第三章

第四节

多维随机变量的特征数

- 多维随机变量函数的数学期望
- 数学期望与方差的运算性质
- 协方差
- 相关系数
- 随机向量的数学期望与协方差阵

一、多维随机变量函数的数学期望

(1) 若已知(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\qquad i,j=1,2,\ldots$$

则函数$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

一、多维随机变量函数的数学期望

(2) 若已知$(X,Y)\sim p(x,y)$，则函数$Z=g(X,Y)$

的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot p(x,y)dxdy$$

注1 上式中级数与积分要求绝对收敛。

注2 上式可推广至二维以上的情况。

一、多维随机变量函数的数学期望

例1. 设$r.v.(X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}x+y & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

试求$Z=XY$的数学期望.

解：$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot p(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

一、多维随机变量函数的数学期望

例2. 已知(X,Y)在正方形$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$上随机取值,试求$E(X^2+Y^2)$.

解:依题意,(X,Y)服从D上均匀分布, D的面积为1

$$p(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\cdot p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)dxdy=\frac{2}{3}$$

课 堂 练 习

在长为 a 的线段上任取两点 X 与 Y，求两点间的平均长度.

——求 $E(|X-Y|)$

二、数学期望的性质

- 加法法则
- 乘法法则
- 柯西-许瓦兹不等式

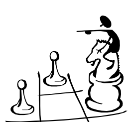
二、数学期望的性质

1. 加 法 法 则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

推广：$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$$



二、数学期望的性质

2. 乘 法 法 则

设X,Y为同类型随机变量, 且相互独立, 则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

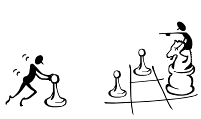
推广：若$X_1,X_2,\ldots,X_n$为相互独立的随机变量,则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

二、数学期望的性质

3. Cauchy-Schwartz不等式

$$|E(XY)|^2 \le E(X^2)E(Y^2)$$



课 堂 练 习

一民航送客车载有20位乘客自机场开出，乘客有10个站可以下车。如到达一车站没有乘客下车就不停车，以X表示停车次数，试求$E(X)$。(设乘客在各车站下车是等可能的，且各乘客是否下车是相互独立的)。

三、方差的性质

设X,Y为两个相互独立的随机变量，则

$$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$$

推广：若$r.v.\ X_1,X_2,\cdots,X_n$ $ind.$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$为任意常数，则

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2Var(X_i)$$

若$X_1,\cdots,X_n\ i.i.d.(0-1)$，则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)$$

故 $$Var(X)=Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p(1-p)=np(1-p)$$

若X与Y不独立，$Var(X+Y)=?$

$$Var(X+Y)=E\left[((X+Y)-E(X+Y))^2\right]$$

$$=E\left[((X-EX)+(Y-EY))^2\right]$$

$$=E\left[(X-EX)^2\right]+E\left[(Y-EY)^2\right]+2E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$=Var(X)+Var(Y)+2\underbrace{\boxed{E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]}}_{\text{协方差}}$$

四、协方差

1. 协方差的定义

设(X,Y)为二维随机变量，称

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

为X与Y的协方差。

注：$Cov(X,X)=Var(X)$

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

四、协方差

2. 协方差的性质

1^0 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2^0 $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

3^0 $Cov(X_1\pm X_2,Y)$

$=Cov(X_1,Y)\pm Cov(X_2,Y)$

4^0 $|Cov(X,Y)|\le\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}$

四、协方差

5^0 $Cov(X,a)=0$

6^0 若X与Y相互独立，则 $Cov(X,Y)=0$

7^0 $Cov(aX\pm b,cY\pm d)=acCov(X,Y)$

8^0 $Var(aX+bY+c)$

$=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$

课堂练习

1．X 与 Y 独立，$\text{Var}(X) = 6$，$\text{Var}(Y) = 3$，

则 $\text{Var}(2X-Y) = ($ 27 $)$.

