拓扑学作业7-10习题参考答案

#7. 1. (a) $\forall$ (i) $(x,x)\in A$, 则 $x\sim x \Leftrightarrow f(x)=f(x)$ (自反性)

(ii) $x\sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow y\sim x \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ (对称性)

(iii) 若 $x\sim y$, $y\sim z$ 由A的定义, 有

$f(x)=f(y)=f(z) \Rightarrow f(x)=f(z) \Leftrightarrow x\sim z$ (传递性)

故 A 为 X 上的一个等价关系.

(b) 定义: $\tilde{f}: X/A \longrightarrow Y$, 则 $\tilde{f}$ 为双射
$[x] \longmapsto f(x)$

欲证 $Y \cong X/A$, 只须证明 $\tilde{f}$ 为同胚映射.

事实上, $\forall$ 开集 U (在Y中), $\tilde{f}^{-1}(U)=[U]$ 为 X/A 中开. 从而 $\tilde{f}$ 连续; 现考虑 $\tilde{f}$ 的逆映射

$\tilde{f}^{-1}: Y \longrightarrow X/A$, 任取 X/A 的一个开集 $[V]$

$y \longmapsto [\tilde{f}^{-1}(y)]$

那么: $(\tilde{f}^{-1})^{-1}([V]) = \tilde{f}([V]) = \tilde{f}([V]) = V$ 开

从而 $\tilde{f}^{-1}$ 也是连续映射. 故 $X/A \cong Y$.

2. (a) $p(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t\in[0,1]$ 易见 $p(t)$ 为连续的满射. 欲证 $p(t)$ 为闭映射. 现任取 $[t_0,t_1]$ 为 $[0,1]$ 的一个闭区间, 则 $p([t_0,t_1])$ 为 S^1 上的一个闭弧. 显然为 S^1 的一个闭子集. 故 $p([t_0,t_1])$ 为闭的从而 p 为闭映射, 且也满的. 而且可知 p 为商映射

(b) 证法(1). 由1题的结论, $[0,1]/\sim \cong S^1$.

证法(2). 直接定义如下映射: $\varphi: [0,1]/\sim \longrightarrow S^1$

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{2\pi i t} & x\in(0,1) \\ 1 & x=0,1 \end{cases}$$ 则 $\varphi(t)$ 为同胚

3. 证明：由于 X 与 Y 为可分空间，则分别存在可数稠密子集 D_1 与 D_2，其中 $D_1 \subset X$，$D_2 \subset Y$。现在考虑 $\mathcal{D} = D_1 \times D_2$，验证 $\mathcal{D}$ 在 $X \times Y$ 中稠密。由于 $X \times Y$ 是积空间，则 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U\text{在}X\text{中开}, V\text{在}Y\text{中开}\}$ 为 $X \times Y$ 的一个拓扑基。显然对于任意 $\mathcal{B}$ 中的一个元素 $U \times V$，都有 $(U \times V) \cap \mathcal{D} \neq \phi$

事实上：$(U \times V) \cap \mathcal{D} = (U \times V) \cap (D_1 \times D_2) = (U \cap D_1) \times (V \cap D_2)$。由于 D_1 在 X 中稠密，D_2 在 Y 中稠密，从而 $U \cap D_1 \neq \phi$，$V \cap D_2 \neq \phi$。综上所述，$\mathcal{D}$ 与 $X \times Y$ 中任意开集（非空）的交都非空，从而 $\mathcal{D}$ 在 $X \times Y$ 中稠密。而且 $D_1 \times D_2$ 显然可数，所以 $\mathcal{D}$ 为 $X \times Y$ 的可数稠密子集，故 $X \times Y$ 是可分的。

4. (a) $\forall r \in \mathbb{R}$，设 $\mathcal{U}_r$ 为 r 的一个邻域系，

$$\mathcal{U}_r = \{[a,b) \mid a<b, \text{且 } a \le r < b\}$$

取 $a, b \in \mathbb{Q}$，

$$\mathcal{E}_r = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a \le r < b\}$$

显然 $\mathcal{E}_r$ 为可数集，并且为 r 的邻域基，从而 $\mathbb{R}_e$ 为 C_1 空间

(b) $\mathbb{Q} \cap [a,b) \neq \phi$ 对 $\forall\ [a,b) \in \mathcal{B}$，从而 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}_e$ 中稠密，故 $\mathbb{R}_e$ 为可分空间.

