《拓扑学基础》HW 1 提交时间：03/12/2019，周二

1. 设 M 为正多面体，它的每个面有 p 个边，每个顶点是 q 个面的交点. 用 Euler 定理 $v - e + f = 2$, 证明:

   (a). $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{e}$

   (b). 由 (a) 证明正多面体只有 5 种.

2. 计算由立方体按下图中箭头粘合边并且对面两两粘合（即上表面和底面粘合，前表面和后表面粘合，左侧面和右侧面粘合）得到的商空间的 Euler 示性数.

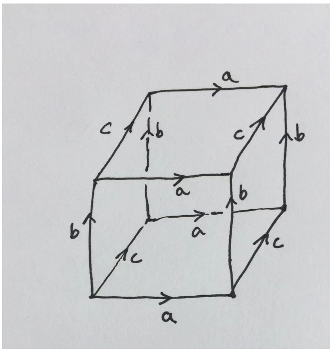

图 1: l 立方体按图中箭粘合边，两两粘合对面得到的商空间

《拓扑学基础》HW 2 提交时间：03/26/2019，周二

1. 设闭曲面 M 分别有以下多边形表示：

   (1). $abcda^{-1}bc^{-1}d$

   (2). $abcb^{-1}dc^{-1}a^{-1}d^{-1}$

   求 M 分别所表示的闭曲面. (**提示**：分割多边形，把多边形表示为标准表示，例如环面 $2T^2$，标准表示为 $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$; $3RP^2$ 标准表示为 $a^2b^2c^2$. etc.)

2. 如果在环面上挖去一个圆盘的内部，然后把洞口的对径点粘合，所得曲面是什么类型的闭曲面？（**提示**：给出其多边形表示，再由是否可定向性以及 Euler 示性数，就可确定该曲面的类型.）

《拓扑学基础》HW 3 提交时间：04/02/2019，周二

1. 设 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑，A 是 X 的一个子集，规定：

$$\mathcal{T}' = \{A \cup U \quad | U \in \mathcal{T}\} \cup \{\emptyset\}$$

证明：$\mathcal{T}'$ 也是 X 上的拓扑.

2. 设集合 $X = \{a, b, c\}$, 请给出 X 上的所有可能的拓扑.

3. 设 $\mathbb{Z}^+$ 是全体正整数的集合，令 $\mathfrak{T}$ 表示满足如下条件的集合 U 构成的集簇：

“若 $n \in U$, 则 n 的每个因数都在 U 中”

证明：

(a). $\mathfrak{T}$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的一个拓扑.

(b). $A = \{n \in \mathbb{Z}^+ \quad | n > 1\}$ 是闭集吗? 全体正的奇数的集合是开集合吗? 请给出证明或说明.

4. 分别定义 $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为：

$$\rho_1(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

$$\rho_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

证明：

(a). ρ_1, ρ_2 都是集合 $\mathbb{R}^2$ 上的度量.

(b). 画出在 ρ_1, ρ_2 度量下单位圆周的图形.

《拓扑学基础》HW 4 提交时间：04/9/2019，周二

1. 设 $\mathbb{Z}^+$ 是全体正整数的集合，令 $\mathcal{T}$ 表示满足如下条件的集合 U 构成的集族 $\mathcal{T}$

   “若 $n \in U$, 则 n 的每个因数都在 U 中”

   是 $\mathbb{Z}^+$ 上的一个拓扑.（见 HW#3）

   (a). 设集合 $B = \{3, 8\}$, 求: $d(B)$,

   (b). 求 $\{1\}$ 的聚点.

2. 设 $\mathbb{N}$ 为可数补实数空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 中的全体非负整数集，求 $d(\mathbb{N})$.

3. 设 X 是一个拓扑空间，则对于任意 $A, B \subset X$ 有:

   (a). $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

   (b). $A^{\circ\circ} = A^\circ$

4. 证明：每一个离散拓扑空间都是可度量化的。（提示：注意到离散拓扑空间的任意子集都是开集，要证明其可度量化，只需说明存在一个度量，使得空间的任意一个子集都可以表示成一些由该度量定义的开球的并.)

《拓扑学基础》HW 5 提交时间：04/16/2019，周二

1. 设 A, B 都是拓扑空间 X 的子集，并且 A 是开集. 证明：$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

2. 若 A, B 都是拓扑空间 X 的稠密子集，并且 A 是开集，则 $A \cap B$ 也是 X 的稠密子集.

3* 设 X 是任一拓扑空间，则 X 的每个子集的导集是闭集 $\Longleftrightarrow$ X 的每个单点集的导集是闭集. （如你有困难，可选做下面一题）

3. 度量空间的每个子集的导集是闭集.

4. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，∞ 是任何一个不属于 X 的元素. 令

$$X^* = X \cup \{\infty\}$$

$$\mathscr{T}^* = \{A \cup \{\infty\} \quad | A \in \mathscr{T}\} \cup \{\emptyset\}$$

证明：

(a). $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 是一个拓扑空间.

(b). $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 是可分的拓扑空间.（提示：证明单点集 $\{\infty\}$ 是拓扑空间 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 的稠密子集)

《拓扑学基础》HW 6 提交时间：04/30/2019，周二

1. 证明：设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的一个基，则 A 是拓扑空间 X 的稠密子集 $\Longleftrightarrow$ A 与 $\mathcal{B}$ 中任意个元 B, 都有 $A \cap B \neq \emptyset$.

