א) **לא להגשה**

$$v_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

נוכיח כי $T\left(v_1+av_2\right)=T\left(v_1\right)+aT\left(v_2\right)$

נחשב את זה:

$:T\left(v_1+av_2\right)$

$$T\left(v_1+av_2\right)=T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ax_2\\ay_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+ax_2\\y_1+ay_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(x_1+ax_2\right)*\left(y_1+ay_2\right)\\\left(x_1+ax_2\right)^2\end{pmatrix}$$

נחשב את $:T\left(v_1\right)+aT\left(v_2\right)$

$$_1\big)+aT\left(v_2\right)=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+aT\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1*y_1\\x_1^{\ 2}\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}x_2*y_2\\x_2^{\ 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1*y_1\\x_1^{\ 2}\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}a\left(x_2*y_2\right)\\x_2^{\ 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(x_1*y_1\right)+\left(ax_2*y_2\right)\\x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}\end{pmatrix}$$

כבר כעת ניתן לראות כי $x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}\neq\left(x_1+ax_2\right)^2$

ב)לא להגשה

$$v_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

נוכיח כי $T\left(v_1+av_2\right)=T\left(v_1\right)+aT\left(v_2\right)$

נחשב את זה:

$:T\left(v_1+av_2\right)$

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ax_2\\ay_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+ax_2\\y_1+ay_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\left(x_1+ax_2\right)\\\cos\left(y_1+ay_2\right)\end{pmatrix}$$

נחשב את $:T\left(v_1\right)+aT\left(v_2\right)$

$$T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+aT\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\left(x_1\right)\\\cos\left(y_1\right)\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\sin\left(x_2\right)\\\cos\left(y_2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\left(x_1\right)+a\sin\left(x_2\right)\\\cos\left(y_1\right)+a\cos\left(y_2\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sin\left(x_1\right)+a\sin\left(x_2\right)\\\cos\left(y_1\right)+a\cos\left(y_2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\left(x_1+ax_2\right)\\\cos\left(y_1+ay_2\right)\end{pmatrix}$$

ג)

1)א)

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x-2z\\0\end{pmatrix}$$

ב)

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

לפי משפט ההגדרה נבדוק האם הווקטורים v_1,v_2,v_3 הם בסיס ל $\Re_3$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&4\\3&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מצאנו כי v_3 הוא צירוף לינארי של $v_3=3v_1-2v_2$

$$T(v_3)=3T(v_1)-2T(v_2)=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

בסתירה לנתון ש $T(v_3)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ ולכן לא קיימת העתקה לינארית כזאת.

2)

ניקח העתקה ספציפית ונראה כי היא העתקה לינארית ובנוסף הגרעין שלה הוא 0 ובכך היא חח"ע

$$T\left(a, bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

נראה כי T העתקה לינארית בכך ש:

$$v_1=\left(a_1+b_1x+c_1x^2\right), v_2=\left(a_2+b_2x+c_2x^2\right)$$

$$T\left(v_1+av_2\right)=T\left(v_1\right)+aT\left(v_2\right),$$

נחשב את $T\left(v_1+av_2\right)$:

$$T\left(v_1+\alpha v_2\right)=T\left(a_1+\alpha a_2, b_1x+\alpha b_2x, c_1x^2+\alpha c_2x^2\right)=\begin{pmatrix} a_1+\alpha a_2 \\ b_1+\alpha b_2 \\ c_1+\alpha c_2 \\ a_1+\alpha a_2 \end{pmatrix}$$

נחשב את $T\left(v_1\right)+aT\left(v_2\right)$:

$$T\left(v_1\right)+\alpha T\left(v_2\right)=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_1 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+\alpha a_2 \\ b_1+\alpha b_2 \\ c_1+\alpha c_2 \\ a_1+\alpha a_2 \end{pmatrix}$$

הראנו כי העתקה סגורה לחיבור וכפל בסקלר ולכן היא העתקה לינארית.