(c) 设 $\mathcal{U}$ 为 $\mathbb{R}_\ell$ 的任意一个基，设 $a\in\mathbb{R}$，

则 $[a, a+1)$ 在 $\mathbb{R}_\ell$ 中开，从而存在 $U_a\in\mathcal{U}$

s.t. $a\in U_a\subset[a, a+1)$，并且 $\inf U_a=a$

显然，若 $a\neq b$，由上面的取法，有 $U_a\neq U_b$

故考虑映射：$\varphi: \mathbb{R}\to\mathcal{U}$，$a\mapsto U_a$，显然 φ 为单射。

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ 不可数，故 $\mathcal{U}$ 是不可数的基，从而

$\mathbb{R}_\ell$ 不是 C_2.

#8. 证明：由于 X 是 T_0 空间，从而 $\forall\ x\neq y$，则存在

x 的开邻域 U_x，s.t. $y\notin U_x$ 或者

$\exists$ y 的开邻域 W_y，s.t. $x\notin W_y$. WLOG,

不妨设有 x 的邻域 U_x，s.t. $y\notin U_x$.

注意到 X 是正则空间，所以对于 U_x，$\exists$ x 的

开邻域 V_x. s.t. $x\in V_x\subset\overline{V_x}\subset U_x$

从而 $y\notin\overline{V_x}$，再由正则性，存在 y 的

开邻域 U_y 以及 $\overline{V_x}$ 的开邻域 $Q_{\overline{V_x}}$

使得 $Q_{\overline{V_x}}\cap U_y=\phi$

显然 $x\in Q_{\overline{V_x}}$，$y\in U_y$，从而

X 是 T_2 空间.

2. 证明：设 $A\subset X$，若 $A=\phi$，显然 $d(A)=\phi$ 是闭集.

现设 $A\neq\phi$，只须证明 $(d(A))^c$ 是开集。$\forall y\in(d(A))^c$
$\Rightarrow y\notin d(A)$，即 y 不是 A 的聚点，从而 $\exists U_y\cap(A\setminus\{y\})=\phi$
又由于 X 为 T_1 空间，故 $\forall x\in U_y$，且 $x\neq y$，都 $\exists$ x 的开邻域 V_x，s.t. $x\in V_x$，但 $y\notin V_x$. 现取 $W=V_x\cap U_y$
则 W 为 x 的开邻域，并且 $y\notin W$，$W\cap(A\setminus\{y\})=\phi$
（因为：$W\subset U_y$，$U_y\cap A\setminus\{y\}=\phi$）从而 x 不是 A 的聚点，
由 x 的任意性，可得 U_y 中所有点都不是 A 的聚点
从而：$U_y\subset(d(A))^c$. 即 y 是 $(d(A))^c$ 的内点
故 $(d(A))^c$ 为开. $\Rightarrow d(A)$ 为闭。

3. （原题应改为 Y 是 Hausdorff 空间）.

证明：只须证明：G^c 为开集

$\forall(x_0,y_0)\in G^c$ 则 $f(x_0)\neq y_0$ 由于 Y 为 Hausdorff 空间，故有 $f(x_0)$ 与 y_0 的各自的开邻域 $U_{f(x_0)}$ 与 V_{y_0}，使得：$U_{f(x_0)}\cap V_{y_0}=\phi$
显然 $f^{-1}(U_{f(x_0)})\times V_{y_0}$ 为 (x_0,y_0) 在 $X\times Y$ 空间中的开邻域，并且 $f^{-1}(U_{f(x_0)})\times V_{y_0}\subset G^c$
从而 G^c 为开集，$\Rightarrow G$ 为闭集.

4. 证明：由正则性知，存在 x 的开邻域 V_x 和 F 的开邻域 U_F, s.t $V_x \cap U_F = \phi \Rightarrow U_F \subset V_x^c$

$\Rightarrow \overline{U_F} \subset V_x^c$，故 $\overline{U_F} \cap V_x = \phi$,

对于 V_x 来说，再由正则性，$\exists$ 开 W_x. s.t

$$x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset V_x.$$

$\Rightarrow \quad \overline{U_F} \cap \overline{W_x} = \phi$. 题为证.

