לינארית 2 – תרגיל 4

1)א)

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמאיים של המטריצה

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda-2\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

לכן הערכים העצמיים יהיו $\lambda=1,\lambda=2$

נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=2$

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה (היא מדורגת) ולכן

$$\begin{array}{cc|c} a & b & \\ -1&0&0\\0&0&0\end{array}\to a=0,b=t\to sp\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=2$ **הוא** $sp\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה (היא מדורגת) ולכן

$$\begin{array}{cc|c} a & b & \\ 0&0&0\\0&1&0\end{array}\to a=t,b=0\to sp\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$ הוא $sp\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

לסיכום – ישנם 2 ערכים עצמיים $\lambda=1, \lambda=2$

עבור $\lambda=1$ הווקטור העצמי הוא $sp\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

עבור $\lambda=2$ הווקטור העצמי הוא $sp\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ב)

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}$$

<u>נמצא את הערכים העצמאיים של המטריצה</u>

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&4\\1&\lambda-4\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)(\lambda-4)-4$$

$$(\lambda-1)(\lambda-4)-4=\lambda^2-4\lambda-\lambda+4-4=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)$$

לכן הערכים העצמיים יהיו $\lambda=0,\lambda=5$

<u>נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=5$</u>

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4\\1&-1\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}-4&4\\1&-1\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix}-4&4\\1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\to b=t,\ \overbrace{a=t}^{a-t=0\to a=t}\ \to sp\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=5$ **הוא** $sp\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

<u>נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=0$</u>

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&4&0\\0&0&0\end{array}\right)\to b=t,\ \overbrace{a=-4t}^{a+4t=0\to a=-4t}\ \to sp\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda = 0$ הוא $sp\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

לסיכום – ישנם 2 ערכים עצמיים $\lambda = 0, \lambda = 5$

עבור $\lambda = 0$ הוקטור העצמי הוא $sp\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda = 5$ הוקטור העצמי הוא $sp\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

ג)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}$$

<u>נמצא את הערכים העצמאיים של המטריצה</u>

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda^{+}&-1&0\\0^{-}&\lambda&-1\\-2^{+}&5&\lambda-4\end{pmatrix}\right|=\lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda&-1\\5&\lambda-4\end{pmatrix}\right|-0\left|(\ldots)\right|-2\left|\begin{pmatrix}-1&0\\\lambda&-1\end{pmatrix}\right|$$

$$\lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda&-1\\5&\lambda-4\end{pmatrix}\right|-0\left|(\ldots)\right|-2\left|\begin{pmatrix}-1&0\\\lambda&-1\end{pmatrix}\right|=\lambda\left(\lambda^2-4\lambda+5\right)-2(1)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$$

לכן הערכים העצמיים יהיו $\lambda=2,\lambda=1$

<u>נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$</u>

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\2&-5&3\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-5&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-3&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to c=t,\ \overset{-b+t=0\to b=t}{b=t}\ ,\ \overset{a-t=0\to a=t}{a=t}\ \to sp\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$ הוא $sp\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

<u>נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=2$</u>

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\2&-5&2\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\2&-5&2\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\2&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0\\2&-5&2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-4&2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \hline -2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\to c=t,\quad \overbrace{b=\frac{t}{2}}^{-2b+t=0\to b=\frac{t}{2}}\quad,\quad \overbrace{a=\frac{t}{4}}^{-2a+\frac{t}{2}=0\to 2a=\frac{t}{2}\to a=\frac{t}{4}}\quad\to sp\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=sp\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=2$ הוא $sp\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

לסיכום – ישנם 2 ערכים עצמיים $\lambda=1,\lambda=2$

עבור $\lambda=1$ הוקטור העצמי הוא $sp\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda=2$ הוקטור העצמי הוא $sp\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

2)

ננסה לחשב את הערכים העצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1\\ -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)(\lambda-1)+1=\lambda^2-\lambda-\lambda+1+1=\lambda^2-2\lambda+2$$

לא קיימים פתרונות ממשים עבור $\lambda^2-2\lambda+2=0$ ולכן לא קיימים ערכים עצמיים עבור המטריצה הנ"ל

3)

על מנת שהדטרמיננטה של מטריצה ריבועית (2 על 2) תהיה אפס אנו צריכים כי כל האיברים מלבד אחד מהם יהיו 0, כאשר אנו רוצים שזה יקרה לאחר העלאת המטריצה בחזקה אנו צריכים שזה יהיה באחד האיברים שהוא לא האלכסון הראשי ולכן 2 המקומות האפשריים למספר שהוא לא יהיה אפס הן $\begin{pmatrix} & X\\ X & \end{pmatrix}$ - מסומנת באיקס.

