UML 1

本科数学讲义

熊锐

数学入门

集合与数学结构

数学入门

集合与数学结构

熊锐

2019 年 1 月 2 日

版本：**II.1.0**

编译时间：**2019 年 1 月 2 日**

纸张大小：A5

本书主页：`www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/8992691.html`

熊锐 | 山东大学

个人主页：`www.cnblogs.com/XiongRuiMath/`

```
@book {MathABC,
 AUTHOR = {熊锐},
  TITLE = {数学入门},
 SERIES = {本科数学讲义},
 VOLUME = {1},
   YEAR = {2018},
  PAGES = {vi+339},
   NOTE = {可以在
       \url{www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/8992691.html}
下载}
}
```

目录

关于本书 (代序)

本书的目的　是介绍基本的集合论, 拓扑结构, 代数结构, 偏序结构这些 “数学常识”, 以供读者的继续学习, 故更多地呈现语言性和常用基本的概念. 同时也呈现数学的标准语言, 防止读者误入歧途.

本书的受众　被设定为至少有一学期本科学习经历的低年级的学生, 因此, 数分析分析和高等代数的基本常识都被认为已知. 当然, 任何人都可将本书作为参考.

本书的简史.　本书的初稿于 2016 年 11 月 19 日问世. 在 2017 年 2 月 19 日, 经过林吉祥的检查, 改正了大量笔误. 同年 3 月, 习题被分为习题，问题，刁题三个档次. 同年 4 月, 提示被调整为灰色. 同年 5 月, 页面大小调整为 A5. 2017 年 12 月 15 日到 2018 年 02 月 20 日将原书全部重写了一遍. 在此期间, 范畴论加入又被删去, 群作用曾经单辟一章, 现在已经变成一节, 完备格一章的闭包映射被提前提及, 完备格也因此成为一节, 总体结构变化不大.

本书的结构.　因此, 本书也依此分为四个部分, 每个部分都有注记声明来源和参考文献. 最后的附录中有字母表符号表等可供读者参考. 每章配有导言, 大体介绍每章内容. 定义中的概念用**粗体**标记, 定理, 证明, 评注等条目不必说, 前面配有危险标志的补充是可以暂时跳过的条目, 尽管这会错过很多乐趣, 在附录中有补充条目的目录. 每节配有习题, 有三种

习题: 习题用代表比较容易的习题; 问题表示比较困难的习题; 配有骷髅标志☠的刁题则是超出本书兴趣的题, 即使做出来也不会增加对本书内容的理解或是过于困难. 本书中稍有困难的问题都配有提示, 在本书中提示是淡色的, 视力极好的读者也不能直接看清, 这可以防止有兴趣的读者立刻丧失挑战的兴趣, 也可以防止思考之后丧失求知的乐趣. 本书中插图众多, 读者可以在附录中找到插图的目录.

引用的网站. 在网络日益发达的现代, 很多时候有趣的问题和专业的介绍可以从网络获得, 在本书中, wiki表示维基百科 `https://en.wikipedia.org/wiki/`; mo表示 MathOverflow `https://mathoverflow.net/`; MSE表示 MathStackExchange `https://math.stackexchange.com/`. 后接数字只要在网址后加入同样的数字即可访问.

一些统计. 本书共340页, 插图共65张. 定理, 命题, 引理和推论共159目, 证明和解共133目. 定义157目, 例子115目, 补充43目. 习题下共有305道题, 其中习题共181道, 问题共78道, 刁题共46道, 共提示了221次.

～ 致谢 ～

感谢以下老师和同学的支持和帮助: 崔浩, 戴懿韡, 贾玉涵, 林吉祥, 刘思阳, 刘守民, 卢穗麒, 钱丽萍, 王可, 王琳, 王鹏辉, 徐泽, 姚力丁, 张港回, 张洁松 (按音序排列). 还尤其感谢学院领导的关心和鼓励: 刘振美, 彭实戈. 最后尤其要感谢林吉祥的细心检查. 没有他们的支持和鼓励, 这本书将不是现在的样子.

第一部分

朴素集合论

导言

集合, 被认为是数学中最为基础的概念, 除了一些数理逻辑的分支, 其他分支几乎都建立在集合的语言之上. 诚然, 集合绝不是最为古老的数学分支, 但最终现代数学的各个分支纷纷指向集合来搭建基础, 这说明集合是掌握现代数学的一条必经之路.

如此基础的概念, 读者高中早就接触过, 经过读者怀念的高中岁月, 想必读者已经相当熟悉集合的基本操作. 本部分会尽快完成对高中读者所熟知的内容的介绍, 以留足时间补充更多关于集合论的 “常识”, 以弥补中学集合论避而不谈的尴尬, 缺乏一般的缺憾, 以及回避无限的空缺.

我们不打算在这么一本又小又面向本科一年级的书中建立起严格的公理集合论体系. 退而求其次, 我们要掌握朴素集合论的基本结构, 以及作为数学界最为常用的 ZFC 体系下常用推论使用的 Zorn 引理.

本部分有五章. 第一章首先是集合的基本内容. 第二章是映射, 映射是连接集合的桥梁, 当中蕴含了集合的关键信息. 另外, 其中附带有对运算的讨论. 然后, 第三是读者可能在各种 “科普” 中就知道过的 “基数” 的概念, 我们将讨论得更深入一些. 最后, 第四和五章是关于关系和两种非常重要的关系的讨论, 这对于一些读者来说将是全新的.

第一章　集合的基本概念

本章是对集合本身的讨论. 讨论了基本的概念和构造, 集合的元素, 子集, 包含, 以及交并补积, 这些都是数学中最为基本的构造手段.

1.1　集合, 元素

定义 1.1 (Cantor) **集合 (set)** *意谓吾人感知或思想中一些确定的, 并且相互区别的对象汇集而成的整体, 这些对象称为该集合的* **元素 (element)** *. (A set is a gathering together into a whole of definite, distinct objects of our perception or of our thought, which are called elements of the set.)*

定义 1.2 *若 x 是集合 A 的元素, 称 x* **属于 (belongs to)** *A, 记为 $x \in A$. 否则记为 $x \notin A$.*

以上是 Cantor 于 1895 年的论文中对集合下的 "定义". 当然, 严格来说, 上述描述并不是一个严格意义上的 "定义", 不过, 我们也无需对此多加追究, 否则将陷入大量复杂的形式数学.

以上 "定义" 揭示了集合的三个性质, 确定性, 互异性, 无序性, 读者已经熟知, 无需多谈.

约定 1.3 *对于几个常用的集合, 以 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集, $\mathbb{N}^*$ 表示正整数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Q}$ 表示实有理数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{C}$ 表示复数集.*

下面的需要解决的问题在于如何表示出一个集合. 有列举法, 描述法两种方法.

列举法即将集合中的元素列举出来, 若是完全列举, 需要是有限集合, 若采用不完全列举, 列以必要的元素以揭示规律后便以省略号略过剩余的元素. 不过, 我们将在第三章看到, 并非所有集合的元素都可以被 “列” 出来.

描述法则是将集合中元素所具有的性质的全体元素收集起来, 其标准形式是

$$A = \{x \in U | p(x)\} \text{ 或} A = \{x \in U : p(x)\} \quad p(x) \text{ 表示 } x \text{ 具有性质 } p$$

因此, 下列等价的命题可以作为定义一个集合的方式

$$x \in A \iff p(x)$$

依据以上方法, 我们可以自然地给两个集合相等下定义.

定义 1.4 称两个集合 A, B 相等, 如果

$$x \in A \iff x \in B$$

在本小节的最后, 我们在约定两个以后常用的概念.

定义 1.5 定义**空集 (null set, empty set, nonvoid set)** $\varnothing$ 为没有任何元素的集合.

定义 1.6 对于有限集合 A, 称 A 的元素个数为集合 A 的**基数 (cardinal)** 或**阶 (order)**, 记为 $|A|$, $\mathrm{card}(A)$ 或 $\#A$. 除此之外, 约定 $|\varnothing| = 0$, 无限集合 A, 形式地记 $|A| = \infty$.

⋙⋙ 习题 §1.1 ⋘⋘

问题 1.1 空集也可以也可被描述法描绘, 为

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}$$

依此证明: 空集是唯一的. (提示: 那么, 什么是唯一的呢? 就是有两个空集, 则这两个空集相等.)

1.2 子集, 幂集

定义 1.7 (子集) 若 $\forall x \in B, x \in A$, 则称 B 是 A 的**子集 (subset)**, A **包含** B, B **包含于** A, 记为 $B \subseteq A$.

若还有 $A \neq B$, 则称 B 是 A 的**真 (proper) 子集**, A **真包含** B, B **真包含于** A, 记为 $B \subset A$.

除此之外, 定义 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

命题 1.8 对有限集合 A, 若 $B \subseteq A$, 则 $|B| \leq |A|$.

在现代的记号中, 常用 $\subset$ 表示包含, $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 表示真包含, 不过我们不采用会在本书中引起混乱的记号.

定义 1.9 (幂集) 已知集合 A, A 的所有子集组成的集合

$$\{X | X \subseteq A\}$$

为 A 的**幂集 (power set)**, 记为 2^A 或 $P(A)$.

命题 1.10 已知有限集 A, $|2^A| = 2^{|A|}$.

补充 1.11 对于一个集合 X, 任何子集 $A \subseteq X$ 定义其特征函数 [1]

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\} \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

而特征函数完全决定了子集 A, 通过

$$A = \{x \in X : \chi_A(x) = 1\}$$

而, 反之, 任何一个 X 到 $\{0,1\}$ 的函数 χ 也都通过 $\chi^{-1}(1) = \{x \in X : \chi(x) = 1\}$, 决定了一个子集, 且这个子集的特征函数就是 χ 本身, 这意味

[1] 读者可能会抱怨, 我们目前还没有讲过函数. 那么, 请读者仔细回味一下高中的美好时光, 而不要局限在这本书里.

着如下是一一对应

$$\begin{array}{rcl} 2^X & \rightleftarrows & \{X \text{ 到 } \{0,1\} \text{ 的映射}\} \\ A & \longmapsto & \chi_A \\ \chi^{-1}(1) & \longleftarrow & \chi \end{array}$$

这启示我们可以直接将特征函数和子集等同起来.

≫≫≫≫ 习题 §1.2 ≪≪≪≪

习题 1.2 请读者用熟练的计数原理证明 *(1.10)*.

习题 1.3 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n = A_1$, 求证:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n$$

习题 1.4 在集合 X 中, 求证:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in X, \chi_A(x) \le \chi_B(x)$$

1.3 集合的运算

定义 1.12 (交, 并) 已知集合 A, B, 定义**交 (intersection)**, **并 (union)**,

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或} x \in B\}$$

特别地, 若 $A \cap B = \varnothing$, 记 $A \cup B = A \sqcup B$, 称为**无交并**. [2]

定义 1.13 (差, 补) 已知集合 A, B, 定义**差集**

$$A - B \text{ 或} A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

特别地, 若有一个默认的**全集**U, 记 $U \setminus A = A^c$, 称为 A 的**补集 (complement)**.

[2]这里无交并的记号类似线性代数中直和的记号, 一旦写出就意味着其无交.

补集有时也记为 $\complement A$.

集合的交并差补, 看做是集合的运算. 关于运算, 最为重要的话题是运算具有何种运算律, 如下的命题便呈现了集合的运算的丰富的性质.

命题 1.14 *在全集 U 下, $A, B, C \in 2^U$, 交并补具有如下性质*

(1) $A \cap B = B \cap A.$ *(交换律)*

$A \cup B = B \cup A.$

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$ *(结合律)*

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

(3) $A \cap A = A.$ *(幂等律)*

$A \cup A = A.$

(4) $(A \cup B) \cap A = A.$ *(吸收律)*

$(A \cap B) \cup A = A.$

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ *(分配律)*

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(6) $\varnothing \cap A = \varnothing.$ *(零律)*

$\varnothing \cup A = A.$

(7) $U \cap A = A.$ *(幺律)*

$U \cup A = U.$

(8) $A \cap A^c = \varnothing.$ *(补律)*

$A \cup A^c = U.$

(9) $(A^c)^c = A.$ *(逆律)*

(10) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$ *(De Morgan 律)*

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

证明 所有的证明无非上诉至逻辑层面, 上述命题实际上是逻辑算符的运算. □

如我们在数学中常做的, 我们可以根据两个的情况使用归纳法推出有限个的情况.

定义 1.15 (有限交, 有限并) 已知集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 可以递归地定义有限个集合的交, 并如下

$$
\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n &= (A_1 \cap A_2) \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \\
A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n &= (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n
\end{aligned}
$$

化为 $n-1$ 的情况.

对于一般情况, 我们使用指标集 (即带有指标的集合族) 来标明不同的集合. 此时, 在不能使用归纳法去定义的情形下, 我们另寻他路, 使得这种定义方式相容于有限情况.

定义 1.16 (一般交, 一般并) 已知一族集合 $\{A_i\}_{i\in I}$, I 为指标集, 定义

$$
\begin{aligned}
\bigcup\{A_i\}_{i\in I} &= \bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists i \in I, \mathrm{s.t.}\, x \in A_i\} \\
\bigcap\{A_i\}_{i\in I} &= \bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}
\end{aligned}
$$

同样特别地, 若任意 $i \neq j \in I$ 都有 $A_i \cap A_j = \varnothing$, 则记

$$
\bigcup_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{i\in I} A_i
$$

称为无交并.

容易验证, 对于无穷的交并的情形, (1.14) 的分配律, De Morgan 律也可以自然地推广到无穷情形, 如下所示.

$$
B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i) \qquad B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)
$$

$$
\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c
$$

补充 1.17 回忆特征函数 (1.11), 实际上这些集合运算反映在特征函数上有非常好的性质. 对于集合族 $\{X_i\}_{i\in I}\subseteq 2^U$, 记 χ_i 为 X_i 特征函数, π 为 $\bigcap_{i\in I} X_i$ 特征函数, μ 为 $\bigcup_{i\in I} X_i$ 特征函数, 则

$$\pi=\min\{\chi_i : i\in I\} \qquad \mu=\max\{\chi_i : i\in I\}$$

再对于 $X\subseteq U$, 有

$$\chi_{X^c}=1-\chi_X \qquad \chi_Y \text{ 是 } Y \text{ 的特征函数}$$

一种重要的直观化工具是 **Venn 图**, 可以将集合之间的关系表示得直观清楚, 相信读者已经熟知, 如下图所示.

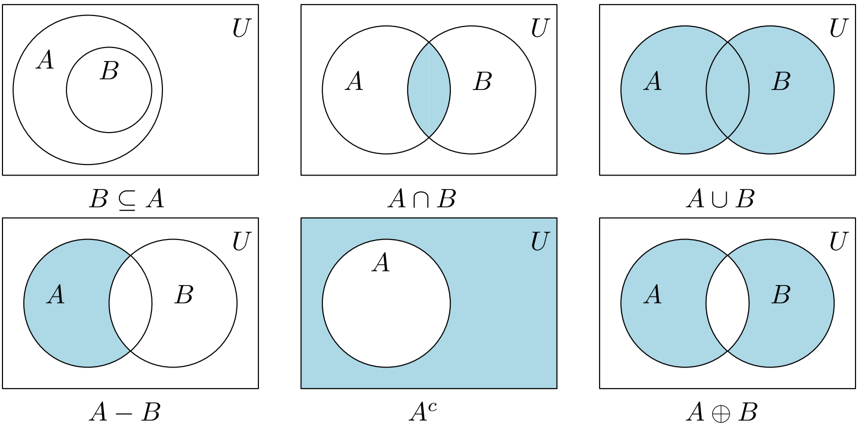


图 1.1: Venn 图

⋙⋙ 习题 §1.3 ⋘⋘

习题 1.5 已知集合 A,B, 验证:

(1) 若 $X\subseteq A, X\subseteq B$, 则 $X\subseteq A\cap B$;

(2) 若 $A\subseteq X, B\subseteq X$, 则 $A\cup B\subseteq X$.

习题 1.6 若 $A\cap C\subseteq B\cap C, A\cup C\subseteq B\cup C$, 则 $A\subseteq B$. (提示: 如果, 有足够的兴致的话, 可以尝试仅通过 (1.14) 的运算律来论证, 例如,

$A = A\cup(A\cap C) \subseteq A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \subseteq (A\cup B)\cap(B\cup C) = B\cup(A\cap C) \subseteq B\cup(B\cap C) = B.$)

习题 1.7 在 $\mathbb{R}$ 上考虑, 求证:

(1) 开集的有限交, 无限并为开集; (提示: 对于开集 A, B, 假设 $x \in A\cap\ldots\cap B$, 设 $\epsilon_a, \ldots, \epsilon_b$ 使得

$$(x-\epsilon_a, x+\epsilon_a) \subseteq A, \quad \ldots \quad, (x-\epsilon_b, x+\epsilon_b) \subseteq B$$

则取 $\epsilon = \min\{\epsilon_a, \ldots, \epsilon_b\}$, 则 $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq A\cap\ldots\cap B$. 关于无限并是容易的.)

(2) 开集的补集是闭集, 闭集的补集是开集. (提示: 对于开集 U, 设有序列 $\{x_n\} \subseteq U^c$ 使得 $x_n \to y$, 若 $y \in U$, 则有邻域与 U^c"隔开", 矛盾. 对于闭集 F, 若 F^c 不是开集, 则存在一点 $x \in F^c$, 任何邻域都不完全含在 F^c 之中, 取邻域 $(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})$ 和 F 的交中的一点 x_n, 则 $x_n \to x$, 根据 F 是闭集, $x \in F$, 矛盾.)

(3) 闭集的有限并, 无限交为闭集.

问题 1.8 (推广的闭区间套性质) 我们在 $\mathbb{R}$ 上考虑,

(1) 对于一列有界闭集合族 $\mathfrak{F} = \{F_i\}$, 若任何 $\mathfrak{F}$ 中的有限成员的有限交非空, 即

$$(\forall \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : \#\mathfrak{G} < \infty), \bigcap \mathfrak{G} \neq \varnothing$$

求证: $\bigcap \mathfrak{F} \neq \varnothing$. (提示: 任意选择 $F_0 \in \mathfrak{F}$, 由于任何 $\mathfrak{F}$ 中元素都和 F_0 有交, 不妨假设任何元素都是 F_0 的子集. 于是我们可以在一个有界闭集上考虑. 若

$$\bigcap \mathfrak{F} = \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F = \varnothing$$

通过取补集, 有

$$\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} F^c = \mathbb{R} \supseteq F_0$$

$\{F^c : F \in \mathfrak{F}\}$ 是 F_0 的开覆盖, 则根据有限覆盖定理, 有有限子集 $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ 使得 $\{F^c : F \in \mathfrak{G}\}$ 是 F_0 的开覆盖, 然后考虑 $F_0 \cap \bigcap_{F\in\mathfrak{G}} F$ 得到矛盾.)

(2) 说明 (1) 中的闭集不能去掉. (提示: 例如 $\bigcap_{n>0}\left(0,\frac{1}{n}\right]=\varnothing$.)

(3) 说明 (1) 中的有界不能去掉. (提示: 例如 $\bigcap_{n>0}[n,\infty)=\varnothing$.)

问题 1.9 (对称差) 定义两个集合的**对称差 (symmetric difference)** $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$.

(1) 用 Venn 图表示 $A\oplus B$;

(2) 求证:

(a)$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$, 并用 Venn 图表示;

(b)$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$, 并用 Venn 图表示.

(c) 利用特征函数 (1.11) 解释 (a)(b).

(3) 求证:

(a)$A\oplus B\subseteq(A\oplus C)\cup(B\oplus C)$.

(b)$(A_1\cup A_2)\oplus(B_1\cup B_2)\subseteq(A_1\oplus B_1)\cup(A_2\oplus B_2)$.

(c)$(A_1\cap A_2)\oplus(B_1\cap B_2)\subseteq(A_1\oplus B_1)\cup(A_2\oplus B_2)$.

(d)$(A_1-A_2)\oplus(B_1-B_2)\subseteq(A_1\oplus B_1)\cup(A_2\oplus B_2)$.

问题 1.10 (上极限, 下极限) 对于一列集合 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, 可以定义**上下极限**

$$\limsup_{n\to\infty}X_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}X_n \qquad \liminf_{n\to\infty}X_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}X_n$$

证明:

(1)$\limsup_{n\to\infty}X_n=\left\{x:x \text{ 出现在无限个 } X_n \text{ 之中}\right\}$.

(提示: $x\in\limsup X_n \iff \forall n>0,\exists k>n,\mathrm{s.t.}\,x\in X_k$.)

(2)$\liminf_{n\to\infty}X_n=\left\{x:x \text{ 只不出现在有限个 } X_n \text{ 之中}\right\}$.

(提示: $x\in\liminf X_n \iff \exists n>0,\forall k>n,\mathrm{s.t.}\,x\in X_k$.)

(3) 回忆特征函数 (1.11), 记 χ_n 是 X_n 的特征函数, σ 是 $\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 的特征函数, ι 是 $\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 的特征函数. 求证:

$$\limsup_{n\to\infty}\chi_n=\sigma \qquad \liminf_{n\to\infty}\chi_n=\iota$$

1.4　Cartesius 积

定义 1.18 (二元 Cartesius 积) 已知非空集合 A, B, 记

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

称之为 A, B 的 **Cartesius 积 (Cartesian product)** 或 **直积 (direct product)** . 其中 (a, b) 为 **有序对 (ordered pair)** .

有序对的定义我们尚未建立, 不过在学平面坐标时就已经熟悉了.

定义 1.19 (有限 Cartesius 积) 已知非空集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 可以递归地定义有限个集合的 *Cartesius* 积如下

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times A_2) \times A_3 \times \ldots \times A_n$$

化为 $n-1$ 的情况. 同时, 这样还定义了 **有序 n 元组 (n-tuple)** ,

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2), a_3, \ldots, a_n)$$

定义 1.20 (一般 Cartesius 积) 已知一族非空集合 $\{A_i\}_{i \in I}$, 定义

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \middle| \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}$$

其中记号表示 f 是从 I 到 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 的函数. 同时, 其中的元素有另一种记法, 对于 $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ 记作

$$(a_i)_{i \in I} \text{ 或} \{a_i\}_{i \in I}$$

其中 $a_i = f(i)$.

上述定义与有限情况相容, 因为有限情况下的有序对 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ 可以视作 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 出发的映射. 不过此时, 有序对我们不是将其 “列出来”, 而是 “放” 在某个位置上, 而定义中的映射, 就是指定放在 x 位置上的元素为 $f(x)$.

定义 1.21 已知集合 A, 递归地定义 $A^{n+1}=A^n\times A, n\geq 1$. 而对于一般的指标集 I, 定义

$$A^{|I|}=\prod_{i\in I}A$$

即 "I 那么多"A 自身的拷贝的 *Cartesius* 积.

补充 1.22 (无交并) 有了 *Cartesius* 积的理论, 我们可以把我们无交并的记号推广到任何两个集合上. 即, 即便两个集合有相同元素, 我们也可以将其视作不同的元素. 具体构造如下, 对于一族集合 $\{A_i\}_{i\in I}$, 考虑给每个元素 "打标签", 考虑

$$\{(a_i,i):a_i\in A_i,i\in I\}=\bigsqcup_{i\in I}(A_i\times\{i\})\subseteq\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\times I$$

滥用记号, 我们将上述集合仍然记作 $\bigsqcup_{i\in I}A_i$, 称为其无交并.

⋙⋙ 习题 §1.4 ⋘⋘

习题 1.11 $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ 吗?

习题 1.12 求证:

(1)$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(2)$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

习题 1.13 已知有限集合 A,B, 求证: $|A\times B|=|A|\times|B|$.

习题 1.14 已知集合 A,B, $X\subseteq A,Y\subseteq B$, 求证: $X\times Y\subseteq A\times B$.

习题 1.15 已知集合 A_1,A_2,A,B_1,B_2,B, $A_1\times B_1$ 与 $A_2\times B_2$ 不交, 求证:

$$(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)=A\times B\iff A_1\cup A_2=A,B=B_1=B_2\text{ 或}A=A_1=A_2,B_1\cup$$

习题 1.16 求证:

(1)$(X\times Y)\cap(A\times B)=(X\cap A)\times(Y\cap B)$.

(2)$(X\times Y)\cup(A\times B)\subseteq(X\cup A)\times(Y\cup B)$.

习题☠ 1.17 (无穷矩阵) 已知两集合 X, Y, 数域 F, 定义 X 和 Y 上的矩阵集合为

$$F^{|X\times Y|}=\{f: X\times Y\to F\}$$

并以 $(a_{ij})_{X\times Y}$ 代表 $(i,j)\mapsto a_{ij}$. $X=Y$ 时简写为 $(a_{ij})_X$, 并称为方阵.

(1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{X\times Y}$, 若 $\forall j\in Y$, 只有有限的 $i\in X$ 使得 $a_{ij}\neq 0$, 则称 a_{ij} 是列有限的, 试将矩阵的乘法推广到列有限情形.

(2) 已知数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 无穷方阵 $\{a_{ij}\}_{\mathbb{N}^*}$, 称

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}x_k$$

为数列的 **变换 (transform)**, 试用矩阵语言描述.

(3) 若方阵 $\boldsymbol{E}$ 满足对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都有

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$$

证明: $\boldsymbol{E}=(\delta_{ij})$, 其中 δ 是 Kronecker-δ: $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$.

(4) 定义, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 此时, 举出一个虽然有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆的例子. (提示: 考虑矩阵 $(\delta_{i,j-1})$)

*(5)***(二项反转公式)**求证:

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k \Leftrightarrow a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k$$

(提示: 直接验证两矩阵相乘. 当然更为巧妙地方法是通过考虑生成函数的平移.)

1.5 Russell 悖论

记 "集合"

$$S=\{A|A\notin A\}$$

表示所有不以自身为元素的集合所组成的集合族. 下面考虑 S 是否以自身为元素. 则

$$S \in S \iff S \notin S$$

矛盾. 产生了悖论, 说明我们的体系出现了矛盾.

这条悖论有一个通俗且更为著名的例子, 即理发师悖论, 即一个小镇的理发师声称, 自己只给所有不自己理发的人理发. 但如果他自己给自己理发, 就违反了自己的原则, 但如果自己不给自己理发, 他又得给自己理发. 悖论与故事之间的翻译如下

悖论	故事
A	A 给理发的所有人
$A \in B$	B 给 A 理发
$A \notin A$	A 不给自己理发
S	理发师

另一个等价的表述是用命题的语言, 我们知道命题与集合通过描述法对应起来, 从而 $x \notin x$ 被翻译为

$$\text{命题 } p\text{: 命题 } p \text{ 为假}$$

这个命题既不能为真, 也不能为假, 从而产生矛盾. 这否定了一个命题及其否定一定一真一假的排中律, 这种逻辑上的漏洞将迫使我们不能简单地依据命题的真假与否来建立逻辑上的 "$\Rightarrow$" 关系, 而必须通过指定一些可用的推理来填补体系的漏洞.

以上矛盾, 在公理集合论中通过限制 "集合" 不能过分地大来保证这样的漏洞不出现. 我们会在第三章看到另一个悖论, 径直选择包含所有集合的 "集合" 来构造悖论.

第二章　映射

本章是对映射的讨论. 映射将集合联系起来, 架构了集合之间的桥梁. 这为我们研究集合之间的关系提供了语言. 本章讨论了集合的运算和性质, 以及介绍了一点泛性质, 并且最后介绍了运算的概念.

2.1　映射的定义

定义 2.1 (映射) 已知非空集合 X, Y, 若 $f \subseteq X \times Y$, 且满足:

$$\forall x \in X, \exists^! y \in Y, \mathrm{s.\,t.} (x, y) \in f$$

其中 $\exists!$ 表示存在唯一. 称 f 为 X 到 Y 的**映射 (mapping)** 或**函数 (function)**, 记为 $f : X \to Y$. 称 X 为**定义域 (domain)**, Y 为**伴域 (codomain)** 或**陪域**. 对于 $(x, y) \in f$, 记 $f(x) = y$, 称 y 为 x 的**像 (image)**, x 为 y 的**原像 (preimage)**. 整体可以记作

$$\begin{aligned} f: \quad X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

换句话说, 实际上我们是用 “函数**图像**” 来定义映射. 这表明了映射和集合之间的关系.

