1)

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3*2-(1*1) = 6-1 = 5$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 1*\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} - 0*\ldots + 0*\ldots = -3*-8-(-2*-2) = 24-4 = 20$$

c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a & b & c \\ 1 & 2 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3*\begin{vmatrix} 2 & d & e & f \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3*2*\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0*\ldots + 0*\ldots + 0*\ldots - 1*1*\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0*\ldots + 0*\ldots + 0*\ldots$$

$$6*\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1*\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

חישבנו מקודם כמה $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ שווה (=20) ולכן

$$6*20-1*20 = 120-20 = 100$$

d) המסקנה היא כאשר יש לנו מטריצת בלוקים, הדטרמיננטה שווה למכפלה של המטריצות הריבועיות שבמטריצת הבלוקים.

(2

$$|A^t| = |A| \quad - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 9 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 9 & 3 & 2 \\ 28382 & 53222 & 50899 & 74037 & 94829 \end{vmatrix}$$

$$R^5 \leftarrow R^5 + R^4 * 10 + R^3 * 100 + R^2 * 1000 + R^1 * 10000$$

ביצענו כ 4 פעולות שורה שאינן משנות את הדטרמיננטה,

נפתח לפי שורה 5 ונקבל כי כל סכום מוכפל באחד המספרים של שורה R^5 ולכן נוכל לחלק כל סכום של דטרמיננטה משנית ב23 כי האיבר ב R^5 מתחלק ב23. משל

3)

נוכיח עבור $n=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ ולכן $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}*a_{11} - 0*a_{21} = a_{22}*a_{11}$$

כמו שניתן לראות אכן הדטרמיננטה שווה לאיברי האלכסון עבור $n=2$

כעת נוכיח עבור $n+1$ ולכן ניקח מטריצה בגודל $n+1*n+1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \dots & a_{(n+1)n+1} \end{pmatrix}$$

נפתח לפי השורה הראשונה,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \dots & a_{(n+1)n+1} \end{vmatrix} = a_{11}*\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(n+1)2} & \dots & a_{(n+1)n+1} \end{vmatrix}$$

ולכן ניתן לראות כי קיבלנו דטרמיננה של מטריצה משולשית תחתונה בגודל $n*n$ שלפי הנחת הדטרמיננטה שווה לכפל האלכסון, כפול האיבר a_{11} באלכסון החדש ולכן הדטרמיננטה של המטריצה בגודל $n+1*n+1$ שווה לכפל איברי האלכסון.

4)

$$\begin{vmatrix} a_1 & n & n & n & \dots & n & n \\ n & a_2 & n & n & \dots & n & n \\ n & n & a_3 & n & \dots & n & n \\ n & n & n & a_4 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & a_{n-1} & n \\ n & n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4-n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}-n & 0 \\ n & n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

נחסר את כל השורות (חוץ מהאחרונה) בשורה האחרונה.

$$\begin{vmatrix} a_1-n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4-n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}-n & 0 \\ n & n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & a_2-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & a_3-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & a_4-n & \dots & 0 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}-n & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

נשחלף את המטריצה על מנת שתהיה משולשית תחתונה.

על פי תרגיל 3, הראנו כי הדטרמיננטה של מטריצה משולשית תחתונה היא כפל איברי האלכסון, משל.

(5

(←)

נניח כי A_i הפיכה לכל $1 \le i \le n$ ונוכיח $\prod_{i=1}^{n} A_i$ הפיכה.

מכיון ש A_i אזי $|A_i| \neq 0$, לא קיים כפל של מספרים שאינם 0 כך שהתוצאה תהיה 0 ולכן גם

$0 \neq \prod_{i=1}^{n} |A|_i$ מכאן ש $\prod_{i=1}^{n} A_i$ הפיכה.

(→)

נניח כי $\prod_{i=1}^{n} A_i$ הפיכה ונוכיח כי A_i הפיכה לכל $1 \le i \le n$.

מכיון ש $\prod_{i=1}^{n} A_i$ הפיכה אזי $0 \neq \prod_{i=1}^{n} |A_i|$ מכפלת מספרים לא שווה 0 רק אם כל האיברים לא

שווים אפס ולכן עבור A_i לכל $1 \le i \le n$ - $|A_i| \neq 0$ ומכאן ש A_i הפיכה

6) a) נניח כי A,B דומות ונוכיח כי $|A|=|B|$

מכיוון ש A,B דומות אזי

$$A=P^{-1}BP\rightarrow$$

$PA=PP^{-1}BP\rightarrow$ - נכפיל ב P

$PA=PB\rightarrow$ - נצמצם

$|PA|=|PB|\rightarrow$ - למטריצות שוות, דטרמיננטות שוות

$|P|*|A|=|B|*|P|\rightarrow$ - חוקי דטרמיננטות

$|A|=|B|$ -נחלק את 2 האגפים ב $|P|$

b)

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A|=|B|=0$$

מכיוון ש B היא מטריצת האפס אזי גם $P^{-1}BP$ היא מטריצת האפס (כל דבר כפול מטריצת האפס הוא מטריצת האפס) ו A אינו מטריצת האפס ולכן A,B לא דומות, בסתירה למשפט.