第三章

第一节 多维随机变量及其联合分布

多维随机变量及其联合分布

- 多维随机变量及其分布函数
  - 二维随机变量及其分布函数
  - 分布函数的性质
  - 边缘分布函数
  - n维随机变量及其分布
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量

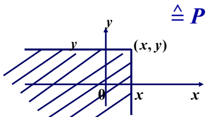
一、多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及分布函数的定义

➢ 若X，Y是两个定义在同一个样本空间上的随机变量，则称(X, Y)是二维随机变量.

$$F(x, y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\}$$

$$\triangleq P\{X \le x, Y \le y\} \qquad (x, y) \in R^2$$



一、多维随机变量及其分布函数

2. 分布函数的性质

1° $F(x, y)$是变量x和y的非减函数

即 $\forall x_1 \le x_2, F(x_1, y) \le F(x_2, y)$

$\forall y_1 \le y_2, F(x, y_1) \le F(x, y_2)$

2° $0 \le F(x, y) \le 1$

$F(x, -\infty) = 0 \qquad F(-\infty, y) = 0$

$F(-\infty, -\infty) = 0 \qquad F(+\infty, +\infty) = 1$

一、多维随机变量及其分布函数

3° 关于变量x和y均是右连续的.

即 $\forall x, y \in R, F(x+0, y) = F(x, y) = F(x, y+0)$

4° $\forall x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$,

$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$

满足上述1° ~ 4°,的二元函数可作为某个二维随机变量的分布函数。

一、多维随机变量及其分布函数

3. 边缘分布函数

已知$(X, Y) \sim F(x, y)$，则

$$F(x, +\infty) = P\{(X \le x) \cap \boxed{(Y < +\infty)}\}$$

$$= P\{X \le x\}$$

必然事件Ω

$$= F_X(x)$$

称之为X的边缘（边际）分布函数

一、多维随机变量及其分布函数

已知$(X,Y)\sim F(x,y)$，则

$$F(+\infty,y)=P\{(X<+\infty)\cap(Y\le y)\}$$

必然事件Ω

$$=P\{Y\le y\}$$

$$=F_Y(y)$$

称之为Y的边缘（边际）分布函数

一、多维随机变量及其分布函数

4. n维随机变量

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ —— n维随机变量

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

$$X_1\sim F_{X_1}(x)=F(x,+\infty,\cdots,+\infty)$$

$$(X_1,X_n)\sim F_{X_1X_n}(x,y)=F(x,+\infty,\cdots,+\infty,y)$$

二、二维离散型随机变量

- 二维离散型随机变量的定义
- 二维离散型随机变量的概率分布
- 常见的二维离散型随机变量的分布

二、二维离散型随机变量

1. 定义

若二维随机变量(X,Y)的所有可能取的值是有限对或可列多对，则称(X,Y)为二维离散随机变量。

二、二维离散型随机变量

2. 分布律

定义 设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取值为(x_i,y_j) $i,j=1,2,\cdots$，若

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}\qquad i,j=1,2,\cdots$$

满足 1° $p_{ij}\ge 0$ $i,j=1,2,\cdots$ ----非负性

2° $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$ ----规范性

则称p_{ij}为(X,Y)的分布律或X与Y的联合分布律。

二、二维离散型随机变量

$X\backslash Y$	y_1	y_2	……	y_n	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	……	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮
x_m	p_{m1}	p_{m2}	……	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	……	$p_{\cdot n}$	1

$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$ $\quad p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$ $\quad p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$

二、二维离散型随机变量

3. 分布函数的确定

$$P\left(X=x_i,Y=y_j\right)=p_{ij}\Rightarrow F(x,y)=P\left(X\le x,Y\le y\right)$$

$$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}=P\left(X=x_i\right)\Rightarrow F_X(x)=\sum_{x_i\le x}P\left(X=x_i\right)$$

$$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}=P\left(Y=y_j\right)\Rightarrow F_Y(y)=\sum_{y_j\le y}P\left(Y=y_j\right)$$

二 维 两 点 分 布

X \ Y	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

X	0	1
p	$1-p$	p

Y	0	1
p	$1-p$	p

多 项 分 布

若每次试验有r种结果：$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_r$

记 $P(A_i)=p_i$， $i=1, 2, \ldots\ldots, r$

记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数

则 $P\left(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots, X_r=n_r\right)$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots\cdots p_r^{n_r}$$

多维超几何分布

口袋中有 N 只球，分成 r 类。第 i 种球有 N_i 只，

$N_1+N_2+\ldots\ldots+N_r=N$. 从中任取 n 只，

记 X_i 为取出的n 只球中，第i 种球的只数 则

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots\ldots, X_r=n_r)$$

$$=\frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}\cdots C_{N_r}^{n_r}}{C_N^n}$$

例1 将一枚均匀的硬币抛掷4次，X表示正面向上的次数，Y表示反面朝上次数。求(X, Y) 的分布列.

