אינפי 2 – תרגיל 8

1)א)

נמצא את פונקציית הגבול תחילה -

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{Bmatrix}$$

כעת נבדוק התכנסות במידה שווה -

$f_n(x)$ מתכנס לפונקציה אינה רציפה ולכן אין התכנסות במידה שווה.

ב)

נמצא תחילה את פונקציית הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\arctan(x)}^{bounded}}{n} \to f(x) = 0$

כעת נבדוק התכנסות במידה שווה, נשתמש בקריטריון קושי -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)-\underbrace{f(x)}_{0}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\arctan(x)\right)}{n} = 0$$

קיבלנו כי המשוואה שווה ל0 ולכן הטור מתכנס במידה שווה.

ג)

ראשית נמצא את פונקציית הגבול -

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx+1} \to f(x) = 0$$

כעת נבדוק התכנסות במידה שווה, נשתמש בקריטריון קושי -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in(0,\infty)}\left|f_n(x)-\underbrace{f(x)}_{0}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\sup_{x\in(0,\infty)}}\left|f_n(x)\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(\frac{1}{\underbrace{nx}_{\frac{1}{n}}+1}\right)\right)\right) = 1$$

קיבלנו כי המשוואה שווה ל1 ולכן הטור לא מתכנס מתכנס במידה שווה.

ד)

נמצא את פונקציית הגבול - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n\left(1-x^n\right) \to f(x) = 0$

נשתמש בבקריטריון קושי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-\underbrace{f(x)}_{0}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|x^n\left(1-x^n\right)\right|\right)$$

ננסה למצוא את נקודת המקסימום כדי לקחת את ה sup

נגזור את הפונקציה $\left[x^n\left(1-x^n\right)\right]' = \left[x^n - x^{2n}\right]' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}$

נשווה ל0 כדי למצוא נקודות חשודות $nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=0 \rightarrow \underbrace{nx^{n-1}}_{x=0}\underbrace{\left(1-2x^{n}\right)}_{x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}}=0$

ניקח גם את הקצוות לכן הנקודות החשודות הן $x=0,1,\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

ע"י הצבה קלה ניתן לראות כי הערך הגדול הוא עבור $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

לכן כעת נשתמש בקריטריון קושי עובר ערך זה -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-\underbrace{f(x)}_{0}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{n}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{n}\right)\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right|\right)=\frac{1}{4}\neq 0$$

לכן הטור לא מתכנס במידה שווה.

2)

הפרכה, נפריך ע"י דוגמה נגדית

ניקח את $f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}$ ואת $g(x)=\frac{1}{x\arctan x}$ בקטע $x\in(0,1)$

הראינו כי $f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $\mathbb{R}$ ולכן בהכרח גם בקטע $(0,1)$.

כעת נראה כי $g(x)f_n(x)$ **לא** מתכנס במידה שווה ל $g(x)f(x)$

$$g(x)f_n(x)=\frac{1}{nx},\ \underbrace{g(x)}_{\frac{1}{x\arctan x}}\ \underbrace{f(x)}_{\text{כ}4}=0$$

כעת נראה כי $g(x)f_n(x)$ לא מתכנס במידה שווה -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)g(x)-\underbrace{f(x)g(x)}_{0}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)g(x)\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)g\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{n}=\infty\neq 0$$

ולכן הפרכנו את הטענה.

3א)

נשים לב כי $\ln\left(1+x\right)\le x \mid x>0$ (הוכחנו באינפי 1)

מכיון ש $n\ge 2$ אזי $\frac{x^2}{n\ln^2 n}>0$ ולכן נוכל להשתמש במשפט שכתבנו שורה למעלה, לכן לפי מבחן

השוואה אם הטור $\frac{x^2}{n\ln^2 n}$ מתכנס גם הטור $\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ - $\left(\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)<\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$

כעת נשתמש במבחן העיבוי עבור הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^2}{n\ln^2 n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^2}{n\ln^2 n}=\sum_{n=2}^{\infty}\cancel{2^k}*\frac{x^2}{\cancel{2^k}\ln^2 2^k}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\underbrace{\ln^2 2^k}_{\ln(2^k)*\ln(2^k)=k^2*\ln^2 2}}=x^2\ln^2 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\underbrace{k^2}_{p>1}}$$

קיבלנו טור p כאשר p גדול מ1 ולכן הטור מתכנס. מכוון שטור זה מתכנס בהכרח גם הטור

$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ גם כן מתכנס במידה שווה.

ב)

ננסה להשתמש במבחן ה M של ווירשטראס ולכן אנו צריכים למצוא את הערך המירבי של הפונקציה.

לכן נגזור את הפונקציה של הסדרה לפי X ונשאיר את n בתור משתנה.

$$\left[\frac{x^2}{e^{nx}}\right]'\rightarrow \begin{matrix} u=x^2 & u'=2x \\ v=e^{nx} & v'=ne^{nx}\end{matrix}\rightarrow\frac{2xe^{nx}-nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}$$

כעת על מנת למצוא את הערך המקסימלי נשווה ל0

$$\frac{2xe^{nx}-nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}=0\rightarrow\underbrace{e^{nx}}_{\neq 0}\left(2x-nx^2\right)=0\rightarrow\underbrace{x}_{x=-}\underbrace{\left(2-nx\right)}_{2=nx\rightarrow x=\frac{2}{n}}=0$$

נציב על מנת למצוא את הערך הגבוה מבין 2 הנקודות ונקבל -

$$f\left(0\right)=\frac{0^2}{e^{n*0}}=0,\ f\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^{n*\frac{2}{n}}}=\frac{\frac{4}{n^2}}{e^2}=\frac{4}{e^2n^2}$$

כעת אנו יודעים כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$ לכן אם נראה כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2n^2}$ מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$ יתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2n^2}=\frac{4}{e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\underbrace{n^2}_{p>1}}$ קיבלנו טור p כאשר p גדול מ 1 ולכן גם הטור שלנו מתכנס במידה שווה.

