בדידה 2 – תרגיל 2

1)א)

חח"ע – לא, נראה סתירה על ידי דוגמה יהיה x חיובי אז $f(-x)=f(x)=x$ ולכן הראינו כי מ2 מקורות שונים הגענו לאותו התמונה.

על – כן, מכיוון $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ כלשהו ולכל $y\in\mathbb{Z}$ יהי $f(-x)=y$ ולכן הראנו כי עבור כל איבר ב $\mathbb{N}\cup\{0\}$ (התמונה) יש איבר במקור.

ב)

חח"ע – כן, נניח כי קיים זוג מקורות שמוביל לאותו התמונה $f(x)=f(y)$ ונוכיח כי $x=y$

$\underbrace{x^3}_{f(x)}=\underbrace{y^3}_{f(y)}\xrightarrow{\sqrt[3]{\ }}\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{y^3}\rightarrow x=y$ - מכיוון שזה שורש אי זוגי התוצאה שתתקבל ממנו היא יחידה.

על – כן, מכיוון ש $x\in\mathbb{R}$ כלשהו ולכל $y\in\mathbb{R}$ יהי $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=y$

ד)

חח"ע – כן, נניח כי קיים זוג מקורות שמוביל לאותו תמונה $f(X)\equiv f(Y)$ ונוכיח כי $X\equiv Y$

$$\underbrace{A\setminus X}_{f(X)}\equiv\underbrace{A\setminus Y}_{f(Y)}\underbrace{\rightarrow}_{*}X\equiv Y$$

*מקור הפונקציה הוא $P(A)$ ומזה נובע כי $X,Y\in P(A)\rightarrow X,Y\subseteq A$

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$P(A)=\left\{\begin{array}{l}\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\\ \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\\ \{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,4\}\\ \{1,2,3,4\}\end{array}\right\}$$

ניתן לראות בתור דוגמה להמחשה כי לא ייתכן שניקח קבוצה שונה ונקבל $A/group$ דומה מכיוון שכל קבוצה בקבוצת החזקה היא זרה.

על – כן, מכיוון ש $X\in P(A)$ כלשהו, ולכל $Y\in P(A)$ יהיה $Y=f(A\setminus X)$

הוכחה – $Y\equiv f(A\setminus X)\equiv A\setminus(A\setminus X)\equiv A\cap\overline{A\cap\overline{X}}\equiv\underbrace{A\cap\overline{A}}_{\varnothing}\cup X\equiv X$

ה)

חח"ע – לא, נראה סתירה ע"י דוגמא $f(A)=f(B)=B$

על – כן, ניקח איבר $X\in P(B)$ ונמצא לו מקור, כל איבר הוא המקור של עצמו ולכן $f(X)=X\cap B=X$ מכיוון ש $B\subset A$ ו $X\in P(B)$.

2)א(

$(\leftarrow)$ נניח כי f,g חח"ע ונוכיח כי $f\times g$ חח"ע

מכיוון ש f נובע - $f(a)=f(b)\to a=b$

מכיוון ש g נובע - $g(a)=g(b)\to a=b$

כעת ניקח איברים שרירותיים a_1,a_2,b_1,b_2 ונראה כי אם
$f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)\to(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

לכן $f\times g(a_1,b_1)=\left(f(a_1),g(b_1)\right)$

וגם $f\times g(a_2,b_2)=\left(f(a_2),g(b_2)\right)$

הנחנו כי $f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)$ ולכן גם $\left(f(a_1),g(b_1)\right)=\left(f(a_2),g(b_2)\right)$

מכיוון ש f,g הן חח"ע אזי $f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2$ וגם כן $g(b_1)=g(b_2)\to b_1=b_2$

והוכחנו כי $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

$(\rightarrow)$ נניח כי $f\times g$ חח"ע ונוכיח כי f,g חח"ע

ניקח איברים שרירותיים a_1,a_2,b_1,b_2 ומכיוון ש $f\times g$ חח"ע אזי

$f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)\to(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

בנוסף $f\times g(a_1,b_1)=\left(f(a_1),g(b_1)\right)$ ו $f\times g(a_2,b_2)=\left(f(a_2),g(b_2)\right)$

נניח כי $f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)$ לכן אנו יודעים כי $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

מסיבה זאת אנו יודעים כי $a_1=a_2,b_1=b_2$ נותר להראות כי $f(a_1)=f(a_2),g(b_1)=g(b_2)$ מכיוון
ש $f\times g(a_1,b_1)=\left(f(a_1),g(b_1)\right)$ ו $f\times g(a_2,b_2)=\left(f(a_2),g(b_2)\right)$ ואנו יודעים ש
$f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)$ אזי $f(a_1)=f(a_2),g(b_1)=g(b_2)$ ולכן כאשר
$f(a_1)=f(a_2),g(b_1)=g(b_2)$ אנו רואים כי גם $a_1=a_2,b_1=b_2$