回忆一般 Cartesius 积的定义 (1.20), 我们用到了映射的概念, 实际上, 严格来说, 建立集合理论的一个方法是先只建立有限 Cartesius 积, 再定义映射, 再定义一般 Cartesius 积, 但是相信读者早就可以接受映射的这一事实, 所以恰当的颠倒有利于行文.

因为 y 的唯一性, 从而记 $f(x)=y$, 是**良定义的 (well-defined)** (即定义是确定的, 合理的). 显然, 这与分析中定义的函数为对应法则相一致, 我们这里不过是将对应法则用集合的语言描述出来而已. 另外, 我们通常在 Y 为数集的时候, 称 f 为函数, 其他时候称为映射. 不过这些名词的规定相比数学本身显得无关紧要, 通常会在很多场合被打破.

为了方便起见, 在定义域和伴域明确的前提下. 我们会简单地把定义简单写为 $f: x \mapsto y$, 或 $f(x) := y$.

定义 2.2 记

$$Y^X = \{f : X \to Y\}$$

为全体 X 到 Y 的映射.

这与前面的 Cartesius 积定义 (1.21) 下的 $Y^{|X|}$ 完全一样. 不过其中的元素约定俗成地分别记作有序组和函数, 即

$$(a_i)_{i\in X} \in Y^{|X|} \quad f \in Y^X$$

当然这两者只不过是一样事物的两种记法, 相信读者能够理解.

再回忆幂集的定义 (1.9) 以及特征函数 (1.11), 实际上幂集的记号 2^X 和 $\{0,1\}^X$ 的记号也是统一的.

命题 2.3 对于有限集 X, Y, $|X^Y| = |X|^{|Y|}$.

定义 2.4 (像) 已知 $f: X \to Y$, 若 $A \subseteq X$, 记

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

称为 A 在 f 下的**像 (image)** 或**值域 (range)**, 特别地, 记 $f(X) = \operatorname{Im} f$.

事实上, 上述由 A 决定 $f(A)$ 的过程, 可以视作一个 $2^X \to 2^Y$ 的映射.

定义 2.5 (原像) 已知 $f: X \to Y$, 若 $B \subseteq Y$, 记

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

称为 B 在 f 下的**原像 (preimage)**.

上述由 B 决定 $f^{-1}(B)$ 的过程, 可以看做一个 $2^Y \to 2^X$ 的映射.

以上定义和我们前面的定义是相容的, 因为 $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

命题 2.6 已知 $f: X \to Y$. 关于像, 原像有如下性质:

(1) 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(2) 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(3) 对任意 $A \subseteq X$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(4) 对任意 $B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

且若 $B \subseteq \operatorname{Im} f$, 则 $f(f^{-1}(B)) = B$.

(5) 对于任意的 $A \subseteq X$, $f(A)^c \subseteq f(A^c)$.

(6) 对于任意的 $B \subseteq Y$, $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$.

(7) 对于任意 $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq 2^X$, 有

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i) \qquad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

(8) 对于任意 $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq 2^Y$, 有

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \qquad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

(9) 若 $B_1, B_2 \subseteq Y$, $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

证明 习题见. □

定义 2.7 常用的几个映射定义如下:

- 已知集合 X, **恒等映射 (identity)** 被定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X : \quad X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

在不引起混淆的情况下可以省略 X, 写成 id

- 已知集合 X, $A \subseteq X$, **包含映射 (inclusion)** 被定义为

$$\begin{aligned} i_A: \quad A &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

  在不引起混淆的情况下可以直接记为 id_A.

- 已知集合 X, Y, $y_0 \in Y$, **常值映射**被定义为

$$\begin{aligned} y_0: \quad X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y_0 \end{aligned}$$

- 已知集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, **投影映射 (projection)** 被定义为

$$\begin{aligned} p_i: \quad X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n &\longrightarrow X_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

- 已知集合族 $\{X_i\}_{i\in I}$, 更一般的**投影映射**被定义为

$$\begin{aligned} p_k: \quad \prod_{i\in I} X_i &\longrightarrow X_k \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto x_k \end{aligned}$$

- 回忆无交并 *(1.22)* 的定义, 对于集合族 $\{X_i\}_{i\in I}$, 也称如下映射为**投影映射**,

$$\begin{aligned} p: \quad \coprod_{i\in I} X_i &\longrightarrow I \\ (x_i, i) &\longmapsto i \end{aligned}$$

  即指出无交并中元素的所在.

定义 2.8 (限制) 若 $f: X \to Y$, 记

$$\begin{aligned} f|A \text{ 或} f|_A: \quad A &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

称为 f 在 A 上的**限制 (restriction)**.

在 A 上的限制无非是将定义域缩减到子集 A 上, 而 A 以外的部分都没有定义.

定义 2.9 (扩张) *若 $f: X \to Y$, 若 $X \subseteq U, Y \subseteq V$, 函数 $g: U \to V$, 且 $g|_X = f$, 则称 g 为 f 的* **扩张 (extension)** *.*

扩张无非是限制的逆运算. 现在看, 限制和扩张看似都只是冗长的概念, 但事实上, 限制和扩张的概念在数学各领域中都着重要的作用.

≫≫≫≫ 习题 §2.1 ≪≪≪≪

习题 2.1 证明 *(2.3)*. (提示: 每一个 $x \in A$, 由 n 种选择, 然后根据乘法原理.)

习题 2.2 证明 *(2.6)*. 并指出 *(7)* 第一个关于交取不到等号的例子. (提示: 例如, 将两个无交的子集映成一个点.)

习题 2.3 已知 $f: X \to Y$, 求证: $f(A) \subseteq B \iff A \subseteq f^{-1}(B)$. (提示: 代数地,

$$f(A) \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B) \overset{A \subseteq f^{-1}f(A)}{\Rightarrow} A \subseteq f^{-1}(B)$$

以及

$$A \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow f(A) \subseteq f(f^{-1}(B)) \overset{f(f^{-1}(B)) \subseteq B}{\Rightarrow} f(A) \subseteq B$$

当然, 直接验证是容易的.)

问题 2.4 已知 $f: X \to Y$, 对于 $A \subseteq X$, 求证: $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$. (提示: 代数地,

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(A) \subseteq f(f^{-1}(f(A)))$$

而

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \overset{B = f(A)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(f(A))) \subseteq f(A)$$

故相等.)

问题 2.5 (饱和集) 已知 $f: X \to Y$, 设集合 $S = \{A \subseteq X | f^{-1}(f(A)) = A\}$,

(1) 求证: $S = \{f^{-1}(f(A)) | A \subseteq X\}$. (提示: 利用上一题.)

(2) 对于 $A_1, A_2 \in S$, 求证: $A_1 \cap A_2 \in S$. (提示: 首先, $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1, A_2$, 故 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), f(A_2)$, 故 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$, 于是

$$f^{-1}(f(A_1 \cap A_2)) \subseteq f^{-1}(f(A_1) \cap f(A_2)) = f^{-1}(f(A_1)) \cap f^{-1}(f(A_2)) = A_1 \cap A_2$$

而反方向是必然的.)

2.2 映射的运算

定义 2.10 已知函数 $f: X \to Y, g: Y \to Z$, 定义二者的**复合**

$$\begin{aligned} g \circ f: \quad X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

这种复合可以视为映射的乘法, 这是因为映射的复合有结合律.

命题 2.11 已知函数 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to W$, 则有

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *(结合律)*

(2) $f \circ \mathrm{id}_X = f$. *(右单位律)*

(3) $\mathrm{id}_Y \circ f = f$. *(左单位律)*

(4) 对于 $z \in Z$, 若 c 是 Y 到 z 的常数映射, 则 $c \circ f$ 是 X 到 z 的常数映射. *(左零律)*

(5) 对于 $y \in Y$, 若 c 是 X 到 y 的常数映射, 则 $g \circ c$ 是 X 到 $g(y)$ 的常数映射. *(右零律)*

证明 习题见. □

定义 2.12 (单射) 已知函数 $f: X \to Y$, 若

$$f(x) = f(y) \iff x = y$$

则称 f 是**单射 (injective)** 或**内射**或 **1-1** 的, 记为 $f: X \hookrightarrow Y$.

例如包含映射就是单射.

命题 2.13 关于单射有如下性质:

(1) $f: A \to B$ 是单射当且仅当存在 $g: B \to A$ 使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_A$$

(2) 两个单射的复合还是单射;

(3) 若 $f \circ g$ 是单射, 则 g 是单射.

(4) 对于非空有限集 X, Y, 存在 $X \to Y$ 的单射当且仅当 $|X| \leq |Y|$.

证明 (1) 充分性,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \quad \text{i. e.} \quad x = y$$

而必要性则需要构造 g. 对于 $\operatorname{Im} f$, 定义 $g: f(x) \mapsto x$, 因为 $f(x) = f(y) \iff x = y$, 故 g 是良定义的. 对于剩余的部分 $A \setminus \operatorname{Im} f$, 任意指定 g 的取值即可. 例如, 由于 A 非空, 存在 $a \in A$, 我们定义

$$\begin{aligned} g: \quad B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto \begin{cases} x & y = f(x) \in \operatorname{Im} f \\ a & y \notin \operatorname{Im} f \end{cases} \end{aligned}$$

直接验证, $g(f(x)) = x$.

(2)(3) 直接通过定义容易验证. (4) 注意到, 根据单射的定义, Y 中至少有 $|X|$ 个不同元素. □

定义 2.14 (满射) 已知函数 $f: X \to Y$, 若

$$Y = \operatorname{Im} X$$

则称 f 是**满射 (surjective)** 或**到上**的, 记为 $f: X \twoheadrightarrow Y$.

例如投影映射就是满射.

命题 2.15 关于满射有如下性质:

(1) $f: A \to B$ 是满射当且仅当存在 $g: B \to A$ 使得 *(存在右逆)*

$$f \circ g = \mathrm{id}_B$$

(2) 两个满射的复合还是满射;

(3) 若 $f \circ g$ 是满射, 则 f 是满射.

(4) 对于有限集 X, Y, 存在 $X \to Y$ 的满射当且仅当 $|X| \geq |Y|$.

证明 (1) 充分性, $\forall y \in B$, $x = g(y)$ 使得 $f(x) = y$, 故 $y \in \operatorname{Im} f$.

必要性则需要构造 g. 对于任意 $y \in B$, 根据满射 $f^{-1}(y)$ 非空, 故可以找到一个 $x_y \in f^{-1}(x)$. 此时规定

$$\begin{aligned} g: \quad B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto x_y \end{aligned}$$

直接验证, 因为 $g(y) \in f^{-1}(y)$, 所以 $f(g(y)) = y$.

(2)(3) 直接通过定义容易验证. (4) 根据鸽笼原理, 每一个 Y 中元素都是一个 "鸽笼", 每一个 X 中的元素都是一只 "鸽子", 每个鸽笼都需要至少有一只鸽子. □

定义 2.16 (双射) 已知函数 $f: X \to Y$, 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是**双射 (bijective)** 或 **1-1 对应**或 **1-1 到上**的, 记为 $f: X \overset{1:1}{\leftrightarrow} Y$.

例如恒等映射就是双射.

命题 2.17 *关于双射有如下性质:*

(1) *$f: A \to B$ 是满射当且仅当存在映射 $g: B \to A$ 使得* *(存在左逆)*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B$$

且这样的 g 是唯一的.

(2) *两个双射的复合还是双射.*

(3) *若 $f \circ g$ 是双射, 则 f 是满射, g 是单射.*

(4) *对于有限集 X, Y, 存在 $X \to Y$ 的双射当且仅当 $|X| = |Y|$.*

证明 (1) 充分性根据前面两个命题. 必要性则还需要构造 g, 定义

$$\begin{array}{rrcl} g: & B & \longrightarrow & A \\ & y = f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

这是一个良定义的映射. g 唯一是因为若有 g' 也满足条件, 则

$$g \circ f = \mathrm{id}_A = g' \circ f \Rightarrow g \circ (f \circ g) = g' \circ (f \circ g) \quad \text{i. e.} \quad g = g'$$

(2)(3) 根据前面的命题. (4) 则是计数. □

定义 2.18 对于双射 $f: A \to B$, 由 *(2.17)(1)* 确定的 g 被称为 f 的**逆函数 (inverse function)** 或**反函数**, 记为 f^{-1}.

命题 2.19 *已知双射 f, g, 关于逆元有如下性质:*

(1) $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$.

(2) $(f^{-1})^{-1} = f$.

(3) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

证明 (1)(2) 按定义是显然的. (3) 是因为结合律:

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=\mathrm{id}$$

故 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$. □

上述命题的 (4) 有一个具体的生活化的解释, 赤足开始, 先穿袜再穿鞋, 而逆向过程, 必须先脱鞋再脱袜. 翻译如下:

生活化语言	数学化语言
穿袜	f
脱袜	f^{-1}
穿鞋	g
脱鞋	g^{-1}

定义 2.20 (自映射) 对于集合 X, 将 X 到 X 的所有映射称为 X 的**自映射**.

命题 2.21 对于有限集合 X 自映射 f,

$$f\text{ 是单射}\iff f\text{ 是满射}$$

证明 计数. □

然而对于无穷集合则不对, 例如指数映射 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 是单射而不是满射. $f(x)=x^3-x$ 是满射而不是单射.

⋙⋙ 习题 §2.2 ⋘⋘

习题 2.6 证明 *(2.11)*.

习题 2.7 证明下列命题是等价的

(1)f 是单射.

(2) 存在 g 使得 $g\circ f=\mathrm{id}$. *(这就是 (2.13))*

(3) 存在满射 g 使得 $g\circ f=\mathrm{id}$.

(4) 对于任何的映射 h, k, 有如下必然关系 $f \circ h = f \circ k \iff h = k$. (当然, 假设可以复合)

(提示: (2)⇒(3) 只需利用 (2.15), (3)⇒(4) 只需要把 (3) 确定的 g 复合在左边. (4)⇒(1) 只需要取

$$\begin{array}{rccc} h: & \{*\} & \longrightarrow & X \\ & * & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} k: & \{*\} & \longrightarrow & X \\ & * & \longmapsto & y \end{array}$$

这样, $f \circ h = f \circ k \iff f(x) = f(y)$, 并且, $h = k \iff x = y$.)

同样, 下列命题也是等价的

(1)f 是满射.

(2) 存在 g 使得 $f \circ g = \mathrm{id}$. (这就是 (2.15))

(3) 存在单射 g 使得 $f \circ g = \mathrm{id}$.

(4) 对于任何的映射 h, k, 有如下必然关系 $h \circ f = k \circ f \iff h = k$. (当然, 也要假设可以复合)

习题 2.8 为什么 *(2.17)* 的 *(1)* 的证明中不直接利用 *(2.13)(2.15)* 构造的 g, 而还要再构造一次?

习题 2.9 已知自映射 f, g, 若

$$f \circ g \circ f = f \quad f \circ g \circ g \circ f = \mathrm{id}_X$$

求证: g 是 f 的逆函数. (提示: 因为如下无聊的恒等运算 (以下省略 $\circ$)

$$\mathrm{id}_X = fggf = (fgf)ggf = fg(fggf) = fg$$

同理 $\mathrm{id}_X = gf$.)

习题 2.10 证明 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的连续函数是单射 $\iff$ 严格单调.

习题 2.11 对于有限维线性空间 V, 若 $\mathscr{A} : V \to V$ 是线性变换. 求证

$$f \text{ 是单射} \iff f \text{ 是满射}$$

(提示: 当然, 这是线性代数的标准结论, 通过取基, 可以转化到 (2.21))

问题 2.12 下面，我们来计算两个有限集之间的映射，单射，满射，双射的数目. 已知 m 元集 A, n 元集 B, $f: A \to B$,

(1) 双射 f 的个数. (提示: 此时 $n = m$, 为 $n!$.)

(2) 单射 f 的个数. (提示: 此时 $n \le m$, 为排列数 $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$)

(3) 满射 f 的个数. (提示: 利用容斥原理或者二项反转公式 (参见习题1.17), 具体来说, 假设个数为 $S(m,n)$, 则通过给 $\operatorname{Im} f$ 的数量分类计算映射个数, 有

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} S(k,n) = n^m$$

通过 (1.17) 立刻得到

$$S(m,n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n^k$$

细查其中表达式也可以看出其容斥原理的意义.)

问题 2.13 用 n 种颜色染 m 个格子, 求:

(a) 总染色数;

(b) 不同格子颜色不同的染色方法数;

(c) 将所有颜色都用上的染色方法数.

将 m 个不同的球分入 n 个不同的盒子中, 求:

(a) 总分法数目;

(b) 每个盒子至少一个的分法数目.

习题☠ 2.14 (不动点) 对于集合 X 的自映射 f, 称

$$\operatorname{Fix} f = \{x \in X | f(x) = x\}$$

为 f 的**不动点 (fixed point)** 集, 称

$$\operatorname{Fix} f^2 = \{x \in X | f(f(x)) = x\}$$

为 f 的**稳定点**集. 回答以下问题:

(1) 求证: $\operatorname{Fix} f \subseteq \operatorname{Fix} f^2$;

(2) 举出一个 $\operatorname{Fix} f \neq \operatorname{Fix} f^2$ 的例子.

(3) 若 $|\operatorname{Fix} f^2|$ 是奇数, 求证: $\operatorname{Fix} f \neq \varnothing$.

(4) 假设 $X = \mathbb{R}$,

(a) 若 f 单调递增, 求证: $\operatorname{Fix} f = \operatorname{Fix} f^2$;

(b) 若 $x + f(x)$ 是单射, 求证: $\operatorname{Fix} f = \operatorname{Fix} f^2$;

(c) 若 $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, 且 $f(x)$ 连续, 求证: $\operatorname{Fix} f \cap [a,b] \neq \varnothing$;

(d) 若 $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, 且 $f(x)$ 单调, 求证: $\operatorname{Fix} f \cap [a,b] \neq \varnothing$;

(e) 求二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的不动点和稳定点.(提示: 作差)

(f) 证明不存在可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = x^2 - 3x + 3$. (提示: 利用不动点导出矛盾)

(g) 证明不存在函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = 2x^2 - 4x$. (提示: 利用稳定点导出矛盾)

(h) 若 $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, 其中 $k < 1$, 求证: f 只有唯一的不动点. (提示: 构造数列)

2.3 交换图

我们将在这节介绍一个有力的工具, **交换图**. 交换图是顶点是集合, 有向边为映射的图. 例如

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

我们称这个交换图是**交换**的, 如果 $g \circ f = h$. 当然, 严格来说, 对每一种样式 (例如上面是三角形) 的交换图就应该定义某一种样式下的交换. 不过, 相信读者能够自行明白图意思.

利用映射能够非常完善地描述一些集合的构造的性质.

命题 2.22 (Cartesius 积的泛性质) 对于一族集合 $\{A_i\}_{i\in I}$, 则

$$(P,\{\pi_i\}) \quad \Bigg| \quad P=\prod_{i\in I}A_i, \pi_i: P\to A_i\text{是投影映射}$$

满足如下的泛性质

$$\begin{array}{l} \forall\text{集合 } X, \forall\text{一族映射 } \{\varphi_i: X\to A_i\} \\ \exists!\text{映射 } \lambda: X\to P \\ \quad \text{s.t.} \quad \forall i\in I, \pi_i\circ\lambda=\varphi_i \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ P \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

证明 无非就是找一个映射 λ 使得其每一个分量都恰好是 φ_i. 取

$$\begin{aligned} \lambda: \quad X &\longrightarrow \textstyle\prod_{i\in I}A_i \\ x &\longmapsto (\varphi_i(x))_{i\in I} \end{aligned}$$

即可. 而唯一性是注意到若有满足条件的 λ, 设 $\lambda(x)=(x_j)_{j\in I}$, 则

$$\pi_i\circ\lambda(x)=\pi_i((x_j)_{j\in I})=x_i$$

根据条件 $x_i=\varphi_i(x)$, 所以上面的 λ 是唯一的选择. □

以上就是"泛性质"最为简单的一个例子, 也就是说任何一族映射 φ_i 都可以合并为一个到其陪域 Cartesius 积的映射, 使得其每一个分量都恰好是 φ_i. 用映射的语言写就是

$$\nu: \prod_{i\in I}A_i^X \longrightarrow \left(\prod_{i\in I}A_i\right)^X \qquad \{\varphi_i: X\to A_i\}_{i\in I}\longmapsto\lambda$$

且 ν 是双射, 因为反过来就是

$$\lambda\mapsto(\pi_i\circ\lambda)_{i\in I}$$

这看上去似乎是一句废话, 然而将其抽象出来有其意义, 例如下面的推论指出, 这条性质完全决定了 Cartesius 积.

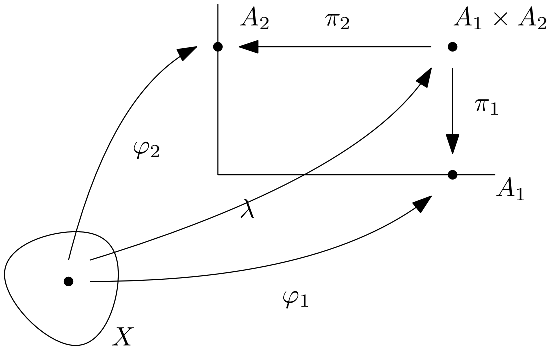


图 2.1: Cartesius 积的泛性质

推论 2.23 *满足 (2.22) 性质的 $(P, \{\pi_i\})$ 之间必然可以建立双射，具体来说，若*

$$(P, \{\pi_i\}), (P', \{\pi_i'\})$$

满足 (2.22) 的泛性质，则存在 $\alpha : P \to P', \beta : P' \to P$，使得

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= \mathrm{id}_{P'} \\ \beta \circ \alpha &= \mathrm{id}_P \\ \pi_i \circ \beta &= \pi_i' \\ \pi_i' \circ \alpha &= \pi_i \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[d, shift left, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\pi_i'"] & \\ P \arrow[u, shift left, dashed, "\alpha"] \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

证明　先取 (2.22) 性质的 $X = P', \varphi_i = \pi_i'$，则根据 (2.22)，

$$\exists \beta : P' \to P, \text{s. t.} \quad \pi_i \circ \beta = \pi_i'$$

同理，交换 P, P'，则有

$$\exists \alpha : P \to P', \text{s. t.} \quad \pi_i' \circ \alpha = \pi_i$$

本命题的后两条已经满足了. 下面，取 (2.22) 性质的 $X = P, \varphi_i = \pi_i$ 自身，显然，id_P 是满足条件的一个映射，而 $\lambda = \beta \circ \alpha$ 也满足

$$\pi_i \circ \lambda = \pi_i \circ \beta \circ \alpha = \pi_i' \circ \alpha = \pi_i = \varphi_i$$

根据唯一性，$\mathrm{id}_P = \beta \circ \alpha$. 同理，$\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{P'}$. □

补充 2.24 (函子) 对于一族映射 $\{\varphi_i : A_i \to B_i\}$, 我们可以定义

$$\prod_{i\in I}\varphi_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i \qquad (a_i)_{i\in I} \longmapsto (\varphi_i(a_i))_{i\in I}$$

即每个分量分别作用. 实际上, 可以通过如下途径得到

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, dashed] & A_i \arrow[d, "\varphi_i"] \\
\prod_{i\in I} B_i \arrow[r, "\rho_i"'] & B_i
\end{tikzcd}$$

假设 $\pi_i : \prod A_i \to A_i, \rho_i : \prod B_i \to B_i$ 是投影映射, 则通过复合 $\varphi_i \circ \pi_i$, 再利用 *(2.22)* 性质可得到映射 $\prod_{i\in I}\varphi_i$.

类似地, 如果一个对集合的操作 *(*例如取 *Cartesius* 积*)*, 还将集合间的映射保持, 即这个操作还自然地作用在映射上, 我们称这个操作为**函子 (functor)** .

下面, 一个常见的趣味是将所有箭头倒置, 看会发生什么. 回忆 (1.22) 对无交并的定义.

补充 2.25 (无交并的泛性质) 对于一族集合 $\{A_i\}_{i\in I}$, 则

$$(U, \{\iota_i\}) \quad \Big| \quad U = \coprod_{i\in I} A_i, \iota_i : A_i \to U \text{是包含映射}$$

满足如下的泛性质

$$\begin{aligned} &\forall \text{集合 } X, \forall \text{一族映射 } \{\varphi_i : A_i \to X\} \\ &\exists^! \text{映射 } \lambda : U \to X \\ &\quad \text{s.t.} \quad \forall i \in I, \lambda \circ \iota_i = \varphi_i \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} X & \\ U \arrow[u, dashed, "\lambda"] & A_i \arrow[l, "\iota_i"] \arrow[ul, "\varphi_i"'] \end{tikzcd}$$

证明 唯一的选择是

$$\begin{aligned} \lambda : \quad \textstyle\coprod_{i\in I} A_i \quad &\longrightarrow \quad X \\ a \in A_i \quad &\longmapsto \quad \varphi_i(a) \end{aligned}$$

命题得证. □

也就是说, 可以将一族陪域相同的映射通过将定义域强行拼接起来合成一个映射.

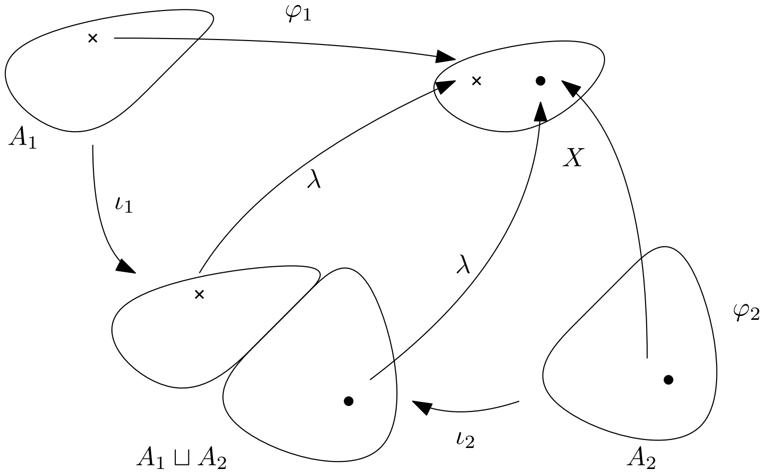


图 2.2: 无交并的泛性质

补充 2.26 *满足 (2.25) 性质的 $(U, \{\iota_i\})$ 之间必然可以建立双射. 若*

$$(U, \{\iota_i\}), (U', \{\iota'_i\})$$

满足 (2.25) 的泛性质, 则存在 $\alpha : U \to U', \beta : U' \to U$, 使得

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= \mathrm{id}_{P'} \\ \beta \circ \alpha &= \mathrm{id}_P \\ \beta \circ \iota_i &= \iota'_i \\ \alpha \circ \iota'_i &= \iota_i \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[d, dashed, shift left, "\beta"] & \\ U \arrow[u, dashed, shift left, "\alpha"] & A_i \arrow[l, "\iota_i"] \arrow[ul, "\iota'_i"'] \end{tikzcd}$$

证明 模仿 (2.23), 留作习题. □

⋙⋙ 习题 §2.3 ⋘⋘

习题 2.15 证明 (2.26).

习题 2.16 利用 (2.25) 证明

$$A \sqcup (B \sqcup C) \text{与} (A \sqcup B) \sqcup C \text{之间存在双射}$$

(提示: 证明其和 $A \sqcup B \sqcup C$ 之间存在双射, 证明 $A \sqcup (B \sqcup B)$ 满足 $A \sqcup B \sqcup C$ 的泛性质, 这无非是两次使用 (2.25).)

2.4 运算与运算律

在中学, 连同本书前面已经介绍的集合的运算, 函数的运算, 我们已经多次接触了运算这一概念, 下面我们要给出运算的具体定义.

定义 2.27 (运算) 已知集合 X, Y, Z, 若映射 $f: X \times Y \to Z$, 则称 f 是一个从 X 和 Y 上到 Z 的**二元 (binary) 运算**, 简称**运算** (operator). 对于 $f(x, y) = z$, 记 $xfy = z$.

定义 2.28 (反运算) 已知 f 是一个从 X 和 Y 上到 Z 的二元运算, 定义

$$\begin{aligned} f^{op}: \quad Y \times X &\longrightarrow Z \\ (y, x) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

称为 f 的**反 (opposite) 运算**.

例如我们所学的加法, 实际上可以看成一个 $\mathbb{R}$ 上的二元函数, 不过是以 $a + b$ 表示 $+(a, b)$. 当然, 在大多数场合, 运算都以符号表示, 如 "$\otimes, +, -, \times, *, \cdot$" 等.

