לינארית 2 – תרגיל 6

1)

נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)*\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -a \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$\lambda = 1+\sqrt{a}$$

לכן הערכים העצמאיים של המטריצה הם $\lambda = 1, 1+\sqrt{a}, 1-\sqrt{a}$

כאשר $a<0$ המטריצה היא לא לכסינה כי אין לה הפולינום האופייני שלה לא יתחלק לגורמים לינאריים

כעת נבדוק מה הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי,

<u>עבור $\lambda=1$</u>

הריבוי האלגברי הינו החזקה ולכן הוא 1,

הריבוי הגיאומטרי הינו המרחב העצמי של λ_1 נמצא אותו

$$V_{\lambda=1} = N(A-\lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha & b & c & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to c=t,\ \overbrace{b=at}^{-b+at=0\to b=at},\ \overbrace{\alpha=-at}^{\alpha+at=0\to\alpha=-at} \to t\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \to sp\left\{\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(N(A-\lambda I)\right)=1$ ולכן הריבוי הגיאומטרי והריבוי האלגברי שווים.

עבור $\lambda=1+\sqrt{a}$

הריבוי האלגברי הינו החזקה ולכן הוא 1,
הריבוי הגיאומטרי הינו המרחב העצמי של $\lambda_{1+\sqrt{a}}$ נמצא אותו

$$V_{\lambda=1+\sqrt{a}}=N(A-\lambda I)=N\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&a\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+\sqrt{a}&0&0\\0&1+\sqrt{a}&0\\0&0&1+\sqrt{a}\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}-\sqrt{a}&0&0\\1&-\sqrt{a}&a\\1&1&-\sqrt{a}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{a}&0&0\\1&-\sqrt{a}&a\\1&1&-\sqrt{a}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sqrt{a}&0&0\\1&1&-\sqrt{a}\\0&1+\sqrt{a}&-\sqrt{a}-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sqrt{a}&0&0\\0&\sqrt{a}&-a\\0&1+\sqrt{a}&-\sqrt{a}-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-\sqrt{a}&0&0\\0&\sqrt{a}&-a\\0&1&-\sqrt{a}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sqrt{a}&0&0\\0&\sqrt{a}&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha & b & c \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-\sqrt{a}&0&0&0\\0&\sqrt{a}&-a&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to c=t,\quad \overbrace{b=t\frac{a}{\sqrt{a}}}^{b\sqrt{a}-at=0\to b=t\frac{a}{\sqrt{a}}}\quad,\quad \overbrace{\alpha=0}^{\alpha(-\sqrt{a})=0\to\alpha=0}\quad\to t\begin{pmatrix}0\\\frac{a}{\sqrt{a}}\\1\end{pmatrix}\to sp\left\{\begin{pmatrix}0\\\frac{a}{\sqrt{a}}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(N(A-\lambda I)\right)=1$ ולכן הריבוי הגיאומטרי והריבוי האלגברי שווים כאשר $a\neq 0$ מכיוון שאם
$a=0$ אזי $\frac{a}{\sqrt{a}}$ לא מוגדר

עבור $\lambda = 1-\sqrt{a}$

הריבוי האלגברי הינו החזקה ולכן הוא 1,
הריבוי הגיאומטרי הינו המרחב העצמי של $\lambda_{1-\sqrt{a}}$ נמצא אותו

$$V_{\lambda=1-\sqrt{a}} = N(A-\lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{a} \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{a} & a \\ 1 & 1 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{a} & a \\ 1 & 1 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{a} & a \\ 0 & 1-\sqrt{a} & \sqrt{a}-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 1-\sqrt{a} & \sqrt{a}-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & a \\ 0 & 1-\sqrt{a} & \sqrt{a}-a \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & a \\ 0 & 1 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\sqrt{a}}^{\alpha} & \overbrace{0}^{b} & \overbrace{0}^{c} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to c = t,\ \overbrace{b = t - \frac{a}{\sqrt{a}}}^{b\sqrt{a}+at=0 \to b=t-\frac{a}{\sqrt{a}}}\ ,\ \overbrace{\alpha = 0}^{\alpha(\sqrt{a})=0 \to \alpha=0} \to t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{pmatrix} \to sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(N(A-\lambda I)) = 1$ ולכן הריבוי הגיאומטרי והריבוי האלגברי שווים כאשר $a \neq 0$ מכיוון שאם

$a = 0$ אזי $-\frac{a}{\sqrt{a}}$ לא מוגדר

לכן כאשר $a > 0 = a \neq 0 \wedge a > 0$ המטריצה לכסינה **ולכן המטריצה לא לכסינה כאשר** $a \leq 0$

