לינארית 2 – תרגיל 3

1)א

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix} a+b \\ b+c \end{pmatrix}$$

לפי הבסיסים

$$B_1=\left\{1,1+x,1+x+x^2\right\}$$

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_{B_2}^{B_1}=\left(\left[T(1)\right]_{B_2},\left[T(1+x)\right]_{B_2},\left[T\left(1+x+x^2\right)\right]_{B_2}\right)$$

$$\left(\left[T(1)\right]_{B_2},\left[T(1+x)\right]_{B_2},\left[T\left(1+x+x^2\right)\right]_{B_2}\right)=\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B_2},\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2},\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{B_2}\right)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B_2}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\to\alpha=1,\beta=0\to\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\to\alpha=1,\beta=1\to\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{B_2}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\to\alpha=0,\beta=2\to\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת תהיה

$$[T]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ניקח על פי השאלה את הוקטור $3+2x+1\to$ $[v]_{B_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ונראה כי $\left[T(v)\right]_{B_2}=[T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}$

מצד אחד

$$\left[T(v)\right]_{B_2}=\left[T\left(3+2x+x^2\right)\right]_{B_2}=\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{B_2}\to\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha=2,\beta=3\to\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$[T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

ואכן 2 הצדדים יצאו שווים.

ב)

$$T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\left(a+(b+d)x+(c+a)x^2\right)$$

לפי הבסיסים

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_2=\left\{1,1+x,1+x+x^2\right\}$$

$$[T]_{B_2}^{B_1}=\left(\left[T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]_{B_2},\left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_{B_2},\left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]_{B_2},\left[T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]_{B_2}\right)$$

$$=\left(\left[\left(1+2x+2x^2\right)\right]_{B_2},\left[\left(1+x+x^2\right)\right]_{B_2},\left[\left(1-x+x^2\right)\right]_{B_2},\left[\left(x^2\right)\right]_{B_2}\right)$$

$$\left[\left(1+2x+2x^2\right)\right]_{B_2}=\alpha(1)+\beta(1+x)+\chi\left(1+x+x^2\right)\to\alpha=-1,\beta=0,\chi=2\to\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\left[\left(1+x+x^2\right)\right]_{B_2}=\alpha(1)+\beta(1+x)+\chi\left(1+x+x^2\right)\to\alpha=0,\beta=0,\chi=1\to\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[\left(1-x+x^2\right)\right]_{B_2}=\alpha(1)+\beta(1+x)+\chi\left(1+x+x^2\right)\to\alpha=2,\beta=-2,\chi=1\to\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[\left(x^2\right)\right]_{B_2}=\alpha(1)+\beta(1+x)+\chi\left(1+x+x^2\right)\to\alpha=0,\beta=-1,\chi=1\to\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת תהיה

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ניקח על פי השאלה את המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ונראה כי $\left[T(m)\right]_{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1}[m]_{B_1}$

מצד אחד

$$\left[T(m)\right]_{B_2} = \left[T\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[3+2x+5x^2\right]_{B_2} \to \alpha(1)+\beta(1+x)+\chi\left(1+x+x^2\right) \to \alpha=1, \beta=-3, \chi=5 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$[T]_{B_2}^{B_1}[m]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ואכן 2 הצדדים יצאו שווים.

2)

נתון ש T העתקה לינארית הפיכה ו B_1, B_2 בסיסים שלה.

על מנת להוכיח את $\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1} = \left(\left[T\right]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$ זה אותו דבר כמו להוכיח את הדבר הבא –

$\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1} * \left[T\right]_{B_1}^{B_2} = I$ מכיוון שאם נכפיל מימין ב $\left(\left[T\right]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$ נקבל את הדבר שאנו רוצים להוכיח – ניתן לעשות זאת כי T הפיכה.

$$\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1} * \left[T\right]_{B_1}^{B_2} = \left[\underbrace{T^{-1} \cdot T}_{I}\right]_{B_2}^{B_2} = \left[I\right]_{B_2}^{B_2} = I$$