2．$X \sim P(2)$，$Y \sim N(-2, 4)$，X与Y独立，

则 $E(X-Y) = ($ 4 $)$;

$E(X-Y)^2 = ($ 22 $)$.

四、协方差

例3. n 个人、n 件礼物，任意取．X 为拿对自己礼物的人数，求 $E(X)$, $\text{Var}(X)$

解：记 "$X_i = 1$" = "第 i 个人拿对自己的礼物"

"$X_i = 0$" = "第 i 个人未拿对自己的礼物"

则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，因为 $E(X_i) = 1/n$，所以 $E(X) = 1$

又 $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \text{Cov}(X_i, X_j)$

X_iX_j	0	1
P	$1-1/[n(n-1)]$	$1/[n(n-1)]$

故 $E(X_iX_j) = 1/[n(n-1)]$

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= n\frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{i<j}\frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

五、相关系数

1. 相关系数的定义

设(X,Y)为二维随机变量，称

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

为随机变量X与Y的相关系数。

注： 相关系数是反映X与Y相关关系的一个无量纲的特征量。

五、相关系数

2. 注意点

$\text{Corr}(X, Y)$ 的大小反映了X与Y之间的线性关系：

- $\text{Corr}(X, Y)$ 接近于1，X 与 Y 间 正相关.
- $\text{Corr}(X, Y)$ 接近于 -1，X 与 Y 间 负相关.
- $\text{Corr}(X, Y)$ 接近于 0，X 与 Y 间 不相关.

没有线性关系

五、相关系数

3. 相关系数的性质

1^0 $|Corr(X,Y)| \le 1$

注：$|Corr(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow$ ∃常数$a(\ne 0), b$,使

$$P\{Y = aX + b\} = 1$$

2^0 若X,Y相互独立，且$Var(X), Var(Y) > 0$,

则 $Corr(X,Y) = 0$

定义 若$Corr(X,Y)=0$，则称X与Y为不相关。

例 题 - 4

设随机变量(X,Y)服从单位圆内的均匀分布，即

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & 当\ x^2+y^2<1\\ 0 & 当\ x^2+y^2\ge 1\end{cases}$$

试求$Cov(X,Y)$。

解：
$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & |y|<1\\ 0 & |y|\ge 1\end{cases}$$

显然，$E(X)=E(Y)=0$

$$Cov(X,Y)=E(XY)=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2<1}xydxdy=0 \Rightarrow Corr(X,Y)=0$$

显而易见，$p(x,y)\ne p_X(x)p_Y(y)$

故而，X与Y不独立

注1：X与Y相互独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ X与Y不相关

例 题 - 5

设$r.v. X \sim U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，而$Y=\cos X$，即$Y$与$X$有严格的函数关系，

但

$$E(XY)=E(X\cos X)=\int_{-1/2}^{1/2}x\cos x\cdot 1dx=0$$

而 $E(X)=0$

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0 \Rightarrow Corr(X,Y)=0$

注2：相关系数只是刻划了两个随机变量间“线性”关系的程度。

设期望, 方差, 协方差, 相关系数都存在, 则

$$Cov(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad Corr(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

例 题 - 6

设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

试求$Cov(X,Y)$。

解：$p_X(x)=\begin{cases}\int_0^2 \frac{1}{4}dy=\frac{1}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$p_Y(y)=\begin{cases}\int_0^2 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

即 $p_X(x)p_Y(y)=p(x,y)\Rightarrow X$与$Y$相互独立

$\Rightarrow X$与Y不相关$\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

例 题 - 7

设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求（1）$Cov(X,Y)$;

（2）$Var(2X\pm 3Y)$。

例 题 - 8

设 (X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

求 X, Y 的相关系数.