5. 提示：若 f 是 X 到 Y 的同胚，则 f 是开且闭的映射.

若 X 是正则，必有 $\forall x, U_x. \Rightarrow \exists\ x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 的任意邻域 $f(V_x) \subset f(\overline{V_x}) = \overline{f(V_x)} \subset f(U_x)$

从而正则.

6. 证明 (a) 由拓扑定义直接证明.

(b) 显然 $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$，故 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 空间.

(c) 无需证明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 不是正则空间. 由 $\mathcal{T}$ 的构造，知 $\mathbb{Q}$ 为闭集，任取一个无理数 a，则 $a \notin \mathbb{Q}$

若 W 为 $\mathbb{Q}$ 的一个开邻域，则易见 W 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 开闭集，于是 $W \cap \mathbb{Q}^c$ 在 $\mathbb{R}$ 中也是开闭集，$\forall$ 取 a 的在 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 中的开邻域 $U \setminus E$, $(E \subset \mathbb{Q}, U \in \mathcal{U})$

则 $\quad W \cap (U \setminus E) \supset (W \cap \mathbb{Q}^c) \cap U \neq \phi$

从而 $W \cap (U \setminus E) \neq \phi$，故不是正则空间

(即不存在 a 的开邻域与 $\mathbb{Q}$ 的开邻域不交.)

#9. 1. 证明：由正规空间的性质，则存在 U_A 与 U_B 分别为 A 与 B 的开邻域使得 $U_A \cap U_B = \phi$. $\Rightarrow U_A \subset U_B^c$

$$\Rightarrow \overline{U_A} \subset U_B^c \Rightarrow \overline{U_A} \cap U_B = \phi.$$

又对于 B 的开邻域 U_B 而言，再由正规性，从而

$\exists$ 开 V_B s.t. $B \subset V_B \subset \overline{V_B} \subset U_B$.

故有：$\overline{U_A} \cap \overline{V_B} = \phi$ 即为证.

2. 证明：设 $f: X \to Y$ 连续的闭的满映射.

须证 Y 为正规. 则设 B_1, B_2 为 Y 的两个不相交的闭集，则 $f^{-1}(B_i) = A_i$ $i=1,2$ 为 X 中两个不相交闭集. 故有不相交的开邻域 U_1, U_2.

现令：$W_i = \left(f(U_i^c)\right)^c$ $(i=1,2)$，则 W_i 为 Y 的两个开集. 并且：

(a) $B_i \subset W_i$ （即，$B_i \cap f(U_i^c) = \phi$ 因为 $f^{-1}(B_i) = A_i \subset U_i$）

(b) $W_1 \cap W_2 = \phi$.

（由 $U_1 \cap U_2 = \phi \Rightarrow U_1^c \cup U_2^c = X$

f 为满射，$\Rightarrow f(U_1^c) \cup f(U_2^c) = Y$）

故 Y 为正规空间.

3. 证明：记 $f: A \longrightarrow [0,1]^n$

$$a \mapsto (f_1(a), f_2(a), \cdots f_n(a))$$

则 $f_i: A \to [0,1]$ 连续 $i=1,2,\cdots n$

又由于 X 是正规空间，故由Tietze扩张引理，

对于 $\forall\, i=1,\cdots n$，$\exists\, g_i: X \longrightarrow [0,1]$ 为 f_i 的扩张

所以定义：$g: X \to [0,1]^n$

$$x \mapsto (g_1(x) \cdots g_n(x))$$

显然 g 为 f 的扩张.

4. 证明：设 $h: X \to Y$ 为同胚映射，则 $h^{-1}: Y \to X$ 也为同胚映射（即双射+连续）. 欲证 Y 是完全正则 $\Longleftrightarrow$ $\forall\, y \in Y$，闭集 $B \subset Y$，s.t. $y \notin B$

$\exists$ 连续映射 $f: Y \longrightarrow [0,1]$，s.t. $f(y)=0$

$f|_B \equiv 1$.

