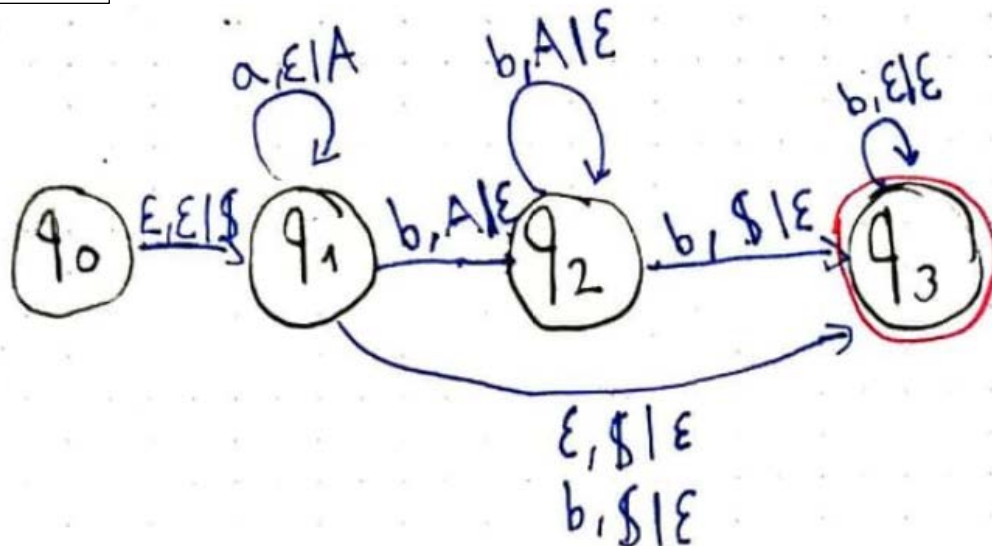


מודלים חישוביים – תרגיל 3

(א)



(ב)

נניח בשלילה ש L ח"ה ויהיה k הקבוע המובטח מלמת הניפוח לשפות ח"ה, נתבונן במילה $a^k b^k c^k d^k$ קל לראות ש $w \in L$ ו $|w| \geq k$ לפי למת הניפוח קיימות מילים $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ כך ש $w = uvxyz$ ומתקיימים

$$vy \neq \varepsilon \quad (1)$$

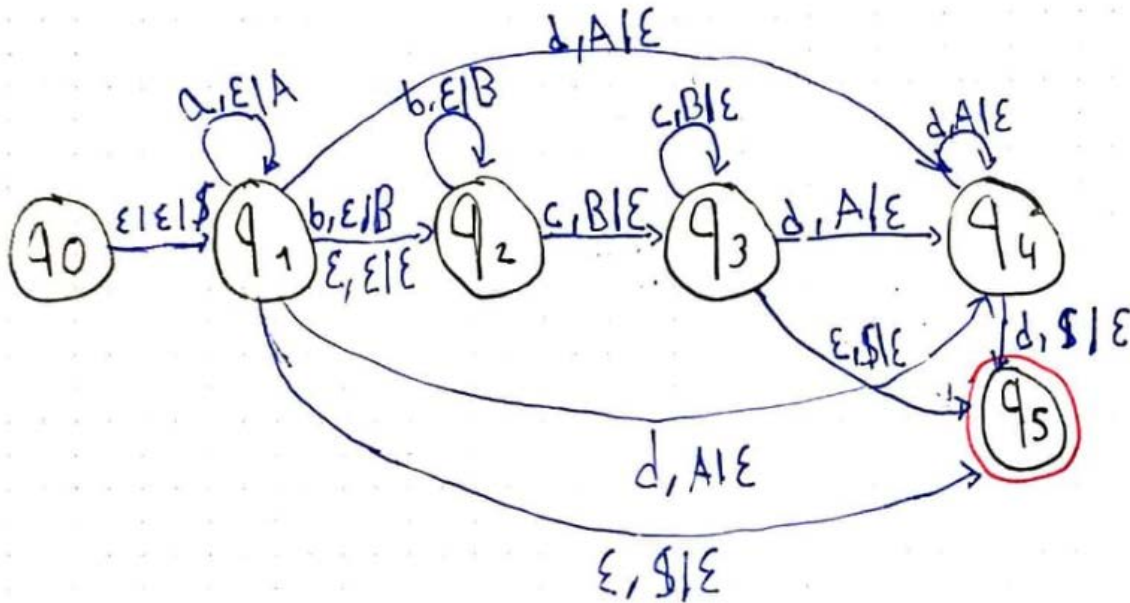
$$|vxy| \leq k \quad (2)$$

$$uv^n xy^n z \in L \quad \text{לכל } n \geq 0 \quad (3)$$

נשים לב כי מכלל 2 נובע כי ה vxy יכול להכיל עד 2 אותיות שונות ולכן הניפוח יתבצע בהכרח רק על 2 אותיות דבר שיפר את האיזון. נראה את המקרים

