(1

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ נתון ולכן,
ניקח חלוקה T נורמלית (כלומר החלק הגדול ביותר שואף לאפס) של הקטע $[a,b]$,
ולפי סכומי רימן שלמדנו:

$$c*\int_a^b f(x)dx = c*\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

על פי חוקי גבולות נוכל להכניס את c פנימה:

$$c*\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \lim_{\mu(T)\to 0} c*\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(\alpha_i)\Delta x_i$$

על פי ההגדרה של אינטגרל:

$$\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(x)\alpha_i\Delta x_i = \int_a^b cf(x)dx$$

ולכן cf אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

(2

הפוקנציה היא מונוטונית עולה וחסומה בקטע $[0,1]$ ולכן על פי מה שלמדנו הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

3)

f רציפה ב $[-a,a]$ ולכן על פי מה שלמדנו היא אינטגרבילית בקטע זה.

נחלק חלוקה T_1,T_2 חלוקה נורמלית (כלומר החלק הגדול ביותר שואף לאפס) את הקטעים $[0,a]$ ו $[-a,0]$.

ולכן יהי T כך ש $T=T_1\cup T_2$ היא חלוקה נורמלית של הקטע $[-a,a]$ ולכן על פי סכומי רימן

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[f(a_i)\Delta x_i\right]+\left[f(-a_i)\Delta x_i\right]\right)$$

נתון כי f אי-זוגית ולכן

$$f(x)=-f(-x)$$

ולכן

$$\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[f(a_i)\Delta x_i\right]+\left[f(-a_i)\Delta x_i\right]\right)=\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[f(a_i)\Delta x_i\right]+\left[-f(a_i)\Delta x_i\right]\right)$$

נוציא את המינוס מחוץ לסוגריים

$$\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[f(a_i)\Delta x_i\right]+\left[-f(a_i)\Delta x_i\right]\right)=\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[f(a_i)\Delta x_i\right]-\left[f(a_i)\Delta x_i\right]\right)=\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}0=0$$

(a(4

הפונקציה $f\left(x\right)=x^2-x-2$ רציפה בקטע $[1,3]$ ולכן על פי מה שלמדנו בתרגול, גם אינטגרבילית בקטע זה.

נחלק את הקטע לחלקים שווים ($\Delta x=\frac{2}{n}$) ונבחר שהנקודה בכל קטע תהיה הקצה הימני ($a_i=1+\frac{2i}{n}$)

ולכן על פי הסכומים החלקיים של רימן:

$$\int_1^3\left(x^2-x-2\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2-\left(1+\frac{2i}{n}\right)-2\right]*\frac{2}{n}$$

- **נפשט** את הביטוי:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2-\left(1+\frac{2i}{n}\right)-2\right]*\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}-1-\frac{2i}{n}-2\right]*\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}-1-\frac{2i}{n}-2\right]*\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4i^2}{n^2}+\frac{2i}{n}-2\right]*\frac{2}{n}$$

- **נכניס** את ה $\frac{2}{n}$ פנימה

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4i^2}{n^2}+\frac{2i}{n}-2\right]*\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{8i^2}{n^2}+\frac{4i}{n^2}-\frac{4}{n}\right]$$

- **נשאיר** רק את i בתוך הסכום על מנת לקבל סדרות

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{8i^2}{n^3}+\frac{4i}{n^2}-\frac{4}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{4n}{n}\right]$$

- **נחשב את** $\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$ על פי הנוסחה הנתונה בתרגיל $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$

$$\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{8}{n^3}*\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}=\frac{8n\left(2n^2+n+2n+1\right)}{6n^3}=\frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3}$$

- **נחשב את** $\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$ על פי סכום סדרה חשבונית

$$\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{4}{n^2}*\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{4n\left(n+1\right)}{2n^2}=\frac{4n^2+4n}{2n^2}=\frac{2n^2+2n}{n^2}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{4}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3}+\frac{2n^2+2n}{n^2}-\frac{4n}{n}\right]$$

- **נצמצם** n אפשריים ונפתור את הגבול ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3}+\frac{2n^2+2n}{n^2}-\frac{4n}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{6}+\frac{24}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{2}{1}+\frac{2}{n}-4\right]=\frac{16}{6}+2-4=\frac{2}{3}$$

b) הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}dx$ רציפה בקטע $[0,4]$ ולכן על פי מה שלמדנו בתרגול, גם אינטגרבילית בקטע זה.

נחלק את הקטע ל $\frac{4i^2}{n^2}$ חלקים שווים ,האורך של כל קטע יהיה נקודת הקצה הימנית ($\frac{4i^2}{n^2}$) פחות נקודת הקצה השמאלית ($\frac{4(i-1)^2}{n^2}$) - $\Delta x_i=\frac{4i^2}{n^2}-\frac{4(i-1)^2}{n^2}$ ונבחר שהנקודה בכל קטע תהיה נקודת הקצה הימנית - $a_i=\frac{4i^2}{n^2}$

ולכן על פי הסכומים החלקיים של רימן:

$$\int_0^4\sqrt{x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i^2}{n^2}}\left(\frac{4i^2}{n^2}-\frac{4(i-1)^2}{n^2}\right)$$

