{2}*50$

ולכן בסה"כ זה $\binom{50}{3}+\binom{50}{2}*50$