אינפי 2 – תרגיל 2

1)א)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)....+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)*\frac{\pi}{n}\right]$$

הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ רציפה בקטע $[0,\pi]$ ולכן היא אינטגרבילית בקטע לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}*\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}*\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right]=\int_0^{\pi}\sin x$$

$$\int_0^{\pi}\sin(x)=-\cos(x)\Big|_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2$$

ב)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}...+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt[3]{n^4}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}*\frac{1}{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}*\frac{1}{n^3}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}*\frac{1}{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}}\right)$$

הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן היא אינטגרבילית בקטע לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*f\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\int_0^1\sqrt[3]{x}$$

$$\int_0^1\sqrt[3]{x}=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^1=\frac{1^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{0^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}$$

ג)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2...+n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}*\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

הפונקציה $f(x)=x^2$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן היא אינטגרבילית בקטע לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*f\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\int_0^1 x^2$$

$$\int_0^1 x^2=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$$

ד)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{k+1}}*\left(1^k+2^k...+n^k\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{n^{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{n^k*n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{n^k}*\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\right)$$

הפונקציה $f(x)=x^k$ רציפה בקטע $[0,1]$ (כאשר $k\geq 0$) ולכן היא אינטגרבילית בקטע לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}*f\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\int_0^1 x^k$$

$$\int_0^1 x^n=\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1=\frac{1^{k+1}}{k+1}-\frac{0^{k+1}}{k+1}=\frac{1}{k+1}$$

ה)

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)*\left(1+\frac{2}{n}\right)...*\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)*\left(1+\frac{2}{n}\right)...*\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)*\left(1+\frac{2}{n}\right)...*\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)*\left(1+\frac{2}{n}\right)...*\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)*\left(1+\frac{2}{n}\right)...*\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

הפונקציה $f(x)=\ln(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$ (היא לא רציפה ב0 לכן התחלנו מ1) ולכן היא אינטגרבילית בקטע לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}*\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}*f\left(\frac{i}{n}+1\right)=\int_1^2\ln(x)$$

$$\int_1^2\ln(x)=x*\ln(x)-\left.x\right|_1^2=2\ln(2)-2-\left[\ln(1)-1\right]=2\ln(2)-2+1=2\ln(2)-1$$

2)א)

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x}$ בקטע $[0,1]$ זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן אינטגרבילית בו. נבחר חלוקה $T:0<0.25<0.5<0.75<1$ בחלוקה זו $\Delta x=\frac{1}{4}$ לכל I_k

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}(T)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה,

סכום דרבו העליון הוא

$$\overline{S}(T)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}(T)\le\int_0^1\frac{1}{1+x}\le\overline{S}(T)$$

ולכן

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)\le\ln(2)\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$$

ב)

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ בקטע $[0,1]$ זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן

אינטגרבילית בו. חלוקה $T: 0<0.25<0.5<0.75<1$ בחלוקה זו $\Delta x=\frac{1}{4}$ לכל I_k

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}(T)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{1+1^2}\right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה,

סכום דרבו העליון הוא

$$\overline{S}(T)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי

$$\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{1+1^2}\right)\le\pi\le\left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$$

לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}(T)\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\le\overline{S}(T)$$

ולכן

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{1+1^2}\right)\le\frac{\pi}{4}\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$$

נכפיל הכל ב4 ונקבל

$$\left(\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}+\frac{1}{1+1^2}\right)\le\pi\le\left(1+\frac{1}{1+0.25^2}+\frac{1}{1+0.5^2}+\frac{1}{1+0.75^2}\right)$$

(3

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ בקטע $\left[1,n\right]$ זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן אינטגרבילית בו.

נבחר חלוקה $T:1<2<....<n-1<n$ בחלוקה זו $\Delta x=1$ לכל I_k

$f\left(x\right)$ מונוטונית יורדת בקטע $\left[1,n\right]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}\left(T\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.....+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה,

סכום דרבו העליון הוא

$$\overline{S}\left(T\right)=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}....+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי

$$\int_0^1\frac{1}{x}=\ln\left(x\right)\Big|_1^n=\ln\left(n\right)-\ln\left(1\right)=\ln\left(n\right)$$

לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}\left(T\right)\le\int_0^1\frac{1}{x}\le\overline{S}\left(T\right)$$

ולכן

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.....+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\le\ln\left(n\right)\le\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}....+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

ולכן

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le\ln\left(n\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$