כאשר $a\neq 0 \vee b\neq 0 \vee c\neq 0$ אזי

$$T\left(v\right)=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix}\neq 0\rightarrow v\notin Ker\left(T\right)\rightarrow\left[v=0\leftrightarrow v\in Ker\left(T\right)\right]\rightarrow Ker\left(T\right)=\left\{0\right\}$$

הוכחנו שעבור $Ker\left(T\right)=\left\{0\right\}$ אזי ההעתקה לינארית היא חח"ע.

ולכן הראנו עבור העתקה לינארית מ $\mathbb{R}_2[x]\rightarrow\mathbb{R}^4$ שהיא חח"ע.

3א)

$$T(A) = trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

נוכיח כי $T(A+\alpha B) = T(A) + \alpha T(B)$

נחשב את $T(A+\alpha B)$:

$$.T(A+\alpha B) = T\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha b_{11} & a_{12}+\alpha b_{12} & \dots & a_{1n}+\alpha b_{1n} \\ a_{21}+\alpha b_{21} & a_{22}+\alpha b_{22} & \dots & a_{2n}+\alpha b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\alpha b_{n1} & a_{n2}+\alpha b_{n2} & \dots & a_{nn}+\alpha b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha b_{11} & a_{12}+\alpha b_{12} & \dots & a_{1n}+\alpha b_{1n} \\ a_{21}+\alpha b_{21} & a_{22}+\alpha b_{22} & \dots & a_{2n}+\alpha b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\alpha b_{n1} & a_{n2}+\alpha b_{n2} & \dots & a_{nn}+\alpha b_{nn} \end{pmatrix} = (a_{11}+\alpha b_{11}) + (a_{22}+\alpha b_{22}) \dots + (a_{nn}+\alpha b_{nn})$$

נחשב את $T(A) + \alpha T(B)$:

$$T(A) + \alpha T(B) = T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha T\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = [a_{11}+a_{22} \dots + a_{nn}] + \alpha[b_{11}+b_{22} \dots + b_{nn}]$$

$$[a_{11}+a_{22} \dots + a_{nn}] + \alpha[b_{11}+b_{22} \dots + b_{nn}] = [a_{11}+a_{22} \dots + a_{nn}] + [\alpha b_{11}+\alpha b_{22} \dots + \alpha b_{nn}]$$

$$[a_{11}+a_{22} \dots + a_{nn}] + [\alpha b_{11}+\alpha b_{22} \dots + \alpha b_{nn}] = (a_{11}+\alpha b_{11}) + (a_{22}+\alpha b_{22}) \dots + (a_{nn}+\alpha b_{nn})$$

והראנו כי העתקה סגורה לחיבור וכפל בסקלר ולכן היא העתקה ליניארית.

ב) ניקח בסיס ל $\mathbb{R}^{nxn}$ והוא יהיה $E_{ij} = \left(e_{ij} = 1 \wedge e_{xy} = 0 \mid x \neq i \vee y \neq j\right)$ במילים – המטריצה בה במיקום ה ij יש 1 וכל השאר אפסים.

כעט ננסה למצוא את המטריצות עבורן יתקיים ש $T(E_{ij}) = 0$

כאשר $i \neq j$ נוכל לראות כי $T(E_{ij}) = 0$ מכיוון שהאלכסון כולו 0ים, ולכן כאשר $i \neq j$ אזי $E_{ij} \in Ker(T)$

בנוסף כאשר $2 \le i \le n$ אזי גם $T\left(E_{ii} - E_{11}\right) = 0$ מכיוון שבאלכסון יהיו 2 איברים 1 במיקום ה ii ו -1 במיקום ה11 $\leftarrow$ ולכן כאשר $2 \le i \le n$ אזי $E_{ii} - E_{11} \in Ker\left(T\right)$

ולכן הבסיס לגרעין יהיה $B_{Ker(T)} = \left\{E_{ij} \mid i \ne j\right\} \cup \left\{E_{ii} - E_{11} \mid 2 \le i \le n\right\}$