כעת ננסה למצוא את הערכים העצמיים של המטריצה באמצעות הצבה של X באחד המקומות שמצאנו

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & 0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ -x & \lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^2\rightarrow\lambda=0$$

אותו דבר עבור x במיקום השני

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & x\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^2\rightarrow\lambda=0$$

לכן נשאר להוכיח זאת בדרך מתמטית –

לפי ההגדרה של ערך עצמי - $A\lambda=\lambda v$

$$\overbrace{A^k}^{0}\lambda=0\rightarrow\overbrace{A^k}^{0}\lambda=0*v\rightarrow\overbrace{A*A^{k-1}}^{A^k}\lambda=0*v\rightarrow A\left(A^{k-1}\lambda\right)=0*v$$

לכן הערך העצמי של A יהיה $A^{k-1}\lambda=0$

מכיוון ש A היא מטריצה נילפוטנטית אז $A^{k-1}\neq 0$ ולכן על מנת שהמשוואה תהיה נכונה $\lambda=0$

וזהו הפתרון היחיד

4)א)

אנו יודעים כי הפולינום האופייני הוא $f_A(x) = |xI - A|$

כעת אנו מתבקשים לחשב את a_0 שהוא המספר הקבוע בפולינום

נציב בנוסחה שאנו יודעים -

$$f_A(0) = |0I - A| = |-A|$$

כעת נוכיח כי $|-A| = (-1)^n |A|$ ניקח כל שורה במטריצה $-A$ ונכפיל אותה ב-1 על מנת להפוך את המטריצה מ $A \to -A$ מכיוון שכפלנו n שורות ב-1 שינינו את הדטרמיננטה ב $(-1)^n$ ולכן –

$|-A| = (-1)^n |A|$ ולכן הוכחנו כי $f_A(0) = (-1)^n |A|$

ב)

נוכיח באמצעות אינדוקציה –

בסיס האינדוקציה הוא $k=1$ - נתון כי $Av = \lambda v \mid v \neq 0$ צריך להוכיח כי התנאי מתקיים גם עבור $A^1 v = \lambda^1 v$ וזה כמובן מתקיים. לכן הוכחנו עבור בסיס $k=1$

כעת נניח כי $A^k v = \lambda^k v$ ונוכיח עבור $A^{k+1} v = \lambda^{k+1} v$

נתחיל מ $A^{k+1} v$ נפתח אותו ונראה כי הוא שווה בסוף ל $\lambda^{k+1} v$

$$A^{k+1} v = \underbrace{A^k A}_{A^{k+1}} v = A^k \underbrace{\lambda v}_{Av = \lambda v} = \underbrace{\lambda^k \lambda v}_{A^k v = \lambda^k v \to A^k \lambda v = \lambda^k \lambda v} = \lambda^{k+1} v$$

לכן הוכחנו את האינדוקציה.

5)

מכיוון שנתון לנו הבסיס נוכל למצוא את המטריצה המיצגת והיא תהיה $[T]_B^B=\begin{bmatrix} | & | & | \\ T(P_1) & T(P_2) & T(P_3) \\ | & | & | \end{bmatrix}$

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כעת נמצא את הערכים העצמאיים של המטריצה

$$P_A=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)*\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)*(\lambda-1)^2=(\lambda-1)^3$$

לכן הערכים העצמיים יהיו $\lambda=1$

<u>נמצא את הווקטור העצמי עבור הערך $\lambda=1$</u>

הווקטור העצמי צריך לקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $v\in N\left[\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$ נדרג את המטריצה (היא כבר מדורגת)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\overset{a}{0}&\overset{b}{2}&\overset{c}{0}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to c=t,a=s,b=0\to t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

לסיכום – ישנם 1 ערכים עצמיים $\lambda=1$

עבור $\lambda=1$ הווקטור העצמי הוא $sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ כעת נחזיר זאת לתצוגת פולינומים $sp\{1,x^2\}$

(6

($\leftarrow$) נניח כי A לא הפיכה ונוכיח כי קיים לה ערך עצמי כך ש $\lambda = 0$

A לא הפיכה $\leftarrow$ $|A| = 0$ $\leftarrow$ $\lambda = \lambda \overbrace{|I|}^{1} = |\lambda I| = |\lambda I| - \overbrace{|A|}^{0} = |\lambda I - A| = 0$

ולכן $\lambda = 0$

($\rightarrow$) נניח כי קיים ערך עצמי למטריצה והוא $\lambda = 0$ ונוכיח כי היא לא הפיכה

$\lambda = 0 \leftarrow \exists v \mid v \neq 0$ כך ש $Av \neq 0$ - מכיוון ש $v \neq 0$ אזי המערכת תלויה לינארית $\leftarrow$ A לא הפיכה.