定义 2.29 (封闭运算) 若运算 $f: X \times X \to X$, 则称 f 为 X 上的**封闭二元运算 (binary composition)**, 简称**封闭 (closed)** 运算.

所谓封闭性, 意即无论如何运算, 元素皆不会超出给定集合范围. 实数的加减乘除, 集合的交并补, 皆为此类. 这种运算也是代数学的主要研究对象.

补充 2.30 (n 元运算) 当然，自然可以定义封闭的 n 元运算的含义为

$$X^n \to X$$

特别地，$n=0$ 时，我们需要定义“零个”集合的 *Cartesius* 积. 正如我们对连乘定义的，“零个”集合的 *Cartesius* 积认为是单点集 $\{*\}$，那么零元运算就是指定元素.

这样，我们有更多例子，例如对复数取共轭，就是一个一元运算. 对三个点求重心，就是一个三元运算.

定义 2.31 (作用) 若运算 $f: X\times Y \to Z$，则称 f 是 X 在 Y 上到 Z 的一个**左作用 (left-action)**，简称**作用**. 也视为一种运算，记 $f(x,y)=xfy$.

若 $f: Y\times X\to Z$，称 f 为 X 在 Y 上到 Z 的一个**右作用 (right-action)**. 也视为一种运算，记 $f(y,x)=yfx$.

例如线性空间中的数乘就是一个作用. 具体来说，对于 $\mathbb{R}$-向量空间 V，则有

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R}\times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, \boldsymbol{x}) &\longmapsto \lambda\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

再例如，全体 $n\times n$ 矩阵在 n 元列向量上有左作用，在 n 元行向量上有右作用. 甚至，

$$\{\text{旋转 } 90^\circ, \text{向左平移 } 1 \text{ 个单位}\}$$

在平面上有作用.

补充 2.32 事实上，我们可以认为 Z^Y，即 Y 到 Z 的全体映射，就是所有 Y 到 Z 上的“作用”，其作用就是带入，

$$\begin{aligned} d_0 : \quad Z^Y\times Y &\longrightarrow Z \\ (f,y) &\longmapsto f(y) \end{aligned}$$

而一般的作用就是指出 X 在 Y 上如何作用.

实际上, 任何作用 X 在 Y 上的作用都可视为 $X \to Z^Y$ 的一个映射, 例如, 对于 $f: X \times Y \to Z$, 就对应于

$$\begin{array}{rccc} F: & X & \longrightarrow & Z^Y \\ & x & \longmapsto & [xF-: y \mapsto xFy] \end{array}$$

反过来, $F: X \to Y^Y$, 对应于作用

$$\begin{array}{rccc} f: & X \times Y & \longrightarrow & Z \\ & (x, y) & \longmapsto & [F(x)](y) \end{array}$$

更一般地, 任何 $f: X \times Y \to Z$ 的映射都自动对应于 $f: X \to Z^Y$ 的映射, 换句话说, 我们建立起

$$Z^{X \times Y}\text{和}(Z^Y)^X\text{之间的双射}$$

另一方面, Y^Y, 即 Y 的所有封闭的一元运算, 所以一个 X 在 Y 上的作用, 还可以看成 X"那么多个"Y 上的一元封闭运算.

下面, 我们来讨论运算的性质, 即运算律.

定义 2.33 (结合律) 已知 X 上的封闭运算 "·", 若

$$\forall x, y, z \in X, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

则称 "·" 有 **结合律 (associative property)** .

结合律给予我们给一串 X 中元素作 "·" 运算不写括号的权利, 否则, 不具有结合律的一串式子应当像这样书写

$$(a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$$

由于映射是有结合律的 (假定映射的定义域和伴域相同), 故我们入门所遇见的代数都是结合代数, 这是具有普遍性的.

定义 2.34 (交换律) 已知 X 上的封闭运算 "$\cdot$", 若

$$\forall x, y \in X, x \cdot y = y \cdot x$$

则称 "$\cdot$" 有**交换律 (commutative property)**.

结合律给予我们给一串 X 中元素作 "$\cdot$" 运算忽略顺序的权利. 即便不具有结合律, 我们也能对一串式子略作化简, 如

$$(a \cdot (b \cdot c)) \cdot d = ((b \cdot c) \cdot a) \cdot d$$

定义 2.35 (单位律) 已知 X 上的封闭运算 "$\cdot$", 若

$$\exists e \in X, \forall x \in X, x \cdot e = e \cdot x = x$$

则称 X 有 "$\cdot$" 的**单位元 (identity)** e.

命题 2.36 求证: 单位元是唯一的.

证明 若有两个单位元 e, e', 则 $e = e \cdot e' = e'$. □

定义 2.37 (零律) 已知 X 上的封闭运算 "$\cdot$", 若

$$\exists o \in X, \forall x \in X, x \cdot o = o \cdot x = o$$

则称 X 有 "$\cdot$" 的**零元 (zero)** o.

例如, $1 \in \mathbb{R}$ 就是乘法的单位元, $0 \in \mathbb{R}$ 就是加法的单位元. 单位阵就是矩阵中乘法的单位元. 零矩阵就是矩阵加法的单位元. 零向量就是线性空间加法的单位元.

例如, $0 \in \mathbb{R}$ 就是零元. 零矩阵就是矩阵中的零元.

定义 2.38 (分配律) 已知 X 上的封闭运算 "$+$", "$\cdot$", , 若

$$\forall x \in X, y, z \in Y, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

则称 “$\cdot$” 对 “$+$” 有 **左分配律 (left-distributive property)**. 若

$$\forall x, y, z \in X, (y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x$$

则称 “$\cdot$” 对 “$+$” 有 **右分配律 (right-distributive property)**. 同时满足左右两种分配律的被称为 **分配律 (distributive property)**.

回忆 (1.14), 除了我们常用数集的分配律, 我们还有关于集合的交并分配的例子.

定义 2.39 (消去律) 已知 X 和 Y 到 Z 上的运算 “$\cdot$”, 若

$$x\cdot y = x\cdot z \iff y = z \quad x\in X, y, z\in Y$$

则称 “$\cdot$” 满足 **左消去律 (left-cancellation property)**. 若

$$y\cdot x = z\cdot x \iff y = z \quad y, z\in X, x\in Y$$

则称 “$\cdot$” 满足 **右消去律 (right-cancellation property)**. 同时满足左右两种消去律的被称为 **消去律 (cancellation property)**.

例如, 矩阵环就不满足消去律, 例如

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ & 0\end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$$

⋙⋙ 习题 §2.4 ⋘⋘

习题 2.17 结合律和分配律还可以用来指作用.

(1) 已知 Y 作用在 X 上, X 上的封闭运算 “$+$”, 仿照正文写出作用具有分配律的条件.

(2) 已知 Y 左作用在 X 上, Z 右作用在 X 上, 仿照正文写出两种作用具有结合律律的条件.

第三章　集合的基数

本章是对集合基数的讨论. 集合的基数是对集合大小的衡量. 本章讨论了集合的基数及如何比较, 还有三个需要选择公理论证的关于基数的定理.

3.1　集合的基数

为了描述无穷集合的 “大小”, 我们先引入基数的概念.

定义 3.1 (等势, 基数) 已知集合 X, Y, 若存在双射 $f: X \overset{1:1}{\leftrightarrow} Y$, 则称 X, Y 是**等势的 (equipotent)** 或有相同的**基数 (cardinal)**, 记作 $|X| = |Y|$ 或 $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$ 或 $\#X = \#Y$.

显然, 这与我们有限集合的探讨的一致的. 因为 (2.17) 的 (4).

显然, 等势具有传递性: $|X| = |Y|, |Y| = |Z| \Rightarrow |X| = |Z|$.

例 3.2 (Hilbert 旅馆) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*| = |\mathbb{Z}|$.

证明　作

$$
\begin{aligned}
f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\
n &\longmapsto n+1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
g: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\
n &\longmapsto \begin{cases} k, & n = 2k, \\ -k, & n = 2k-1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

评注 3.3 *Hilbert* 旅馆是一个著名的数学故事，*Hilbert* 有一家有"无穷"[1] 房间的旅馆，在所有房间都住满的情况下，

(1) 来了一位新客人，我们可以这样安排房间，将 1 号房间的客人换至 2 号房间，2 号房间的客人换至 3 号房间，3 号房间的客人换至 4 号房间，如此类推，1 号房间便空出来，可以腾出一个房间.

(2) 来了无穷[2] 位客人，我们可以这样安排房间，将 1 号房间的客人换至 2 号房间，2 号房间的客人换至 4 号房间，3 号房间的客人换至 6 号房间，如此类推，奇数号的房间都空出来，便可以腾出无穷个房间.

例 3.4 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$.

证明　按下图方式将 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 排成一列，

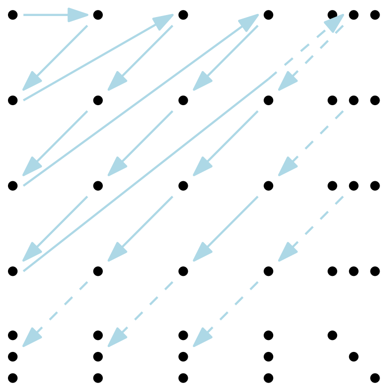


图 3.1: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$

设这列数为 $\{a_n\}$，

$$a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad n \longmapsto a_n$$

于是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}$ 等势. $\square$

例 3.5 $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

[1] 后面我们会看到，这种无穷是可数无穷

[2] 当然，这种无穷也是可数无穷

证明 仿照 (3.4), 这成为一道习题. □

例 3.6 $|[0,1)| = |[0,1]| = |[0,+\infty)| = |(0,\infty)| = |\mathbb{R}|$.

证明 作

$$\begin{aligned} f: \quad [0,1] &\longrightarrow [0,1) \\ x &\longmapsto \begin{cases} x/2 & \exists n \in \mathbb{N}, \mathrm{s.\,t.}\, x = 2^{-n}, \\ x & \text{其他情况.} \end{cases} \end{aligned}$$

作

$$\begin{aligned} g: \quad [0,1) &\longrightarrow [0,+\infty) \\ x &\longmapsto \frac{1}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

剩下两个等号留做习题. □

例 3.7 $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

证明 否则, 存在 $f: \mathbb{N} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathbb{R}$, 设 $f(n)$ 的十进制小数为

$$\begin{array}{ll} \begin{aligned} f(0) &= a_{00}.a_{01}a_{02}a_{03}\ldots \\ f(1) &= a_{10}.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ f(2) &= a_{22}.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ \vdots\ \ & \quad\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ f(n) &= a_{n0}.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \\ \vdots\ \ & \quad\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \end{aligned} & \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, i \in \mathbb{N} \\ a_{ni} \in \{0,1,2\ldots,9\} \end{array} \end{array}$$

考虑对角线 $\{a_{ii}\}$, 作数列 $\{a'_{ii}\}$:

$$a'_{ii} = \begin{cases} 2, & a_{ii} = 3, \\ 3, & a_{ii} \neq 3 \end{cases}$$

作实数

$$b = a'_{00}.a'_{11}a'_{22}a'_{33}\ldots$$

但 b 不同于任何一个 $f(n)$, 因为 b 与 $f(n)$ 至少有一位是不同的, 从而不会有 n 使得 $f(n)=b$, 产生了矛盾. □

上述这种方法被称为 **Cantor 对角线** 方法.

定义 3.8 (可数集) 已知集合 X, 若 $|X|=|\mathbb{N}|$, 则称 X 为 **可数 (countable) 集** 或 **可列集**, 记为 $|X|=\aleph_0$ 或 ω. 有限集和可数集合称为 **至多 (at most) 可数集**.

毫无疑问, 可数集的最大特点就是可以 “列出来”. 例如前面我们所证明的, $\mathbb{Z},\mathbb{N}^*,\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 都是可数集.

例 3.9 至多可数集的子集是至多可数集.

证明 通过一个双射, 子集映为 $\mathbb{N}^*$ 的子集, 故不妨假设就在 $\mathbb{N}^*$ 中考虑. 假设子集 S 不是有限集, 则总可以找到 S 中第 n 小的数 a_n. 这确定了一个映射

$$a:\mathbb{N}^*\longrightarrow S\qquad n\longmapsto a_n$$

这显然是单射, 为了看到是满射注意到, 对于 $s\in S$, 则 s 必然是 S 中前 s 小的数. □

例 3.10 至多可数个至多可数集之并是至多可数的.

证明 仿照 (3.4), 这成为一道习题. □

定义 3.11 (连续统) 已知集合 X, 若 $|X|=|\mathbb{R}|$, 则称 X 为 **连续统 (continuum)**, 记为 $|X|=\mathfrak{c}$.

⋙⋙ 习题 §3.1 ⋘⋘

习题 3.1 证明 *(3.5)* 以及 *(3.10)*.

习题 3.2 已知 $|A_1|=|A_2|$, 求证:

(1)$|A_1\times B|=|A_2\times B|$;

(2) $|A_1^B| = |A_2^B|$;

(3) $|B^{A_1}| = |B^{A_2}|$;

(4) $|2^{A_1}| = |2^{A_2}|$.

习题 3.3 求证: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0,1\}|$.

习题 3.4 求证: 正偶数集合和正整数集合等势.

习题 3.5 求证: $\mathbb{R}$ 上的任何区间都是等势的.

习题 3.6 求证: 可数集的全体有限子集组成的集合是可数集.

习题 3.7 求证: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$. (提示: 例如, 取一个无理数 $\sqrt{2}$, 考虑

$$\{n\sqrt{2} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \sqcup \{-n\sqrt{2} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

用前者来填补 $\mathbb{Q}$, 后者来填补前者 $\sqcup$ 后者.)

习题 3.8 在平面上给定一些点之后, 求证: 平面上可以从这些点出发尺规作图的点是可数的 (可作的点指是可作的直线或圆之间的交点).

习题 3.9 若复数 x 是某个整系数多项式的根, 则称 x 是**代数数 (algebraic number)** ,

(1) 求证: 整系数多项式是可数的.

(2) 求证: 实代数数是可数的.

习题 3.10 求证: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$. (提示: 将两个实数 "插空" 合成或者读者乐意的话, 可以取 Peano 曲线 (注意到这是一个满射, 而不是双射) 再利用下一节的 Cantor-Bernstein-Schroder 定理 (3.15).)

习题 3.11 求证: 全体初等函数是连续统.

习题 3.12 (Lindelöf 覆盖定理) 求证: $\mathbb{R}$ 中任何开覆盖都有至多可数的子覆盖. 即, 若有开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$, 必有 I 的可数子集 J 使得

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{j\in J} U_j$$

(提示: 利用可数拓扑基, 参见 §7.3, 例如 $\mathfrak{B}=\{(r-\frac{1}{n},r+\frac{1}{n}):r\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{Z}_{>0}\}$, 则对于任何开集的任何一点中都有其中至少有一个区间包含于这个开集且包含这个点. 对于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$, 可以定义对于每一个 i 和 $x\in U_i$, 存在 $U_{ix}\in\mathfrak{B}$ 使得 $x\in U_{ix}\subseteq U_i$. 则

$$\bigcup_{i\in I}\bigcup_{x\in U_i}U_{ix}=\bigcup_i U_i$$

左边剔去重复的 U_{ix}, 即上述过程定义了

$$\varphi:\{(x,i):x\in U_i\}=\bigsqcup_{i\in I}U_i\longrightarrow\mathfrak{B}\qquad(x,i)\longmapsto U_{ix}$$

则 $\operatorname{Im}\varphi$ 是至多可数集, 设之为 $\{B_n\}$, 则对每一个 n, 设 $(x_n,i_n)\mapsto n$, 则

$$\bigcup_n U_{i_n}\supseteq\bigcup_n U_{i_nx_n}=\bigcup_n B_n=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{x\in U_i}B_n=\bigcup_i U_i$$

反之是容易的. 换句话说, 我们是证明任何一个开覆盖都可以加细成为一个可数覆盖, 通过选取将这个可数覆盖的每一个开集原来所在的开集来选取子覆盖.)

问题 3.13 回答下列问题*:*

(1) 求证*:* 至多可数条直线不能将平面覆盖*.* (提示: 找另一条直线, 考虑交点. 因为平面上的直线千千万, 总可以找到. 或者根据 Baire 纲定理或者根据测度的角度, 总之有很多角度切入.)

(2) 求证*:* 有限维 $\mathbb{R}$-线性空间不能被至多可数的真子空间及其平移覆盖*.* (提示: 用归纳法.)

(3) 求证*:* 有限维 $\mathbb{Q}$-线性空间能被至多可数的真子空间覆盖*.*

3.2 基数的比较

定义 3.12 已知集合 X,Y, 若存在单射 $f:X\hookrightarrow Y$, 则记 $|X|\le|Y|$.

显然, 根据 (2.15), "$\leq$" 具有传递性: $|X| \leq |Y|, |Y| \leq |Z| \Rightarrow |X| \leq |Z|$.

根据 (2.15) 和 (2.17) 的对偶关系, 或者说, 更精确地, 习题2.7, 存在单射 $f: X \hookrightarrow Y$ 当且仅当存在满射 $g: Y \to X$ 当且仅当 $|X| \leq |Y|$.

下面的定理将回答 "$\leq$" 是否具有反对称性, 即 $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$.

命题 3.13 *对集合 X, 若 $A \subseteq X$, 则 $|A| \leq |X|$.*

证明 考虑包含映射. □

补充 3.14 *同样容易验证的是, 对于一族集合 $\{X_i\}$, 有 $\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \leq \left|\bigsqcup_{i\in I} X_i\right|$. 因为后者到前者存在满射. 那个映射正是 §2.3在 (2.25) 中包含映射所诱导出的.*

这条命题的反面不对, 例如我们上一节就已经看到的很多例子.

定理 3.15 (Cantor-Bernstein-Schroder 定理) *已知两集合 X, Y, 则*

$$|X| \leq |Y|, |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$$

证明 设 $f: X \hookrightarrow Y$, $g: Y \hookrightarrow X$, 作

$$\begin{array}{lll}
\{A_i\}: & A_0 = X & A_{i+1} = (g \circ f)(A_i) \\
\{B_i\}: & B_0 = g(Y) & B_{i+1} = (g \circ f)(B_i) \\
\{C_i\}: & C_0 = Y & C_{i+1} = (f \circ g)(C_i) \\
\{D_i\}: & D_0 = f(X) & D_{i+1} = (f \circ g)(B_i)
\end{array}$$

容易得如下集合被包含链

$$\begin{aligned}
X = A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq \dots \\
Y = C_0 \supseteq D_0 \supseteq C_1 \supseteq D_1 \supseteq \dots
\end{aligned}$$

定义函数

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \exists n \in \mathbb{N}, \mathrm{s.t.}\, x \in A_n - B_n, \\ g^{-1}(x) & \text{其余情形.} \end{cases}$$

其中 g^{-1} 是双射 $g|_{f(X)}$ 的逆函数, 且容易验证,

$$h(A_n \setminus B_n) = D_n \setminus C_{n+1}$$
$$h(B_n \setminus A_{n+1}) = C_n \setminus D_n$$
$$h\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

从而 $h(X) = Y$. □

以上定理表明, $\leq$ 是具有反对称性.

证明的过程请看下图.

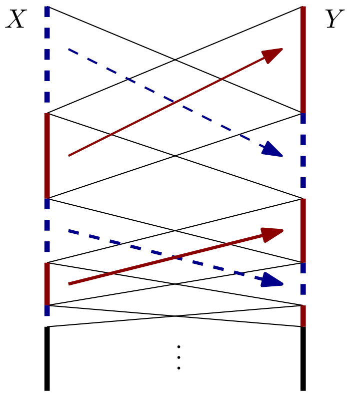


图 3.2: Cantor-Bernstein-Schroder 定理

另一个定理是回答是否有最大的基数的问题.

定理 3.16 (Cantor 定理) 已知集合 X, 则 $|X| < |2^X|$, 即

$$|X| \leq |2^X| \quad |X| \neq |2^X|$$

证明 首先, 存在 $\varphi : X \hookrightarrow 2^X$, 只要取 $\varphi(x) = \{x\}$, 于是 $|X| \leq |2^X|$. 下面假设存在双射 $f : X \to 2^X$, 考虑集合

$$S = \{x \in X | x \notin f(x)\}$$

考虑 $s := f^{-1}(S)$, 则

$$s \in S \iff s \notin f(s) = S$$

矛盾. $\square$

这一定理告诉我们无穷集合并非都一样大, 任何集合都有比之基数更大的集合.

这种方法也是 Cantor 对角线方法.

这个证明有一个直观的解释. 如果我们用直线表示集合 X, 我们可以给每个点标记上黑白两种颜色来标记子集中是否含这个元素, 若含则标记黑色, 若不含则标记白色, 于是每一个子集被标为一个条形码. 若 2^X 可以和 X 建立双射, 则 2^X 恰为 X 和 X 织成一张方形二维码, 每一行表示一个子集. 此时选取对角线, 再取其反色, 则得到的这个条形码将与每一行的条形码都不相同 (因为至少有一个元素不相同), 从而矛盾. 如下图所示. 这一直观解释翻译为集合语言便是上面的证明过程.

图 3.3: Cantor 定理

例 3.17 $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$. 也就是说 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph}$.

证明　对于 $x \in (0,1)$, 将其 2 进制展开为

$$0.a_{x1}a_{x2}\ldots a_{xn}\ldots$$

则这定义了一个 $\mathbb{N}^*$ 的子集 $N_x = \{n \in \mathbb{N}^* : a_{xn} = 1\}$, 这是单射, 因为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{xn}}{2^n} = \sum_{n \in N_x} \frac{1}{2^n}$$

反之, 对于每一个 $\mathbb{N}^*$ 的子集 S, 都定义了一个 3 进制小数[3]

$$x = \sum_{n \in S} \frac{1}{3^n} = 0.b_{x1}b_{x2}\dots b_{xn}\dots$$

这也是单射, 因为 $S = \{n \in \mathbb{N}^* : b_{xn} = 1\}$. 剩余细节交给读者考虑. □

Cantor 定理否定了最大的基数的存在性, 而下面的命题则说明了最小基数的存在性.

命题 3.18 任何一个无限集 X, $|\mathbb{N}| \le |X|$.

证明 设无限集 X, 选 $x_0 \in X$, 再任意选 $x_1 \in X - \{x_0\}$, 再任意选 $x_2 \in X - \{x_0, x_1\}$, 以此类推, 由无限条件保证如此操作不会在有限步内停止, 这样确定了一个无重复项的数列 $\{x_n\}$, 这显然与 $\mathbb{N}$ 等势. □

评注 3.19 (连续统假设) *1900 年, Hilbert 在巴黎数学家大会上提出了 23 个最重要的问题供二十世纪的数学家们去研究, 这就是著名的 "Hilbert23 个问题", 连续统猜想位居首位, 猜想的内容是不存在集合 X 使得 $\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}$. Godel 于 1940 年证明了连续统猜想与 ZF 公理体系不悖, Paul Cohen 于 1963 证明了连续统猜想与 ZF 公理体系独立, Hilbert 第一问题就此宣告解决.*

⋙⋙ 习题 §3.2 ⋘⋘

习题 3.14 若 $|A_1| \le |A_2|$, 求证:

(1)$|A_1 \times B| \le |A_2 \times B|$;

(2)$|A_1^B| \le |A_2^B|$;

(3)$|B^{A_1}| \le |B^{A_2}|$;

(4)$|2^{A_1}| \le |2^{A_2}|$.

[3] 使用 3 进制是为了避免规范小数的麻烦

问题 3.15 证明 *Cantor-Bernstein-Schroder* 定理的等价结论 *(*而不用原定理*)*: 设 $A \subseteq B \subseteq X$, 且 $|A| = |X|$, 求证: $|B| = |A|$. (提示: 按下图, 将灰色部分向内移动一层)

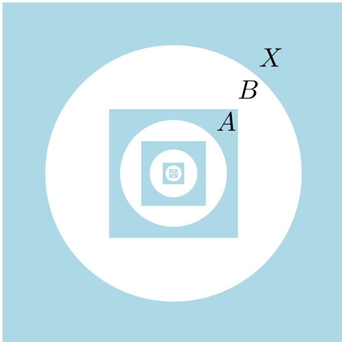


图 3.4: Cantor-Bernstein-Schroder 定理

习题 3.16 求证: 不存在区间上的连续函数将有理数映为无理数, 将无理数映为有理数. (提示: 分有理无理计算值域的基数)

问题 3.17 回答下列问题:

(1) 求证: 全体实数列与 $\mathbb{R}$ 等势, 即

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$$

(提示: 只需验证和 $[0,1)$ 等势, 后仿照例3.4对小数部分操作)

(2) 求证: 实数上全体连续实函数是连续统.

问题 3.18 回答下列问题:

(1) 对于 $\mathbb{R}$ 的一族不交的开集族 $\{U_i\}$, 求证: $\{U_i\}$ 是至多可数集. (提示: 因为每个 U_i 都必然交到某个有理数, 这定义了一个单射 $\{U_i\} \to \mathbb{Q}$.)

(2) 求证: 实数上全体单调函数是连续统. (提示: 证明单调函数左右极限存在.)

问题 3.19 证明实数上任何开集都是可数个不相交区间的并. (提示: 对于开集 $U \subseteq \mathbb{R}$, 对任意 $x \in U$, 证明 $(a_x, b_x) \subseteq U$, 其中

$$a_x = \inf\{a : (a, x) \subseteq U\} \qquad b_x = \sup\{b : (x, b) \subseteq U\}$$

则 $U = \bigcup_x (a_x, b_x)$.)

问题 3.20 我们要证明任何实函数 f 的右极限存在但不连续的点

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x+0) < \infty, f \text{ 在 } x \text{ 处不连续}\}$$

是可数个. 记

$$S = \{x \in \mathbb{R} : f(x+0) < \infty\}$$

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0, \forall x, y \in (x-\delta, x+\delta), |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\}$$

(1) 求证: f 的连续点为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

(2)$S \setminus E_n$ 是可数集. (提示: 任给一个点 $x \in S \setminus E_n$, 因为 f 在 x 右侧 Cauchy, 所以存在 δ 使得 $(x, x+\delta) \subseteq E_n$, 从而 $S \setminus E_n$ 等势于某些不交的开集的势.)

(3) 证明命题.

习题 3.21 求证:

(1) 任何一个无限集, 必然包含一个与 $\mathbb{N}$ 等势的子集.

(2) 任何一个无限集, 必然包含一个与 $\mathbb{N}$ 等势的真子集. (提示: 因为, 可数集有.)

(3) 求证: 任何一个无限集, 必然包含一个等势的真子集. (提示: 仿照习题3.7)

(4) 求证: 任何一个无限集, 删除或添加有限个元素后依然等势.

问题 3.22 (Cantor 集) 在 $[0,1]$ 上构造一列集合族如下

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= [0,1/3] \cup [2/3,1] \\
C_2 &= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1] \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

即每次将各区间中间 1/3 段删去，如下图所示

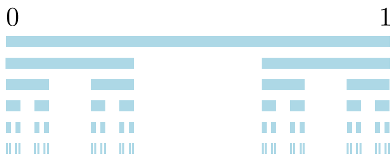


图 3.5: Cantor 集

(1) 求证:

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i \neq \varnothing$$

(提示: 利用习题1.8, 其实, Cantor 集是 $(0,1)$ 中三进制展开中不含 2 的所有实数.)

(2) 求证:

$$|C| = |2^{\mathbb{N}}|$$

(提示: 对于一串无穷 0,1 序列, 都能找到唯一的点在 C 中)

习题 3.23 记 $P = \{p|p \text{ 是素数}\}$, 回答下列问题:

(1)(**Euclid**)求证: $|P| = |\mathbb{N}|$;

(2) 求证: $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{N}^P|$. (提示: 注意到 $2^P = \{0,1\}^P \subseteq \mathbb{N}^P$.)

(3) 由于每一个 $n \in \mathbb{N}$, 都可以唯一地写为

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

则 n 可以看做映射

$$\begin{aligned} n: \quad P &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto \begin{cases} k_i, & \exists i, \mathrm{s.t.}\, p_i = p \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \end{aligned}$$

从而 $n \in \mathbb{N}^P$, 但是 $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{N}^P|$, 怎么解释这种现象?

3.3 三条定理

定理 3.20 任意两个集合 X, Y, 则

$$|X| \le |Y| \text{ 或} |Y| \le |X|$$

定理 3.21 对于无限集 X,

$$|X| = |X \times \{0, 1\}|$$

即 $|X| = |X| \times 2$.