- **נפשט** את הסוגריים

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i^2}{n^2}}\left(\frac{4i^2}{n^2}-\frac{4(i-1)^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i^2}{n^2}}\left(\frac{4i^2-\left(4\left(i^2-2i+1\right)\right)}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i^2}{n^2}}\left(\frac{8i-4}{n^2}\right)$$

- **נוציא** את השורש

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i^2}{n^2}}\left(\frac{8i-4}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\left(\frac{8i-4}{n^2}\right)$$

- **נכניס** את הכפל

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\left(\frac{8i-4}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2-8i}{n^3}$$

- **נפצל** לשתי שברים על מנת להוציא את i

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2-8i}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2}{n^3}-\frac{-8i}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i$$

- **נחשב** את $\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i$ על פי סכום סדרה חשבונית

$$\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{8}{n^3} * \frac{n(n+1)}{2} = \frac{8n(n+1)}{2n^3} = \frac{8n^2+8n}{2n^3}$$

- **נחשב** את $\frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$ על פי הנוסחה הנתונה בתרגיל $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{16}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{16n(2n^2+n+2n+1)}{6n^3} = \frac{32n^3+48n^2+16n}{6n^3}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty}\frac{32n^3+48n^2+16n}{6n^3} - \frac{8n^2+8n}{2n^3}$$

נצמצם n אפשריים ונפתור את הגבול ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{32n^3+48n^2+16n}{6n^3} - \frac{8n^2+8n}{2n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{32}{6}+\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2} = \frac{32}{6}$$

c) הפונקציה $f(x)=8x-x^2$ רציפה בקטע $[2,5]$ ולכן על פי מה שלמדנו בתרגול, גם אינטגרבילית בקטע זה.

נחלק את הקטע לחלקים שווים ($\Delta x=\frac{3}{n}$) ונבחר שהנקודה בכל קטע תהיה הקצה הימני נוסיף 2 כי הקטע מתחיל מ2 ($a_i=2+\frac{3i}{n}$)

ולכן על פי הסכומים החלקיים של רימן:

$$\int_1^3\left(8x-x^2\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[8*\left(2+\frac{3i}{n}\right)-\left(2+\frac{3i}{n}\right)^2\right]*\frac{3}{n}$$

- **נפשט** את הביטוי:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[8*\left(2+\frac{3i}{n}\right)-\left(2+\frac{3i}{n}\right)^2\right]*\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[16+\frac{24i}{n}-\left(4+\frac{12i}{n}+\frac{9i^2}{n}\right)\right]*\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{9i^2}{n^2}+\frac{12i}{n}+12\right]*\frac{3}{n}$$

- **נכניס** את ה $\frac{3}{n}$ פנימה

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{9i^2}{n^2}+\frac{12i}{n}+12\right]*\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{27i^2}{n^3}+\frac{36i}{n^2}+\frac{36}{n}\right]$$

- **נשאיר** רק את i בתוך הסכום על מנת לקבל סדרות

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{27i^2}{n^3}+\frac{36i}{n^2}+\frac{36}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{36}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

- **נחשב את** $-\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$ על פי הנוסחה הנתונה בתרגיל $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$-\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=-\frac{27}{n^3}*\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=-\frac{27n\left(2n^2+n+2n+1\right)}{6n^3}=\frac{-54n^3-81n^2-27n}{6n^3}$$

- **נחשב את** $\frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$ על פי סכום סדרה חשבונית

$$\frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{36}{n^2}*\frac{n(n+1)}{2}=\frac{36n^2+36n}{2n^2}$$

נחשב את $\frac{36}{n}\sum_{i=1}^{n}1$

$$\frac{36}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{36n}{n}=36$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{36}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-54n^3-81n^2-27n}{6n^3}+\frac{36n^2+36n}{2n^2}+36\right]$$

- **נצמצם** n אפשריים ונפתור את הגבול ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-54n^3-81n^2-27n}{6n^3}+\frac{36n^2+36n}{2n^2}+36\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{54}{6}-\frac{81}{n}-\frac{27}{n^2}+18+\frac{18}{n}+36\right]=\frac{-54}{6}+18+36=45$$

(d

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ רציפה בקטע $[a,b]$ (כי נתון $0<a<b$)ולכן על פי מה שלמדנו בתרגול, גם אינטגרבילית בקטע זה.

נחלק את הקטע ל n חלקים שווים ($\Delta x=x_{i+1}-x_i$) ונבחר שהנקודה בכל קטע תהיה ($a_i=\sqrt{x_{i+1}*x_i}$)

ולכן על פי הסכומים החלקיים של רימן:

$$\int_a^b\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x_{i+1}*x_i}^{\,2}}\right]*x_{i+1}-x_i$$

- **נכניס** את $x_{i+1}-x_i$ פנימה

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x_{i+1}*x_i}^{\,2}}\right]*x_{i+1}-x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}*x_i}\right]$$

- **נחלק** גורמים משותפים

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{\sqrt{x_{i+1}*x_i}^{\,2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right]$$

- **נפתח** את הסכום

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}\ldots\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\right]$$

- **נחסר** איברים בין 2 הסוגריים

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}\dots\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\dots+\frac{1}{x_n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{x_0}+\cancel{\frac{1}{x_1}\dots\frac{1}{x_{n-1}}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}\dots+\frac{1}{x_n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}\right]$$

$$x_0=a$$
$$x_n=b$$

ולכן,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$