第四章

第二节

特 征 函 数

特 征 函 数

特征函数是处理概率论问题的有力工具:

- 可将卷积运算化成乘法运算;
- 可将求各阶矩的积分运算化成微分运算;
- 可将求随机变量序列的极限分布化成一般的函数极限问题;
- ………

一、特征函数的定义

1. 特征函数的定义

Def. 设 X 是一随机变量，称

$$\varphi(t) = E(e^{itX})$$

为 X 的特征函数.

注意: $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位.

一、特征函数的定义

(1) 当X为离散随机变量时，

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k}\cdot P(X=x_k)$$

(2) 当X为连续随机变量时，

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\mathrm{d}x$$

一、特征函数的定义

2. 注意

(1) 欧拉公式: $e^{itx}=\cos(tx)+i\sin(tx)$

(2) 复数的共轭: $\overline{a+bi}=a-bi$

(3) 复数的模: $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\forall t\in(-\infty,+\infty)$, $|e^{itx}|=1 \Longrightarrow E(e^{itX})$必然存在

一、特征函数的定义

例1. 若 $r.v.\ X\sim p(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求$\varphi_X(t)$.

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)dx$$

$$=\frac{2}{t^2}\left(e^{it}-1-ite^{it}\right)$$

$$=\frac{2}{t^2}\left[(t\sin t+\cos t-1)+i(\sin t-t\cos t)\right]$$

一、特征函数的定义

常见分布的特征函数

(0-1)分布(两点分布)

$$\varphi_X(t) = e^{it\times 0}\cdot(1-p) + e^{it\times 1}\cdot p$$

$$= 1 - p + pe^{it}$$

二 项 分 布 —— $B(n,p)$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{it}p\right)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left(1-p+pe^{it}\right)^n$$

泊 松 分 布 —— $P(\lambda)$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!}}$$

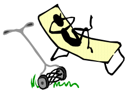
$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

均 匀 分 布

$r.v. X \sim U(a,b)$

$$\varphi_X(t) = \int_a^b e^{itx}\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$= \frac{-1}{(b-a)t}(\sin ta - \sin tb) + \frac{i}{(b-a)t}(\cos ta - \cos tb)$$



指 数 分 布

$r.v. X \sim Exp(\alpha)$

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\cdot \alpha e^{-\alpha x}dx$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha - it}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2} + i\frac{\alpha t}{\alpha^2+t^2}$$

标准正态分布 $N(0,1)$

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-x^2/2}dx$$

由于 $\frac{d}{dt}\left(e^{itx-x^2/2}\right)=ixe^{itx-x^2/2}$，且 $\left|ixe^{itx-x^2/2}\right|\le|x|e^{-x^2/2}$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-x^2/2}dx=2\int_0^{+\infty}xe^{-x^2/2}dx=2<+\infty$

故 $\frac{d}{dt}(\varphi_X(t))$ 存在

$$\varphi_X'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx-x^2/2}dx$$

又 $it\varphi_X(t)+i\varphi_X'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(it-x)e^{itx-x^2/2}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{itx-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$$

$t\varphi(t)+\varphi'(t)=0\ \Rightarrow\varphi(t)=ce^{-t^2/2}$

$\varphi_X(0)=1\Rightarrow c=1$

$\longrightarrow\ \varphi_X(t)=e^{-t^2/2}$

二、特征函数的性质

1. $|\varphi(t)|\le\varphi(0)=1$
2. $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$
3. $\varphi_{aX+b}(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)$
4. 若 X 与 Y 独立，则 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
5. $\varphi^{(k)}(0)=i^kE(X^k)$

Remark. $E(X)=-i\varphi'(0)$　　$E(X^2)=-\varphi''(0)$

二、特征函数的性质

例2. 若 $r.v.X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $\varphi_X(t)$.

解：$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\varphi_Y(t)=e^{-t^2/2}$

故 $X=\sigma Y+\mu$

$\Rightarrow\varphi_X(t)=e^{i\mu t}\varphi_Y(\sigma t)$

$$=e^{i\mu t}e^{-\sigma^2t^2/2}=e^{i\mu t-\sigma^2t^2/2}$$

二、特征函数的性质

例3. $r.v.X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),X$ 与 Y ind.

$\Rightarrow X+Y\sim$?