定理 3.22 对于无限集 X,

$$|X| = |X \times X|$$

即 $|X| = |X|^2$.

我们在前几节已经证明了 $X = \mathbb{N}$ 有此性质, 参见 (3.18), 习题3.3, 以及 (3.4).

以上三条定理的证明都必须使用选择公理来加以证明. 且用选择公理的等价形式 —Zorn 引理 (5.23) 证明最为简单, 我们到介绍时再提, 这不影响我们体系的正确性 [4]. 不过由于证明定理3.22需要定理3.21, 所以下面我们对两个定理的推论作区分, 留后面证明备用.

以下是定理3.21的推论.

命题 3.23 集合 A, B 之中有无限集, 则

$$|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$$

证明 不妨设 $A \le B$ 通过 $f : A \to B$, 则 $\max(|A|, |B|) = |B|$, 则

$$|A \cup B| \overset{g}{\le} |B \times \{0, 1\}| = B$$

[4] 当然, 未来的集合论学家可能会抱怨本书几乎处处都是不 “正确” 的.

其中

$$\begin{aligned} g: \quad A\cup B &\longrightarrow B\times\{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} (f(x),0), & x\in A, \\ (x,1), & x\in B. \end{cases} \end{aligned}$$

容易验证 h 是单射. □

推论 3.24 *已知无限集 C, 若 $|A\cup B|=|C|$, 则*

$$|A|=|C| \text{ 或} |B|=|C|$$

以下是定理3.22的推论.

命题 3.25 *若 A 为无穷集合,*

(1) 若 $0<|B|\le|A|$, 则:

$$|A|=|A\times B|$$

(2) 若 $2\le|B|\le|A|$, 则:

$$|2^A|=|B^A|=|A^A|$$

(3) 设集族 $\{B_a\}_{a\in A}$, 其中 $\forall a\in A, |B_a|=|B|$ 则

$$\left|\bigcup_{a\in A}B_a\right|=\max(|A|,|B|)$$

证明 (1) 任取 $b\in B$, 则

$$|A|=|A\times\{b\}|\le|A\times B|\le|A\times A|$$

夹逼成功.

(2) 因为

$$|2^A|\le|B^A|\le|A^A|\le|(2^A)^A|=|2^{A\times A}|$$

其中用到了 Cantor 定理 (3.16), $|A|<|2^A|$.

(3) 设 $f_a : B_a \overset{1:1}{\leftrightarrow} B$, 作

$$\begin{array}{rccc} f: & \bigcup_{a\in A} B_a & \longrightarrow & A\times B \\ & x\in B_a & \longmapsto & (a, f_a(x)) \end{array}$$

为保证良定义性, 若 x 属于多个 B_a, 任选其中一个 B_a 映射. 如此定义之下, 容易验证这是单射, 于是 $\left|\bigcup_{a\in A} B_a\right| \le |A\times B|$. □

⋙⋙ 习题 §3.3 ⋘⋘

习题 3.24 *任何无限集 X, 若 $Y\subseteq X$ 满足 $|Y|<|X|$, 求证: $|X\backslash Y| = |X|$.*

习题 3.25 *任何一个无限集必然存在一个等势的子集, 使得其补集也等势.*

习题 3.26 *不利用本节一开始的两个定理证明: 若 A 为无穷集合,*

$$|A| = |A\cup\mathbb{N}|$$

(提示: 取 A 中的可数子集.)

习题 3.27 *无限集 A 的所有有限子集组成集合的基数与 A 相同.*

3.4 Cantor 悖论

本节在于展示朴素集合论中的另一个著名的漏洞.

考虑所有集合作成的集合 U, 考虑 2^U 的基数, 根据 Cantor 定理

$$|U| < |2^U|$$

但 2^U 是一些集合组成的集合, 故

$$2^U \subseteq U$$

从而

$$|2^U| \le |U|$$

矛盾, 产生了悖论, 说明我们的体系出现了矛盾.

这个悖论由不存在最大的基数的论点产生, 迫使我们不得不考虑 “过多” 集合组成集合的合理性. 为了让体系合理, 我们对由集合组成的 “集合” 先暂且用 “**类 (class)**” 来称呼, 然后如同朴素集合论建立的方式, 一切照旧建立类的属于交并补等概念, 不过定义一些特征只能加在集合之上, 例如我们规定, 描述法定义集合的时候, 必须在某一个确是集合的类下定义, 这样便可以保证 Russell 悖论不再上演. 我们用 “**真类 (proper class)**” 来表示不是集合的类, 例如前面 Russell 悖论中的 “集合”, 以及悖论中的所有集合组成的 “集合”, 都不是集合, 而只是真类.

第四章 关系

本章介绍的是关系. 关系同样搭建起两个集合之间的桥梁. 本章讨论了关系及其运算, 并在最后给出关系的闭包的概念.

4.1 关系

定义 4.1 (关系) 已知集合 X, Y, $R \subseteq X \times Y$, 则称 R 为 X 和 Y 上的**二元关系 (relation)**, 简称关系. 若 $(x, y) \in R$, 则记 xRy, 否则记为 $x \not R\, y$. 若 $Y = X$, 则称 R 为 X 上的二元关系.

定义 4.2 (反关系) R 为 X 和 Y 上的二元关系, 定义

$$R^{op} = \{(y, x) | xRy\}$$

称为 R 的**反关系**.

或许难以理解, 但关系确实可以看做有序对的指定, 而指定的对象, 就是具有这种性质的 (x, y) 的全体, 这就是抽象意义下的 "关系". 我们不会去管这个关系具体究竟是什么或有什么实际用途, 我们只是先定义出一个一般的关系, 我们再去研究具有哪些性质的关系是 "好" 的, 或是值得研究的. 这种方法与初等数学的决裂, 将会贯彻几乎整个现代数学, 我们将在后面的部分有更多见识.

例如实数的等于, 大于, 小于, 大于等于, 小于等于, 不等于, 都可以看成 $\mathbb{R}$ 上的某些指定的子集对. 更多的例子如在初等几何中, 直线相交平行, 曲线相交相切, 实际上都是对平面上的子集对的指定.

补充 4.3 回忆我们前面提到的特征函数 *(1.11)*, 关系 $R \subseteq X \times Y$ 实际上和如下映射是一一对应

$$R : X \times Y \longrightarrow \{0,1\} \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} 1 & xRy \\ 0 & x \not R\, y \end{cases}$$

也就是说我们可以把 $\{0,1\}$ 看成 $\{$不满足关系, 满足关系$\}$, 然后用一个映射来指定. 这样或许更加自然.

另外, 我们还可以将上述定义看成是一个 X 和 X 到 $\{0,1\}$ 的二元运算.

定义 4.4 (空关系, 全关系) R 为 X 和 Y 上的二元关系, 若 $R = \varnothing$, 则称 R 为**空关系**. 若 $R = X \times Y$, 则称 R 为**全关系**.

R 为 X 上的二元关系, 若 $R = \{(x,x) | x \in X\}$, 则称 R 为**恒等** *(identity)* 关系或**单位关系**, 记为 I.

定义 4.5 (自返性) R 为 X 上的二元关系, 若

$$\forall x \in X, xRx$$

称 R 为**自返的 (reflexive)**, **自反的**或**反身的**.

例如恒等关系, 例如实数上的 $=, \leq, \geq$.

定义 4.6 (反自返性) R 为 X 上的二元关系, 若

$$\forall x \in X, x \not R\, x$$

称 R 为**反自返的 (anti-reflexive)**, **反自反的**或**反反身的**.

定义 4.7 (对称性) R 为 X 上的二元关系, 若

$$xRy \iff yRx$$

称 R 为**对称的 (symmetric)**.

例如实数上的 $=, \neq$.

定义 4.8 (反对称性) R 为 X 上的二元关系, 若

$$xRy, yRx \Rightarrow x = y$$

称 R 为 **反对称的 (anti-symmetric)** .

例如实数上的 $=, \leq, \geq$.

定义 4.9 (传递性) R 为 X 上的二元关系, 若

$$xRy, yRz \Rightarrow xRz$$

称 R 为 **传递的 (transitive)** .

例如实数上的 $=, \leq, \geq$.

显然, 空关系是对称, 反对称, 传递于一身的. 而全关系是自返, 对称, 传递的. 恒等关系是自返, 交换, 传递的. 请读者自行根据例子来判定关系的性质.

下面, 我们介绍表示关系的两个有力工具 —关系图和关系矩阵.

评注 4.10 (关系的图示) 关系图主要用于表示一个集合上的关系, 用于两个集合的例子是自明的, 读者可以自然地得到. 对于 X 上的关系 R, 用点来表示 X 中的元素, 若 x_1Rx_2, 则将 x_1, x_2 两点用箭头相连. 例如集合上 $\{0, 1, 2, 3\}$ 上的关系

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

可以表示为

显然,

- 反关系是将箭头倒置.

- 自返关系的特点是每个顶点都有自身指向自身的箭头.

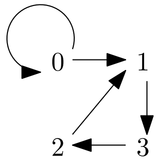


图 4.1: $\{0,1,2,3\}$ 上的关系 R

- 对称关系则是所有边都“有去有回”.
- 传递关系则是, 在两个顶点之间若有通路, 则两顶点相连.

故在不引起混淆的情形下, 对于具有对称性的关系表示时, 不需要标出箭头, 只需要画一根线相连. 在具有自返性的关系中, 可以不画自身到自身的箭头. 在具有传递性的关系中, 只要有通路即可不画连接的箭头.

评注 4.11 (关系矩阵) 对于 X 和 Y 上的关系 R, 欲用矩阵来表示 R, 以行表 X, 列表示 Y, 若 xRy, 则在 x,y-位置标以 1, 否则标以 0. 由 $\{0,1\}$ 组成的矩阵被称为 *Boole* 矩阵 *(Boolean matrix)*, 得名的原因是因为 *Boole* 提出的逻辑算术. 例如, 集合上 $\{0,1,2,3\}$ 到 $\{a,b,c\}$ 上的关系

$$R=\{(0,a),(1,c),(2,a),(3,b),(1,a)\}$$

可以表示为

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

显然,

- 反关系对应着矩阵的转置.
- 单位关系对应单位矩阵 *(*即只有对角线上是 *1* 的矩阵*)*.

- 自返性 $\iff$ 对角线上全是 1.
- 对称性 $\iff$ 对应着对称矩阵.

≫≫≫≫ 习题 §4.1 ≪≪≪≪

习题 4.1 求证:

(1) 自返关系与自返关系的交都是自返关系;
(2) 自返关系与任何关系的并都是自返关系;
(3) 对称关系与对称关系的交并差都是对称关系;
(4) 传递关系与传递关系的交是对称关系;
(4) 传递关系与传递关系的并未必是传递关系. (提示: $1 \to 2 \Rightarrow 3$)

习题 4.2 考虑 n 元集 M 上的二元关系 R, 求:

(1) 关系 R 的数目; (提示: 2^{n^2}.)
(2) 自返关系 R 的数目; (提示: 2^{n^2-n}.)
(3) 对称关系 R 的数目; (提示: $2^{n(n-1)/2}$.)
(4) 反对称关系 R 的数目. (提示: $2^{n(n-1)/2}$.)

习题 4.3 R 为 X 上的非空二元关系, 求证: R 不能既是对称, 传递的又是反自返的.

刁题 4.4 R 为 X 上的二元关系, 若

$$xRy, yRz \Rightarrow x \not R\, z$$

称 R 为**反传递**的. 回答下列问题:

(1) 验证: 平面上的垂直是反传递的, 空间中则不然;
(2) 在 $\mathbb{N}$ 定义关系:

$$xRy :\iff x + y \text{是奇数}$$

求证: R 是反传递的.

(3) 已知集合 X, $X=A\sqcup B$, 求证: 下列关系是反传递的

$$xRy :\Longleftrightarrow (x,y)\in A\times B \text{ 或} (x,y)\in B\times A$$

*(4)***(Mantel, 1907)**求证: 若 $2n$ 元集合 M 上对称关系 R, 满足 $|R|>2n^2$, 则 M 不是反传递的. (提示: 用关系的图示, 选择一条边 (a,b), 剩余点按照连接 a 点或 b 点分类, 最后利用均值不等式.)

习题 4.5 对于 *Boole* 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$, 定义运算

$$\boldsymbol{A}\operatorname{and}\boldsymbol{B}=(\min(a_{ij},b_{ij}))\quad \boldsymbol{A}\operatorname{or}\boldsymbol{B}=(\max(a_{ij},b_{ij}))\quad \operatorname{not}\boldsymbol{A}=(1-a_{ij})$$

其中, 下面, 用 $\boldsymbol{M}_R$ 表示集合 X 和 Y 上关系 R 的矩阵, 求证:

(1)$\boldsymbol{M}_{R_1\cap R_2}=\boldsymbol{M}_{R_1}\operatorname{and}\boldsymbol{M}_{R_2}$;

(2)$\boldsymbol{M}_{R_1\cup R_2}=\boldsymbol{M}_{R_1}\operatorname{or}\boldsymbol{M}_{R_2}$;

(3)$\boldsymbol{M}_{R^c}=\operatorname{not}\boldsymbol{M}_R$.

4.2 关系的运算

下面引入关系的复合的概念.

定义 4.12 (关系的复合) 已知 X 和 Y 上的关系 R, Y 和 Z 上的关系 S, 定义关系的复合

$$R\circ S:=\{(x,z)\in X\times Z|\exists y\in Y,\mathrm{s.\,t.}\,xRy,ySz\}$$

关系的复合的一个生活化的例子是 “夫妇” 关系和 “母子” 关系的复合是 “父子” 关系.

这种复合可以看成关系的乘法, 这是因为关系的复合有结合律.

命题 4.13 (结合律) 已知 X 和 Y 上的关系 R, Y 和 Z 上的关系 S, Z 和 W 上的关系 T, 则

$$R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$$

证明 $R\circ(S\circ T)=\{(x,w)|\exists y\in Y,z\in Z,\text{s. t. }xRy,ySz,zTw\}=(R\circ S)\circ T$. □

评注 4.14 关系的复合在关系的图示中的体现是将所有的如下图的虚线和点线相连的点相连.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "R\circ S"] \arrow[dr, dashed, "R"'] & & c \\
& b \arrow[ur, dotted, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

图 4.2: 关系的合成

而在矩阵的角度, 为了揭示关系的复合和矩阵的联系, 我们需要定义 Boole 矩阵的运算, 为此, 我们先引入一些逻辑运算符.

定义 4.15 (与, 或, 非) 在 $\{0,1\}$ 上定义运算, 与, 或, 非运算

$$a \text{ and } b=\min(a,b)\qquad a \text{ or } b=\max(a,b)\qquad \text{not } a=1-a$$

即

or :

a	b	$a \text{ or } b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

and :

a	b	$a \text{ and } b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

not :

a	$\text{not } a$
0	1
1	0

容易验证, 与, 或运算具有结合律, 交换律, 还互相拥有分配律的运算.

定义 4.16 (Boole 矩阵) 对于 Boole 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times k}$, 定义其乘法

$$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{n\times k}\quad c_{ij}=(a_{i1} \text{ and } b_{1j}) \text{ or } (a_{i2} \text{ and } b_{2j}) \text{ or } \dots \text{ or } (a_{im} \text{ and } b_{mj})$$

容易验证, 和惯常的矩阵定义类似, 只不过将乘法改为 and, 加法改为 or. 同样容易验证, Boole 矩阵的乘法有结合律.

命题 4.17 已知关系 R, S, T, 用 $\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{M}_S, \boldsymbol{M}_T$ 表示其关系矩阵, 则

$$T = R \circ S \iff \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{M}_R \boldsymbol{M}_S$$

证明　设对应集合 $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{R} Z, X \xrightarrow{T} Z$. 并且设

$$\boldsymbol{M}_S = (s_{yx}) \qquad \boldsymbol{M}_R = (r_{zy}) \qquad \boldsymbol{M}_T = (t_{zx})$$

注意到

$$x(R \circ S)z \iff \exists y \in Y \text{ s.t. } xRySz$$

当且仅当至少有一个 y 使得 r_{yx}, s_{yx} 都为 1, 即

$$\ldots \text{or} (r_{yx} \text{ and } s_{yx}) \text{ or} \ldots = 1$$

这正是矩阵的表达式, 故 $T = R \circ S \iff \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{M}_R \boldsymbol{M}_S$. □

≫≫≫　习题　§4.2　≪≪≪

习题 4.6 证明:

(1) 自返关系与自返关系的复合还是自返关系;

(2) 对称关系与对称关系的复合还是对称关系;

(3) 传递关系与传递关系的复合未必是传递关系.

(提示: $1 \to 2 \Rightarrow 3 \to 4 \Rightarrow 5$.)

习题 4.7 验证: *Boole* 矩阵有结合律. 即对于 *Boole* 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

问题 4.8 (Luce, 1952) 已知 *Boole* 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 若存在矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆. 其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位 *Boole* 矩阵.

本问题的目的是证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \boldsymbol{A}$ 是置换矩阵[1], 且逆是其转置.

(1) 求证: 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则逆是唯一的.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\exists i, \forall j, a_{ij} = 0$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足: $a_{ij} = 1$, 求证: $b_{ji} = 1$, 且 $\forall k \neq i, b_{jk} = 0$, $\forall k \neq j, b_{ki} = 0$.

(4) 求证: $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \boldsymbol{A}$ 是置换矩阵 (即每行每列有且只有一个 1 的矩阵), 且逆是其转置.

4.3 关系的闭包

定义 4.18 已知 X 上的关系 R, 若自返关系 S 满足, 对于任何自返关系 T,

$$R \subseteq T \iff S \subseteq T$$

则称 S 为 R 的自返闭包 (closure).

将自返换为对称, 传递, 即可得到对称, 传递闭包的定义.

命题 4.19 关于如上关系的闭包, 有

(1) *[X]* 闭包是存在且唯一的, 且等于

$$S = \bigcap_{[X]\text{ 关系 } T \supseteq R} T \supseteq R$$

若记关系 R 的 *[X]* 闭包为 $\langle R \rangle$, 则

(2) $R \subseteq \langle R \rangle$. *(递增性)*

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$. *(单调性)*

(4) $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$. *(幂等性)*

[1] 即每行每列有且只有一个 1 的矩阵

(5) *R 是 [X] 的当且仅当 $\langle R\rangle = R$.*

其中 [X] 代表自返, 对称, 传递之中的任何一个.

证明 (1) 容易验证, [X] 的关系的 (任意) 交还是 [X] 的, 故对于关系 R, 故

$$S = \bigcap_{[X]\text{ 关系 } T \supseteq R} T \supseteq R$$

是一个 [X] 关系, 从而对任何 [X] 关系 T,

$$R \subseteq T \iff S \subseteq T$$

故 [X] 闭包是存在的. 而若有两个 [X] 闭包 S, S', 则

$$R \subseteq S' \iff S \subseteq S' \qquad R \subseteq S \iff S' \subseteq S$$

从而是相等的.

(2) 根据定义

$$R \subseteq \langle R\rangle \iff \langle R\rangle \subseteq \langle R\rangle$$

右边显然是正确的.

(3) 根据 (2)

$$S \subseteq T \Rightarrow S \subseteq \langle T\rangle \iff \langle S\rangle \subseteq \langle T\rangle$$

(4) 容易验证,

$$\langle S\rangle \subseteq \langle S\rangle \iff \langle\langle S\rangle\rangle \subseteq \langle S\rangle$$

另一方向根据 (2).

(5) 一方面, 根据定义 $\langle R\rangle$ 已经是 [X] 关系, 从而 $\langle R\rangle = R$ 意味着 R 是 X 关系. 另一方面, 若 R 本身已经是 [X] 关系, 从而根据定义, $\langle R\rangle = R$.

□

为了表示清楚关系的闭包, 在本节, 采取临时的记号, 恒等关系记为 I, 并定义

$$R^{n+1} = R^n \circ R \quad n \geq 1$$

另外, 自返闭包, 对称闭包, 传递闭包分别记为 $r(R), s(R), t(R)$.

命题 4.20 已知 X 上的关系 R, 对于各种闭包有如下刻画

- R 的自返闭包
$$r(R) = R \cup I$$
- R 的对称闭包
$$s(R) = R \cup R^{op}$$
- R 的传递闭包
$$t(R) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} R^i$$

证明　关于自返闭包和对称闭包的论证非常容易. 设 S 为包含 R 的传递关系, 由于
$$xRy, yRz \Rightarrow xSz$$
故 $R^2 \subseteq S$, 以此类推, $R^i \subseteq S$. 而关系 $\overline{R} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} R^i$ 已经是传递的, 因为若 $x\overline{R}y, y\overline{R}z$, 设 xR^iyR^jz, 则存在 $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}; b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}$ 使得
$$xRa_1Ra_2R\ldots Ra_iRyRb_1Rb_2R\ldots Rb_jRz$$
于是 $xR^{i+j}z$, 从而 $x\overline{R}y$. □

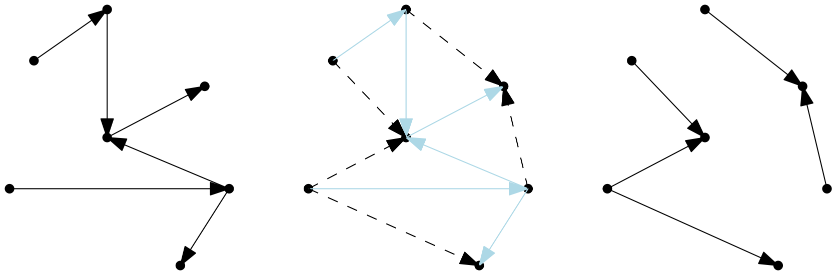
这条命题利用关系的图示将看得颇为清晰, 按照在关系的图示中关系的复合的意义, xR^2y 表示关系是 x, y 两点之间 “走两步能到”, 具体如下:

而 R^3 表示 “走三步能到” 能到, 以此类推, 将其全部并起来, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} R^i$ 将会表示 “能到”, 而传递性在图中的体现就是 “通路” 始末均有边直接相连, 于是 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} R^i$ 传递.

≫≫≫≫　习题　§4.3　≪≪≪≪

习题 4.9 利用刻画 *(4.20)* 证明, 对于关系 R_1, R_2, 求证:

(1) 自返闭包
$$r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$$



R R^2

图 4.3: “走两步能到”

(2) 对称闭包

$$s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$$

(3) 传递闭包

$$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$$

(4) 举出 $t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$ 的例子.

(提示: $1 \to 2 \quad 3 \qquad 1 \quad 2 \to 3$)

习题 4.10 已知 X 上的关系 R, 求证:

(1)R 是自返关系, 则对称闭包 $s(R)$ 是自返的, 传递闭包 $t(R)$ 是自返的;

(2)R 是对称关系, 则自返闭包 $r(R)$ 是对称的, 传递闭包 $t(R)$ 是对称的;

(3)R 是传递关系, 则自返闭包 $r(R)$ 是传递的, 对称闭包 $s(R)$ 未必是传递的.

问题 4.11 已知 n 元集合 X 上的关系 R, 求证: R 的传递闭包

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

(提示: 从关系图式中寻找思路.)

第五章　等价关系与偏序关系

本章我们介绍数学中最为重要的两种关系.

5.1　等价关系与划分

定义 5.1 (等价关系) 已知集合 X 上的关系 $\sim$, 若 $\sim$ 满足:

Eq1 $\forall x \in X, x \sim x.$ (自返性)

Eq2 $x \sim y \iff y \sim x.$ (对称性)

Eq3 $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z.$ (传递性)

则称 $\sim$ 是**等价 (equivalence) 关系**. 对于 $x \in X$, 记

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

称为 x 所在的**等价类**.

等价关系的例子很多, 如数论中的同余, 线性代数中的相抵, 合同, 相似是等价关系

命题 5.2 已知集合 X 上的等价关系 $\sim$, $x, y \in X$, 关于等价类有如下性质:

(1) $x \sim y \iff x \in [y] \iff [x] = [y]$;

(2) $x \nsim y \iff x \notin [y] \iff [x] \cap [y] = \varnothing$;

(3) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.

证明 (1) 因为

$$x \sim y \overset{\text{对称性}}{\iff} y \sim x \overset{\text{定义}}{\iff} x \in [y]$$

可得第一个 $\iff$, 而第二个 $\iff$ 是因为

$$z \in [x] \iff x \sim z \overset{\text{对称性, 传递性}}{\iff} y \sim z \iff z \in [y]$$

(2) 第一个 $\iff$ 是 (1) 的 $\iff$ 的逆否命题, 而第二个 $\iff$ 是因为

$$[x] \cap [y] = z \iff z \in [x], z \in [y] \iff x \sim z, y \sim z \overset{\text{对称性, 传递性}}{\Rightarrow} x \sim y$$

反之, 根据 (1)

$$x \sim y \iff [x] = [y] \Rightarrow [x] \cap [y] \neq \varnothing$$

(3) 显然, 根据自返性, $x \in [x]$. □

也就是说, 等价类要么不交, 要么就相等.

定义 5.3 (划分) *已知集合 X, 若集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^X - \{\varnothing\}$, 且:*

$$X = \bigsqcup_{S \in \mathcal{F}} S$$

则称 $\mathcal{F}$ 为 X 的 **划分 (partition)** *或* **无交并分解**. *(即 $\mathcal{F}$ 中成员两两交集为 $\varnothing$, 且并起来为 X.)*

命题 5.4 *已知集合 X, 则 X 上的一个等价关系和 X 的一个划分相互, 互逆确定. 具体来说,*

- *对于等价关系 $\sim$, 确定的划分为*

$$\{[x] : x \in X\}$$

- 对于划分 $\mathfrak{F}$, 确定的等价关系为

$$x \sim y \iff x \text{ 和 } y \text{ 在同一类}$$

- 且二者互逆.

证明 前面 (5.2), 已经说明 $\{[x] : x \in X\}$ 是一个划分了. 而对于划分 $\mathfrak{F}$, 其确定的关系容易验证也是等价关系. 因为任何元素 x, 自身必然和自身一类; 任何 x, y 若在同一类, 则 y, x 必然也在同一类; 若 x, y 和 y, z 在同一类, 则 x, z 在同一类.

关于互逆, 我们容易验证, 等价关系 $\sim$ 确定的划分确定的等价关系为

$$x \sim' y \iff x \text{ 与 } y \text{ 在同一等价类}$$

而 x 已经在 $[x]$ 之中了, 故等价于 $y \in [x]$ 等价于 $x \sim y$. 而划分 $\mathfrak{F}$ 确定的等价关系所决定的等价类为,

$$[x] = \{y \in X : y \text{ 和 } x \text{ 在同一类}\} = x \text{ 所在的那一类}$$

故 $\{[x] : x \in X\} = \mathfrak{F}$. □

可以考虑这样一个例子, 假设一袋各种颜色的球, 我们定义等价关系为两个球颜色相同, 于是球就可以按颜色作好划分. 最为有趣的是, 在划分的过程中, 我们并没有涉及到某些特点的颜色, 甚至我们也不关心总共有多少种颜色, 而只是有对颜色相同和不同的判断, 尤其当涉及颜色时, 我们会说 “某个球具有的颜色”, 而不会说 “黄红蓝” 这样具体的颜色, 这正是内涵与外延的区别.

定义 5.5 (商集, 代表元) 已知集合 X 上的等价关系 R, 定义

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

称为 X 的**商 (quotient) 集**.

若 $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ 使得 $\{[x_i]\} = X/R$, 且 $i \neq j$ 时, $[x_i] \cap [x_j] = \varnothing$. 则称 $\{x_i\}$ 为等价关系 $\sim$ 的一组**代表元**. 对于 $y \in [x]$, 也成 y 是 $[x]$ 的代表元.

关于商集的第一手例子可见下一节习题.

商集的一个直观解释就是把一个集合中某些元素“混为一谈”之后缩为一体, 这个过程只需要定义被“混为一谈”的元素相互等价即可.

将集合中的元素安排妥当等价类后, 一个紧要的课题是代表元的选取, 选取典范的规则的代表元总会为研究带来很多方便, 矩阵论中层出不穷的标准型, 规范型, 典范型便是一例.

代数学和拓扑学最开始所作的工作就是将集合上的结构自然地赋予子集, 商集以及 Cartesius 积, 让子集, Cartesius 积以及商集继承原集合的性质, 最大程度地保全原有的结构, 尽管产生的结果会有所变异, 这样的行为创造了更多的对象, 使得涉及结构时, 描述会方便许多, 我们将在本书的后半部分对此有所领略.