2)א)

נמצא את הערכים העצמאיים של $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - (-1) = \lambda^2 + 1$$

כעת נחפש מספרים מעל המרוכבים שיתנו לנו $\lambda^2 + 1 = 0$

ולכן הם יהיו

$$\lambda = i \to \underbrace{(i)^2}_{-1} + 1 = 0$$

$$\lambda = -i \to \underbrace{(-i)^2}_{-1} + 1 = 0$$

לכן $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

<u>נמצא את</u> P

<u>עבור</u> $\lambda = i$

$$V_{\lambda=i} = N(A - \lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 * i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \overset{a}{1} & \overset{b}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to b = t,\ \overbrace{a = -it}^{a+it=0 \to a=-it} \to t\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \to sp\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>עבור</u> $\lambda = -i$

$$V_{\lambda=-i} = N(A - \lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 * i} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \overset{a}{-1} & \overset{b}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to b = t,\ \overbrace{a = it}^{-a+it=0 \to a=it} \to t\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \to sp\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן $P=\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

נבדוק אם אכן $\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{P}*\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{A}*\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{i}{2} & 0.5\\ -\frac{i}{2} & 0.5\end{pmatrix}}_{P^{-1}}$ **אכן התנאי מתקיים**

ב)

על פי מה שראינו בתירגול $A^n=PD^nP^{-1}$

ולכן נשאר לנו למצוא את D^{100} כאשר $D=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i^{100} & 0\\ 0 & (-i)^{100}\end{pmatrix}=D^{100}$

ו P ישאר כמו בסעיף הקודם, נבדוק אם זה נכון

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A^{100}=I}=\underbrace{\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{P}*\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{D^{100}=I}*\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{i}{2} & 0.5\\ -\frac{i}{2} & 0.5\end{pmatrix}}_{P^{-1}}=PIP^{-1}=I$$

זה אכן מתקיים.

3)

$(\leftarrow)$ נניח כי יש לנו מטריצות A,B עם n ערכים עצמאיים שונים ובנוסף כי המטריצות דומות ונוכיח כי יש להן את אותם ערכים עצמאיים.

על פי מה שלמדנו בתרגול "אם ל A יש n ערכים עצמאיים שונים, אז A הפיכה" ולכן נובע כי A,B הפיכות, ולכן לכל אחת מהן קיימת מטריצה C,D (בהתאמה) אלכסונית שדומה להן, הוכחנו בתרגיל הקודם כי יחס דמיון הוא יחס שקילות ולכן גם טרנזיטיבי ולכן מיחס זה אנו מקבלים כי $C \sim D$ בנוסף ולכן ניתן להראות מטריצה אלכסונית אחת עבור המטריצות A,B לדוגמה -

$$D = P^{-1}AP \wedge D = R^{-1}BR$$

ולכן המטריצות שוות ובהכרח יש להן את אותם ערכים עצמאיים.

$(\rightarrow)$ נניח כי יש לנו מטריצות A,B עם n ערכים עצמאיים שונים ובנוסף כי יש להן את אותם ערכים עצמאיים ונוכיח כי הן דומות.

המטריצות לכסניות ולכן קיימת להן מטריצה C,D(בהתאמה) אשר תכיל את הערכים העצמאיים של המטריצות ותהיה דומה להן מכיוון של A ו B יש את אותן ערכים עצמאיים $C = D$ לפי טרנזטביות יחס הדמיון $A \sim C \wedge B \sim D \wedge C \sim D \rightarrow A \sim B$

4)

נמצא את הערכים העצמאיים של $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$$P_{\lambda}(A) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - c \end{pmatrix} \right| = (\lambda - a) * \left| \begin{pmatrix} \lambda - b & 0 \\ 0 & \lambda - c \end{pmatrix} \right|$$

$$= (\lambda - a) * (\lambda - b) * (\lambda - c)$$

לכן הערכים העצמאיים שלנו יהיו $\lambda = a, b, c$

נרצה ש D שלנו תהיה כמו המטריצה B על מנת שנמצא את ה P המתאים ולכן נבנה את D להיות כך:

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

<u>נמצא את</u> P

<u>עבור</u> $\lambda = a$

$$V_{\lambda = i} = N(A - \lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right) = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & c-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & c-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha & \quad\beta\quad & \gamma & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \to \alpha = t, \quad \overbrace{\gamma = 0}^{\gamma(c-a)=0 \to \gamma=0 | c \neq a} \quad , \quad \overbrace{\beta = 0}^{\beta(b-a)=0 \to \beta=0 | b \neq a} \quad \to t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = b$

$$V_{\lambda=i} = N(A-\lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \beta = t, \quad \overbrace{\gamma = 0}^{\gamma(c-b)=0\to\gamma=0|c\neq b} \quad , \quad \overbrace{\alpha = 0}^{\alpha(a-b)=0\to\alpha=0|a\neq b} \quad \to t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda = c$

$$V_{\lambda=i} = N(A-\lambda I) = N\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} a-c & 0 & 0 \\ 0 & b-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \gamma = t, \quad \overbrace{\alpha = 0}^{\alpha(a-c)=0\to\gamma=0|a\neq c} \quad , \quad \overbrace{\beta = 0}^{\beta(b-c)=0\to\beta=0|b\neq c} \quad \to t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן P על פי D הוא $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר התנאי הוא כמו שנתון, $a \neq b \neq c$

נבדוק אם אכן הדבר מתקיים -

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}_{A}$$ אכן הוא מתקיים.

5)א)

נרצה למצוא את A כך ש $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_n + a_{n-1}}^{a_{n+1}} \\ \underbrace{a_n}_{a_n} \end{pmatrix}$

לכן נרצה לקחת A כך שכפל של בוקטור 2 שורות יתן לנו וקטור 2 שורות כך ש

הערך העליון יכיל את חיבור האיברים בוקטור שקיבלנו

הערך התחתון יהיה האיבר העליון שבוקטור שקיבלנו ולכן המטריצה תהיה כך –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק זאת $\begin{pmatrix} a_{n-1} + a_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ אכן מתקיים.

ב)

נמצא את הערכים העצמאיים של המטריצה

$$P_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda(\lambda-1)-1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

-

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4*1*-1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \to \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

לכן $D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

כעת נמצא את P

עבור $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$V_{\lambda=i}=N\left(A-\lambda I\right)=N\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}&1\\1&\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}&1\\1&\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2*\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}&1\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&b&\\\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1-\sqrt{5}}{2}&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\end{array}\rightarrow b=t,\ \ a=\overbrace{t\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}^{a*\frac{1-\sqrt{5}}{2}+t=0\rightarrow a=t\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\rightarrow t\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}\rightarrow sp\left\{\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$V_{\lambda=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=N\left(A-\lambda I\right)=N\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1\\1&\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1\\1&\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2*\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&b&\\\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\end{array}\rightarrow b=t,\ \ a=\overbrace{\frac{t\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}}^{a*\frac{1+\sqrt{5}}{2}+t=0\rightarrow a=\frac{-t\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}}\rightarrow t\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}\rightarrow sp\left\{\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $P=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}$

כעת $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} \leftarrow A = PDP^{-1} \leftarrow D = P^{-1}AP$ הוכחנו בתרגול

ולכן נשאר לחשב את $D^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$ ולכן

$$A^{n-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}}_{D^{n-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}-5}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}+5}{10} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$A^{n-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}}_{D^{n-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}-5}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}+5}{10} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$A^{n-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}}_{P*D^{n-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}-5}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}+5}{10} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n}}{\sqrt{5}*2^{n}} & \frac{-\left(\sqrt{5}-5\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n} + \left(\sqrt{5}+5\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n}}{5*2^{1+n}} \\ \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}*2^{-1+n}} & \frac{-\left(\sqrt{5}-5\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} + \left(\sqrt{5}+5\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{5*2^{n}} \end{pmatrix}$$

נבדוק עבור

$$A^{2-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}*2^2} & \dfrac{-(\sqrt{5}-5)(1+\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})^2}{5*2^3}\\ \dfrac{(1+\sqrt{5})^1-(1-\sqrt{5})^1}{\sqrt{5}*2^1} & \dfrac{-(\sqrt{5}-5)(1+\sqrt{5})^1+(\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})^1}{5*2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ג)

לכן

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}*2^n} & \dfrac{-(\sqrt{5}-5)(1+\sqrt{5})^n+(\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})^n}{5*2^{1+n}}\\ \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{\sqrt{5}*2^{-1+n}} & \dfrac{-(\sqrt{5}-5)(1+\sqrt{5})^{n-1}+(\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})^{n-1}}{5*2^n}\end{pmatrix}}_{A^{n-1}}*\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}*2^n}\\ \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{\sqrt{5}*2^{-1+n}}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}*2^n}$$

ננסה לבדוק דוגמה, אנו יודעים כי בסדרת פיבונאצי המספר השישי הוא 8 ננסה להציב בנוסחה

$a_6=8=\dfrac{(1+\sqrt{5})^6-(1-\sqrt{5})^6}{\sqrt{5}*2^6}=8$ וזה אכן נכון