ב)

($\leftarrow$) נניח כי f,g על ונוכיח כי $f\times g$ על

על מנת להוכיח זאת צריך להראות כי לכל $(c,d)\in C\times D$ קיים מקור ב $(a,b)\in A\times B$ כך ש
$f\times g(a,b)=(c,d)$

מההנחה אנו יודעים כי f על ולכן עבור $c\in C$ קיים מקור ב A ונקרא לו a

מההנחה אנו יודעים כי g על ולכן עבור $d\in D$ קיים מקור ב B ונקרא לו b

ולכן המקור עבור (c,d) יהיה $f\times g(a,b)=(f(a),g(b))=(c,d)$.

($\rightarrow$) נניח כי $f\times g$ על ונוכיח כי f,g על

על מנת להוכיח זאת צריך להראות כי לכל $c\in C$ ו $d\in D$ קיים מקור ב $a\in A$ ו $b\in B$ (בהתאמה)

מההנחה אנו יודעים כי $f\times g$ על ולכן עבור $(c,d)\in C\times D$ קיים מקור ב $(a,b)\in A\times B$

בנוסף אנו יודעים כי $(c,d)=(f(a),f(b))=f\times g(a,b)$ והנה מצאנו

עבור $c\in C$ המקור הוא a

עבור $d\in D$ המקור הוא b

3)

ננסה להרכיב/לבנות פונקציה מתאימה – מספר האיברים ב A_i שווה למספר האיברים ב B_i מכיוון שקיימת ביניהן פונקציה חח"ע ועל.

כעת ננסה להרכיב פונקציה g שתהיה מ $g:\{A_i\}_{i\in I}\to\{B_i\}_{i\in I}$

כל איבר באחד מקבוצות החלוקה יסומן כך a_{ij},b_{ij} i - מסמן את הקבוצת חלוקה אליה שייך האיבר j - מסמן את המספר של האיבר בקבוצה (נזכיר כי ב2 קבוצות חלוקה של A ו B אם אותו ה i אותו מספר איברים).

כעת הפונקציה תהיה $g(a_{ij})=b_{ij}$

נשאר להראות כי הפונקציה על וחח"ע

חח"ע - נניח כי קיים זוג מקורות שמוביל לאותו התמונה $g(a_{i_1j_1})=g(a_{i_2j_2})$ ונוכיח כי $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$

$g(a_{i_1j_1})=g(a_{i_2j_2})=b_{ij}$ על פי ההרכבה של הפונקציה שלנו האיבר שלנו הוא בקבוצת החלוקה i

ולכן מכיוון ש $f:A_i\to B_i$ חח"ע קיים רק a_{ij} יחיד שיהיה המקור שלה ולכן בהכרח $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$

על – על מנת להוכיח שהפונקציה שלנו על אנו צריכים להראות כי לכל $b_{ij}\in B$ קיים מקור ב $a_{ij}\in A$

מכיוון שעל פי הפונקציה שלנו b נמצא בקבוצה החלוקה i ולכן מכיוון ש $f : A_i \to B_i$ על אזי קיים $A \subseteq A_i \ni a_{ij}$ ולכן מצאנו מקור ל $b_{ij} \in B$.

4)א)

$f:X\to Y$ ולכן $f^{-1}:Y\to X$

ניקח איבר $y\in f\left[f^{-1}\left[B\right]\right]$ ונראה כי $y\in B$

לפי האיבר שלקחנו קיים x כך ש $x\in f^{-1}\left[B\right]$ ו $f\left(x\right)=y$

x הוא במקורות של B וגם המקור של y ובנוסף הפונקציה היא חד חד ערכית ולא לא קיים מקור ל y חוץ מ x ולכן $y\in B$ והוכחנו.