为此：任取 $y \in Y$，闭集 $B \subset Y$，s.t. $y \notin B$，

那么 $h^{-1}(y) \in X$，$h^{-1}(B)$ 为 X 中的闭集

而且 $h^{-1}(y) \notin h^{-1}(B)$，再由 X 的完全正则性，得知，存在 $g: X \to [0,1]$ 连续，使得

$$g(h^{-1}(y)) = 0 \quad g|_{h^{-1}(B)} \equiv 1$$

现考虑：映射：

$$f = g \circ h^{-1}: Y \xrightarrow{h^{-1}} X \to [0,1]$$

显然：$f: Y \to [0,1]$ 连续，并且

$$f(y) = g(h^{-1}(y)) = 0, \quad f|_B = g|_{h^{-1}(B)} \equiv 1$$

从而 Y 也为完全正则.

5. 证明：($\Rightarrow$) 由 Tychonoff 空间定义：得知 X 是完全正则的 T_1 空间，显然 $\forall x \in X$ 和任何一个不包含点 x 的闭集 A（或单点集也是闭）

$\exists$ 连续映射：$f: X \to [0,1]$，s.t.

$f(x)=0$，$f|_A \equiv 1$。

$\Leftarrow$ 显然只须证明：X 是 T_1 空间即可证明 X 是 $T_{3.5}$。

实际，X 是 T_2 空间。因为：$\forall x \neq y$，$x, y \in X$ 由

假设 $\exists$ 连续映射：$f: X \to [0,1]$，s.t

$f(x)=0$，$f(y)=1$。（取 A 为单点集）

故 $x \in f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ 与 $y \in f^{-1}((\frac{1}{2},1])$

$f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ 与 $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ 都为 X 中的开集。

并且：$f^{-1}([0,\frac{1}{2})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2},1]) = \phi$

从而 X 为 T_2 空间 $\Rightarrow$ T_1 空间。

故 X 为 Tychonoff 空间。

#10. 1. 证明：任取 $\mathcal{C}$ 为 $(R, \mathcal{T}_f)$ 的一个开覆盖，则

可以取 $c \in \mathcal{C}$，那么 c 是某个有限点集的补集，记为 $\{r_1, \ldots r_n\}$，即 $c = \{r_1, \ldots r_n\}^c$

由于 $\mathcal{C}$ 为 $(R, \mathcal{T}_f)$ 的开覆盖，从而对每一个 r_i，$\exists$ $c_i \in \mathcal{C}$，s.t $r_i \in c_i$ $(i=1, \cdots n)$

现取 $\widetilde{\mathcal{C}} = \{c, c_1, c_2, \cdots c_n\}$，那么 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的有限子覆盖，从而 $(R, \mathcal{T}_f)$ 为紧致的。

但 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_c)$ 不是紧致. 为此取一个特殊的开覆盖如: $\mathscr{C}=\{(\mathbb{Q}\setminus\{q\})^c \mid q\in\mathbb{Q}\}$

那么, 该开覆盖没有有限子覆盖.

若不然, 记其有限子覆盖为: $\hat{\mathscr{C}}$.

$$\hat{\mathscr{C}}=\{(\mathbb{Q}\setminus\{q_1\})^c, (\mathbb{Q}\setminus\{q_2\})^c, \dots (\mathbb{Q}\setminus\{q_n\})^c\}$$

并且: $\mathbb{R}=\bigcup_{i=1}^{n}(\mathbb{Q}\setminus\{q_i\})^c$

显然 $\bigcup_{i=1}^{n}(\mathbb{Q}\setminus\{q_i\})^c = (\mathbb{Q}\setminus\{q_1, q_2 \dots q_n\})^c \neq \mathbb{R}$

矛盾. 从而 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_c)$ 不是紧致的.

2. 证明: 直接由紧致性定义推出.

3. 证明: 设 ~~A~~ 是X子集. $A\subset X$, 但 A 没有聚点.
那么 $\forall x\in X$, $x\notin d(A)$, $\Rightarrow$ $\exists$ 开邻域 U_x, s.t. $U_x\cap(A\setminus\{x\})=\phi$, 现取 $\mathcal{U}=\{U_x \mid x\in X \text{ 并且 } U_x\cap(A\setminus\{x\})=\phi\}$, 显然 $\mathcal{U}$ 为X的开覆盖, 那么 $\mathcal{U}$ 没有有限子覆盖, 从而非紧矛盾.