כעת על מנת להוכיח את הדברים נראה כי המימד ע"י חישוב במשפט המימדים שווה למימד הבסיס שמצאנו,
ע"י הוכחה קלה ניתן לראות כי T היא על מכיוון שלכל מספר ב $\mathbb{R}$ יש מקור ע"י מטריצה מסויימת ולכן

$$\dim \operatorname{Im}\left(T\right) = \dim \mathbb{R} = 1$$

ולכן באמצעות משפט המימדים נראה כי

$$\dim Ker\left(T\right) = \dim V - \dim \operatorname{Im}\left(T\right) = n^2 - 1$$

כעת נותר להראות כי המימד של הבסיס שמצאנו הוא $n^2 - 1$

$$B_{Ker(T)} = \underbrace{\left\{E_{ij} | i \ne j\right\}}_{\left(n^2 - n\right)} \underset{+}{\cup} \underbrace{\left\{E_{ii} - E_{11} | 2 \le i \le n\right\}}_{\left(n-1\right)}$$

החלק השמאלי של האיחוד שווה ל $n^2 - n$ מכיוון שזה אוסף כל המטריצות פחות המטריצות הסטנדרטיות שבהן האיבר הוא באלכסון וקיימות n מטריצות כאלו

החלק הימני של האיחוד שווה ל $n-1$ מכיוון שזה כל המטריצות הסטנדרטיות שבהן האיבר הוא באלכסון וקיימות n מטריצות כאלו פחות אחד מכיוון שלא ניתן לקחת את המטריצה E_{11} מכיוון ש $2 \le i$

נחבר בין שני הביטויים הללו מכיוון שזהו איחוד ונקבל $n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ שזהו גודל המימד המדויק שיצא לנו ע"י חישוב במשפט המימדים ולכן אנו יודעים כי אכן הבסיס שלנו שלם.

4)

המטריצה המייצגת של T היא $A_T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ הוקטורים של המטריצה בתל ולכן

$Rank(A)=3$ ולכן על פי מה למדנו $\dim(\mathrm{Im}(T))=3$ בנוסף על פי משפט הממדים

$$\dim(Ker(T))=\dim(V)-\dim(\mathrm{Im}(T))\to\dim(Ker(T))=3-3=0$$

מצאנו שבסיס הגרעין הוא 0 ולכן המטריצה חח"ע

ניקח בסיס סטנדרטי e_1,e_2,e_3 שהם בת"ל ולכן גם $T(e_1),T(e_2),T(e_3)$ בת"ל

ולכן $B_{\mathrm{Im}(T)}=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ לפי משפט חינם 3 פורשת את Im ולכן גם תהווה בסיס.

5)

לא נכון, הפרכה

ניקח $T,S:\Re^3\to\Re^3$ כך ש- $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},S\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{2}\\\frac{y}{2}\\\frac{z}{2}\end{pmatrix}$

שניהם העתקות ליניאריות וקל לראות כי $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(S)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

בנוסף עבור $x\neq0\vee y\neq0\vee z\neq0$ אזי $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq0$ וגם $\begin{pmatrix}\frac{x}{2}\\\frac{y}{2}\\\frac{2}{z}\end{pmatrix}\neq0$ ולכן $Ker(S)=Ker(T)=\{0\}$

לכן לפי המשפט בתרגיל $S=T$ אך,עבור לדוגמה $x=1,y=1,z=1$ נקבל

$$S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}\to S\neq T$$

6)

א)

יהי $v \in KerT$ כללי, אז $T(v)=0$ ולכן $T^2(0)=T(T(0))=T(0)=0$

ולכן $v \in KerT^2$ עבור v כללי ולכן $KerT \subseteq KerT^2$

ב)

יהי $v \in \operatorname{Im}(T^2)$ ולכן $v=T^2(u)=T(T(u))$ עבור $u \in V$ כלשהו ולכן נסמן את $w=T(u)$ ו

$w \in V$ לכן $v \in \operatorname{Im}(T)$ $T(w)=v \rightarrow$ ולכן $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$