- vxy מכיל רק את a – ננפח רק את a ולכן $a^x, c^y \mid x = y$ לא יתקיים
- vxy מכיל רק את b – ננפח רק את b ולכן $b^x, d^y \mid x = y$ לא יתקיים
- vxy מכיל את a, b – ננפח את b או את a או את שניהם אם רק אחד חד מהם יתנפח הראינו כי זה בעייתי אם שניהם יתנפחו **לא** יתקיים $a^x, c^y \mid x = y$ וגם $b^x, d^y \mid x = y$
- vxy מכיל רק את c – ננפח רק את c ולכן $a^x, c^y \mid x = y$ לא יתקיים
- vxy מכיל את bc – ננפח את b או את c או את שניהם אם רק אחד חד מהם יתנפח הראינו כי זה בעייתי אם שניהם יתנפחו **לא** יתקיים $a^x, c^y \mid x = y$ וגם $b^x, d^y \mid x = y$
- vxy מכיל רק את d – ננפח רק את d ולכן $b^x, d^y \mid x = y$ לא יתקיים
- vxy מכיל את cd – ננפח את d או את c או את שניהם אם רק אחד חד מהם יתנפח הראינו כי זה בעייתי אם שניהם יתנפחו **לא** יתקיים $a^x, c^y \mid x = y$ וגם $b^x, d^y \mid x = y$

א



ד

נניח בשלילה ש L ח"ה ויהיה k הקבוע המובטח מלמת הניפוח לשפות ח"ה, נתבונן במילה $a^k b^{(k)^2}$ קל לראות ש $w \in L$ ו $|w| \geq k$ לפי למת הניפוח קיימות מילים $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ כך ש $w = uvxyz$ ומתקיימים

- (1) $vy \neq \varepsilon$
- (2) $|vxy| \leq k$
- (3) $uv^n xy^n z \in L$ לכל $n \geq 0$

כעת ננפח את המילה לפי 3 ונקבל את הניפוחים הבאים

- vxy מכיל רק את a – ולכן ננפח רק את a ומספר האותיות של a יישאר קבוע וקל לראות כי זה לא בשפה
- vxy מכיל רק את b – ולכן ננפח רק את b ומספר האותיות של b יישאר קבוע וקל לראות כי זה לא בשפה
- vxy מכיל גם את a וגם את b נחלק שוב למקרים –

אנו יודעים כי $v, y \neq \varepsilon$ ולכן $a, b \in vy$ ולכן כאשר ננפח אותם מספר האותיות של a ומספר האותיות של b יגדלו, נראה כי הניפוח יהרוס את היחס הנצרך בין מספר האותיות של כל תו. נחלק למקרים –

- נניח כי מספר האותיות ב v מכיל את a והוא שווה למספר האותיות ב y כאשר ננפח נגדיל במספר שווה את האותיות אך זה יהרוס את היחס בין מספר האותיות של a ושל b ולא יתקיים $a^i b^{i^2}$.
- נניח כי מספר האותיות ב v שמכיל את האותיות גדול ממספר האותיות ב y ולכן כמו מקודם גם היחס יהרס מכיוון שיהיה לנו יותר מידי תווי a
- נניח כי מספר האותיות ב v שמכיל את האותיות a קטן ממספר האותיות ב y אזי אם אכן יהיה מצב שעבור n ספציפי הניפוח יעבור (לדוגמה)

$$\left[\begin{array}{l} v = a \\ y = bb \end{array} \right] \rightarrow n = 2 \rightarrow aabbbb$$

אך הדבר לא יתקיים עבור כל n

- נניח כי v מכיל גם אותיות a וגם אותיות b נקבל דבר מהצורה $ababab$ וזה לא בשפה.
- נניח כי y מכיל גם אותיות a וגם אותיות b נקבל דבר מהצורה $ababab$ וזה לא בשפה.

(2א)

נניח בשלילה כי $premu$ של השפה L שומר על רגולריות ולכן -

ניקח את השפה $L = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$ השפה L רגולרית וניתנת לכתיבה ע"י האוטומט הבא -

לאחר שהוכחנו כי השפה L רגולרית, השפה $premu(L)$ היא השפה אשר המילה מורכבת ממספר שווה של אותיות a ו b שזה $premu(L) = \{\#a = \#b\}$ הראינו בהרצאה כי זאת אינה שפה רגולרית וזה בשלילה להנחה.