补充 5.6 (生成的等价关系) 回忆关系的闭包 *(4.18)*, 将定义中的自返换为等价, 我们就定义了**等价闭包**, 我们更喜欢称之为**生成的等价关系**, 具体来说,

已知 X 上的关系 R, 若等价关系 S 满足, 对于任何等价关系 T,

$$R \subseteq T \iff S \subseteq T$$

则称 S 为 R 生成的等价关系.

且容易验证, *(4.19)* 的几条对等价也满足. 当然, 对等价关系也有直接的刻画, 参见习题*5.3*.

⋙⋙ 习题 §5.1 ⋘⋘

习题 5.1 试用关系的图示来表示等价关系和划分. (提示: “连成一片”.)

习题 5.2 试用关系矩阵来表示等价关系和划分. (提示: “分块矩阵”.)

习题 5.3 求证: 生成的等价关系是自返闭包的对称闭包的传递闭包, 是对称闭包的自返闭包的传递闭包, 也是对称闭包的传递闭包的自返闭包; 但不是自返闭包的传递闭包的对称闭包, 是传递闭包的自返闭包的对称闭包, 也是传递闭包的对称闭包的自返闭包. 即对称闭包必须在自返闭包之前取. (提示: 根据习题4.10.)

问题 5.4 (加细) 已知集合族 $\mathfrak{A}\subseteq 2^X$, $\mathfrak{B}\subseteq 2^X$, 若

$$\forall A\subseteq\mathfrak{A},\exists B\in\mathfrak{B},\mathrm{s.t.}\ A\subseteq B$$

则称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的**加细 (refinement)**. 已知集合 X, 有两个等价关系 R_1,R_2

(1) 求证: $R_1\subseteq R_2$ 的充分必要条件是 X/R_1 是 X/R_2 的加细.

(2) 若 $R_1\subseteq R_2$, 求证: R_2 的等价类是 R_1 的一些等价类之并.

(3) 求证:

$$X/(R_1\cap R_2)=\left(\bigcup_{[x]_1\in X/R_1,[y]_2\in X/R_2}\{[x]_1\cap[y]_2\}\right)-\{\varnothing\}$$

(4) 若 $|X/R_1|=n,|X/R_2|=m$, 求证: $|X/(R_1\cap R_2)|\leq mn$.

习题☠ 5.5 (Bell 数) 定义 **Bell 数** $\{B_n\}$ 满足:

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}\quad B_0=B_1=1$$

(1) 求证: n 元集 X 上的等价关系数量为 B_n. (提示: 考虑 $|[n]|=k$ 的等价关系数量)

(2) 求证:

$$B_n=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

(提示: 考虑 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$, 然后利用微分方程求得 $B(x)$ 的表达式)

习题☠ 5.6 (第二类 Stirling 数) 定义**第二类 Stirling 数** $S_2(n,r)$ 满足:

$$x^n=\sum_{i=0}^{n}S_2(n,i)x^{[i]}$$

其中 $x^{[r]}=x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$

(1) 求证: 上定义的良定义性, 即验证 $S_2(n,r)$ 足以被确定. (提示: 线性代数.)

(2) 求证: 有递推公式

$$S_2(n,k) = kS_2(n-1,k) + S_2(n-1,k-1)$$

(3) 证明: n 元集 X 上满足 $|X/\sim| = k$ 的等价关系 $\sim$ 的数量为 $S_2(n,k)$. (提示: 先求满足 $|X/\sim| = k$ 的等价关系 $\sim$ 的数量)

5.2 等价关系与映射

定义 5.7 (自然映射) 已知集合 X 上的等价关系 $\sim$, 作为 *(2.7)* 的补充, 定义

$$\begin{aligned} \pi: \quad X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

为 **自然 (natural) 映射** .

显然, 自然映射是满射.

定义 5.8 (等价核) 已知集合 X, Y, $f: X \to Y$, 定义等价关系

$$x \sim y :\iff f(x) = f(y)$$

由此确定的等价关系被称为 f 诱导的等价关系或 f 诱导的划分, 或 f 的 **等价核 (kernel)** .

容易验证, f 是单射 $\iff f$ 对应的等价核是恒等关系.

命题 5.9 对于两个集合 X, Y, 映射 $\varphi: X \to Y$, 假设 φ 诱导的等价核为 $\sim$, f 的像为 I, 记 $\pi: X \to X/\sim$ 为自然映射, $\iota: I \to Y$ 为包含映射, 则

(1) 存在唯一的满射 $\bar{\varphi}: X \to I$ 使得 $\iota \circ \bar{\varphi} = \varphi$.

(2) 存在唯一的单射 $\tilde{\varphi}: X/\sim \to Y$ 使得 $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

(3) 存在唯一的双射 $\hat{\varphi}: X/\sim \to I$ 使得 $\iota \circ \hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, bend right, "\bar{\varphi}"] & Y \\
X/\sim \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[ur, bend left, "\tilde{\varphi}"] & I \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

证明 我们证明 (3), 剩余的存在性和唯一性是类似的. 定义

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}: \quad X/\sim \quad &\longrightarrow \quad I \\ [x] \quad &\longmapsto \quad \varphi(x)\end{aligned}$$

因为

$$[x]=[y] \iff x\sim y \iff \varphi(x)=\varphi(y)$$

从而是良定义的, 且是单射. 而显然, $\hat{\varphi}$ 是到 I 的满射, 存在性得证. 关于唯一性, 注意到, 根据要求

$$(\iota\circ\hat{\varphi}\circ\pi)(x)=\hat{\varphi}([x])=\varphi(x)$$

这就是我们定义的结果. □

换句话说, 任何映射都是一个满射在左边复合上单射.

定义 5.10 (提升) 对于已知集合 X, Y, Y 的商集 $Y/\sim$, 设映射 $f: X\to Y$, 设 $\pi: Y\to Y/\sim$ 是自然映射, 记 $g=\pi\circ f: X\to Y/\sim$. 称 f 是 g 的 **提升 (lifting)** , g 可以提升为 f.

类比扩张的定义 (2.9), 注意到限制实际上是包含映射在左边复合上函数.

评注 5.11 (子集和商集的对偶) 我们指出, 子集和商集是对偶的, 对于集合 X

- 每一个子集 A, 有嵌入映射 $\iota: A\to X$, 这是单射.

  每一个商集 $X/\sim$, 有自然映射 $\pi: X\to X/\sim$, 这是满射.

- 反之, 对每一个单射 $f: X \to Y$, 这对应 Y 的与 X 等势的子集 $\operatorname{Im} f$.

  反之, 对每一个满射 $f: X \to Y$, 这对应 X 与 Y 等势的商集 $X/\sim$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "|\cdot|=|\cdot|"'] & Y \\ & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "|\cdot|=|\cdot|"'] & \end{tikzcd}$$

- 对于集合 X, Y, X 子集 A, 及包含映射 $\iota: A \to X$, 称 $f: X \to Y$ 为 $g: A \to Y$ 的扩张当 $f = g \circ \iota$.

  对于集合 X, Y, Y 商集 $Y/\sim$, 及自然映射 $\pi: Y \to Y/\sim$, 称 $f: X \to Y$ 为 $g: X \to Y/\sim$ 的提升当 $f = \pi \circ g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ & Y/\sim \end{tikzcd}$$

⋙⋙ 习题 §5.2 ⋘⋘

习题 5.7 对于满射 $f: X \to Y$, 设其诱导的等价核为 $\sim$, 求证:

$$X/\sim = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$$

问题 5.8 (整数) 在 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上定义关系

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \exists z \in \mathbb{N}, \text{s.t.}\, x + y' + z = x' + y + z$$

(1) 求证: z 是等价关系.

(2) 求证: 如下映射

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{Z} \\ [(a, b)] \quad &\longmapsto \quad a - b \end{aligned}$$

是双射.

问题 5.9 (有理数) *在* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *上定义关系:*

$$(a,b)\sim(c,d):\Longleftrightarrow\ ad=bc$$

(1) 求证: $\sim$ *是等价关系;*

(2)(a,b) *的等价类记为* a/b*, 定义乘法和加法*

$$(a/b)(c/d)=(ac/bd)$$
$$(a/b)+(c/d)=(ad+bc/bd)$$

求证:

(a) 上述定义属良定义 (即与代表元选取无关)

(b) 求证: 加法有交换律和结合律, 乘法有交换律和结合律, 乘法对加法有分配律.

(c) 求证: 存在映射 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\sim$*, 使得*

$$g(m)+g(n)=g(n+m)$$
$$g(m)g(n)=g(mn)$$

问题 5.10 (商空间) *已知线性空间* V*, 子空间* W*, 定义关系*

$$\boldsymbol{\alpha}\sim\boldsymbol{\beta}:\Longleftrightarrow\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\in W$$

(1) 求证: $\sim$ *是等价关系;*

(2)$\boldsymbol{\alpha}$ *的等价类记为* $\boldsymbol{\alpha}+W$*, 定义加法和数乘*

$$(\boldsymbol{\alpha}+W)+(\boldsymbol{\beta}+W)=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+W$$
$$k(\boldsymbol{\alpha}+W)=k\boldsymbol{\alpha}+W$$

求证:

(a) 上述定义属良定义 (即与代表元选取无关), 且 $V/\sim$ *为线性空间, 记为* V/W*, 称为* V *模* W *的商空间.*

(b) 对于有限维线性空间 V*, 求证:* $\dim V=\dim W+\dim(V/W)$*.*

(c) 设方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ *的解空间为* W*, 若* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ *有解, 求证*: *其解集是模* W *的商空间中的元素.*

(d) 对于 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 求证: $V/\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 与 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 同构. *(注意: 没有要求是有限维)*

关于商空间, 请参看下图.

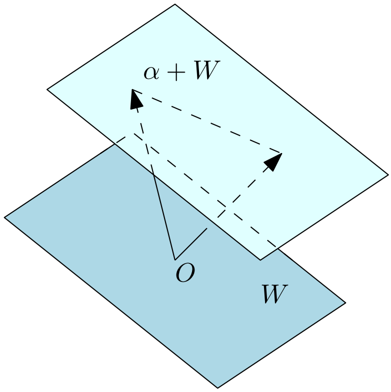


图 5.1: 商空间

刁题 5.11 (圈数) 记单位圆周, $\mathbb{S}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, 记满射

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S} \\ x &\longmapsto e^{ix} \end{aligned}$$

我们下面说明任何 $p:[0,1]\to\mathbb{S}$ 的连续映射都可以在一些条件下唯一地提升为连续函数 $\tilde{p}:[0,1]\to\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"'] & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

(1) 若 p 不是满射, 求证: $\tilde{p}$ 存在. (提示: 去掉一点后必然可以“提升”回 $\mathbb{R}$)

(2) 求证: $\tilde{p}$ 存在. (提示: 将 $[0,1]$ 拆成有限的区间)

(3) 求证: 对于 $a \in [0,1]$, 若指定 $\tilde{p}(a) = x_0$ 满足 $f(x_0) = p(a)$, 则 $\tilde{p}$ 是唯一的. (提示: 证明 (1) 是唯一的, 然后证明 $A = \{a \in [0,1] | \tilde{p_1}(a) = \tilde{p_2}(a)\}$ 即开又闭)

上述结论有显见的几何意义, 我们即是证明了, 可以定义一条路径绕着 $\mathbb{S}$ 走的 "**圈数** ", 这也被成为**旋转指数** .

5.3 偏序关系

定义 5.12 (偏序集) 已知集合 X 上的关系 $\leq$, 若 $\leq$ 满足:

PO1 $\forall x \in X, x \leq x.$ (自返性)

PO2 $\forall x, y \in X, \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y.$ (反对称性)

PO3 $\forall x, y, z \in X, \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z.$ (传递性)

则称 $\leq$ 是一个**偏序 (partial order)** 关系, 称 $(X, \leq)$ 是一个**偏序集 (partial ordered set, poset)** .

这里的 "偏", 英文为 partial, 实际上表示 "部分", 意思为在这个集合中并非所有元素都能比较大小.

定义 5.13 (全序关系, 链) 已知集合 X 上的关系 $\leq$, 若 $\leq$ 为偏序关系, 且

$$\forall x, y \in X, x \leq y \text{ 或} y \leq x$$

则称 $\leq$ 是一个**全序 (total order)** 关系或**线性序** , 则称 $(X, \leq)$ 是一个**全序集 (totally ordered set)** , 或**链 (chain)** 或**线性序集** .

偏序的例子十分常见, 如实数上的 $\leq$, 正整数上的整除关系, 集合的包含关系等等.

为了方便我们默认偏序关系为 $\leq$, 并直接称 X 为偏序集. 为了研究方便, 从 $\leq$ 出发, 定义自明的符号如下:

$$
\begin{aligned}
a \geq b &:\iff b \leq a \\
a < b &:\iff a \leq b, a \neq b \\
a > b &:\iff a \geq b, a \neq b
\end{aligned}
$$

以及区间

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in X | a \leq x \leq b\} \\
(a,b] &:= \{x \in X | a < x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in X | a \leq x < b\} \\
(a,b) &:= \{x \in X | a < x < b\}
\end{aligned}
$$

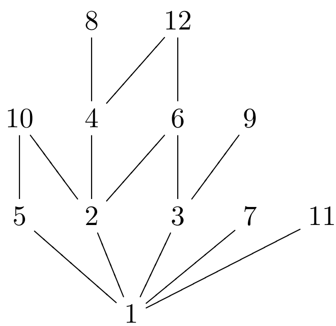
评注 5.14 (Hasse 图) *为了用关系的图示更清楚偏序关系, 我们先介绍一个重要的直观化工具 —* **Hasse 图**. *对于有限偏序集 X, 通过恰当地放置元素, 使得*

若 $a < b$, a 的高度小于 b 的高度

然后恰当地用线连接可以比较大小的元素, 使得

被连接的元素 $a \leq b$, 满足 $(a,b) = \varnothing$

例如, $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ 对整除关系的 Hasse 图如下.



当然, 一些无限集也可以用这种方式表示.

下面我们引入各种偏序各种纷繁复杂的几类容易混淆的概念.

定义 5.15 (最大元, 最小元) 已知偏序集 X, $G \in X$, 满足:

$$\forall x \in X, x \leq G$$

则称 G 是**最大元 (greatest element)**. $l \in X$, 满足

$$\forall x \in X, l \leq x$$

则称 l 是**最小元 (least element)**.

例如, 前面的 Hasse 图中, 1 是最小元, 而没有最大元.

命题 5.16 最大元, 最小元存在时是唯一的.

定义 5.17 (极大元, 极小元) 已知偏序集 X, $M \in X$, 满足:

$$M \leq x \iff M = x$$

则称 M 是**极大元 (maximal element)**. $m \in X$, 满足

$$x \leq m \iff x = m$$

则称 m 是**极小元 (minimal element)**.

以上定义无非是说, 极大元是没有更大的元素的元素. 例如, 前面的 Hasse 图中, $8, 12, 9, 7, 11$ 是极大元, 1 是极小元.

定义 5.18 (上界, 下界) 已知偏序集 X, $A \subseteq X$, $M \in X$ 满足:

$$\forall a \in A, a \leq M$$

则称 M 是 A 在 X 中的一个**上界 (upper bound)**. $m \in X$, 满足:

$$\forall a \in A, m \leq a$$

则称 m 是 A 在 X 中的一个**下界 (lower bound)**.

注意, 这里不必要求 $m \in A$, 只要求 $m \in X$. 例如, 前面的 Hasse 图中, 6 是 $\{2,3\}$ 的上界, 1 是下界; 4, 8 和 12 都是 $\{2,4\}$ 的上界, 1 和 2 都是下界; $\{3,7\}$ 则没有上界, 只有下界 1.

定义 5.19 (最小上界, 最大下界) *已知偏序集 X, 非空子集 $A \subseteq X$,*

(1) 若 A 的上界 $S \in X$ 满足:

$$\forall A \text{ 的上界 } M, S \leq M$$

则称 S 是 A 在 X 中的 **最小上界 (Least upper bound)** *或* **上确界 (supremum)**, *记为 $\sup A$.*

(2) 若 A 的下界 $I \in X$ 满足:

$$\forall A \text{ 的下界 } m, m \leq I$$

则称 I 是 A 在 X 中的 **最大下界 (Greatest lower bound)** *或* **下确界 (infremum)**, *记为 $\inf A$.*

例如, 前面的 Hasse 图中, $\{4,6\}$ 的最小上界为 12, 最大下界为 2; $\{3,4\}$ 最小上界为 12, 最大下界为 1.

命题 5.20 *已知全序集 X, $A \subseteq X$, 则*

(1) *A 的上界 $S \in X$ 是上确界当且仅当*

$$\forall x < S, (x, S] \cap A \neq \varnothing$$

(2) *A 的下界 $I \in X$ 是下确界当且仅当*

$$\forall x > I, [I, x) \cap A \neq \varnothing$$

证明 (1) 和 (2) 是对偶的, 所以我们只证明一个.

(1) 先证明必要性. 否则有 $x < S$ 使得 $(x, S] \cap A = \varnothing$, 因为

$$\forall a \in A, \quad a \leq S \iff a \leq x \text{ 或} x < a \leq S$$

故此时任意 $a \in A$, $a \leq x$, 此时 x 是比上确界 S 更小的上界, 矛盾.

反之, 充分性. 对任意 A 的上界 M, 若 $M < S$, 则 $(M, S] \cap A \neq \varnothing$, 故存在 $a \in A$ 使得 $M < a \leq S$, 这与 M 是 A 的上界矛盾. □

实际上, 上确界的定义应该是如上命题的定义. 那么上面的命题就是说, 上确界即最小上界; 下确界即最大上界.

命题 5.21 *已知偏序集 X, $A \subseteq X$, 则*

(1) *若 A 有最小元, 则最小元即下确界.*

(2) *若 A 有最大元, 则最大元即上确界.*

证明 同样 (1) 和 (2) 是对偶的, 所以我们只证明一个. (1) 设 A 最大元为 $x \in A$, 显然 x 是一个上界, 且 y 是 A 的上界就蕴含着 $x \leq y$. □

命题 5.22 *最小上界和最大下界存在时是唯一的.*

证明 容易得都不足以成为一道习题. □

⋙⋙ 习题 §5.3 ⋘⋘

习题 5.12 (预序关系) *已知集合 X 上的关系 $\leq$, 若 $\leq$ 只满足自返性和传递性, 但不满足反对称性, 则称 $\leq$ 是一个* **预序 (preorder)** *关系, $(X, \leq)$ 是预序集.*

(1) 求证: 关系

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x \leq y, y \leq x$$

是等价关系.

(2) 求证: $X/\sim$ 上定义

$$[x] \preceq [y] :\Longleftrightarrow x \leq y$$

是良定义的偏序关系.

习题 5.13 (偏序关系的等价定义) 已知集合 X 上的关系 $<$, 若

(1)(反自返性)$\forall x \in X, x \not< x$;

(2)(传递性)$x < y, y < z \Rightarrow x < z$.

称 $<$ 是一个严格偏序关系.

求证: 严格偏序关系和偏序关系互相, 互逆确定.

习题 5.14 求证:

(1) 全序集的最大元就是极大元.

(2) 偏序集若有唯一的极大元, 该极大元未必是最大元. (提示: 答案在本页前后找)

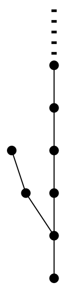


图 5.2: 答案

(3) 有限偏序集若有唯一的极大元, 则该极大元是最大元.

习题 5.15 已知偏序集 X, $A \subseteq B \subseteq X$,

(1) 若 A, B 都有上确界, 求证: $\sup A \leq \sup B$;

(2) 若 A, B 都有下确界, 求证: $\inf A \geq \inf B$.

习题 5.16 已知偏序集 X,

(1)$A \subseteq X$ 有上确界, 则

$$\forall a \in A, a \leq c \iff \sup A \leq c \quad \exists a \in A, a > d \iff \sup A > d$$

(2)$A \subseteq X$ 有下确界, 则

$$\forall a \in A, a \geq c \iff \inf A \geq c \quad \exists a \in A, a < d \iff \inf A < d$$

5.4 Zorn 引理

本节介绍与选择公理等价的 Zorn 引理, 其等价性意味着我们在公认的体系中, Zorn 引理是被承认的. 不过为了避免讨论重心偏移, 我们不作二者等价性的证明.

定理 5.23 (Zorn 引理) *已知非空偏序集 X, 若 X 的每一条链都在 X 中有上界, 则 X 有极大元.*

这里 "X 中的链" 指的是 X 的为全序集的子集. 如下图, Zorn 引理是说在偏序结构中, 如果每一条链可以向上继续延续, 那么一定可以延续结束. 也就是从枝叶纵横的树中能挑出一根树枝.

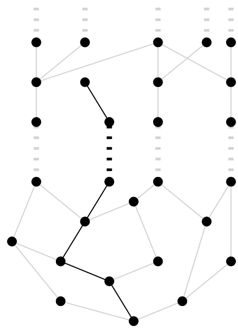


图 5.3: Zorn 引理

下面, 我们来证明 §3.3欠下的三条定理的证明.

定理 5.24 *任意两个集合 X, Y, 则*

$$|X| \leq |Y| \text{ 或} |Y| \leq |X|$$

证明 作集合

$$\Sigma = \{(A, f) | A \subseteq X, \text{单射} f : A \hookrightarrow Y\}$$

这显然非空. 定义偏序为 "延拓"

$$(A, f) \leq (B, g) :\Longleftrightarrow\ A \subseteq B, g|_A = f$$

对于 Σ 中任意一条链 S, 考虑

$$B = \bigcup_{(A,f)\in S} A$$

以及 $\forall x \in B$, 设 $x \in A, (A,f) \in S$, 定义

$$\begin{array}{rccc} g: & B & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

这是良定义的, 则 $(B,g) \in \Sigma$, 是 S 的上界. 根据 Zorn 引理 (5.23), Σ 有极大元, 设为 (C,h), 我们断言,

$$C = X \text{ 或} h(C) = Y \tag{$*$}$$

否则取 $x_0 \in X - C, y_0 \in Y - h(C)$, 通过规定 $h(x_0) = y_0$ 将 h 扩充到 $C \sqcup \{x_0\}$ 上, 这与 (C,h) 是极大元矛盾. 从而 $(*)$ 成立, 从而

$$|X| \leq |Y| \text{ 或} |Y| \leq |X|$$

命题得证. □

定理 5.25 对于无限集 X,

$$|X| = |X \times \{0,1\}|$$

证明 证明需要用到习题3.3, 和习题3.21. 作集合

$$\Sigma = \{(A,f) | A \subseteq X, f: A \overset{1:1}{\leftrightarrow} A \times \{0,1\}\}$$

因为 $|\mathbb{N}| \leq |A|$, 而 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0,1\}|$, 故上集合非空, 定义偏序同样为延拓

$$(A,f) \leq (B,g) :\Longleftrightarrow A \subseteq B, g|_A = f$$

对于 Σ 中任意一条链 S, 设 $B = \bigcup_{(A,f)\in S} A$, 以及和 (5.24) 证明中一样的对应的映射 g. 我们证明 $(B,g) \in \Sigma$.

即需要验证 $f: B \overset{1:1}{\leftrightarrow} B \times \{0,1\}$.

- 单射是因为任意 $x \neq y$ 都落在某一个 A 中, 其中 $(A, f) \in S$, 因为 $f(x) \neq f(y)$, 从而 $g(x) \neq g(y)$.
- 满射是因为任意 $(x, \ldots) \in B$, 若 x 落入 A 中, 其中 $(A, f) \in S$, 因为 $f : A \overset{1:1}{\leftrightarrow} A \times \{0, 1\} \ni (x, \ldots)$, 从而是满射.

从而 (B, f) 是 S 的上界, 根据 Zorn 引理, Σ 有极大元, 设为 (C, h), 若

- $X - C$ 为无限集, 对 $X - C$ 重复上述操作将与极大性产生矛盾.
- $X - C$ 为有限集, 则 $|X| = |C|$, $|X \times \{0, 1\}| = |C \times \{0, 1\}|$, 从而 $|X| = |X \times \{0, 1\}|$.

命题得证. □

定理 5.26 对于无限集 X,

$$|X| = |X \times X|$$

证明 同样, 作集合

$$\Sigma = \{(A, f) | A \subseteq X, f : A \overset{1:1}{\leftrightarrow} A \times A\}$$

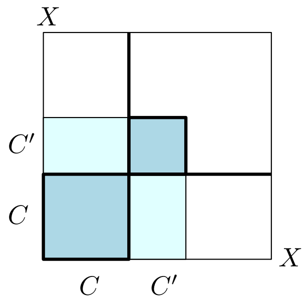
因为 $|\mathbb{N}| \leq |A|$, 而 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, 故上集合非空. 类似上面的证明, Σ 有极大元, 设为 (C, h), 若

- $|C| = |X|$, 则 $|X| = |C| = |C \times C| = |X \times X|$.
- $|C| < |X|$, 根据 (3.24), $|X - C| = |X|$, 假设

$$f : X \overset{1:1}{\leftrightarrow} X - C \qquad C' = f(C) \subseteq X - C$$

我们要作

$$g : C \sqcup C' \overset{1:1}{\leftrightarrow} (C \sqcup C') \times (C \sqcup C') \qquad g|_C = h$$



从而与 (C,h) 的极大性矛盾.

根据 (3.21), 同样也有 $|X|=|X\times\{0,1,2\}|$, 故

$$\begin{aligned}|C'| &= |C|=|C\times C|=|C\times C\times\{0,1,2\}| \\ &= |(C\times C)\sqcup(C\times C')\sqcup(C'\times C)| \\ &= |(C\sqcup C')\times(C\sqcup C')\setminus(C\times C)|\end{aligned}$$

设这样的映射为 $k:C'\to C\times C\sqcup C\times C'\sqcup C'\times C$, 则将 k 和 h 合并既得我们所要的 g.

命题得证. □

后面我们还会再次用到 Zorn 引理.

⋙⋙ 习题 §5.4 ⋘⋘

问题 5.17 (Hausdorff 极大原理) *Hausdorff 极大原理: 已知非空偏序集 X, X 的每一条链都包含在某个极大链中.*

(1) 用 Hausdorff 定理推导 Zorn 引理;

(2) 用 Zorn 引理推导 Hausdorff 定理. (提示: 对链用 Zorn 引理)

习题☠ 5.18 (线性空间) 对于线性空间 V, 一个子集 $\mathcal{I}\subseteq V$ 满足, 任何有限个 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\in\mathcal{I}$ 的线性方程

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{x}_n=0$$

都只有 0 解 $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, 则称 $\mathcal{I}$ **线性无关**.

对于子集 $\mathcal{S} \subseteq V$, 如果任何 $\boldsymbol{x} \in V$ 都能写成 $\mathcal{S}$ 元素的线性组合, 即都有

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}} \lambda_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{s} \qquad (\text{有限和})$$

我们称 $\mathcal{S}$ 生成了 V.

我们定义 $\mathcal{B}$ 是一组基指的是 $\mathcal{B} \subseteq V$ 既线性无关, 也生成了整个 V.

(1) 求证: 任何线性空间都存在基. (提示: 证明: 基即极大线性无关组, 尔后根据 Zorn 引理.)

(2) 更一般地, 求证, 任何线性空间, 若 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$ 满足 $\mathcal{I}$ 线性无关, $\mathcal{S}$ 生成了 V, 则存在基 $\mathcal{B}$ 满足 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$.

(3) 求证: 给定一组基, 任何线性无关组都可以从中选取元素扩充为另一组基. (提示: 将两集合合并, 再用 (2).)

(4) 求证: 任何线性空间的子空间都有补空间 (即与之直和是整个空间的子空间).

(5) **(维数不变性)** 对于线性空间 V, 任意两组基 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 满足 $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. (提示: 有限情况是线性代数. 无限情况, 对每个 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}'$, 可以表示为 $\mathcal{B}$ 的有限成员的线性组合. 把这些有限成员收集起来, 我们放缩成可数个, 我们会立刻得到

$$|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B} \times \mathbb{N}| = \max(|\mathcal{B}|, \aleph_0) = |\mathcal{B}|$$

其中用到了 (3.25), 再反用一次得到所需结果.)