ולכן הוכחנו כי $\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1} * \left[T\right]_{B_1}^{B_2} = I$ ונובע מה שרצינו להוכיח $\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1} = \left(\left[T\right]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$

3)

יהי וקטורים $\left\{v_1^{'}, v_2^{'}..v_n^{'}\right\}$ כך ש- $T\left(v_i\right)=v_1^{'}$

נתון כי $T\left(v_i\right)=S\left(v_i\right)$ ולכן ממעבר שוויונות $T\left(v_i\right)=S\left(v_i\right)=v_i^{'}$ לפי משפט שלמדנו בכיתה קיימת העתקה יחידה שתיקח מוקטורי בסיס מסויים לתמונה מסויימת וניתן לראות כי גם ל T,S אותו בסיס ואותה תמונה ולכן הם בהכרח אותה העתקה.

4)א)

נוכיח העתקה לינארית ע"י סגירות לחיבור וכפל יהיו M_1, M_2 מטריצות ונראה כי

$$T\left(\alpha M_1+M_2\right)=\alpha T\left(M_1\right)+T\left(M_2\right)$$

מצד אחד

$$T\left(\alpha M_1+M_2\right)=\left(\alpha M_1+M_2\right)^T=\alpha M_1^T+M_2^T$$

מצד שני

$$\alpha T\left(M_1\right)+T\left(M_2\right)=\alpha M_1^T+M_2^T$$

הראנו כי 2 הצדדים שווים ולכן זוהי העתקה לינארית

ב) נוכיח כי העתקה הלינארית היא על וחח"ע

על – ניתן לשחלף כל מטריצה ולכן וליצור כל מטריצה ולכן התמונה היא כל F^{mxn} שנרצה

חח"ע – מכיוון שהעתקה היא על $\dim\operatorname{Im}\left(T\right)=\dim F^{mxn}$

על פי משפט הדרגה $\dim F^{nxm}=\underbrace{\dim\operatorname{Im}\left(T\right)}_{\dim F^{mxn}}-\dim Ker\left(T\right)$ ולכן נעביר אגפים ונקבל

$\dim Ker\left(T\right)=\left\{0\right\}$ וזה הוכחה עבור חח"ע.

ג) נמצא את T^{-1}

מכיוון ש $\left(A^T\right)^T=A$ ניקח את העתקה T^{-1} להיות גם כן העתקה $T^{-1}\left(A\right)=A^T$

ונקבל כי $T^{-1}\left(T\left(A\right)\right)=A$ כמו שצריך.

(5

נמצא בסיס ל $\mathbb{R}^3$

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא קודם את המטריצה המייצגת –

$$[T]_B^B=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_B,\left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B,\left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_B\right)$$

$$\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_B,\left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B,\left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_B\right)=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right]_B$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]_B=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\chi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\alpha=1,\beta=0,\chi=2\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\chi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\alpha=1,\beta=1,\chi=0\rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right]_B=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\chi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\alpha=0,\beta=1,\chi=-2\rightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת תהיה

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

על מנת למצוא גרעין:

$$\left[\ker(T)\right]_B = Null\left([T]_B^B\right)$$

ולכן נמצא את מרחב האפס של המטריצה המייצגת –

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \chi & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \chi & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \chi & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\chi = t$$
$$\beta + \chi = 0 \to \beta + t = 0 \to \beta = -t$$
$$\alpha + \beta = 0 \to \alpha - t = 0 \to \alpha = t$$

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = 1*\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1*\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1*\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ker(T) = \left\{\begin{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{bmatrix}\right\}$$

כעת נמצא את התמונה:

$$\left[\operatorname{Im}(T)\right]_B = C\left([T]_B^B\right)$$

לכן נמצא את מרחב העמודות של המטריצה המייצגת –

$$\operatorname{Im}(T) = \left\{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_B, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B\right\}$$

ניקח את העמודות המקוריות שיש בהן איבר פותח

$$C\left(\left[T\right]_B^B\right)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\operatorname{Im}\left(T\right)=\left\{\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$