解：$\varphi_X(t)=e^{i\mu_1t-\sigma_1^2t^2/2}$　　$\varphi_Y(t)=e^{i\mu_2t-\sigma_2^2t^2/2}$

$\xrightarrow{ind}\ \varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=e^{it(\mu_1+\mu_2)-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$

$\longrightarrow\ X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

! 利用特征函数证明分布的可加性

二、特征函数的性质

例4. $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $Exp(\lambda)=Ga(1,\lambda)$

$\xrightarrow{\text{分布可加性}}\ Y=\sum_{i=1}^n X_i\sim Ga(n,\lambda)$

$$\Rightarrow\varphi_Y(t)\overset{ind}{=\!=}\prod_{i=1}^n\varphi_{X_i}(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-n}$$

三、特征函数的定理

定理4.2.1　一致连续性.

定理4.2.2　非负定性.

定理4.2.3　逆转公式. $F(x_2)-F(x_1)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$

定理4.2.4　唯一性.

定理4.2.5　连续型随机变量，$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)\mathrm{d}t$

定理4.2.6　$F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)\Leftrightarrow\ \varphi_{X_n}(t)\longrightarrow\varphi_X(t)$

三、特征函数的定理

$$\left.\begin{array}{l}p(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ \varphi(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)\mathrm{d}x\end{array}\right\}\text{互逆的Fourier变换}$$

特征函数 $\xrightarrow[\text{Th4.1.5}]{\text{Th4.1.3}}$ 分布函数

四、n维随机变量的特征函数

1. 定义

$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是n维随机变量，其特征函数为

$$\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n)=E\left(e^{i(t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n)}\right)$$

2. 基本性质

（1）若$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)\sim\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n)$，则 $Y=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k+b$ 的特征函数

$$\varphi_Y(t)=e^{itb}\varphi(a_1t,a_2t,\ \ldots,\ a_nt)$$

四、n维随机变量的特征函数

（2）若$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)\sim\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n)$，则 k 维随机变量 $Y_k=(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_k)$的特征函数

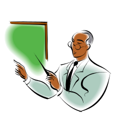
$$\varphi_{Y_k}(t_1,t_2,\ \ldots,\ t_k)=\varphi(t_1,t_2,\ \ldots,\ t_k,0,\cdots,0)$$

（3）若$(X_1,\ \cdots,\ X_n)\sim\varphi(t_1,\ \ldots,\ t_n)$,$X_k\sim\varphi_k(t)$ 且 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 相互独立，则

$$\varphi(t_1,t_2,\ \ldots,\ t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t_k)$$

四、n维随机变量的特征函数

(4)（唯一性）多维分布函数与其特征函数一一对应。



n维正态随机变量—定义

令 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}$　$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\vdots\\E(X_n)\end{pmatrix}$　$\Sigma=(\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\sigma_{ij}=Cov(X_i,X_j)$, $i,j=1,2,\cdots,n$

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

$$\varphi(t_1,t_2,\ \ldots,\ t_n)=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\mu_kt_k-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{lk}\mu_l\mu_k\right\}$$

证： $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ihx}-1)e^{itx}p(x)dx\right|$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{\left|e^{ihx}-1\right|}p(x)dx \qquad \left|e^{ihx}-1\right| \le \left|e^{ihx}\right|+1=2$$

$$\le \int_{-a}^{+a}\left|e^{ihx}-1\right|p(x)dx + 2\int_{|x|\ge a}p(x)dx$$

对于任意的$\varepsilon>0$，取定一个充分大的a, 使得

$$2\int_{|x|\ge a}p(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$ 收敛

然后对任意的$x\in[-a,a]$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2a}$

则当 $|h|<\delta$ 时，有

$$\left|e^{ihx}-1\right| = \left|e^{i\frac{h}{2}x}\left(e^{i\frac{h}{2}x}-e^{-i\frac{h}{2}x}\right)\right| = \left|e^{i\frac{h}{2}x}-e^{-i\frac{h}{2}x}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{hx}{2}\right| \le 2\left|\frac{hx}{2}\right| \le ha < \frac{\varepsilon}{2}$$

即 $\forall t\in(-\infty,+\infty), \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2a}>0$

当 $|t+h-t|=|h|<\delta, \ni |\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\varepsilon$

证： $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_k\bar{z}_j\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t_k-t_j)x}p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_k\bar{z}_je^{i(t_k-t_j)x}p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}z_ke^{it_kx}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_je^{-it_jx}\right)p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}z_ke^{it_kx}\right|^2p(x)dx \ge 0$$

Th4.1.2