习题☠ 5.19 (Cauchy 方程) 已知 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{$*$}$$

(1) 下面的问题在回答有理数时的情形: 求证:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = f(1)x$$

(2) 下面的问题在怎样的情况下, $f(x) = f(1)x$ 对无理数也满足. 求证对满足 $(*)$ 的 f, 下列命题等价:

(a) $f(x)$ 连续； *(b)* $f(x)$ 单调； *(c)* $f(x)$ 在 0 处连续；

(d) $f(x)$ 在 0 附近有界； *(e)* $f(xy)f(1) = f(x)f(y)$; (提示: 先证 $f(1) > 0$ 时, $x \geq 0 \iff f(x) \geq 0$)

(f) $f(x) = f(1)x$.

(3) 下面的问题在回答是否存在其他满足方程 $(*)$ 的其他函数:

(a) 求证: $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

(b) 取 $\mathbb{R}$ 的一组基 $\mathfrak{B}$, 求证: $|\mathfrak{B}| = \mathfrak{c}$.

(c) 求证: 满足方程 $(*)$ 的函数 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{Q}$ 线性映射;

(d) 求证: 存在满足方程 $(*)$ 的函数 f, 但 $f(x) \neq f(1)x$.

习题☠ 5.20 (凸集) 在 $\mathbb{R}$-线性空间 V 中的子集 C 被称为是**凸集**, 如果

$$\forall x, y \in C, 0 < \lambda < 1, \qquad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

求证: 对于任意一个非全集的集合, 总存在一个凸集与这个集合不交, 且任何比这个凸集大的凸集至少包含其中一个点. (提示: 证明凸集链的并还是凸集.)

习题☠ 5.21 (凸函数) 对于凸集 $C \supseteq \mathbb{R}$, 一个函数 $f : C \to \mathbb{R}$ 被称为**凸函数**如果

$$\forall x, y \in C, 0 < \lambda < 1, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

一个对 "取中心" 封闭的子集 D, 即 $x, y \in D \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in D$. 一个函数被称为**中点凸函数**如果

$$\forall x, y \in C, 0 < \lambda < 1, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

(1) 求证: 凸函数必然连续. (提示: 凸函数意味着由一点出发的割线斜率单调, 从而受控制, 从而满足 Lipschitz 条件)

(2) 求证: 中点凸函数没有第一类间断点.

(3) 求证: 连续的中点凸函数必然是凸函数. (提示: 证明, 若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $f([a,b]) \geq 0$.)

(3) 求证: 存在一个中点凸函数但不是凸函数. (提示: 取 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 的一组基, 任意 $\mathbb{Q}$-线性映射都是中点凸的.)

问题 5.22 对于一个无向图 (不必是有限图), 一个森林 **森林** 指的是一个不含 "圈" 的子图, 一个 **支撑森林** 指的是任意添加图中剩余任何一条边都会使得这个图含 "圈". 证明: 任何一个森林都可以添加一些顶点和边使之成为一个支撑森林.

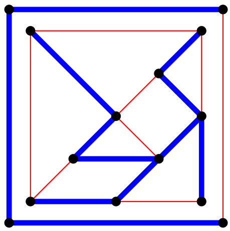


图 5.4: 支撑森林

注记

本部分的写作目的在于将朴素集合论的最有用内容尽可能快地展现出来, 从而避免很多代数或拓扑书总要预先介绍一段集合论的麻烦. 另一重考虑在于将集合论中常用的数学记号展示出来, 以确保读者进入更深入的学习时可以顺畅地进行. 归根到底, 本部分的目的并不在于讲解集合论的结构, 而只是将常用的集合论介绍出来.

有意进一步了解的读者可以尝试 Halmos 的 [28] 或 Jech 的 [33]. 前者是 UTM 系列 (Undergraduate Text of Mathematics, 美国本科生数学教材) 丛书, 后者则是集合论方面的经典.

以下是分条目的评注.

在 (1.14) 中, 我们给出了一些集合的运算律. 实际上, 这些运算律可以抽象成 Boole 代数, 我们会在 §14.4认真讨论, 参见 (14.26).

习题1.10介绍了集合**上下极限**, 这是可数个集合特有的运算, 且根据习题中的刻画这个运算和集合的排列顺序无关. 另外, 如果当中的集合都可测, 则上下极限也可测, 这是测度论的一个例子, 参见 [27]P2, P38. **Borel-Cantelli 引理**用这种刻画给出在几乎处处的意义下, 是否在一列集合中出现无穷次, 参见 [55]P42 Exercise 16.

习题1.7给出了 $\mathbb{R}$ 中开集和闭集的刻画. 然而, “这道题如何做” 取决于读者采用的开集和闭集的定义, 这题提示采取的定义为开集指的是每一点都有一个邻域在这个集合内, 闭集是任何序列极限值都落在这个集合内. 当然, 我们会在第二部分第六章认真考虑.

习题1.8给出了一个闭区间套定理的推广, 实际上, 这和紧致性是等价

的, 我们会留到第二部分 (8.6) 证明更一般的情况.

习题1.9提到了**对称差**的概念, 不妨认为其中 (2) 是其代数特征, 指的是其分配律和结合律, 这在 Boole 代数中有其意义. (3) 则是其分析特征, 其分析意义是, 两对集合的交并差的对称差被对称差之并控制; 若两对集合的对称差相差 “很小” 时, 则其交并差相差也 “很小”.

§1.4的标题是**Cartsius 积**, 英文中 Cartsius 则需要变成形容词, 是**Cartesian product**. 类似的有 Euclid, Diophantus, 其形容词是 Euclidean, Diophantian.

在 (1.22) 中通过打标签来实现无交并这种手段似乎很少被朴素集合论正式提及, 但是其构造也确实很有用处.

习题1.17提及的**二项反转公式**有很多种证明, 最简单的证明不是利用矩阵, 而是利用母函数, 将母函数平移一个单位再平移回来立刻就会得到二项反转公式. 这个公式的相关应用参见 [9]§1.5 P29.

习题2.13中提到的关于染色/分球问题的计数问题实际上有很多变形. 关于颜色不同, 染得色块不同, 是否要全染, 是否染得全不同有更多相关的问题, 化为计算映射, 单射, 满射的数量的计数只是其中之三, 这些结果被总结为**十二重计数法**. 相关的内容参见 [5]§1.3 P14.

如同 (2.21), 数学中有很多定理断言了单射 $\Rightarrow$ 满射或者满射 $\Rightarrow$ 单射, 最简单的如习题2.11, 再例如**Ax–Grothendieck 定理**. 这方面的讨论可以在mo88750找到.

习题2.14中提到的不动点的概念在数学中十分重要, 数学中有很多定理是关于不动点的, 最简单的如压缩映照原理, 参见习题6.35及其注记, 拓扑的**Brouwer 不动点定理**, 及其应用可以参见 [10]P31 第一章 §5.1 或 [48]P5, P110, P252. 泛函分析的**Schauder 不动点定理**, 参见 [20]P149 §V.9, 偏序中的**不动点定理**, 参见习题14.1及其注记.

习题2.14中 (4) 的 (g) 是作者自己设计的, 所以未见于任何其他的文献. 这个问题源自于如何解关于 $f(x)$ 的函数方程 $f(f(x)) = g(x)$, 这被称为**叠函数 (iterated function)**.

在 §2.3一节, 我们介绍了相当多的泛性质. 这些年来掌握泛性质已经

逐渐成为数学工作者的必备素养, 所以在这里迫不及待地就进行介绍.

我们在 (3.1) 定义了基数相等, 在 (3.12) 定义了基数的比较, 但是对于一个集合 X, $|X|$ 究竟是什么? 一个朴素地想法是定义为与 X 等势的所有集合构成的类, 但容易验证, 这样的类是真类 (参见 §3.4). 比较好的做法是利用下面会提到的序数.

习题3.13说明可数条直线不能覆盖 $\mathbb{R}$, 除了 "硬扣集合", 还可以用分析的巧妙手段, 测度或 Baire 纲定理解决, 参见 (13.18) 及其注记. 代数方法也很巧妙, 注意到, 习题5.18断言了任何线性空间都可以定义维数, 容易计算 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$-线性空间次数是连续统 [1], 对每条直线任意选择一点以及方向向量, 如果这些直线可以覆盖整个平面, 那么这可数个向量竟然生成了 $\mathbb{R}$! 这是不可能的.

连续统假设 (3.19) 看上去十分 "合理", 因为这样似乎我们可以将基数较小的集合直接分类出来, 然而这独立于现行大家公认的数学公理, 因此我们还是最好不假设为妙. 后面我们会看到, 假设连续统假设, 会发生奇怪的事, 参见习题12.6, 习题12.7, 习题12.8及其注记.

在 (3.17) 中证明 $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$ 时, 我们提到了规范小数的问题, 这是由某种进制下的小数构造实数而产生的问题. 当然, 注记后面会提到另外两种构造实数的方法, 在这三种构造下, 都非常容易地有 $|\mathbb{R}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$. 而进制容易出问题在规范小数的问题, 例如 $1 = 0.\dot{9}$, 说明 1 有两种表示方法, 我们说的规范小数是将所有有限小数表为后面全是 9 的小数. 容易验证, 有限小数总有两种表示方法, 这让我们朴素地直接从二进制小数构造双射的方法落空. 而一般而言, 利用 Cantor 集 (参见习题3.22) 得到 $2^{\mathbb{N}} \leq |\mathbb{R}|$ 则更为漂亮一些.

在习题3.9中我们讨论了代数数, 我们还会在代数部分, 习题11.8, 继续讨论. 更多的内容涉及域扩张, 参见 [25] Chapter V P155 或 [13] 第 8 章, 不过这些讨论的内容都是一般域上的代数数, 若就代数数而论代数数则是超越 (无理) 数论的内容.

[1] 实际上, 对于无限域 k, k-线性空间 V, 选择基 $\mathfrak{B}$, 因为 V 的元素可以唯一写成 $\mathfrak{B}$ 的有限线性组合, 可以计算至多 1 位不为 0 的元素同基数于 $\mathfrak{B} \times k$, 等势于 $\max(|\mathfrak{B}|, |k|)$, 至多 2 位不为 0 的元素也同基数于 $\max(|\mathfrak{B}|, |k|)$, 以此类推, 可数并不影响无穷基数.

Lindelöf 覆盖定理(习题3.12) 是一个很有用的拓扑定理, 实际上对任何第二可数的拓扑空间均适用 (参见习题7.18). 这样的拓扑空间被称为**Lindelöf 空间**.

在习题3.22中我们定义了经典的 Cantor 三分集, 我们还会在习题6.8继续讨论 Cantor 集的性质. 除了本书内的语言, Cantor 集的测度也有相当的一段故事, 参见 [55] P8 P38 P47.

事实上, (3.22) 的 $|X| = |X \times X|$ 实际上是和选择公理等价的, 这被称为**Tarski 定理**.

在习题4.4中我们介绍了 Mantel 的定理, 原定理是图论的. 如果一个 n 顶点图 G 有超过 $n^2/4$ 条边, 则 G 必然含一个三角形. 参见 [34]P57 §4.3.

在习题4.8中我们讨论了 Boole 矩阵何时可逆, 其结果并不令人惊讶. 而实际上, 在 Luce 的论文中, 他讨论了一般 Boole 代数上的 Boole 矩阵的逆和零因子, 参见 [42].

在 §4.3, 我们讨论了关系的闭包, 这将为后文介绍更抽象的闭包提供例子. 另一方面, 关系的闭包还是很多计算机科学家关心的内容, 参见 [37].

习题4.11相当于给出了计算传递闭包的一种计算方法, Warshall 给出了一个更快的算法, 被称为**Warshall 算法** 同样参见 [37].

习题5.5给出了**Bell 数**的定义, 参见 [5] P45.

习题5.6给出了**Stirling 数**的概念, 实际上, 有两类 Stirling 数, 二者是互逆的, 也有类似的习题1.17提及的二项反转公式. Stirling 数还可以写成带二项式系数的求和式, 只需考虑满射和等价关系的关系. 总之, 参见 [5] P102, P104, P105.

习题5.8给出了一种从自然数构造整数的方法, 参见 [57] P74 §4.1. 一般地, 任何一个交换幺半群都可以施加如此操作, 这被称为**Grothendieck 群**, 参见 [13] §3.2 或 [41] P40.

习题5.9给出了一种构造有理数的方法, 参见 [57] P74 §4.2. 一般地, 这种方法可以用于一般的整环, 这被称为**分式域**, 参见 (11.9). 参见 [13]

§5.3 或 [25] P117.

更本原地, 我们会问自然数从何而来? 一种是**Peano 公理**的途径, [57] P13 Chapter2, 另一种则是利用集合论构造, 参见 [28] §11. 进一步我们会问实数又如何由有理数构造, 这则技术性很多, 同样构造途径很多, 主流的是如下三种

- 某种进制下小数. 参见 [6]P23 §1.1 或 [57]P331 Chapter B.
- **Cauchy 列**的构造. 参见 [57]P94 Chapter 5, 以及习题6.33, 以及习题9.35及其注记.
- **Dedekind 分割**. 参见 [49]P17 附录, 以及 (14.6) 及其注记.

习题5.10提到的商空间的构造实际上应该在线性代数中提及, 然而由于过于铺陈而通常没有展开.

习题5.11定义了**圈数**或**旋转指数**, 这是拓扑学中的重要概念, 当中证明的技巧也是代数拓扑所常用的, 参见 [48]P50 或 [30] P28

集合论中的**序数**在很多场合十分有用, 例如构造正整数就是一例. 但是已经超出本书的范围, 参见集合论的教科书 [28]P74 §19, [33]P17 Chapter 2 或一些代数书的附录, 如 [13]§1.2, 或者 [25]P631 §A.3. 由之导出的**Burali-Forti 悖论**甚至早于 Russell 悖论.

在 §5.4一节, 我们提到了**选择公理**, 不过也已经超出本书的范围, 事实上很多教材都会介绍, 例如集合论教材 [28]P59 Chapter 15, 拓扑教材 [45]§1.9, 代数教材如 [25]P628 §4.2. 事实上有很多 "朴素" 的结论都依赖于选择公理, 例如 (2.17) 的 (1). 与之等价的结论很多, 读者可以轻松地在wiki: Axiom of choice中找到. 拓扑中如 Tychonoff 定理, 参见 (8.21), 代数中如环的极大理想的存在性, 参见习题10.13, 偏序中如 Zorn 引理, 参见 (5.23), 再如 Hausdorff 极大原理, 参见习题5.17, 再如良序公理, 参见 (12.18), 超滤子存在, 参见习题13.7.

在 §5.4一节, 我们没有证明 Zorn 引理 (5.23). Zorn 引理可以利用序数理论证明, 同样参见如 [13]P15 §1.3, 或者 [25] P635 §A.4. 直接的证明可以参见 [28]P62 §16 (当然, 证明会很长).

习题5.18, 给出了线性空间的**基**的定义, 并证明了存在性. 这种无穷维观点下的线性代数可以参考 [32] P239 ChapterIX.

习题5.19介绍的**Cauchy 方程**有很长的历史, 读者在学习数学分析时应该就已经知道. 这依赖于线性空间总存在基的论断. 有了一组基之后, 可以构造无穷多非线性函数满足条件.

习题5.20提到了**凸集**, 读者可以参考 [50] P56 Chapter 3, 或 [20] P99 Chapter IV 在一般线性空间上的讨论.

习题5.21给出两种凸函数的定义不等价的反例. 这是作者在这个网站[2] 找到的.

习题5.22提到了**支撑森林**的概念, 我们会在习题11.9指出, 实际上, 这和找极大线性无关组本质上是一样的.

[2] `http://www.mathcounterexamples.net/a-discontinuous-midpoint-convex-function/`

第二部分

拓扑结构

导言

分析学可以被简要概括为极限微分积分. 而拓扑学是极限的推广, 将“远近”通过集合的包含关系来衡量.

拓扑学通常被粗分为点集 (set-point) 拓扑学和代数拓扑学. 前者常也被称为一般 (general) 拓扑学, 这是我们主要的介绍内容. 点集拓扑学这为数学各个分支, 尤其是几何学, 提供基本的语言. 因此, 无论是为了加深对于分析的认识或者了解更深入的数学, 拓扑的基本知识必不可少.

而代数拓扑学则是真正的几何学, 我们将不会介绍太多.

本部分目的也不在于提供点集拓扑学的各种话题, 而是将最重要的, “语言性”的话题挑选出来, 以便让读者具备这些基本常识.

本部分共三章. 第六章是点集拓扑学的基本语言, 子结构, 商结构, 连续性, 以及乘积结构. 第七章是对分离公理和可数公理的讨论, 两种公理对拓扑空间的性质加以限制, 使之能够适用分析学的推理. 第八章是对拓扑性质的讨论, 主要是紧致性和连通性, 这在分析学中的重要性读者通过数学分析的学习就已经能窥得.

第六章　拓扑的基本概念

本章是对拓扑基本概念的讨论, 首先是开集闭集以及邻域的讨论, 然后是子空间, 商空间, 连续映射, 乘积空间.

6.1　拓扑的定义和例子

定义 6.1 (拓扑, 开集公理) 已知非空集合 X, $\mathfrak{T} \subseteq 2^X$, 满足

(Op1) $\varnothing, X \in \mathfrak{T}$.

(Op2) $\mathfrak{T}$ 的任意并仍然属于 $\mathfrak{T}$.

(Op3) $\mathfrak{T}$ 的有限交仍然属于 $\mathfrak{T}$.

则称 $(X, \mathfrak{T})$ 为一个 (开集公理) 定义的**拓扑空间 (topological space)**, 称 $\mathfrak{T}$ 为**开集族**, $\mathfrak{T}$ 的成员为拓扑空间的**开集 (open set)**. 特别地, 称这个集合族 $\mathfrak{T}$ 为 X 上的**拓扑**.

定义 6.2 (拓扑, 闭集公理) 已知非空集合 X, $\overline{\mathfrak{T}} \subseteq 2^X$, 满足

(Cl1) $\varnothing, X \in \overline{\mathfrak{T}}$.

(Cl2) $\overline{\mathfrak{T}}$ 的有限并仍然属于 $\overline{\mathfrak{T}}$.

(Cl3) $\overline{\mathfrak{T}}$ 的任意交仍然属于 $\overline{\mathfrak{T}}$.

则称 $(X,\overline{\mathfrak{T}})$ 为一个闭集公理定义的**拓扑空间**, 称 $\overline{\mathfrak{T}}$ 为**闭集族**, $\overline{\mathfrak{T}}$ 的成员为拓扑空间的**闭集 (closed set)**.

评注 6.3 上述两定义是等价的. 对集合 X, 若有开集族 $\mathfrak{T}$ 则对应闭集族

$$\overline{\mathfrak{T}} = \{F : F^c \in \mathfrak{T}\}$$

若有闭集族 $\overline{\mathfrak{T}}$ 则对应开集族

$$\mathfrak{T} = \{G : G^c \in \overline{\mathfrak{T}}\}$$

且显然二者互逆确定. 也就是说, 我们下面说拓扑空间 X, 就自动配上了对应的开集和闭集.

推论 6.4 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$, 则

$$A\text{是开集} \iff A^c\text{是闭集}$$

例 6.5 (欧式空间) $\mathbb{R}^n$ 是拓扑空间, 被称为**欧式空间 (Euclidean space)**. 我们在数学分析中证明过开集满足拓扑的定义 *(习题1.7)*.

例 6.6 (离散拓扑) 已知非空集合 X, 定义开集族就是 2^X, 则 X 是拓扑空间, 称为**离散 (discrete) 拓扑**.

例 6.7 (平凡拓扑) 已知非空集合 X, 定义开集族是 $\{\varnothing, X\}$, 则 X 是拓扑空间, 称为**平凡 (trivial) 拓扑**或**密着 (indiscrete) 拓扑**.

例 6.8 (余有限拓扑) 对非空集合 X, 定义闭集为所有有限子集和 X 本身. 容易验证, 这成为一个拓扑. 这样 X 的开集的余集都是有限的或为 X, 故得名**余有限拓扑**.

例 6.9 (余可数拓扑) 对非空集合 X, 定义闭集为所有可数子集和 X 本身. 容易验证, 这成为一个拓扑 *(因为可数集的任意交和有限并还是可数的)*. 这样 X 的开集的余集都是可数的或为 X, 故得名**余可数拓扑**.

定义 6.10 (邻域) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq U \subseteq X$, 若

$$\exists\ \text{开集}O, \text{s. t.}\ A \subseteq O \subseteq U$$

称 U 为 A 的**邻域** *(neighborhood)*. 简洁起见, 我们称 U 是 x 的邻域如果 U 是 $\{x\}$ 的邻域.

也就说, A 的邻域是一个包含包含 A 的开集的子集.

有的数学家喜欢用 “邻域” 代表我们这里的开邻域, 我们不采用这种 (过时的) 说法.

命题 6.11 已知拓扑空间 X, $x \in X$, 关于邻域有如下性质

(1) $\forall x$ 的邻域A, B, $\quad A \cap B$也是 x 的邻域.

(2) $B \supseteq A, A$是 x 的邻域 $\Rightarrow B$是 x 的邻域.

证明 (1) 因为开集的交还是开集. (2) 显然. □

以上第一条性质说明, 有限的邻域的交还是邻域, 也就是说, 有限的 “接近” 可以找到一个 “更近”. 第二条性质则说明, 我们不关心 “远” 的性质, x 的邻域中起作用的只有 “靠近 x” 的那部分.

一种建立拓扑的方法就是通过在每个点指定邻域来定义, 参见习题6.3.

定义 6.12 (内点, 内部) 已知拓扑空间 X, $x \in X$, $A \subseteq X$, 若

$$\exists\ x \text{ 的邻域}U, \text{s. t.} \quad U \subseteq A$$

则称 x 是 A 的**内点**. A 的全体内点记为 A°, 称为 A 的**内部 (interior)**.

根据 (6.11), 通过 “缩小”, 定义中的邻域还可以要求是开邻域.

定义 6.13 (闭包) 已知拓扑空间 X, $x \in X$, $A \subseteq X$, 若

$$\forall\ x \text{ 的邻域}U, \qquad U \cap A \neq \varnothing$$

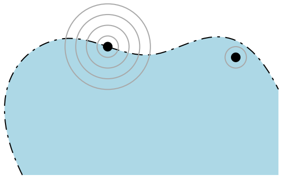


图 6.1: 闭包与内部

则称 x 在 A 的闭包中, 全体这样的 x 组成的集合记为 $\overline{A}$, 称为 A 的**闭包 (closure)** .

根据 (6.11), 通过 "缩小", 定义中的邻域还可以要求是开邻域.

命题 6.14 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$,

A 的内部的补集是 A 补集的闭包;

A 闭包的补集是 A 补集的内部.

证明 逻辑计算

$$\begin{aligned} x \in (\overline{A})^c &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff (\exists\, x \text{ 的邻域 } U, \text{s.t.} \quad U \cap A = \varnothing) \\ &\iff (\exists\, x \text{ 的邻域 } U, \text{s.t.} \quad U \subseteq A^c) \qquad \iff x \in (A^c)^\circ \end{aligned}$$

另一条是类似的. □

命题 6.15 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$. 对任何开集 U,

$$U \subseteq A \iff U \subseteq A^\circ$$

且 A° 是 A 包含的所有开集之并. 作为推论,

- $A^\circ \subseteq A$. (递减)
- $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$. (保序)
- $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. (幂等)

- $A^\circ = A$ 当且仅当 A 是开集.

  即 A 是开集当且仅当对每一点 $x \in A$ 都存在 x 的邻域 U 使得 $U \subseteq A$.

证明 首先, 假设 A 包含的所有开集之并为 V, 显然根据开集公理, 这是一个开集. 对于 $x \in V$, 则

$$\exists U \subseteq A\text{是开集}, \text{s.t.} \quad x \in U$$

按照邻域的定义, U 就是一个 x 的邻域, 故 $x \in A^\circ$, 从而 $V \subseteq A^\circ$.

反之, 容易根据定义直接得到 $A^\circ \subseteq A$, 我们只要证明 A° 是开集, 这样 A° 是一个包含于 A 的开集, 从而 $A^\circ \subseteq V$.

$$\forall x \in A^\circ, \exists\ x \text{ 的开邻域 } W_x, \text{s.t.} \quad x \in W_x \subseteq A$$

这样, $A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} W_x$ 是一些开集的并, 从而是一个开集.

而推论我们已经证明了其中两个, 单调是显然的, 因为

$$A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B \iff A^\circ \subseteq B^\circ$$

幂等是因为老生常谈的 $A^\circ \subseteq A^\circ \iff (A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$. □

推论 6.16 *已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$. 对任何闭集 F,*

$$A \subseteq F \iff \overline{A} \subseteq F$$

且 $\overline{A}$ 是包含 A 的所有闭集之交. 作为推论,

- $A \subseteq \overline{A}$. *(递增)*
- $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$. *(保序)*
- $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. *(幂等)*
- $\overline{A} = A$ *当且仅当 A 是闭集.*

  即 A 是闭集当且仅当对若 x 的任何邻域 U 都与 A 交非空, 则 $x \in A$.

证明 根据 (6.4) 以及 (6.14), 取余集得证. □

命题 6.17 已知拓扑空间 X, $A, B \subseteq X$. 则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad (A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$$

也就是说有限并和闭包可以交换, 有限交和内部可以交换.

证明 关键在于证明等号. 首先, 根据保序性, $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ, (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$, 故

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$$

反之, $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ 是一个开集, 故 $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cap B^\circ$. 剩余是类似的. □

定义 6.18 (稠密) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$ 满足 $\overline{A} = X$, 则称 A 是**稠密的 (dense)**.

等价地, 任何开集都和 A 有交.

例 6.19 有理数 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 因为任何实数都可以由有理数逼近.

⋙⋙ 习题 §6.1 ⋘⋘

习题 6.1 已知拓扑空间 X, $x \in X$, $A \subseteq X$. 求证: A 是 x 的邻域当且仅当 $x \in A^\circ$.

问题 6.2 (Kuratowski 闭包公理) 已知非空集合 X, 映射 $\overline{*} : 2^X \to 2^X$ 满足

(1) $A \subseteq \overline{A}$. *(递增性)*

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. *(与有限并可以交换)*

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. *(幂等性)*

(4) $\overline{\varnothing} = \varnothing$. *(空集)*

称 $\overline{*}$ 为 *Kuratowski* 闭包算子. 求证: X 上存在唯一是拓扑空间使得闭包是 $\overline{*}$. (提示: 定义 $\mathfrak{T} = \{A \subseteq X | A = \overline{A}\}$ 为闭集族)

问题 6.3 (邻域公理) 已知集合 X, 若任意 $x \in X$, 都指定一个 $\mathfrak{F}_x \subseteq 2^X$ 满足

(1)$\mathfrak{F}_x \neq \varnothing$. *(非空)*

(2)$\forall U \in \mathfrak{F}_x, x \in U$. *(含元)*

(3)$\forall U, V \in \mathfrak{F}_x, U \cap V \in \mathfrak{F}_x$. *(向下封闭性)*

(4)$\forall U \in \mathfrak{F}_x, U \subseteq A \Rightarrow A \in \mathfrak{F}_x$. *(向上封闭性)*

(5)$\forall U \in \mathfrak{F}_x, \exists V \subseteq U, \mathrm{s.t.} \forall y \in V, V \in \mathfrak{F}_y$. *(内含开集)*

此时称 $\mathfrak{F}_x$ 为 x 的邻域. 求证: X 上存在唯一是拓扑空间使得 x 处的所有邻域就是 $\mathfrak{F}_x$.

习题 6.4 指出 *(6.17)* 包含不严格的例子, 以及无限情况的反例. (提示: 例如, 有理数无理数的闭包都是 $\mathbb{R}$. 无限情形例如区间 $(0, \frac{1}{n})$.)

习题 6.5 (边界) 已知拓扑空间 X, $x \in X$, $A \subseteq X$, 若

$$\forall\ x \text{ 的邻域} U, \qquad U \cap A \neq \varnothing, U \cap A^c \neq \varnothing$$

称 x 在 A 的边界上, 这样的 x 组成了 A 的**边界 (boundary)**, 记为 $\operatorname{Bd} A$. 求证:

$$\overline{A} = A^\circ \cup \operatorname{Bd} A$$

习题 6.6 (聚点, 导集) 已知拓扑空间 X, $x \in X$, $A \subseteq X$, 若

$$\forall\ x \text{ 的邻域} U, U - \{x\} \cap A \neq \varnothing$$

则称 x 是 A 的**聚点 (accumulation point, cluster point)** 或**极限点 (limit point)**. A 的全体极限点记为 A', 称为 A 的**导集**. 求证:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

习题 6.7 对于稠密集, 固然, 任何开集都与之有交, 曾有人打比方说

> 稠密就是在拓扑空间上下雨了, 稠密集上每一个点打一把伞, 就可以让整个拓扑空间淋不到雨.

