<u>בדידה 2 – תרגיל 1</u>

1)

נשתמש באינדוקציה, עבור $n=2$ התנאי מתקיים לפי ההגדרה של אפשר סימטרי, אם האיבר מופיע רק בקבוצה אחת (מספר אי-זוגי) הוא שייך להפרש הסימטרי, אם האיבר שייך ל2 הקבוצות (זוגי) הוא לא שייך להפרש הסימטרי.

כעת נניח עבור n התנאי מתקיים ונוכיח עבור $n+1$

על מנת לראות זאת יותר ברור בעיניים נשים סוגריים על הקבוצה ה$n+1$

$$\left(A_1 \triangle A_2 \dots \triangle A_n\right) \triangle A_{n+1}$$

בעזרת ההנחה עבור n אנו יודעים כי x יהיה שייך לביטוי ב2 מקרים

1) $x \in \underbrace{\left(A_1 \triangle A_2 \dots \triangle A_n\right)}_{odd-number} \wedge x \notin A_{n+1}$ - מספר אי-זוגי + 0 קבוצות = מספר אי-זוגי של קבוצות

2) $x \in \underbrace{\left(A_1 \triangle A_2 \dots \triangle A_n\right)}_{even-number} \wedge x \in A_{n+1}$ - מספר זוגי + 1 קבוצות = מספר אי-זוגי של קבוצות

ולכן על פי 2 המקרים עדיין אנו רואים ש x יהיה שייך לביטוי אם ורק אם הוא שייך למספר אי זוגי של קבוצות.

(2
נחלק את הפתרון ל2 -

נתחיל עם ההוכחה כי לכל n אי-זוגי $A_n = U$

נוכיח עבור הבסיס $n=1$ ולכן $A_1 = \overline{\underbrace{A_0}_{A_0=A}} \cup A = \overline{A} \cup A = U$

כעת נניח עבור n (אי זוגי) ונוכיח עבור $n+2$ (קפיצות של 2 מכיוון שאנחנו צריכים רק עבור האי זוגיים)

$$A_{n+2} = \overline{\underbrace{A_{n+1}}_{A_{n+1}=\overline{A_n}\cup A}} \cup A = \underbrace{\left(\overline{\overline{A_n} \cup A}\right)}_{A_n \cap \overline{A}} \cup A = \left(A_n \cap \overline{A}\right) \cup A$$

$A_n = U$ ההנחה עבור n

ולכן $\left(A_n \cap \overline{A}\right) \cup A = \underbrace{\left(U \cap \overline{A}\right)}_{\overline{A}} \cup A = \overline{A} \cup A = U$

חלק שני – נוכיח כי לכל n זוגי $A_n = A$

נשים לב כי ההגדרה עבור $n>0$ היא

$$A_n = \overline{A_{n-1}} \cup A$$

הוכחנו בחלק הראשון כי עבור n אי זוגי $A_n = U$ ולכן במקרה שלנו $\overline{A_{n-1}} = \overline{U} = \varnothing$ (n זוגי וגדול מ2)

ולכן $A_n = \varnothing \cup A = A$ עבור n זוגי וגדול מ2

נשאר להוכיח עבור $n=0$

על פי ההגדרה $A_0 = A$

(3

נשתמש באינדוקציה הבסיס יהיה $n=1$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]}_{\rightarrow}=\frac{1}{1*2}=\frac{1}{2}=\frac{n}{\underbrace{n+1}_{\leftarrow}}$$

כעת נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

נחשב על פי ההגדרה שניתנה לנו

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}...+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

נחשב על פי ההנחה על n

$$\underbrace{\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}...+\frac{1}{n(n+1)}}_{n}+\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{n+1}=\frac{n}{\underbrace{n+1}_{n}}+\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{n}$$

המעבר אפשרי מכיוון שהנחנו עבור n והוספנו לשני הצדדים מספר שווה.

כעת נשאר להראות רק כי (ש2 החישובים שווים)

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{[n*(n+2)]+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$