ולכן השפות הרגולריות לא סגורות לפעולה $premu$

(ב)

נניח בשלילה כי $premu$ של השפה L סגור על שפות ח"ה ולכן -

ניקח את השפה $L = \{a^i b^j c^j d^i \mid i, j \geq 0\}$ (השפה מ 1 ג) - הראינו כי השפה L ח"ה

לאחר מכן ניקח את $premu(L) = \{\#a = \#d \wedge \#b = \#c\}$ של השפה ונקבל $premu(L)$ כעת נבצע

חיתוך (אשר שומר על סגירות בין שפות ח"ה) של השפה שקיבלנו עם השפה

$L_2 = \{a^x b^y d^z c^w \mid x, y, z, w \geq 0\}$ ובכך נקבל את השפה $L_3 = \{a^i b^j d^i c^j \mid i, j \geq 0\}$ שזאת דומה

לשפה מ 1 ב שהראינו כי היא אינה שפה ח"ה.

(3)

$S \rightarrow A_L S B B A_R \mid A_L B B A_R$
 $A_L B \rightarrow ab \mid A_L a \rightarrow aa$
 $a A_R \rightarrow aa \mid b A_R \rightarrow ba$
 $b B \rightarrow bb$
 $A_R B B \rightarrow B B A_R$

4

ראשית נסמן את ה-0 הראשון בעזרת S (חובה שיהיה אחד לפחות) ונעבור ימינה ל-0 הבא

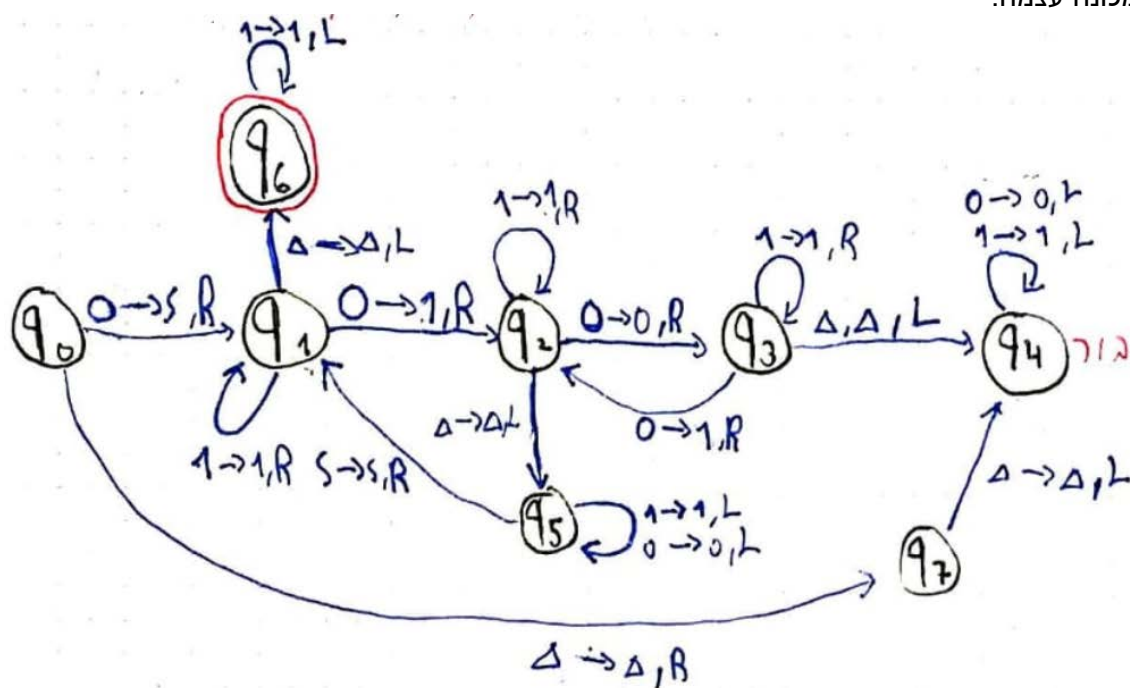
(א) נסמן את האפס ב-1 ונעבור ימינה -

לאחר שעברנו ימינה אם אנחנו על 0 נעבור שוב ימינה | אם אנחנו על משולש עבור ל-(ג)

לאחר שעברנו שוב ימינה אם היה שם 0 נסמן אותו ב-1 והמשך ל-(ב) | אם היה שם משולש נעבור למצב לא מקבל

(ב) נעבור שוב ימינה אם יש שם 0 נעבור ל-(א) | (ג) אם יש שם משולש נדלג שמאלה על כל ה-0 ו-1 עד שנגיע ל-Δ נדלג ימינה (על ה-1) עד שנגיע ל-0 ונעבור ל-(א) - אם לא הגענו ל-0 והגענו למשולש אז אנחנו במצב מקבל.