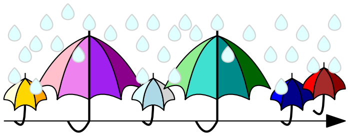


图 6.2: 下雨啦

但可惜的是，这种类比是不正确的，因为稠密并不意味着每一点给出一个开集就可以覆盖整个空间. 请读者试举一个例子. (提示: 例如 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 是稠密的，但是对于固定的无理数 r，每一有理点总存在开集避开 r，这样这些点就覆盖不了 r. 再例如若将有理数排成一列 $\{r_n\}$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right)$ 的“长度”是有限的，更加不可能覆盖 $\mathbb{R}$.)

习题 6.8 求证: 习题3.22定义的 *Cantor* 集是闭集. 且 *Cantor* 集的导集还是自身 (*Cantor* 集为完全集).

问题 6.9 求证: 当 r 是无理数时，$\mathbb{Z} + r\mathbb{Z} = \{m + rn : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. (提示: 这是因为 Dirichlet 的一个著名定理. 具体来说，任意一个小的开区间 (a, b)，假设这个区间的宽度 $b - a > \frac{1}{n}$，那么可以将 $[0, 1]$ 分成 n 等分，根据鸽笼原理，在某个等分中有至少两个数 $x, y \in \mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$，使得 $0 < |x - y| < \frac{1}{n}$，这样 $\{k(x - y) : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ 铺成一张“间隙”小于 $\frac{1}{n}$ 的网格，从而必然有一个元素落入 (a, b) 之中. 命题得证.)

习题☠ 6.10 (Dirichlet) 对无理数 x，求证存在无穷个分数 $p/q \in \mathbb{Q}$ 使得

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

(提示: 类似上面一题，对 n，存在 (p, q) 使得 $q \leq n$，且 $|qx - p| < \frac{1}{n}$.)

6.2 子空间，商空间

下面一个重要的问题如何赋予子集和商集以拓扑.

定义 6.20 (子空间) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$, 规定

$$A \text{ 的开集族} = \{A \cap U : U\text{是 } X \text{ 的开集}\}$$

这成为 A 的拓扑, 称为子空间拓扑. 称 A 为**子空间 (subspace)**.

命题 6.21 (子空间结构定理) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$, 则关于子空间的拓扑有如下断言

(开集) A 的开集都形如 $A \cap U$, U 是 X 的开集. 特别地, 若 A 本身就是一个开集, 那么 A 的开集就是所有 A 包含的开集.

(闭集) A 的闭集都形如 $A \cap F$, F 是 X 的闭集. 特别地, 若 A 本身就是一个闭集, 那么 A 的闭集就是所有 A 包含的闭集.

(邻域) $x \in A$ 在 A 中的邻域都形如 $A \cap U$, U 是 X 中 x 的邻域. 特别地, 若 A 本身就是 x 的一个邻域, 那么 x 的邻域就是所有 A 包含的 x 的邻域.

(闭包) $B \subseteq A$ 在 A 中的闭包就是 $A \cap \overline{B}$.

证明 (开集) 根据定义. (闭集)A 中的闭集都是 $A \setminus (A \cap U) = A \setminus U = A \cap U^c$, 其中 U 是 X 的开集, 即 $A \cap F$, F 是 X 的闭集. (邻域) 因为开集如此. (闭包) 因为

$$B \text{ 在 } A \text{ 中的闭包} = \bigcap_{\substack{B \subseteq A \cap F \\ F \text{ 是 } X \text{ 的闭集}}} (A \cap F) = A \cap \bigcap_{\substack{B \subseteq F \\ F \text{ 是 } X \text{ 的闭集}}} F = A \cap \overline{B}$$

命题得证. □

命题 6.22 已知拓扑空间 X, $B \subseteq A \subseteq X$, 则 B 作为 A 的子空间, A 作为 X 的子空间与 B 直接作为 X 的子空间上的拓扑是相同的.

证明 因为 $B \cap U = B \cap (A \cap U)$. □

例 6.23 对于实数 $\mathbb{R}$ 上的子空间 $(0,1]\cup\{2\}\cup(3,4]$, 则 $(0,1/2]$ 是闭集, $(0,1]$ 既是开集又是闭集, $(1/2]\cup(3,7/2)$ 是开集.

定义 6.24 (商空间) 已知拓扑空间 X, 商集 $X/\sim$, 规定

$$X/\sim \text{ 的开集族} = \{U : \pi^{-1}(U)\text{是 } X \text{ 的开集}\}$$

其中 π 是自然映射. 这成为 $X/\sim$ 的拓扑, 称为商空间拓扑. $X/\sim$ 称为 **商空间 (quotient space)** .

命题 6.25 (商空间结构定理) 已知拓扑空间 X, 商集 $Y = X/\sim$, 则关于子空间的拓扑有如下断言

(开集) Y 的开集 U, 满足 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集.

(闭集) Y 的闭集都形如 F, 满足 $\pi^{-1}(F)$ 是 X 的闭集.

(邻域) $y=\pi(x)\in Y$ 在 Y 中的邻域都形如 U, $\pi^{-1}(U)$ 是 X 中 x 的邻域.

证明 (开集) 根据定义. (闭集) 根据集合论 (2.6). (邻域) 因为开集如此.
□

商空间的一个最直观的表现就是将划分中每个类的点粘合, 下面的例子很好地说明了问题.

例 6.26 在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上定义等价关系:

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) :\Longleftrightarrow\ x_1=x_2, y_i=0 \text{ 或} 1$$

则 $A/\sim$ 将相当于如下的 “**管子**”.

例 6.27 (Mobius 带) 在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上定义等价关系:

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) :\Longleftrightarrow\ x_1+x_2=1, y_i=0 \text{ 或} 1$$

则 $A/\sim$ 将相当于著名的 **Mobius 带** .

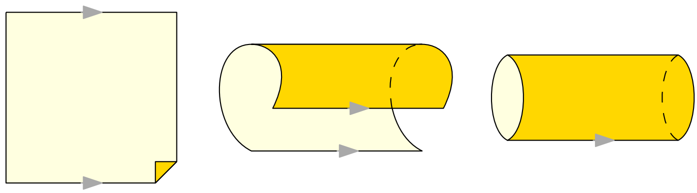


图 6.3: "管子"

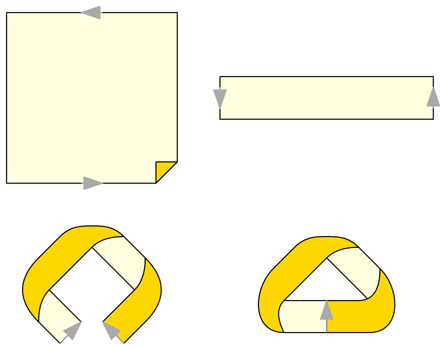


图 6.4: Mobius 带

例 6.28 (轮胎面) 在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上定义等价关系:

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2):\Longleftrightarrow\ (x_1=x_2,y_i=0\ 或1)\ 或(y_1=y_2,x_i=0\ 或1)$$

则 $A/\sim$ 将相当于如下的**轮胎面**.

例 6.29 (Klein 瓶) 在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上定义等价关系:

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2):\Longleftrightarrow\ (x_1=x_2,y_i=0\ 或1)\ 或(x_1+x_2=1,y_i=0\ 或1)$$

则 $A/\sim$ 将相当于著名的**Klein 瓶**. 先将管子弯成 U 型, 再穿过自身即可得著名的 *Klein* 瓶. *Klein* 瓶本身并不相交, 所以严格来说, 我们为了表示 *Klein* 瓶, 需要借助四维空间来表示.

也就是说, 我们将要"粘合"的点放入一个等价类, 所得到的商拓扑就是"粘合"后的空间.

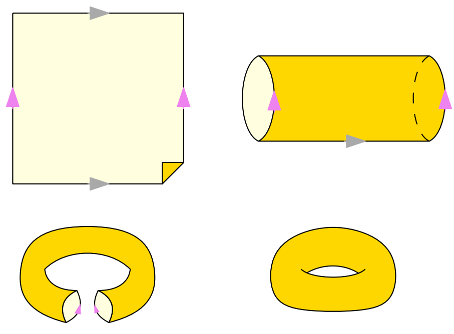


图 6.5: 轮胎面

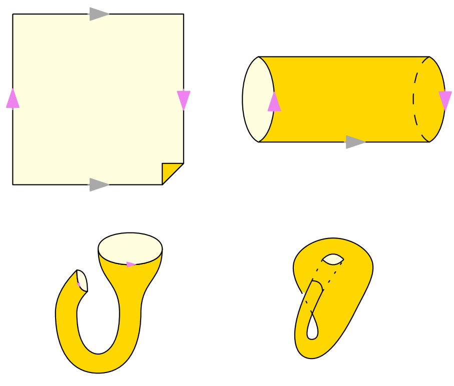


图 6.6: Klein 瓶

由此回看最初对拓扑的定义, 我们无非是需要一个 “邻近” 的概念. 子空间所作的, 无非是把子空间外的 “邻近” 截断. 商空间所做的, 即这些 “粘合” 的工作, 无非就是把被粘合对象的相邻的部分合并到一起.

补充 6.30 (商空间) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$, 如下构造也很常用. A 定义一个等价关系

$$x \sim y \iff x, y \in A$$

这确定的商拓扑 $X/\sim$ 空间被记为 X/A. 这就是把所有 A 的元素捏成一

个点, 方便起见, 我们不妨认为

$$(X \setminus A) \sqcup \{*\} = X/A$$

这样, $X/A \subseteq U$ 是 $*$ 的邻域当且仅当 U 的原像是 A 的邻域.

⋙⋙ 习题 §6.2 ⋘⋘

习题 6.11 对于拓扑空间 X, 商空间 $X/\sim$, 求证: $X/\sim$ 的每个开集都是 X 的某个开集的像.

习题 6.12 证明闭集是局部概念: 已知拓扑空间 X, 一族开集 $\{U_i\}_{i\in I}$, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, 从而

$$F\text{是闭集} \iff F \cap U_i\text{是 } U_i \text{ 的开集}$$

习题 6.13 (离散) 对于拓扑空间 X, $A \subseteq X$, 我们称 A 是**离散的**, 如果 A 作为子空间是离散拓扑. 验证:

(1)$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 不是离散的.

(2)$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ 是离散的.

(3)$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 也是离散的.

(4) 证明: $\mathbb{R}^n$ 中的离散子集都是至多可数的. (提示: 也就是说, 对每个 $a \in A$, 都存在开集 U 使得 $U \cap A = \{x\}$, 也就是说开集 U 将 x 和 $A \setminus \{x\}$ 分开, 因为在 $\mathbb{R}$ 中, 所以我们可以找有理数 $r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $x \subseteq \{y : |y - r| < 1/n\} \subseteq U$. 这样实际上定义了 A 到 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{>0}$ 的单射.)

习题☠ 6.14 对于平面 $\mathbb{R}^2$ 上的无限离散点集 A, 求证: 对任意 n, 一定有某个圆恰好盖住 A 中的 n 个元素, 如图. (提示: 事实上, 我们甚至可以取圆心在同一个点, 这样逐渐放大这个圆. 问题会出在是否可能在某一时刻恰好接触到两个点? 对任何两个 $a, b \in A$, 都决定了一条直线, 在这条直线上的任何一点为圆心存在这种问题. 但是这终归是可数条直线, 不能覆盖整个平面, 参见习题3.13, 所以只要圆心选得恰当, 就没有问题.)

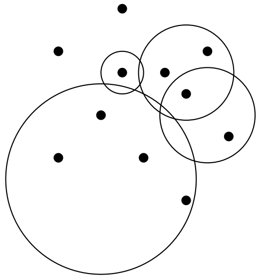


图 6.7: 盖住 A 中的 n 个元素

问题 6.15 有三幢大楼分别需要通水通电通气, 而附近只有一家供水点, 供电点和供气点. 但由于不巧地, 这是在二维平面上, 所以线路交叉是不被允许的, 更不允许穿过大楼[1]. 于是, 经过尝试[2], 在二维平面上, 是无法通过恰当地连接线路同时给三幢大楼通水通电通气.

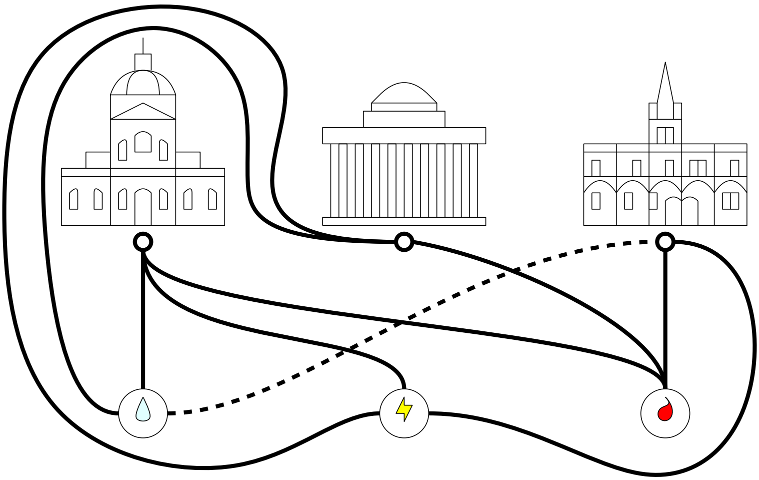


图 6.8: 通水通电通气问题

[1] 否则大楼里会全是水/漏电/燃气爆炸

[2] 图论的一个经典定理是 $K_{3,3}$ 是不可平面的

然而，如果这三幢建筑建在 Klein 瓶或轮胎面上将可以办到[3]. 请读者尝试完成. (提示: 如下图. 在轮胎面上或许更直观一些, Klein 瓶上的情况是类似的.)

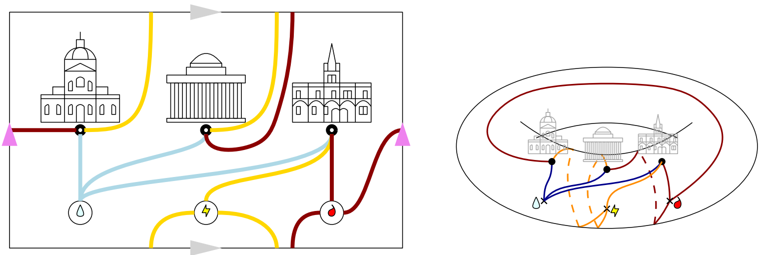


图 6.9: 轮胎面上的情况

6.3 连续映射

下面, 我们用映射将两个拓扑联系起来, 其中, "好" 的映射, 应当是保持邻域不变的映射.

定义 6.31 (连续) 已知拓扑空间 X,Y, $f:X\to Y$, $x_0\in X$, 若

$$\forall\ f(x_0)\text{ 的邻域}V,\quad f^{-1}(V)\text{是 }x_0\text{ 的邻域}$$

则称 f 在 x_0 处**连续 (continuous)**.

等价地, 对任意 $f(x_0)$ 的邻域 V, 总有 x_0 的邻域 U 使得 $f(U)\subseteq V$.

命题 6.32 已知拓扑空间 X,Y, $f:X\to Y$, $A\subseteq X$, 关于限制 $f|_A$ 的连续性有如下性质

(1) $x_0\in A$, 则 f在 x_0 处连续 $\Rightarrow f|_A$在 x_0 处连续.

(2) $x_0\in A^\circ$, 则 f在 x_0 处连续 $\iff f|_A$在 x_0 处连续.

[3]这样这个上面就可以少建一点供水/电/火点了

证明 (1) 注意到, $(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$, 根据 (6.21) 容易证明. (2) 重要的是反方向, 此时 $x_0 \in A^\circ$, 这说明 A 是 x_0 的邻域, 根据 (6.21) 关于邻域的论断, x 在 A 中的邻域也是 x 在 X 中的邻域. 容易得到. □

命题 6.33 *已知拓扑空间 X, Y, Z, $f : X \to Y, g : Y \to Z$, $x_0 \in X$, 若 f 在 x_0 处连续, g 在 $f(x_0)$ 处连续, 则 $g \circ f$ 在 x_0 处连续.*

证明 习题见. □

定义 6.34 (连续映射) *已知拓扑空间 X, Y, $f : X \to Y$, 若 $\forall x \in X$, f 在 x 处连续, 则称 f 在 X 上连续.*

定理 6.35 *已知拓扑空间 X, Y, $f : X \to Y$, 下列命题等价*

(1) *f 在 X 上的连续.* *(逐点连续)*

(2) *任意开集 $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ 是开集.* *(开集原像是开集)*

(3) *任何闭集 $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ 是闭集.* *(闭集原像是闭集)*

证明 (2) $\iff$ (3) 根据集合论的常识 (2.6) 以及 (6.4).

(1)$\Rightarrow$(2), 对任何一点 $x \in f^{-1}(V)$, 即 $f(x) \in V$, 按定义, V 是 $f(x)$ 的邻域, 则 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域, 这就已经说明 $f^{-1}(V)$ 是开集.

(2)$\Rightarrow$(1), 对任何一点 $x \in X$, 对任何 $f(x)$ 的邻域 V, 不妨假设开集 W 使得 $f(x) \in W \subseteq V$, 这样, 根据定义 $x \in f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$, 这使得 $f^{-1}(V)$ 称为 x 的邻域. □

推论 6.36 *有如下例子*

- *对于拓扑空间 X, 子拓扑空间 $A \subseteq X$, 嵌入映射是连续的.*
- *对于拓扑空间 X, 商空间 $X/\sim$, 自然映射是连续的.*
- *任何拓扑空间 X 到平凡拓扑 Y 的映射都是连续的.*
- *离散拓扑 X 到任何拓扑空间 Y 的映射都是连续的.*

- 常函数总是连续的.

回忆 (5.9), 在拓扑的范畴中也有类似的命题.

命题 6.37 对于两个拓扑空间 X, Y, 连续映射 $\varphi : X \to Y$, 假设 φ 诱导的等价核为 $\sim$, f 的像为 I, 记 $\pi : X \to X/\sim$ 为自然映射, $\iota : I \to Y$ 为包含映射, 则

(1) 存在唯一的连续满射 $\bar{\varphi} : X \to I$ 使得 $\iota \circ \bar{\varphi} = \varphi$.

(2) 存在唯一的连续单射 $\tilde{\varphi} : X/\sim \to Y$ 使得 $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

(3) 存在唯一的连续双射 $\hat{\varphi} : X/\sim \to I$ 使得 $\iota \circ \hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, bend right, "\bar{\varphi}"] & Y \\
X/\sim \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[ur, bend left, "\tilde{\varphi}"] & I \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}
$$

证明 根据 (5.9), 已经存在这样的映射, 只要验证连续. 只需要验证 (3), 这样, 对任何 I 的开集 $I \cap U$, 则 $\pi^{-1}(\hat{\varphi}^{-1}(I \cap U)) = \varphi^{-1}(U)$ 是开集, 故 $\hat{\varphi}^{-1}(I \cap U)$ 是开集. □

定义 6.38 (同胚映射) 已知拓扑空间 X, Y, 双射 $f : X \leftrightarrow Y$, 若 f, f^{-1} 都是连续的, 则称 f 为 X 到 Y 的**同胚映射 (homeomorphism)**, 或称为**拓扑变换**, X 与 Y 同胚.

补充 6.39 (开映射) 一个也很常用的概念是开映射. 称两个拓扑空间的映射 $f : X \to Y$ 是**开映射**, 如果

$$\forall \text{ 开集 } U \subseteq X, \quad f(U) \subseteq Y \text{是开集}$$

类似地还可以定义**闭映射**,

$$\forall \text{ 闭集 } U \subseteq X, \quad f(U) \subseteq Y \text{是闭集}$$

显然, 双射 + 开/闭映射 = 同胚. 开映射有非常重要的分析意义, 其代表的是 "稳定性". 开映射逐点表现为

$$\forall x \in X, \forall\ x \text{ 的邻域 } U, \quad f(U)\text{是 } f(x) \text{ 的邻域}$$

也就是说 x 微小变动只会带来 $f(x)$ 的微小变动.

补充 6.40 (嵌入, 商映射) 一个也很常用的概念是嵌入. 称两个拓扑空间的映射 $f: X \to Y$ 是嵌入, 如果通过 f, X 和作为 Y 的子空间的 $\operatorname{Im} f$ 同胚. 即 f 是连续单射, 且

$$\forall\text{开集 } U \subseteq X, \exists\text{开集 } V \subseteq Y, \text{s. t.} \quad V \cap \operatorname{Im} f = f(U)$$

与之对偶的概念是商映射, 如果如果通过 f, $X/\sim$ 和 Y 同胚, 即 f 是连续满射, 且

$$\forall U \subseteq Y \qquad U\text{是开集} \iff f^{-1}(U)\text{是开集}$$

例 6.41 正方形和圆是同胚的. 通过在每个方向上伸缩

$$\varphi: [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2 \qquad (x,y) \longmapsto \frac{\max(|x|,|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$$

约定 $0 \mapsto 0$. 和

$$\psi: \mathbb{S}^2 \longrightarrow [-1,1] \times [-1,1] \qquad (x,y) \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\max(|x|,|y|)}(x,y)$$

也约定 $0 \mapsto 0$. 这也解释了为何拓扑被称为橡皮几何学, 因为在同胚意义下, 我们可以把正方形 "拉" 成圆形. 所以同胚的意义就是不 "扯破", 不 "捏扁" 地变形拓扑空间.

例 6.42 在 $\mathbb{R}$ 上定义等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

则商拓扑空间 $\mathbb{R}/\sim$ 与单位圆周 $\mathbb{S}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 同胚, 通过 $[x] \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i x}$.

例 6.43 在欧式空间中有如下经典的不同胚的例子

1. 区间 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 不同胚. 否则 $0,1$ 的像将会 "切断"$(0,1)$, 这样被切断之后成为三段不交的开集, 这三个不交的开集的原像成为 $(0,1)$, 这是不可能的.

2. 区间 $[0,1]$ 与 $[0,1]\cup[2,3]$ 不同胚. 因为 $[0,1]$ 不能写成两个不交的非空闭集.

3. 区间 $[0,1]$ 与单位圆 $C=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x|=1\}$ 不同胚. 因为任意删去一个点, 单位元同胚于开区间 $(0,1)$. 而不论 $[0,1]$ 如何删都不可能同胚于 $(0,1)$.

4. 区间 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚. 因为任意删掉一个点, $\mathbb{R}$ 就 "断了", 但是 $\mathbb{R}^2$ 却还连通.

5. 区间 $[0,1]$ 与 $[0,1]\times[0,1]$ 不同胚. 因为 $[0,1]\times[0,1]$ 中存在 "回路", 而 $[0,1]$ 不可能.

⋙⋙ 习题 §6.3 ⋘⋘

习题 6.16 证明 *(6.33)*.

问题 6.17 (粘接引理) 已知拓扑空间 X, 一些闭集 $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ 覆盖了 X, 则

$$f|_{A_i}\text{连续} \Rightarrow f\text{连续}$$

(提示: 注意到 $f^{-1}(B)\cap A_i=(f|_{A_i})^{-1}(B)$.)

问题 6.18 (上下连续) 称 $\mathbb{R}$ 上的实函数 f 是

(1) 上连续的, 当 $\forall x_0, \limsup\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) 下连续的, 当 $\forall x_0, \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

求证: f 是上连续的 $\iff f^{-1}(-\infty,a)$ 是开集; f 是下连续的 $\iff f^{-1}(a,+\infty)$ 是开集.

习题 6.19 对于连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 证明如下集合是开集

$$\{x\in\mathbb{R}:\exists y>x,\mathrm{s.t.}\,f(y)>f(x)\}$$

并解释其含义.

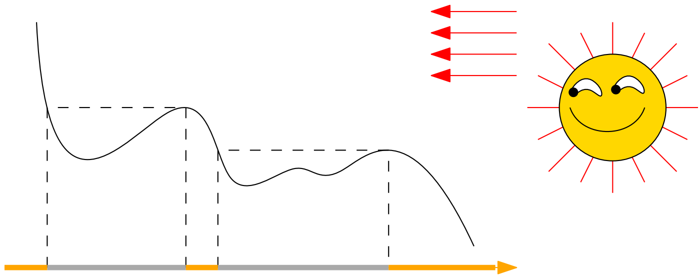


图 6.10: 日出

习题 6.20 证明二元集合 $X=\{a,b\}$ 上的平凡拓扑 X_1 到离散拓扑 X_2 之间的恒等映射是连续的, 虽然是双射, 但是不是同胚.

习题 6.21 另一个连续双射而不是同胚的典型的例子是如下放倒的 ρ 型, 右方线段是开线段, 将这条线段的 "右边" 扭向自身中间, 并搭在自身上. 这样逆映射不是连续的, 因为这需要拆 "焊点". 请读者将上述论证严格化.

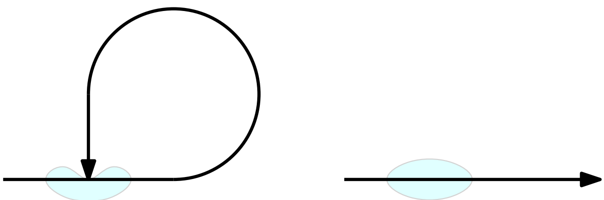


图 6.11: 连续双射而不是同胚

习题 6.22 证明: 投影映射

$$\pi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\qquad(x,y)\longmapsto(x,0)$$

是连续映射，但不是开映射.

问题 6.23 下面这个函数是饶有趣味的，对于 $x \in (0,1)$，假设其规范二进制小数为

$$x = 0.a_1 a_2 \dots \qquad a_i \in \{0,1\}$$

那么定义 $f(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$，求证:

(1) 在任何一个区间上 $f(x)$ 取遍 $[0,1]$ 的所有实数. (提示: 可以借助 Riemann 重排定理论证，换句话说，令 $a_1 = 1$，并令 $a_n = 0$ 对 $n > 1$ 直到

$$n = n_1 \qquad \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} a_i < x$$

再令 $a_n = 1$ 对 $n > n_1$ 直到

$$n = n_2 \qquad \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} a_i > x$$

以此类推，我们会得到 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，这样,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k-1} a_i - x\right| \quad &\le \left|\frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k-1} a_i - \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k-1} a_i\right| \\ &= \left|\frac{1}{n_k}\left(\frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k-1} a_i\right) - \frac{1}{n_k}a_{n_k}\right| \le \frac{2}{n_k} \to 0\end{aligned}$$

这样对一般的 n，若 $n_{k-1} < n < n_k$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - x$ 夹在两值之间.)

(2) 对 f 稍加改造，复合以 $1 \mapsto 1/2, 0 \mapsto 1/2$，其余不变，这样就成为一个 *(*显然不连续的*)* 开映射.

习题 6.24 (最大模原理) 有关开映射的一个重要相关概念是最大模原理.

(1) 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是开映射，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 *(*连通开集*)*，求证最大模原理成立:

$$\forall x \in \Omega, \exists x' \in \Omega, \mathrm{s.\,t.}\, |f(\boldsymbol{x})| < |f(\boldsymbol{x}')|$$

(2) 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 二次连续可微，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域，方便起见，以复数 z 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的元素，若

$$\Delta f := \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0 \quad \forall z \in \Omega$$

则称 f 为调和函数, 求证:

(a) 平均值定理: 若 f 是调和函数

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta\quad\forall 0\le r\le R$$

其中 R 使得上式有意义, 即以 z_0 为圆心 R 为半径的圆 $\subseteq\Omega$ (提示: 对 r 在积分号下求导得 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$, 然后化为第二型曲线积分 $\frac{1}{2\pi}\int_C-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y$ 用 Green 公式.)

(b) 若 f 是调和函数, 证明以下两种情形必居其一:

$$(i)\forall z\in\Omega,\exists z'\in\Omega,\mathrm{s.t.}\ f(z)<f(z')\qquad(ii)f\text{是常数}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域.

(c) 若

$$\Delta f:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\ge 0\quad\forall z\in\Omega$$

则称 f 为**拟调和函数**, 求证 *(b)* 中结论对拟调和函数也成立.

6.4 生成的拓扑

本节我们要来讨论生成的拓扑的概念. 回忆定义 (6.1), 这里我们讨论的 “拓扑” 指的是开集族.

