מספר שיעורי בית: 4

מספר תרגול: 89120-07

מבנה נתונים – תרגיל 4

1)א)

נתון כי בגרף G_{scc} קיימת קשת (V,U)ונוכיח כי בגרף G יש מסלול בין כל $v \in V$ ל $u \in U$.

לפי ההגדרה שהגדרנו בתחילת התרגיל קיימים $v \in V$ ו $u \in U$ כך ש (v,u) שייך לגרף המקורי.

בנוסף G_{scc} היא גרף של רכיבי קשירות לכן על פי הגדרה קיים מסלול בין כל 2 קודקודים ולכן ב גרף G יש מסלול בין כל $v \in V$ ל $u \in U$.

לסיכום ניתן לעבור בין כל רכיב קשירות בין כל האיברים וקיים מקשר בין כל רכיבי הקשירות ולכן יש מסלול בין כל $v \in V$ ל $u \in U$.

ב)

בסעיף הקודם הראנו כי יש מעבר מכל רכיב קשור חזק לרכיב קשר חזק אחר. ובנוסף ישנה קשת בין רכיבי הקשירות ולכן ניתן לעבור מכל קודקוד ברכיב קשר אחד לכל קודקוד ברכיב קשר אחר.

ג)

אם v,u שייכים לאותו רכיב קשיר חזק אז לפי ההגדרה קיים מסלול ביניהם (א)

אם הם לא שייכים לאותו רכיב קשיר חזק נצטרך להראות כי בגרף G_{scc} קיים מסלול בין הקודקוד המתאים של u לקודקוד המתאים של v.

לכן ניקח v,u כלליים (הם לא מאותו רכיב קשיר חזק) אם קיימת קשת ביניהן אז לפי ההגדרה תהיה קשת בין U ל V והוכחנו.

אם לא קיימת קשת ביניהן בהכרח יהיה איזשהו $v_1 \in V$ ו $y \in Y$ כך שיש קשת בין $v_1 \rightarrow y$ ו Y הוא לא ב Vולכן ב G_{scc} תהיה קשת בין $V \rightarrow T$וזה מתקדם לכיוון u אם $T = U$ אזי יהיה קשת מ $V \rightarrow T = U$ אם לא נמשיך ככה עד שנגיע לקבוצה אשר תהיה U. (אנחנו בהכרח נגיע כי קיים מסלול כלשהו מ $v \rightarrow u$)

ד)

נניח בשלילה ש G_{scc} **לא** DAG זאת אומרת שהגרף מכיל מעגל – ולכן קיימים קבוצה של רכיבים קשורים ביניהם כך שהם יוצרים רכיב אחד (ב G_{scc}) שנוכל להגדיר אותו כ DAG וזה בסתירה לכך ש G_{scc} **לא** DAG

(2
*נבנה אובייקט שמכיל: מספר צעדים ורשימה של מעברים מיקומים
נגדיר פונקציה רקורסיבית כך ש-
זימן הפונקציה יכיל את הפרמטרים הבאים (מיקום נוכחי ,מיקום יעד ,מספר צעדים ,הדרך)
עבור הפונקציה נזמן אותה רקורסיבית עבור כל אחד מהצעדים האפשריים (זאת אומרת נזמן אותה עם הפרמטר של מיקום נוכחי שונה לפי הצעד, נגדיל ב1 את מספר הצעדים, ונוסיף את הצעד לדרך)
כמובן שנזמן אותה רקורסיבית עבור כל אחד מ8 המהלכים האפשריים.
בנוסף נכתוב את תנאי העצירה שלנו

- אם המיקום הנוכחי נמצא מחוץ ללוח
- אם המיקום הנוכחי הוא על חייל מהקבוצה שלי
- מעבר על הדרך ובדיקה אם המיקום הנוכחי נמצא בדרך

עבור כל אחד מהמקרים הללו הפונקציה **לא** תזמן את עצמה ותחזיר את מספר הצעדים 1- ורשימת מיקומים ריקה.
עבור המקרה כאשר המיקום הנוכחי שווה למיקום היעד נחזיר את מספר הצעדים שלנו ואת רשימת המיקומים שעברנו.

עבור שאר המקרים הפונקציה תזמן את עצמה שוב רקורסיבית לכל שאר 8 המהלכים האפשריים.
הפונקציה תזמן את 8 המהלכים ותחזיר אובייקט שמכיל את מספר הצעדים ורשימת המיקומים, ניקח את הערך המינימלי של מספר הצעדים מכל 8 הזימונים ונחזיר את רשימת המיקומים שלו.

