多项式

> 用书是复旦的那本

这一章在代数课程中, 显得十分突兀, 在前面矩阵以及线性空间的理论中, 多项式似乎格格不入, 所以我一开始没用心学, 到后面才发现很重要. 其实高等代数后面几章会反复用前面的知识, 每一章都很重要😩

前面几节

前面几节非常简单, 就是多项式的定义, deg, 整除, 互素, 最大公因式, 因式分解等等, 然后就推一点小结论.
过渡的一节是多项式函数, 在这一节之后到这一章结束之前, 不区分多项式与多项式函数.

复系数多项式

复系数多项式这一节最重要的就是代数基本定理

代数基本定理

每一个次数大于0的复数域上的多项式至少有一个复数根.

有这个代数基本定理, 就可以有一系列的推论:

推论

- 任意一个n次多项式在复数域内有n个根
- 任意一个n次多项式在复数域内可以分解为n个一次因子的积
- 复数域上的不可约多项式都是一次多项式

由以上的定理和推论还可以推广初中学的韦达定理

Vieta定理

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 在复数域上有n个根, 所以可以分解为:

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

对比系数可以发现:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\ \sum_{0\leq i<j\leq n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}\\ \cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=(-1^n)\frac{a_0}{a_n}\end{gathered}$$

实系数多项式

研究多项式主要研究怎么因式分解
由前面的余数定理, 找到根就可以因式分解了, 下面是对实系数多项式根的一些讨论

定理

对于实系数多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 如果虚数$a+bi$是根, 那么$a-bi$也是根

证明

利用共轭复数的性质: $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

推论

实数域上的不可约多项式只能是:

1. 一次因式
2. 二次因式: ax^2+bx+c且满足$b^2-4ac<0$

有理系数多项式

有理数和实数虽然都是数域, 但是经过后面讨论可以看到: 它的性质也太烂了, 那些定理长的都很丑, 远不如复数域和实数域优美
这一节是有理系数多项式, 但是会讨论很多整系数多项式的内容, 原因是多项式只有有限项, 有限项的分母肯定有公倍数, 乘以公倍数之后就变成整系数多项式了, 而整数只成为环, 所以性质没有前面的好. 不过要记住: 这一节讲的是有理系数多项式, 不是整系数多项式!!!
下面给出整系数多项式有有理根的必要条件 (前面两节大多数是充要条件, 从这里开始性质都比较差)

定理

整系数多项式: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 有理数$q/p$(pq互素)是其根的必要条件: $p|a_n, q|a_0$

证明

假设q/p是根, 代进去多项式中, 然后两边同时乘以p^n, 对比一下就可以得到结论.

这个定理本身是讨论整系数多项式的, 不是本节的标题: 有理系数多项式. 下面引入一个概念(还是和整系数多项式有关), 用这个概念结合上面这个定理, 可以证明一些有理系数多项式的定理.

本原多项式

本原多项式是一个整系数多项式: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 并且它的系数$a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0$的最大公约数为1

下面的引理揭示了本原多项式的代数结构(乘法下称为幺半群??, 其实我不太懂, 不过应该也可以说成: 加法是abel群, 乘法是幺半群 -> 是一个环)

Gauss引理

本原多项式之积仍是本原多项式.

接下来终于轮到有理数登场了:

定理

整系数多项式: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$在有理数域上可约, 则在整数环上也可约

证明

先把整系数多项式$f(x)$分解为两个有理系数多项式之积

$$f(x)=g(x)h(x)$$

把有理系数多项式$g(x)$先搞得很像整系数多项式: $g(x)=\frac{1}{c}cg(x)$, 其中$cg(x)$是整系数多项式. 再整成本原多项式:

$$g(x)=\frac{d}{c}\frac{c}{d}g(x)$$

其中$\frac{c}{d}g(x)$是本原多项式, 对$h(x)$也做对应的处理, 可以得到:

$$h(x)=\frac{b}{a}\frac{a}{b}h(x)$$

令$g_1(x)=\frac{c}{d}g(x), h_1(x)=\frac{a}{b}h(x)$, 则$g_1(x)h_1(x)$仍是本原多项式.
因为本原多项式没有公因子了, 且$f(x)$是整系数多项式, 所以$\frac{d}{c}\frac{b}{a}$是整数.
因此, $f(x)$在整数环上也可约.

上面这个定理主要的作用是它的逆否命题:

定理

整系数多项式$f(x)$在整数环上不可约, 则在有理数域上也不可约.

根据这个逆否命题, 可以证明下面的判别法

Eisenstein判别法

整系数多项式: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 若有素数$p$, 使得$p\mid a_i,(i=0,1,\ldots,n-1),p\nmid a_n,p^2\nmid a_0$, 则在有理数域上不可约.

证明

假设可约, 接下来引出矛盾:

$$f(x)=(b_mx^m+\cdots+b_0)(c_tx^t+\cdots+c_0)$$

则有$m+t=n,a_0=b_0c_0,a_n=b_mc_t$,
根据$p\nmid a_0,p^2\nmid a_0$, 有$p\mid b_0$或$p\mid c_0$, 不妨设 $p\mid b_0,p\nmid c_0$,
根据$p\nmid a_n$, 有$p\nmid b_m$且$p\nmid c_t$,
因此存在k, 使得$p\mid b_0,p\mid b_1,\cdots p\mid b_{k-1}$, 但$p\nmid b_k$, 而

$$a_k=b_0c_k+b_1c_{k-1}+\cdots+b_kc_0$$

根据假设, $p|a_k$, 这与$p\mid b_k$矛盾.
因此假设不成立, 原多项式不可约.