ג)

נסדר קצת את הביטוי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}$ מיד ניתן לראות כי זהו טור הנדסי כך ש -

$a_1=\frac{1}{1+x^2},q=\frac{1}{1+x^2}$ נחשב סכום של סדרה הנדסית אינסופית ונקבל -

$$x\frac{a_1}{1-q}=x\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\underbrace{1-\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}}=x\frac{\cancel{1+x^2}}{\cancel{1+x^2}\left(\cancel{1}+x^2\cancel{-1}\right)}=\frac{x}{x^2}$$

כאשר $x\neq 0$ אזי סכום הסדרה שווה ל $\frac{1}{x}$

כאשר $x=0$ נסתכל על הסדרה וניתן לראות כי המונה תמיד יהיה שווה 0 והמכנה יהיה 1^n
לכן סכום הסדרה יהיה 0.
הפונקציה אליה הטורים מתכנסים לא רציפה ולכן ההתכנסות היא לא במידה שווה.

5א)

נתבונן על הטור ונראה כי היא מחולק למקרים הבאים $x=0,x>0,x<0$

<u>עבור $x>0$</u>

נשתמש במבחן השורש ונקבל

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|}=\limsup_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}}_{1}\underbrace{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}_{x>0\to sum<1}=<1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט כאשר $x>0$

<u>עבור $-1<x<0$</u>

נבדוק התכנסות בהחלט ע"י מבחן השורש –

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|}=\limsup_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}}_{1}\underbrace{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}_{-1<x<0\to sum>1}\to>1$$

ולכן הטור לא יתכנס בהחלט,

נראה כי הטור לא עומד בתנאי הכרחי $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right]\underbrace{\to}_{x=-\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.5}{-0.5}\right)^n\neq 0$

עבור כל n אינסופי או הטור הסדרה חייבת להתכנס ל0 וזה לא נכון ולכן הטור מתבדר.

<u>עבור $x=-1$</u>

נשים לב כי כאשר $x=-1$ הטור לא מוגדר ולכן מתבדר.

עבור $x<-1$

נבדוק התכנסות בהחלט ע"י מבחן השורש –

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|}=\limsup_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}}_{1}\underbrace{\left(\frac{1-x}{-x-1}\right)}_{x<-1\to sum>1}\to>1$$ ולכן הטור לא מתכנס בהחלט

נראה כי הטור לא עומד בתנאי הכרחי $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right]\underbrace{\to}_{x=-4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{5}{-3}\right)^n\neq 0$

עבור כל n אינסופי וx הטור הסדרה חייבת להתכנס ל0 וזה לא נכון ולכן הטור מתבדר.

עבור $x=0$

נציב ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ כעת נשתמש במשפט לייבניץ אנו יודעים כי $a_n=\frac{1}{2n-1}$ הינה סידרה מונוטונית חיובית שואפת ל0 ולכן על פי משפט לייבניץ הטור מתכנס.

נבדוק אם הטור מתכנס בהחלט (אם לא אז הוא יתכנס בתנאי על פי לייבניץ)

לסיכום -

עבור $x>0$ - הטור מתכנס בהחלט

עבור $x<0$ - הטור מתבדר

עבור $x=0$ - הטור מתכנס בתנאי

ב)

נסתכל על הטור ונראה כי כאשר $x=0$ הטור מתכנס בהחלט ל -0

נבדוק התכנסות בהחלט לטור (נשתמש במבחן המנה) -

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)(1+x^{n+1})}}{\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}}=\frac{\overbrace{x^{n+1}}^{x^n x}\left[\cancel{(1+x)}\cancel{(1+x^2)}\dots\cancel{(1+x^n)}\right]}{x^n\left[\cancel{(1+x)}\cancel{(1+x^2)}\dots\cancel{(1+x^n)}(1+x^{n+1})\right]}=\frac{x}{1+x^{n+1}}$$

כעת נבדוק עבור אילו ערכי x $x\neq-1$ $\left|\frac{x}{1+x^{n+1}}\right|<1$

לכן עבור $x\neq-1$ הטור מתכנס בהחלט

נבדוק כאשר $x=-1$ נקבל את הטור הבא - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\underbrace{(1-1)(1+1)\dots(\ )}_{0*2*0\dots}}$ קיבלנו טור לא מוגדר.

6)

נניח בשלילה כי $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע (a,b) ולכן נובע

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,b)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$$

כעת יש 2 מצבים שמהם מגיע הסופרימום לקטע $[a,b]$

הסופרימום נמצא ב (a,b) וזה בסתירה כי אז הסופרימום יהיה שווה ל0 ולכן תתקיים התכנסות במידה שווה גם בקטע $[a,b]$

או

הסופרימום הוא a או b ולכן הסופרימום בקטע (a,b) יהיה גם כן אותו סופרימום מהגדרת סופרימום (סופרימום לא חייב להיות חלק מהקבוצה) ולכן שוב בסתירה כמו בהסבר הקודם.