2. 证明：考虑实数集 $\mathbb{R}$ 上的子集族：

$$\mathcal{B} = \{[a,b) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

证明：

(a). $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 的某一个拓扑的基.(该拓扑称为实数**下限拓扑**，记为：$\mathbb{R}_l$)

(b). $\mathcal{B}$ 中每一个元素在下限拓扑 $\mathbb{R}_l$ 中即是开集又是闭集.

(c). $\mathbb{R}_l$ 有一个子基：$\{(-\infty, b) | b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$.

3. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处连续，序列 $x_n \longrightarrow x$, 则 $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

4. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是满的连续映射，其中 X 是可分的. 证明：Y 也是可分的.

5. 规定 $f : \mathbb{R} \setminus [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为：

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \ , \\ x - 1 & x \geq 0 \ . \end{cases}$$

证明：f 是连续映射, 但不是同胚映射.

6. 若 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续映射，证明在 f 下保持不动的点的全体构成 $\mathbb{R}$ 的一个闭集.(即集合：$\{x \in \mathbb{R} | \quad f(x) = x\}$ 是闭集.)

《拓扑学基础》HW 7 提交时间：05/21/2019，周二

1. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$ 是一个商映射. 定义集合:

$$A = \{(x, y) \in X^2 | f(x) = f(y)\}$$

证明: (a) A 是 X 中的一个等价关系. (b) Y 同胚与商空间 X/A.

2. 定义映射 $p : [0, 1] \longrightarrow S^1$ 如下:

$$p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \forall t \in [0, 1]$$

其中 S^1 为单位圆周. 证明:

(a) p 是满的连续闭映射;

(b) 若定义 $[0, 1]$ 上的一个等价关系 $\sim$ 如下：$x \sim y \Longleftrightarrow x = y$ 或 $\{x, y\} = \{0, 1\}$. 则商空间 $[0, 1]/\sim$ 与 S^1 同胚.

3. 设 X 与 Y 都是可分空间，证明 $X \times Y$ 也是可分的.

4. 设 $\mathcal{B} = \{[a, b)|a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ 为实数集上 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑称为**实数下限拓扑**, 记为 $\mathbb{R}_l$, 证明:

(a) $\mathbb{R}_l$ 满足 C_1 公理.

(b) $\mathbb{R}_l$ 是可分空间。

(b) $\mathbb{R}_l$ 不满足 C_2 公理.

《拓扑学基础》HW 8 提交时间：5/28/2019，周二

1. 若 X 是 T_0 和正则空间，则 X 是 T_2 空间.

2. 设 X 满足 T_1 公理，证明：X 中任意子集的导集是闭集.

3. 设 X 是 Hausdorff 空间，$f : X \longrightarrow Y$ 连续，则 f 的图像 $G = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ 是 $X \times Y$ 的闭子集.

4. 设 X 是正则空间，F 为 X 的闭子集，$x \notin F$，证明：存在 F 和 x 的开邻域 U 和 V，使得 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

5. 证明：设 $f : X \longrightarrow Y$ 是同胚映射，X 是正则空间，则 Y 也是正则空间.

6. 设 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑为 $\mathscr{U}$. 令

$$\mathscr{T} = \{U \setminus E \quad | \quad U \in \mathscr{U}, E \in \mathbb{Q}\}$$

证明：

(a). $\mathscr{T}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑；

(b). 拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ 是 Hausdorff 空间；

(c). 拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ 不是正则空间. (提示：参考熊金城《点集拓扑讲义》第四版 173 页，例 6.2.2，再根据我课堂提示）

《拓扑学基础》HW 9 提交时间：6/4/2019，周二

1. 设 X 是正规空间，A,B 为 X 的闭子集，$A \cap B = \emptyset$，证明：存在 A 和 B 的开邻域 U 和 V，使得 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
2. 证明：设 $f : X \longrightarrow Y$ 是满的闭连续映射，X 是正规空间，则 Y 也是正规空间.
3. 设 X 是正规空间, A 为 X 的闭子集. 证明：对任何一个连续映射 $f : A \longrightarrow [0,1]^n$, 有一个连续映射 $g : X \longrightarrow [0,1]^n$ 是映射 f 的扩张.
4. 证明: 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是同胚映射，X 是完全正则空间，则 Y 也是完全正则空间.
5. 设 X 是一个拓扑空间，证明: X 是一个 Tychonoff 空间 $\Longleftrightarrow$ 对任何 $x \in X$ 和任何一个不包含点 x 的闭集或单点集 A，存在一个连续映射 $f : A \longrightarrow [0,1]$, 使得 $f(x) = 0$ 和对于任何 $a \in A$有$f(a) = 1$.

《拓扑学基础》HW 10 提交时间：6/18/2019，周二

1. 证明：$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_f)$ 的任何子集都紧致，但 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_c)$ 是非紧致的.

2. 证明：有限个紧致子集的并集紧致.

3. 证明：紧致空间的无穷子集必有聚点.

4. 证明: 紧致的度量空间是可分的，从而是 A_2 空间（即满足第二可数公理）.

5. 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是闭映射，并且 $\forall y \in Y, \quad f^{-1}(y)$ 是 X 的紧致子集. 则对于 Y 的任何一个紧致子集 B，$f^{-1}(B)$ 也紧致.

6. 设 X 满足 T_4 公理的连通空间，并且 X 中至少有两个点. 证明：X 是不可数的.