בדידה 2 – תרגיל 3

1)א)

הפרכה -

נראה קבוצה שמוכלת ממש בקבוצה שנייה **אך** בעלת אותה עוצמה

$A=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}=2\mathbb{N}$ ו $B=\{n \mid n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$

אזי $A\subset B$ אך העוצמה שלהן שווה $|A|=|B|$ - הוכחנו בתרגול $|\mathbb{N}|=|2\mathbb{N}|$

ב)

הפרכה -

ניקח בתור דוגמה את הקבוצה $\mathbb{N}$ ידוע לנו כי $\aleph_0=|\mathbb{N}|>1$ אך כמו כן לפי התרגול הוכחנו כי $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$ ולכן זה **לא** נכון להגיד כי $\underbrace{|\mathbb{N}|}_{\aleph_0}\cancel{<}\underbrace{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|}_{\aleph_0}$

ג)

הוכחה

הוכחנו בתרגול כי אם $|A|=|B|$ אזי $|P(A)|=|P(B)|$ ולכן רק נותר לנו להראות כי $|A|=|B|$

נתון כי $A\cap B=\varnothing$ (2 הקבוצות זרות) ולכן איחוד שתיהן יהיו חיבור העוצמה של כל אחת מהקבוצות $|A\cup B|=|A|+|B|$ בנוסף אנו יודעים כי מספר האיברים בקבוצת החזקה של קבוצה היא 2 בחזקת מספר איברי הקבוצה ולכן $|P(A\cup B)|=2^{|A|+|B|}$

ובנוסף $|P(A)\times P(B)|=\underbrace{|P(A)|}_{2^{|A|}}*\underbrace{|P(B)|}_{2^{|B|}}=2^{|A|+|B|}$

ולכן $|P(A)\times P(B)|=|P(A\cup B)|=2^{|A|+|B|}$

2)

ניצור פונקציה $f:A_x\to\mathbb{Z},\ f(x)=\lfloor x\rfloor$ נראה שהיא חח"ע ועל ולכן היא $|A_x|=|\mathbb{Z}|=\aleph_0$

חח"ע -

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $f(a)=f(b)$ ונוכיח כי $a=b$

נשים לב כי הפונקציה f יכולה לכל היותר להקטין את המספר בקצת פחות מ1 עד לערך השלם הנמוך.

ולכן $\underbrace{f(a)}_{f(b)}\le b,\ a\le\underbrace{f(a)+1}_{f(b)+1}$

מהגדרת A_x נובע כי $|x-a|\in\mathbb{Z},\ |x-b|\in\mathbb{Z}$ לכן ל x,a יש אותו חלק עשרוני וגם ל $x.b$ יש אותו חלק עשרוני ולכן בהכרח ל a,b יש אותו חלק עשרוני.

מכיוון ששניהם בתוך טווח של 1+ ובנוסף בעלי אותו חלק עשרוני הם חייבים להיות אותו המספר - $a=b$

על -

נראה כי לכל $z\in\mathbb{Z}$ לכל $x\in\mathbb{R}-A_x$ נוכל לקחת מספר כך ש $f(y)=z$

ניקח את $y=z+\underbrace{x}_{-----.+++++\ (decimal\ fraction)}$ כך ש y יהיה z ועוד השבר העשרוני של x ובכך מצאנו מקור עבור כל z

3)

ניצור פונקציה $f:|\underbrace{\mathbb{Z}}_{a}\times\underbrace{\mathbb{Z}}_{b}|\mapsto\underbrace{Z[i]}_{a+bi}$ ונראה כי הפונקציה היא חח"ע וגם על ולכן $|Z[i]|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|$

חח"ע

יהיו $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{Z}$ נראה כי אם $f(a_1,b_1)=f(a_2,b_2)$ אזי $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

$f(a_1,b_1)=a_1+b_1i$

$f(a_2+b_2)=a_2+b_2i$

נסתכל על המקדם של המספר החופשי ועל המקדם של המספר עבור i

מכיוון ש $f(a_1,b_1)=f(a_2,b_2)$ אזי המקדמים שווים ולכן $a_1=a_2,b_1=b_2$ מה שגורר כי $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

על

נראה כי עבור $a,b\in Z[i]$ כללים למספר $a+bi$ קיים מקור ב $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ - פשוט על פי הגדרה עבור $f(a,b)$.

לכן $|Z[i]|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|$ אנו יודעים כי $|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|=\aleph_0*\aleph_0=\aleph_0$ ולכן $|Z[I]|=\aleph_0$

(4

ראשית נראה כי $|[0,\infty)|=|(0,\infty)|$, נרכיב פונקציה מ $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ על וחח"ע

כך ש $f(x)=\begin{cases} x+1 : x\in\mathbb{N} \\ x : x\notin\mathbb{N} \end{cases}$

חח"ע

ניקח $x,y\in[1,\infty)$ ונראה כי אם $f(x)=f(y)\to x=y$

נפצל למקרים אם $f(x)\in\mathbb{N}$ -

אזי $x+1=y+1\to x=y$

אם $f(x)\notin\mathbb{N}$ -

אזי מהגדרה $x=y$

על

ניקח $y\in(0,\infty)$ שרירותי ונראה כי קיים לו מקור

נפצל למקרים אם $y\in\mathbb{N}$ -

אזי לפי הגדרה $f(y-1)=y$ ולכן המקור יהיה $y-1$

אם $y\notin\mathbb{N}$ -

אזי לפי הגדרה $f(y)=y$ ולכן המקור היה y

לכן אנו יודעים כי $|[0,\infty)|=|(0,\infty)|$

בנוסף למדנו בתרגול כי כל קטע פתוח על ציר הממשיים העוצמה שלו שווה והראנו כי $|(0,1)|=\aleph_1$

לכן $|(0,1)|=|(0,\infty)|=|[0,\infty)|=\aleph_1$

5(א

קטע מכיל 2 נקודות (נקודה מכילה 2 ערכים ממשיים) מכיוון שנתון בנוסף כי הקטע מאונך לציר ה x אנו יודעים כי ערך ה x של 2 הנקודות זהה ולכן העוצמה שלנו תהיה -

$\underbrace{x}_{p_1,p_2} * \underbrace{y}_{p_1} * \underbrace{y}_{p_2} = \left| |\mathbb{R}| \times |\mathbb{R}| \times |\mathbb{R}| \right|$ בחירת ה x ובחירת y לכל אחת מהנקודות

$\left| |\mathbb{R}| \times |\mathbb{R}| \right| = |\mathbb{R}|$ הוכחנו בתרגול כי $\left| |\mathbb{R}| \times \underbrace{|\mathbb{R}| \times |\mathbb{R}|}_{|\mathbb{R}|} \right| = \left| \underbrace{|\mathbb{R}| \times |\mathbb{R}|}_{|\mathbb{R}|} \right| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$

ב)

ננסה קודם להבין את הקבוצה, ניתן לראות כי כל סדרה ששייכת לקבוצה אם מופיע 0 לאחריו יופיעו רק אפסים,

נגדיר את קבוצת הסדרות ב S

$f(n_1, n_2) = \underbrace{1111111}_{n_1}....\underbrace{000000}_{n_2}$ - נגדיר את הפונקציה כך $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S$

ניתן לראות כי הפונקציה הפיכה מכיוון שנספור את כמות ה1 וזה יהיה ה n_1

נספור את כמות ה0 וזה יהיה ה n_2 מכיוון שהפונקציה הפיכה

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |S| = \aleph_0$