המכונה עצמה:



(5)

(א)נסתכל על האות שעכשיו אנחנו עליה,

אם האות היא a אז – נדלג על כל התווים ימינה (אותיות גדולות וקטנות) עד שנגיע ל# נמשיך לדלג על אותיות גדולות (ומשולשים) לאחר סיום הדילוג אם ראינו a – נשנה את התו ל A , נחזור שמאלה (נדלג על כל האותיות הגדולות) נגיע ל# נדלג על האותיות הקטנות עד שנגיע לאות גדולה (או משולש), נחזור אחד ימינה ונסמן את a שבהתחלה היינו עליה ב A

* אם לאחר הדילוגים ימינה ראינו את האות b נעבור ל(טעות)

אם האות היא b אז – נדלג על כל התווים ימינה (אותיות גדולות וקטנות) עד שנגיע ל# נמשיך לדלג על אותיות גדולות לאחר סיום הדילוג אם ראינו b – נשנה את התו ל B , נחזור שמאלה (נדלג על כל האותיות הגדולות) נגיע ל# נדלג על האותיות הקטנות עד שנגיע לאות גדולה, נחזור אחד ימינה ונסמן את b שבהתחלה היינו עליה ב B

* אם לאחר הדילוגים ימינה ראינו את האות a נעבור ל(טעות)

כעת נעבור אחד ימינה אם במעבר הראשון ימינה הגענו ל# סימן שהמילה מתקבלת אם לא וזה אות a או b חזור ל(א)

(טעות) אם התקיימה טעות זאת אומרת שמהמיקום שהתחלנו את במחזורת המלאה לא טוב וצריך לנסות להתחיל אותה מהניסיון הבא

- הגענו לטעות לאחר שראינו a בצד שמאל ולאחר מכן בצד ימין b או להפך ולכן כרגע אנחנו בצד ימין (של ה#)

במהלך החזרה שמאל נחזיר את האותיות A ל a ו B ל b נמשיך ללכת שמאלה עד שנגיע ל# ברגע שהגענו אליו נרצה למחוק את התו הראשון מצד ימין כי ממנו לא מתחיל ה substring ולכן נחזור ימינה, נדלג על המשולשים והתו הראשון שהוא a או b נחליף במשולש (נבצע בדיקה *). לאחר מכן נחזור שוב שמאלה נדלג על משולשים ועל # נחליף A ב a ו B ב b עד שנגיע למשולש (שמסמן את הקצה הימני) נחזור אחד ימינה (נעמוד על תחילת ה substring) ונחזור ל(א)

בעת מחיקת התו הראשון לאחר (טעות) נבצע את הבדיקה* לאחר מחיקת התו (סימון משולש על a או b) נעבור אחד ימינה, נבדוק אם הוא משולש (סימן שעברנו על כל ה string ולא מצאנו בתוכו substring) ולכן החזרה דחיה. אחרת חזור אחד שמאלה ונחזור להמשך ההוראות שכתבנו.

(6א)ii

$q_0a \succ aq_1 \succ a\Delta q_2 - win$

(ii)

$q_0abbab \succ aq_1bbab \succ abq_3bab - stop$

(iii)

$q_0aaababaabaa \succ aq_1aababaabaa \succ aaq_1ababaabaa \succ aaaq_1babaabaa$
 $\succ aaabq_3abaabaa \succ aaabaq_4baabaa \succ aaababq_3aabaa \succ aaabaabaq_4abaa$
 $\succ aaabaabaq_4baa \succ aaabaabaabq_3aa \succ aaabaabaabaq_4a \succ aaabaabaabaq_4 - win$

(ב)

מילה שמתחילה ב**a** לאחר מכן יופיע $b^i \mid i \geq 0$ לאחר מכן הרצף **aba** ולאחר מכן כל רצף אפשרי מהא"ב

בצורה פורמלית - $L_b = \{b^i aba(a,b)^* \mid i \geq 0\}$

או

מילה שמתחילה ב**a** אין בה את הרצף **ba** ומסתיימת ב**a**