3)א) ניתן להגיע ל v מכל קודקוד ולא יוצא ממנו שום קשת. - אחרת, קיים קודקוד שלא מגיע ל v ולכן יש אפשרות שיופיע לפניו ברשימה.

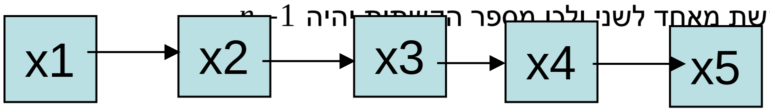
ב)

קיים מסלול מ v לכל קודקוד ושום איבר לא מצביע עליו – אם איבר כן יצביע אליו ובנוסף אנו יודעים כי מ v קיים מסלול לכולם זאת אומרת שיש מעגל וזה בסתירה למיון טופולוגי

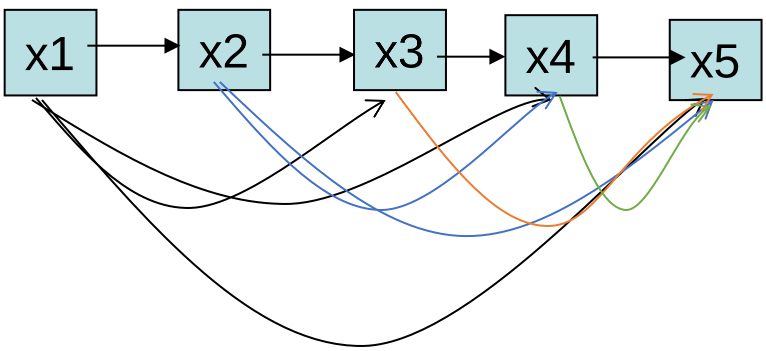
ג)

מכיוון שנתון כי קיים מיון טופולוגי יחיד אזי הגרף הוא רשימה ישרה של איברים.

כעת נבדוק מה מינימום הקשתות, המינימום הוא קשת מאחד לשני ולכן מספר הקשתות יהיה $n-1$



כעת נבדוק מה מקסימום הקשתות, על מנת לא להפר את יחידות המיון הטופולוגי נוכל לחבר כל קודקוד בקשת מכוונת רק לקודקודים שאחריו ולכן נקבל



לאיבר הראשון יהיה $n-1$ קשתות

לאיבר השני יהיה $n-2$ קשתות וכך הלאה

זהו סדרה חשבונית שסכומה יהיה $\frac{n(n-1)}{2}$

ד)

מספר המיונים האפשריים יהיה $n!$

זאת אומרת שעבור המיקום הראשון יהיה לנו n אופציות

עבור המיקום השני במיונים האפשריים יהיה לנו $n-1$ אופציות.

מה שאומר שאין שום סדר ולכן ישנן 0 קשתות ובמקרה כזה הבחירה תהיה אקראית ותוכל להיות כל אחת מ $n!$ המקרים

4)
נבדוק אם המיקום הראשון האם הוא ה x אם כן סיימנו. אחרת,
(1)עלה קומה ובדוק אם המספר הבא -
אם המספר הבא **קטן** מ x חזור ל(1)
אם המספר הבא **גדול** מ x רד קומה
אם המספר הבא הוא x החזר אותו.
(2)לאחר שירדנו קומה בדוק אם המספר הבא -
אם המספר הבא **גדול** מ x רד קומה וחזור ל(2) *אם המספר **גדול** מ x ואנו בקומה ה0 המספר לא נמצא ברשימה
אם המספר הבא **קטן** מ x התקדם לאחד הבא
אם המספר הבא שוב **קטן** מ x סימן שהמספר לא נמצא ברשימה
אם המספר הוא ה x החזר אותו.

כעת נראה את הסיבוכיות.
נתחיל במעברים האנכיים -
בשונה מאלגוריתם החיפוש שלמדנו לרשימת דילוגים אנו כעת עולים את מספר הקומות המינימאלי שכדאי (ולא ישר מגיעים לפסגה) ולכן סך כל הקומות שנעלה הוא $O\left(\log\left(k\right)\right)$ מכיוון שעלינו את קומות אלו אנו צריכים גם לרדת אותם ולכן סה"כ המעברים האנכיים יהיה $O\left(2\log\left(k\right)\right)=O\left(\log\left(k\right)\right)$
כעת המעברים האופקיים -
אותו דבר כמו ברשימת דילוגים רגילה, אך מכיוון שאנו יודעים כי המיקום הוא מקסימום k מעברים אזי רשימת המעברים ברשימת הדילוגים על פי האלגוריתם יהיה $\log\left(k\right)$

ולכן בסה"כ יש לנו $O\left(\log\left(k\right)+\log\left(k\right)\right)=O\left(\log\left(k\right)\right)$