ב)

נבחר את $X=Y$ כך שהם מכילים 2 איברים $\{a,b\}$

ניקח את $B=\{a,b\}$

ונגדיר את הפונקציה f כך $\begin{matrix} f\left(a\right)=a \\ f\left(b\right)=a \end{matrix}$ ולכן $f^{-1}\left[B\right]=f^{-1}\left[\{a,b\}\right]=\{a.b\}$

ידוע כי $f\left(f^{-1}\left[B\right]\right)\subseteq B$ ולכן $f\left(\underbrace{f^{-1}\left[B\right]}_{\{a,b\}}\right)=\{a\}$ ואכן $\{a\}\subset\{a,b\}$

ג)

$(\leftarrow)$ נניח כי f על ו $y\in B$ ונוכיח כי $y\in f\left[f^{-1}\left[B\right]\right]$

מכיוון ש $y\in B$ ו f על אנו יודעים כי $\exists x\in X \mid f\left(x\right)=y$ ולכן $f\left[\left\{x\right\}\right]\subseteq f\left[f^{-1}\left[B\right]\right]$

$f\left(x\right)=y\leftarrow f\left[\left\{x\right\}\right]=\left\{y\right\}$ ולכן בשילוב 2 הדברים שהראנו יוצא כי $\left\{y\right\}\subseteq f\left(f^{-1}\left[B\right]\right)$

ולכן יוצא מזה כי $y\in f\left[f^{-1}\left[B\right]\right]$

$(\rightarrow)$ הוכחנו אותו דבר בסעיף א.

5א)

נכון, $f^{-1}\left[B_1\cap B_2\right]$ נפתח את הביטוי הבא – יהיו האיברים $C\equiv B_1\cap B_2$ ולכן $f^{-1}\left[C\right]=D\subseteq X$ כך
שכל איבר ב $d\in D\mid f\left(d\right)\in B_1\cap B_2$

$f^{-1}\left[B_1\right]\cap f^{-1}\left[B_2\right]$ נפתח את הביטוי הבא - $d_1\in D_1\mid f\left(d_1\right)\in B_1$ וכך גם $d_2\in D_2\mid f\left(d_2\right)\in B_2$

כעת החיתוך ביניהן יהיה $d\in D\mid f\left(d\right)\in B_1\cap B_2$

הראנו כי שתי הצדדים הן D אם אותה ההגדרה.

ב)

לא נכון, נראה סתירה ע"י דוגמה פרטית

$$A_1=\left\{1,2,3\right\}\ A_2=\left\{1,2,4\right\}$$
$$B_1=\{\overset{f(1)}{6},\overset{f(2)}{7},\overset{f(3)}{8}\}B_2=\{\overset{f(1)}{6},\overset{f(2)}{7},\overset{f(4)}{8}\}$$
$$f\left[A_1\cap A_2\right]\equiv f\left[\left\{1,2\right\}\right]\equiv\left\{6,7\right\}$$
$$f\left[A_1\right]\cap f\left[A_2\right]\equiv\left\{6,7,8\right\}\cap\left\{6,7,8\right\}\equiv\{6,7,8\}$$

ג)

נכון, נניח כי $x\in f^{-1}\left[\overline{B_1}\right]$ ונוכיח כי $x\in\overline{f^{-1}\left[B_1\right]}$

$$x\in f^{-1}\left[\overline{B_1}\right]\leftrightarrow f\left(x\right)\in\overline{B_1}\underbrace{\leftrightarrow}_{f(x)\notin B_1}x\notin f^{-1}\left[B_1\right]\overbrace{\leftrightarrow}^{\notin\to\in}x\in\overline{f^{-1}\left[B_1\right]}$$

6)

$(\leftarrow)$ נניח כי g חח"ע ונוכיח כי f על

על מנת להוכיח ש f על צריך להראות כי לכל $b \in B$ קיים מקור ב $a \in A$

נעשה זאת ע"י דרך השלילה נניח כי קיים $b \in B$ כך שאין לו מקור, ולכן נקבל כי $g\left(\{b\}\right) = f^{-1}\left[\{b\}\right] = \varnothing$

אך אנו גם יודעים כי $g\left(\varnothing\right) = f^{-1}\left[\varnothing\right] = \varnothing$ אבל g היא חח"ע ולכן יוצא כי $\{b\} \equiv \varnothing$ וזה לא נכון בסתירה.

$(\rightarrow)$ נניח כי f על ונוכיח כי g חח"ע

על מנת להוכיח ש g חח"ע צריך להראות כי $g\left(X_1\right) \equiv g\left(X_2\right) \rightarrow X_1 \equiv X_2$

מכיוון ש f על אזי $\begin{matrix} f\left(f^{-1}\left[X_1\right]\right) = X_1 \\ f\left(f^{-1}\left[X_2\right]\right) = X_2 \end{matrix}$ - הוכחנו בשאלה 4 סעיף ג.

נניח כי $g\left(X_1\right) = g\left(X_2\right)$ ולכן $f^{-1}\left[X_1\right] = f^{-1}\left[X_2\right]$ לפי מה שרשמנו מעלה ניתן להסיק כי $X_1 = X_2$ ובכך סיימנו את ההוכחה.