《拓扑学基础》HW 6 提交时间：04/30/2019，周二

1. 证明：设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的一个基，则 A 是拓扑空间 X 的稠密子集 $\Longleftrightarrow$ A 与 $\mathcal{B}$ 中任意个元 B, 都有 $A \cap B \neq \emptyset$.

2. 证明：考虑实数集 $\mathbb{R}$ 上的子集族：

$$\mathcal{B} = \{[a,b) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

证明：

(a). $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 的某一个拓扑的基.(该拓扑称为实数**下限拓扑**，记为：$\mathbb{R}_l$)

(b). $\mathcal{B}$ 中每一个元素在下限拓扑 $\mathbb{R}_l$ 中即是开集又是闭集.

(c). $\mathbb{R}_l$ 有一个子基：$\{(-\infty, b) | b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$.

3. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处连续，序列 $x_n \longrightarrow x$, 则 $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

4. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是满的连续映射，其中 X 是可分的. 证明：Y 也是可分的.

5. 规定 $f : \mathbb{R} \setminus [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为：

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \ , \\ x - 1 & x \geq 0 \ . \end{cases}$$

证明：f 是连续映射, 但不是同胚映射.

6. 若 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续映射，证明在 f 下保持不动的点的全体构成 $\mathbb{R}$ 的一个闭集.(即集合：$\{x \in \mathbb{R} | \quad f(x) = x\}$ 是闭集.)