4. 证明: 设 (X,d) 是一个紧致的度量空间. 对于 $\forall k\in Z^+$, 集族 $\widehat{\mathscr{B}}_k=\{B(x,\frac{1}{k}) \mid x\in X\}$ 为X的一个开覆盖, 由于X是紧致的, 所以 $\widehat{\mathscr{B}}_k$ 有一个有限子覆盖记为 $\widetilde{\mathscr{B}}_k$, 那么 $\widetilde{\mathscr{B}}_k=\{B(x_1^k,\frac{1}{k})\dots B(x_n^k,\frac{1}{k})\}$
(这里 x_i^k 为某个 $x\in X$, 其由 k 与 $\widehat{\mathscr{B}}_k$ 决定)

现定义集合族：$D_k^n = \{x_1^k \cdots x_n^k\}$ $n \in N$. $k \in Z_+$

那么取 $D = \bigcup_{k \in Z_+} D_k^n$，显然 D 为可数集。

现在证明 D 在 (X, d) 中稠密，这等价于 (X, d) 的任意一个开球 $B(x, \varepsilon)$，都有 $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \phi$

（因为 $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ 为 (X, d) 一个拓扑基）。

注意到，对于开球 $B(x, \varepsilon)$，则 $\exists k_\varepsilon \in Z^+$. s.t

$\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$，从而有 $B(x, \frac{1}{k_\varepsilon}) \subset B(x, \varepsilon)$，显然

$B(x, \frac{1}{k_\varepsilon}) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{k_\varepsilon}$，而对于 k_ε 而言，$\widetilde{\mathcal{B}}_{k_\varepsilon}$ 为 $\mathcal{B}_{k_\varepsilon}$

的一个有限子覆盖，从而：$B(x, \frac{1}{k_\varepsilon}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i^{k_\varepsilon}, \frac{1}{k_\varepsilon})$

其中 $B(x_i^{k_\varepsilon}, \frac{1}{k_\varepsilon}) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{k_\varepsilon}$. 从而 $x \in$ 某个 $B(x_i^{k_\varepsilon}, \frac{1}{k_\varepsilon})$

$\Rightarrow B(x, \frac{1}{k_\varepsilon}) \cap D_{k_\varepsilon}^n \neq \phi$ （因为 $d(x, x_i^{k_\varepsilon}) < \frac{1}{k_\varepsilon}$ 即 $B(x, \frac{1}{k_\varepsilon}) \ni x_i^{k_\varepsilon}$）

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap D \neq \phi$

从而 D 为 X 的可数稠密子集，所以 X 可分。

可分 + 度量空间 $\Rightarrow A_2$ 。

5. 证明：只须验证对 $f^{-1}(B)$ 的任一个开覆盖 $\mathcal{U}$ 都有有限子覆盖. $\forall b \in B$, $\mathcal{U}$ 也为紧致集 $f^{-1}(b)$ 的开覆盖，$\Rightarrow f^{-1}(b)$ 存在 $\mathcal{U}$ 中有限成员覆盖，记为 $\{u_1 \ldots u_m\}$，那么令

$W_b = \bigcup_{i=1}^{m} u_i$ $(u_i \in \mathcal{U})$，构造

$V_b = (f(W_b^c))^c$，易见 V_b 为 b 的开邻域

并且 $f^{-1}(V_b) \subset W_b$

取 $\{V_b \mid b\in B\}$，则其是 B 在 Y 中的开覆盖.

则由 B 的紧致性知：$\exists$ 有限子覆盖 $V_{b_1}\cdots V_{b_n}$

则：$f^{-1}(B) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{b_i}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{b_i}$

于是 $f^{-1}(B)$ 被 $\mathcal{U}$ 中有限个成员覆盖.

故 $f^{-1}(B)$ 紧致。

6. 证明：由于 X 是 T_4 空间，从而是 T_1 的正规空间.
对于 $x\neq y$，有 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 为不相交的两个闭集
由 Urysohn 引理，$\exists$ 一个连~~通~~续映射
$f: X \longrightarrow [0,1]$，使得 $f(x)=0$, $f(y)=1$.
但 X 也是连通的，连通性是在连续映射下不变的性质，故有 $f(X)$ 是 $[0,1]$ 中的一个连通子集，易见 $f(X)=[0,1]$.
（由于 $[0,1]$ 中的连通子集是区间）
而 $[0,1]$ 是不可数集，从而 X 也不可数。