课 堂 练 习

设$r.v.X$、Y相互独立，且$X\sim N(720,30^2)$, $Y\sim N(640,25^2)$,求$Z_1=2X+Y, Z_2=X-Y$的分布，并求$P\{X>Y\}, P\{X+Y>1400\}$。

六、随机向量的数学期望与协方差阵

1. 定义

记 $\bar{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)'$，则

$$E(\bar{X})=(E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n))'$$

称
$$\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n)\\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n)\end{pmatrix}$$

为 $\bar{X}$ 的协方差阵，记为 $\mathrm{Cov}(\bar{X})$，或 Σ

六、随机向量的数学期望与协方差阵

2. 协方差阵的性质

定理 协方差阵对称、非负定

EX. 设 $X\sim N(0, 1)$, $Y\sim N(0, 1)$, $\mathrm{Var}(X-Y)=0$, 求 (X, Y) 的协差阵 Σ .

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

六、随机向量的数学期望与协方差阵

3. 相关矩阵的定义

$$R=\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn}\end{bmatrix} \text{—— } \vec{X} \text{ 的相关矩阵.}$$

其中，$\rho_{ij}=Corr\left(X_i,X_j\right)$

六、随机向量的数学期望与协方差阵

4. n维正态随机变量

令 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\vdots\\E(X_n)\end{pmatrix}$

$\Sigma=\left(\sigma_{ij}\right)_{n\times n}$，$\sigma_{ij}=Cov(X_i,X_j)$， $i,j=1,2,\cdots,n$

则 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$

六、随机向量的数学期望与协方差阵

n维正态随机变量的性质

1). $\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)^T\sim n$维正态分布 $\Longleftrightarrow$

任意线性组合$\sum\limits_{i=1}^{n}l_iX_i\sim$一维正态分布

2). $\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)^T\sim n$维正态分布, 设$Y_1,\cdots,Y_k$是$X_j(j=1,\cdots,n)$

的线性函数，则 $\left(Y_1,\cdots,Y_k\right)\sim k$维正态分布

--- 正态变量的线性变换不变性

3). $\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\sim n$维正态分布, 则

$X_1,\cdots,X_n$相互独立$\Leftrightarrow$两两不相关

第三章

第五节

条件分布与条件期望

一、条件分布

1. 离散型随机变量的条件分布

(1) 条件分布列

$$p_{i|j}=P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

(2) 条件分布函数

$$F(x\,|\,y)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i\,|\,Y=y)$$

一、条件分布

2. 连续型随机变量的条件分布

分母可能为0

$$F_{X|Y}(x|y)=P\left(X\le x\middle|Y=y\right)=\lim_{\varepsilon\to0}P\left(X\le x\,|\,y\le Y\le y+\varepsilon\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{P\left(X\le x,y\le Y\le y+\varepsilon\right)}{P\left(y\le Y\le y+\varepsilon\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\varepsilon}p(u,v)dvdu}{\int_{y}^{y+\varepsilon}p_Y(v)dv}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\boxed{\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon}p(u,v)dv}\,du}{\boxed{\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon}p_Y(v)dv}}\qquad \xrightarrow{\varepsilon\to0}p(u,y),\quad \xrightarrow{\varepsilon\to0}p_Y(y)$$

积分中值定理

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}du$$

一、条件分布

（1） 条件密度函数

$$p(x\mid y)=\frac{p(x,\ y)}{p_Y(y)}$$

（2） 条件分布函数

$$F(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}p_{X|Y}(u\mid y)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,\ y)}{p_Y(y)}du$$

$$\Rightarrow\ p(x,\ y)=p_Y(y)\cdot p(x\mid y)$$
$$=p_X(x)\cdot p(y\mid x)$$

一、条件分布

3. 全概率公式的密度函数形式

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_{Y|X}(y|x)dx$$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)dy$$

一、条件分布

4. Bayes公式的密度函数形式

$$p_{X|Y}(x\mid y)=\frac{p_X(x)p_{Y|X}(y\mid x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_{Y|X}(y|x)dx}$$

$$p_{Y|X}(y\mid x)=\frac{p_Y(y)p_{X|Y}(x\mid y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)dy}$$