例2 设随机变量$Y\sim N(0, 1)$，求(X_1, X_2) 的分布列.

$$X_1=\begin{cases}0, & Y\ge 1\\ 1, & Y<1\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}0, & Y\ge 2\\ 1, & Y<2\end{cases}$$

例3 设随机变量 X 在 1，2，3， 4 四个整数中等可能地取值，另一个随机变量Y 在 1到X 中等可能地取一整数值。试求（X, Y）的分布列.

三、二维连续型随机变量

- 二维连续型随机变量的定义
- 二维连续型随机变量的概率密度
- 边缘概率密度及边缘分布函数

三、二维连续型随机变量

1. 定义

如果二维随机变量$(X,Y)\sim F(x,y)$，存在一个非负可积的二元函数$p(x,y)$，使$\forall(x,y)\in R^2$，都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

则称(X,Y)是二维连续型随机变量，$p(x,y)$称为(X,Y)的概率密度函数或X与Y的联合密度函数。

三、二维连续型随机变量

注　若(X,Y)为连续型随机变量，则

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X<x,Y<y\}$$

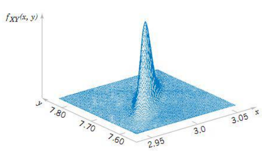
$$=P\{X\le x,Y<y\}=P\{X<x,Y\le y\}$$

三、二维连续型随机变量

2. 概率密度函数的性质

1° 非负性：$p(x,y)\ge 0$

2° 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$



即　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy$

$=F(+\infty,+\infty)=1$

3°　$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y)$

4°　随机点(X,Y)落在平面区域D内的概率

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x,y)dxdy$$

三、二维连续型随机变量

3. 边缘分布函数与边缘密度函数

(X,Y)关于X的边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,y)dy}\right]du$$

u 的一元函数 $g(u)=p_X(u)$

关于X的边缘概率密度为：

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

且　$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}p_X(t)dt$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,v)dx}\right]dv$$

v 的一元函数 $g(v)=p_Y(v)$

关于Y的边缘概率密度为：

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

且　$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}p_Y(t)dt$

二维均匀分布

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中A为平面区域D的面积值。

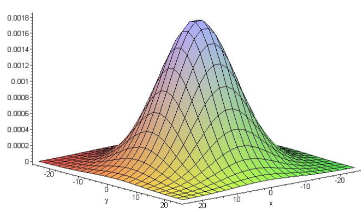
二维正态分布

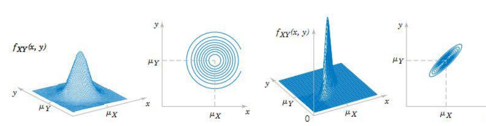
$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$均为常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$





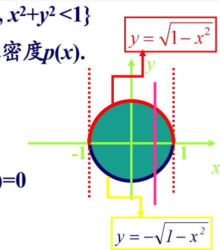
$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\Rightarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\Rightarrow Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

注：只有两个边缘分布，一般不能确定联合分布。

如ρ不同，而边缘分布相同，但联合分布却不同。

例4 设(X, Y)服从区域$D=\{(x, y), x^2+y^2<1\}$上的均匀分布，求X的边缘密度$p(x)$.



解：$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$

当$|x|>1$时，$p(x, y)=0$，所以$p(x)=0$

当$|x|\le 1$时，

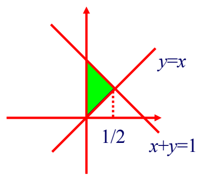
$$p(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

不是均匀分布

例5 设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求概率$P\{X+Y\le 1\}$.



解： $P\{X+Y\le 1\}$

$$=\int_0^{1/2}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}e^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$$

课 堂 练 习

设(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} C(1-x)y & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

1）试确定常数C;

2）试求X，Y的边缘概率密度;

3）$P\left\{\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}, Y<\frac{1}{2}\right\}$.

课 堂 练 习

设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$$

试求(X,Y)的分布函数$F(x,y)$.