二、条件数学期望

1. 离散型随机变量的条件数学期望

$$E\left(Y\middle|X=x_i\right)=\sum_j y_j\cdot\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=\sum_j y_j\cdot p_{j|i}$$

$$E\left(X\middle|Y=y_j\right)=\sum_i x_i\cdot\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\sum_j x_i\cdot p_{i|j}$$

二、条件数学期望

2. 连续型随机变量的条件数学期望

$$E\left(Y\middle|X=x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p_{Y|X}\left(y\middle|x\right)dy$$

—— x 的一元函数

$$E\left(X\middle|Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_{X|Y}\left(x\middle|y\right)dx$$

—— y 的一元函数

二、条件数学期望

3. 条件数学期望的性质

(1) $E\left(X\middle|Y=y\right)\overset{\text{ind}}{=\!=}E(X)$ $\quad E\left(Y\middle|X=x\right)\overset{\text{ind}}{=\!=}E(Y)$

(2) $E(X)=E\left[E\left(X\middle|Y\right)\right]$ —— 全期望公式（仅证连续型）

证：$E\left[E\left(X\middle|Y\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}E\left(X\middle|Y=y\right)\cdot p_Y(y)\,dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_{X|Y}\left(x\middle|y\right)dx\right]\cdot p_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_{X|Y}\left(x\middle|y\right)p_Y(y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x,y)dxdy=E(X)$$

二、条件数学期望

(3) $E\left(g(Y)X \mid Y\right)=g(Y)E(X \mid Y)$

(4) $E\left(g(Y)X\right)=E\left[g(Y)\cdot E(X \mid Y)\right]$

(5) $E\left(c \mid Y=y\right)=c$　　(6) $E\left(g(Y) \mid Y=y\right)=g(Y)$

(7) $E\left[(aX+bY) \mid Z=z\right]=aE\left(X \mid Z=z\right)+bE\left(Y \mid Z=z\right)$

(8) $E\left\{\left[X-E\left(X \mid Y=y\right)\right]^2\right\}\le E\left\{\left[X-g(Y)\right]^2\right\}$

(9) $P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(A \mid Y=y\right)dF_Y(y)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(A \mid Y=y\right)p_Y(y)\,dy$ —— 连续型全概公式

例 题 -1

$$r.v.\ X\sim p_X(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

若 $r.v.\ Y\sim U(0,X)$，

求 $E\left(Y \mid X=x\right),E(Y)$

例 题 -2

（巴格达窃贼问题）一窃贼被关在有3个门的地牢中，第1个门3h后即可到达地面获得自由，第2个门走出5h后返回地牢，第3个门走出7h后返回地牢。假设窃贼每次都是等可能的选择任一个门，试求获得自由平均所用时间。

例 题 -3

设$X_1,X_2,\ldots$为一列独立同分布的随机变量序列，随机变量N只取正整数值，且N与$\{X_n\}$相互独立，则有

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E(X_1)E(N)}$$

证明： $E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i \mid N\right)\right]$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i \mid N=n\right)P\{N=n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)P\{N=n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}nE(X_1)P\{N=n\}$$

$$=E(X_1)\sum_{n=1}^{+\infty}nP\{N=n\}$$

$$=E(X_1)E(N)$$

课 堂 练 习

1．一射手进行射击练习，若击中目标的概率为p（$0<p<1$），射击到击中两次目标为止。设X表示首次击中目标所进行的射击次数，Y表示总共进行的射击次数。试求X和Y的联合分布律、条件分布律以及条件数学期望。

命题.（二元正态分布）

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

(1) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;

(2) 参数 ρ 为 X 和 Y 的相关系数;

(3) X, Y 独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$.

(4) $X\mid Y=y\sim N\left(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$

$$Y\mid X=x\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$