定义 6.44 (生成的拓扑) 已知集合 X 上集合族 $\mathfrak{F}\subseteq 2^X$, 若 X 上有拓扑 $\mathfrak{T}$ 满足, 对于任何拓扑 $\mathfrak{P}$,

$$\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{P}\iff\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{P}$$

则称 $\mathfrak{T}$ 为 $\mathfrak{F}$**生成的拓扑**.

命题 6.45 关于 X 上集合族 $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑, 有

(1) $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑是存在且唯一的, 且等于

$$\mathfrak{F}\text{ 生成的拓扑} = \bigcap_{\text{拓扑 } \mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{F}} \mathfrak{P}$$

若记 $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑为 $\langle\mathfrak{F}\rangle$, 则

(2) $\mathfrak{F} \subseteq \langle\mathfrak{F}\rangle$. *(递增性)*

(3) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \langle\mathfrak{F}\rangle \subseteq \langle\mathfrak{T}\rangle$. *(单调性)*

(4) $\langle\langle\mathfrak{F}\rangle\rangle = \langle\mathfrak{F}\rangle$. *(幂等性)*

(5) $\mathfrak{F}$ 是 X 上的拓扑的当且仅当 $\langle\mathfrak{F}\rangle = \mathfrak{F}$.

证明 容易验证, 任意拓扑的交还形成拓扑, 故第一个等号成立. 剩下部分完全类似于 (4.19). □

命题 6.46 关于 X 上集合族 $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑, 有如下刻画

$$\mathfrak{F}\text{ 生成的拓扑} = \mathfrak{F}\text{ 成员的有限交的任意并}$$

即 (当中空交约定为 X, 空并约定为 $\varnothing$.)

$$\mathfrak{F}\text{ 生成的拓扑} = \left\{\bigcup_{U\in\mathfrak{S}} U : \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B}\right\} \qquad \mathfrak{B} = \left\{\bigcap_{U\in\mathfrak{T}} U : \begin{array}{l} \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{B} \\ |\mathfrak{T}| < \infty \end{array}\right\}$$

证明 记右边为 $\mathfrak{T}$, 则

$$\mathfrak{F} \subseteq \langle\mathfrak{F}\rangle \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{B} \subseteq \langle\mathfrak{F}\rangle \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{T} \subseteq \langle\mathfrak{F}\rangle$$

另一边只需要验证 $\mathfrak{T}$ 已经构成拓扑, 空集和全集依靠于空并和空交的约定, 无限并显然满足, 只需要验证有限交. 这是因为

$$\left(\bigcup_{U\in\mathfrak{S}} U\right) \cap \left(\bigcup_{V\in\mathfrak{R}} V\right) = \bigcup_{U\in\mathfrak{S}} \bigcup_{V\in\mathfrak{R}} (U \cap V)$$

其中 $\mathfrak{S}, \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}$, 于是 $U \cap V \in \mathfrak{B}$, 从而上式在 $\mathfrak{T}$ 之中. □

补充 6.47 (序拓扑) 对于全序集 X, 我们可以定义如下拓扑子基

$$\left\{ \ \{x \in X : x < r\} : r \in X \ \right\} \cup \left\{ \ \{x \in X : x > r\} : r \in X \ \right\}$$

不难验证这是拓扑基, 其生成的拓扑被称为**序拓扑**. 对应的拓扑子基为

$$\left\{ \ \{x \in X : b < x < a\} : a, b \in X \sqcup \{\pm\infty\} \ \right\}$$

其中 $-\infty < x < a$ 指的是 $x < a$, 以此类推.

例如, 实际上, $\mathbb{R}$ 上的拓扑和序拓扑相同.

补充 6.48 (弱拓扑) 对于集合 X 和一族拓扑空间 $\{Y_i\}_{i\in I}$, 映射 $\{f_i : X \to Y_i\}$, 则存在一个 "最小" 的拓扑使得 f_i 总连续. 弱拓扑 $\mathfrak{T}$ 是由以下集合族生成的

$$\bigcup_{i\in I} \left\{ \ f_i^{-1}(U) : U \text{ 是 } Y_i \text{ 的开集} \ \right\}$$

容易验证 f_i 都是连续的, 且任何使得 f_i 连续的拓扑 $\mathfrak{F}$, 都有 $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F}$.

定义 6.49 (拓扑基) 对于集合 X 上集合族 $\mathfrak{F} \subseteq 2^X$, 若 $\mathfrak{F}$ 满足

- $\forall x \in X, \exists U \in \mathfrak{F}, \mathrm{s.t.} \quad x \in U.$
- $\forall U, V \in \mathfrak{F}, x \in U \cap V, \exists W \in \mathfrak{F}, \mathrm{s.t.} \quad x \in W \subseteq U \cap V.$

  也就是说 $U \cap V$ 是一些 $\mathfrak{F}$ 成员的并.

则称 $\mathfrak{F}$ 是**拓扑基 (basis)**. 若其生成的拓扑为 $\mathfrak{T}$, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{T}$ 的拓扑基.

命题 6.50 对于集合 X 上拓扑基 $\mathfrak{F}$, 有

$$\mathfrak{F} \text{ 生成的拓扑} = \left\{ \bigcup_{U\in\mathfrak{G}} U : \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} \right\}$$

即其生成的拓扑是 $\mathfrak{F}$ 成员的任意并.

证明 首先, 因为 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ 生成的拓扑, 故右边 $\subseteq$ 左边. 反之, 我们验证, 右边已经形成一个拓扑, 因为

- $X, \varnothing$ 根据定义已经在其中.
- 对有限交封闭, 因为根据分配率

$$\left(\bigcup_{U\in\mathfrak{S}} U\right)\cap\left(\bigcup_{V\in\mathfrak{S}'} V\right)=\bigcup_{(U,V)\in\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}'} U\cap V$$

  根据拓扑基的定义, 右边是一些 $\mathfrak{F}$ 成员的并, 从而落在其中.

- 对无限并封闭显然.

这样就证明了左边 = 右边. □

推论 6.51 对于集合 X 上拓扑基 $\mathfrak{F}$, 拓扑 $\mathfrak{T}$, 则 $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑为 $\mathfrak{T}$ 当且仅当

- $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{T}$.
- 任何开集 $U\in\mathfrak{T}$, $x\in U$, 都存在 $V\in\mathfrak{F}$ 使得 $x\in V\subseteq U$.

即 $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{F}$ 生成的拓扑.

证明 因为 $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{T}$, 所以 $\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{F}$ 生成的拓扑 $\subseteq\mathfrak{T}$ 生成的拓扑 $=\mathfrak{T}$, 得证. □

例 6.52 $\mathbb{R}$ 具有如下的拓扑基

$$\left\{\quad\left(r-\frac{1}{n},r+\frac{1}{n}\right):\qquad r\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{Z}_{>0}\quad\right\}$$

不难验证这是拓扑基, 且其生成的拓扑就是 $\mathbb{R}$ 本来的拓扑, 具体来说, 首先上述集合每一个成员都是开集, 且任何一个开集都是一些成员的并.

拓扑基代表 "真正" 的开集只需要这么多, 例如实数上开集虽然很多, 但可以有可数的拓扑基.

因为拓扑基可以很快确定了一个拓扑, 而一般的集合族则没有那么方便, 所以我们需要定义集合族生成的拓扑基的概念.

定义 6.53 (拓扑子基) 对于集合 X 上集合族 $\mathfrak{F} \subseteq 2^X$, 记

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{U \in \mathfrak{T}} U : \begin{array}{c} \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{B} \\ |\mathfrak{T}| < \infty \end{array} \right\}$$

容易验证, 这构成拓扑基, 这被称为 $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑基, 称 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的拓扑子基. 若 $\mathfrak{F}$ 生成的拓扑为 $\mathfrak{T}$, 也称 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{T}$ 的拓扑子基.

类比拓扑基的概念, 我们定义邻域基.

定义 6.54 (邻域基) 对于拓扑空间 X, $x \in X$, 若 x 的邻域组成的族 $\mathfrak{U}$ 满足

$$\forall x \text{ 的邻域 } V, \exists U \in \mathfrak{U}, \mathrm{s.\,t.} \quad U \subseteq V$$

则称 $\mathfrak{U}$ 是 x 点处的邻域基. 从而根据 *(6.11)*, x 的所有邻域即

$$\{V \subseteq X : \exists U \in \mathfrak{U}, \mathrm{s.\,t.}\, U \subseteq V\}$$

命题 6.55 若拓扑空间 X 有拓扑基 $\mathfrak{F}$, 则若 $x \in X$

$$\{U \in \mathfrak{F} : x \in U\}$$

构成 x 点处的邻域基. 反之, 若每一点 x 取定开邻域基 $\mathfrak{U}_x$, 则

$$\bigcup_{x \in X} \mathfrak{U}_x$$

构成 X 的拓扑基.

证明 因为任何包含 x 的开集都是 $\mathfrak{F}$ 的成员的任意并, 从而必有一个 $\mathfrak{F}$ 的成员即包含 x, 又组成了这个开集.

反之, 对于开集 U, 在每一点 $x \in U$, 都可以选取邻域 $V_x \subseteq U$, 通过缩小 V_x, 可以假设 $V_x \in \mathfrak{U}_x$, 于是 $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ 是一些 $\bigcup_{x \in X} \mathfrak{U}_x$ 成员的并. 根据 (6.51) 命题得证. □

例 6.56 对 $x \in \mathbb{R}$, x 点处具有如下邻域基

$$\left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) : \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

例 6.57 任何拓扑空间 X, x 的全体开邻域构成 x 的一个邻域基.

例 6.58 事实上, 对任何拓扑空间 X, 若有一点 x 的邻域 U, 则所有包含在 U 中的 x 邻域构成了邻域基, 因为任意 x 的邻域 V, $V\cap U\subseteq U$ 是 x 的邻域.

⋙⋙ 习题 §6.4 ⋘⋘

问题 6.25 (邻域基公理) 已知集合 X, 若 $\forall x\in X,\exists N(x)\subseteq 2^X$ 满足

(1)$N(x)\neq\varnothing$. *(非空)*

(2)$\forall U\in N(x), x\in U$. *(含元)*

(3)$\forall U,V\in N(x),\exists W\in N(x),\text{s.t.}\,W\subseteq U\cap V$. *(向下封闭性)*

(4)$\forall U\in N(x),\exists V\subseteq U,\forall y\in V,\exists W\in N(y),\text{s.t.}\,W\subseteq V$

此时称 $N(x)$ 为 x 的邻域基. 求证: 存在唯一的拓扑空间 X 使得 $N(x)$ 是 x 的拓扑基.

问题 6.26 (弱拓扑) 对于集合 X 和一族拓扑空间 $\{Y_i\}_{i\in I}$, 映射 $\{f_i: X\to Y_i\}$, 证明弱拓扑 $\mathfrak{T}$ 满足如下泛性质

任何 X 上的拓扑 $\mathfrak{T}'$,
使得 $f:(X,\mathfrak{T}')$ 总连续,
都有 $\mathrm{id}_X:(X,\mathfrak{T}')\to(X,\mathfrak{T})$ 连续.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathfrak{T}) \arrow[r, "f"] & Y_i \\
(X,\mathfrak{T}') \arrow[u, "\mathrm{id}_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

问题 6.27 (Furstenberg) 在一篇精彩的论文中, 作者通过点集拓扑学的概念证明了素数是无穷的.

在 $\mathbb{Z}$ 上定义开集是如下拓扑基生成的拓扑

$$a\mathbb{Z}+b=\{an+b:n\in\mathbb{Z}\}\qquad a,b\in\mathbb{Z}$$

验证, *(1)* 这是一个 $\mathbb{Z}$ 上的拓扑. *(2)* 任何有限集合都不是开的. *(3)*$a\mathbb{Z}+b$ 是既开又闭的. *(4)*$\mathbb{Z}\setminus\{\pm1\}=\bigcup_{\text{素数 }p}p\mathbb{Z}$. *(5)* 证明素数有无穷个.

6.5 乘积拓扑

下面在 Cartesius 积上赋予拓扑结构, 好在有了上一节的铺垫, 这一节将会很顺利地顺利.

定义 6.59 已知两个拓扑空间 X, Y, 在 $X \times Y$ 上定义拓扑为下列集族生成的拓扑

$$\{\quad U \times V : U \text{ 是 } X \text{ 的开集}, V \text{ 是 } Y \text{ 的开集} \quad\}$$

更具体地说, $X \times Y$ 的开集是上述集合的任意并. 这被称为乘积拓扑. 于是, 我们可以仿照定义任意有限个拓扑空间的乘积.

命题 6.60 (二元乘积空间结构定理) 对两个拓扑空间 X, Y, 关于 $X \times Y$ 上的拓扑, 有

(开集) $X \times Y$ 的开集以

$$\{U \times V : U \text{ 是 } X \text{ 的开集}, V \text{ 是 } Y \text{ 的开集}\}$$

为拓扑基. 即开集都是形如 $U \times V$ 的并, 其中 U 是 X 的开集, V 是 Y 的开集.

(邻域) $(x, y) \in X \times Y$ 以

$$\{U \times V : U \text{ 是 } x \text{ 的邻域}, V \text{ 是 } y \text{ 的邻域}\}$$

为邻域基. 即 (x, y) 的邻域都是含某个 $U \times V$ 的集合, 其中 U 是 x 的邻域, V 是 y 的邻域.

例 6.61 $\mathbb{R}^2$ 和乘积空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的拓扑是一致的, 因为 $\mathbb{R}^2$ 每点都以“同心圆”定义了一个邻域基, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 则是“同心”正方形, 容易想象, 总可以将圆缩小一些放进正方形中, 也总可以将正方形缩小一些放进圆中, 故互相为对方的邻域基, 从而定义了相同的邻域, 从而定义了相同的拓扑.

定义 6.62 (乘积空间) 已知一族拓扑空间 $\{X_i\}_{i\in I}$, $X=\prod_{i\in I}X_i$. 在 X 上定义拓扑为下列集族生成的拓扑

$$\bigcup_{i\in I}\left\{\quad \pi_i^{-1}(U)=\prod_{j\in I}\begin{cases}X_j & j\neq i\\ U & j=i\end{cases}: U \text{ 是 } X_i \text{ 的开集}\quad\right\}$$

其中 $\pi_i: X\to X_i$ 是投影映射, 这被称为**乘积拓扑**或 **Tychonoff 拓扑**.

回忆 (6.48), 这就是说, X 上的拓扑是最小的使得投影映射连续的拓扑.

在有限情形下, Tychonoff 拓扑和我们前面定义的拓扑是完全相同的, 因为

$$\prod_{i\in I}U_i=\bigcap_{i\in I}p_i^{-1}(U_i) \qquad (\text{有限交})$$

参见下图.

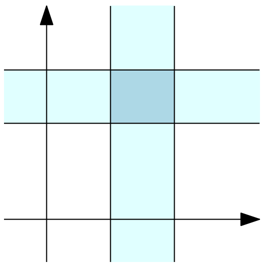


图 6.12: Tychonoff 拓扑和 "箱" 拓扑

命题 6.63 (乘积空间结构定理) 对一族拓扑空间 $\{X_i\}_{i\in I}$, $X=\prod_{i\in I}X_i$. 关于 X 上的拓扑, 有

(开集) X 的开集是由

$$\left\{\quad \prod_{j\in I}\begin{cases}X_j & j\neq i\\ U & j=i\end{cases}: \quad U \text{ 是 } X_i \text{ 的开集}\quad\right\}$$

生成的. 其生成的拓扑基是

$$\left\{ \prod_{i\in I} U_i : \quad U_i \subseteq X_i \text{ 是开集, 且只有有限的 } U_i \neq X_i \right\}$$

即开集都是形如上集合的并.

(邻域) $(x_i)_{i\in I} \in X$ 以

$$\left\{ \prod_{i\in I} U_i : \quad U_i \text{ 是 } x_i \text{ 邻域, 只有有限的 } U_i \neq X_i \right\}$$

为邻域基.

(闭包) 对于 $Y_i \subseteq X_i$, 有

$$\overline{\prod_{i\in I} Y_i} = \prod_{i\in I} \overline{Y_i}$$

证明 需要证明的是关于闭包的论证. 首先, 注意到,

$$\text{右边} = \bigcap_{j\in I} \prod_{i\in I} \begin{cases} \overline{Y_j} & i = j \\ X_i & i \neq j \end{cases}$$

故右边是闭集故左边 $\subseteq$ 右边. 反之, 任意 $(x_i) \in \prod_{i\in I} \overline{Y_i}$, 任何邻域 $U = \prod U_i \ni (x_i)$, 则每个 U_i 都与 Y_i 有交, 这样 $U \cap \prod_{i\in I} Y_i = \prod_{i\in I} (Y_i \cap U_i)$ 非空, 故右边 $\subseteq$ 左边. □

⋙⋙ 习题 §6.5 ⋘⋘

问题 6.28 对一族拓扑空间 $\{X_i\}_{i\in I}$, $X = \prod_{i\in I} X_i$. 一种有限情形的直接的类比是在 X 赋予**箱 (box) 拓扑**, 定义箱拓扑为如下拓扑基生成的拓扑

$$\left\{ \prod_{i\in I} U_i : \quad U_i \text{ 是 } X_i \text{ 的开集} \right\}$$

但是其性质不太好, 例如考虑 $\mathbb{R}^\omega=\mathbb{R}^{|\mathbb{N}^*|}$, 设

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^\omega \\ t &\longmapsto (t,t,\ldots) \end{aligned}$$

求证: 在 $\mathbb{R}^\omega$ 取箱拓扑时, f 不连续. (提示: 取 $V=\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$)

问题 6.29 回忆 *§2.3*介绍的泛性质 *(2.22)* 和 *(2.23)*, 乘积空间也可以有类似的性质. 对于一族拓扑空间 $\{A_i\}_{i\in I}$, 则

$$(P,\{\pi_i\}) \quad \Big| \quad \text{乘积空间} P=\prod_{i\in I}A_i, \pi_i:P\to A_i \text{是投影映射}$$

满足如下的泛性质

$$\begin{aligned} &\forall \text{拓扑空间 } X, \forall \text{一族连续映射 } \{\varphi_i:X\to A_i\} \\ &\exists^! \text{连续映射 } \lambda:X\to P \\ &\quad \text{s.t.} \quad \forall i\in I, \pi_i\circ\lambda=\varphi_i \end{aligned}
\qquad \Bigg| \qquad
\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ P \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

且满足上述性质的 $(P,\{\pi_i\})$ 之间必然可以建立同胚, 具体来说, 若

$$(P,\{\pi_i\}),(P',\{\pi_i'\})$$

满足上述泛性质, 则存在连续映射 $\alpha:P\to P',\beta:P'\to P$, 使得

$$\begin{aligned} \alpha\circ\beta&=\mathrm{id}_{P'} \\ \beta\circ\alpha&=\mathrm{id}_P \\ \pi_i\circ\beta&=\pi_i' \\ \pi_i'\circ\alpha&=\pi_i \end{aligned}
\qquad \Bigg| \qquad
\begin{tikzcd} P' \arrow[d, dashed, shift left, "\beta"] \arrow[dr, "\pi_i'"] & \\ P \arrow[u, dashed, shift left, "\alpha"] \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

也就是说, 把 "集合" 换成 "拓扑空间", "映射" 换成 "连续映射", "*Cartesius* 积" 换成 "乘积空间", 上述泛性质也对.

问题 6.30 一个也很常用的构造是无交并空间, 已知一族拓扑空间 $\{X_i\}_{i\in I}$, $X=\bigsqcup_{i\in I}X_i$. (回忆 *(1.22)*), 可以定义开集为

$$\left\{ \bigsqcup_{i\in I}U_i: \quad U_i \text{ 是 } X_i \text{ 的开集} \right\}$$

容易验证这是一个拓扑，且满足类似 *(2.25)* 和 *(2.26)* 的泛性质

对于一族拓扑空间 $\{A_i\}_{i\in I}$，则

$$
\begin{array}{c|c}
(U,\{\iota_i\}) & \text{无交并空间} U=\bigsqcup_{i\in I} A_i,\iota_i : A_i \to U \text{是包含映射}
\end{array}
$$

满足如下的泛性质

$$
\begin{array}{l|c}
\begin{array}{l}
\forall \text{拓扑空间 } X, \forall \text{一族连续映射 } \{\varphi_i : A_i \to X\} \\
\exists! \text{连续映射 } \lambda : U \to X \\
\quad \text{s.t.} \quad \forall i \in I, \lambda \circ \iota_i = \varphi_i
\end{array}
&
\begin{tikzcd}
X & \\
U \arrow[u, dashed, "\lambda"] & A_i \arrow[l, "\iota_i"] \arrow[ul, "\varphi_i"']
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

并且也有类似 *(2.26)* 的性质.

6.6 度量空间

定义 6.64 (度量) 已知非空集合 X, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足:

Mtr1 $d(x,y) \geq 0$，当且仅当 $x=y$ 时取"$=$". *(正定性)*

Mtr2 $d(x,y) = d(y,x)$. *(对称性)*

Mtr3 $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$. *(三角不等式)*

则称 d 是 X 上的**度量**或**距离**，(X,d) 为**度量 (metric) 空间**或**距离空间**.

对于 $a \in X$，记

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$$

为称为以 a 为中心，r 为半径的**邻域**.

规定 X 上的拓扑是拓扑基[4]

$$\{B_r(a) : r > 0, a \in X\}$$

[4] 回忆拓扑基的定义 (6.49). 因为对于任意两个这样的邻域 $B_r(a), B_s(b)$，若有 $c \in B_r(a) \cap B_s(b)$，若取 $\epsilon = \min(r-d(a,c), s-d(b,c))$，则 $B_\epsilon(c) \subseteq B_r(a) \cap B_s(b)$.

生成的拓扑.

如果说拓扑是用集合的包含关系来代表远近程度, 那么度量空间就是用实数的大小来代表.

例 6.65 对于任何集合 X, 规定 $d(x,y)=\delta_{xy}=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$, 这也构成一个距离, 这诱导了离散拓扑.

例 6.66 对于欧式空间 $\mathbb{R}^n$, 都有自然的距离

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}\qquad x=(x_i)_{i=1}^n\quad y=(y_i)_{i=1}^n$$

例 6.67 (p 进度量) 对于有理数 $\mathbb{Q}$ 和素数 p, 可以定义

$$d(x,y)=\frac{1}{p^r}\qquad x-y=p^r\frac{a}{b}\qquad p\nmid a, p\nmid b$$

例如 $p=3$ 时 $d(3,0)=d(6,0)=d(12,0)=\frac{1}{3}, d(1,0)=1$. 此时, 甚至有 **强三角不等式**

$$d(x,z)\leq\max(d(x,y),d(y,z))$$

这被称为 p 进度量.

定义 6.68 (收敛) 若 X 是距离空间, 对于序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subseteq X$. 称 $\{x_n\}$ **收敛 (converge)** 到 $x_0\in X$ 当

$$\forall\epsilon>0,\exists N>0,\mathrm{s.t.}\, n>N\Rightarrow d(x_n,x_0)<\epsilon$$

即 $d(x_n,x_0)\to 0$. 并记为 $x_n\to x_0$.

例 6.69 (赋范线性空间) 对于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$-向量空间 V, 称映射 $|\cdot|:V\to\mathbb{R}$ 是一个 **范数 (norm)** , 当

Nm1 对任意 $x\in V$, $||x||\geq 0$, 且 $||x||=0\iff x=0$. *(正定性)*

Nm2 对任意 $x,y\in V$, $||x+y||\leq||x||+||y||$. *(三角不等式)*

Nm3 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}, x \in V$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$. *(齐次性)*

其中 $|\lambda|$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的绝对值. 称 $(V, ||\cdot||)$ 为一个**赋范 (normed) 线性空间**.

显然, $d(x,y) = ||x-y||$ 是 V 上的一个距离, 称之为范数诱导的距离. 这使得 X 成为一个距离空间.

例 6.70 (内积空间) 对于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$-向量空间 V, 称自身的配合 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ 是一个**内积 (inner product)**, 当

InnProd1 对任意 $x \in V$, $\langle x,x\rangle \geq 0$, 且 $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$. *(正定性)*

InnProd2 对任意 $x, y \in V$, $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$. *(共轭对称性)*

InnProd3 对任意 $x,y,z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$, $\langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \lambda \langle y,z\rangle$. *(线性性)*

其中 $\bar{\cdot}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的共轭. 称 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个**内积空间**.

显然, $||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 是 V 上的一个范数, 称为内积诱导的范数.

命题 6.71 (用序列描述拓扑) 对于距离空间 X, 则

(闭集) $F \subseteq X$ 是闭集, 如果任何 F 中收敛的序列都不会收敛到 F 以外. 即若 $\{x_n\} \subseteq F$

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in F$$

(闭包) $A \subseteq X$ 的闭包是所有 A 中收敛序列的极限点. 即

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A, \text{s.t.}\, x_n \to x$$

证明 (闭集) 可以由 (闭包) 来推倒, 我们证明 (闭包). 若 $x \in \overline{A}$, 则任何正整数 n 都有 $B_{1/n}(x) \cap A \neq \varnothing$, 这样, 就可以选择 $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$, 此时 $\{x_n\} \subseteq A$, 且 $x_n \to x$.

反之, 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A, \text{s. t.}\, x_n \to x$. 任意 x 的任何邻域 V, 根据距离空间拓扑的定义, 存在 $B_r(a) \subseteq V$ 对某个 $r > 0$, 这样存在 n 使得 $d(x_n, x) < r$, 这样, $x_n \in B_r(x) \cap A \subseteq V \cap A \neq \varnothing$. □

定义 6.72 (Cauchy) 若 X 是距离空间, 对于序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$. 称 $\{x_n\}$ 是 **Cauchy 列** 当

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{s. t.}\, m, n > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

若凡 *Cauchy* 列皆收敛于某一个 $x_0 \in X$, 则称 X **完备 (complete)** .

命题 6.73 对于距离空间 X, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, 则

(1) 若 $x_n \to x_0 \in X$, 则 $\{x_n\}$*Cauchy*.

(2) 对 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$, $x_n \to x_0 \iff$ 有子列 $x_{n_k} \to x_0$.

证明 (1) 预先取 $\epsilon/2$, 则

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

(2)$\Rightarrow$ 方向显然. 反之, 若有子列 $\{a_{n_k}\}$Cauchy, 取 $\epsilon/2$, 则

$$d(x_m, x_0) \leq d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon$$

只要挑选恰当的 n_k 即可. □

补充 6.74 (子集之间的距离) 对于距离空间 X, 子集 $Y, Z \subseteq X$, 可以定义 Y 到 Z“距离”

$$d(Y, Z) := \inf\{d(y, z) : y \in Y, z \in Z\}$$

特别地, $d(x, Y)$ 是 $d(\{x\}, Y)$ 的简写. 交给读者去验证:

$$d(x, Y) = 0 \iff x \in \overline{Y}$$

补充 6.75 注意到，对于距离空间 (X,d)，新的距离 $\overline{d}(x,y)=\max(d(x,y),1)$ 也是一个距离，且诱导了和 d 相同的拓扑 (因为两种意义下的收敛是完全一样的)．这被称为**标准有界度量**．

定义 6.76 (一致拓扑) 对于一族距离空间 $\{(X_i,d_i)\}_{i\in I}$，在 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 上定义新的距离

$$d(x,y)=\min\left(1,\sup_{i\in I}(d(x_i,y_i))\right)\qquad x=(x_i)_{i\in I}\qquad y=(y_i)_{i\in I}$$

容易验证，这是一个度量，这被称为 X 上的**一致 (uniform) 度量**．

命题 6.77 对于距离空间 (X,d)，d 是 $X\times X\to\mathbb{R}$ 的连续函数．

证明 若 $(x,y)\mapsto r$．对任何 $\epsilon>0$，存在 $\delta=\epsilon/2$，使得 $(z,w)\in B_\delta(x,y)=B_\delta(x)\times B_\delta(y)$，这样，

$$d(z,w)\leq d(z,x)+d(x,y)+d(y,w)<d(x,y)+\epsilon\Rightarrow d(z,w)-d(x,y)<\epsilon$$

另一方面

$$d(x,y)\leq d(z,x)+d(z,w)+d(y,w)<d(z,w)+\epsilon\Rightarrow d(z,w)-d(x,y)>-\epsilon$$

命题得证．□

例 6.78 (连续函数环) 对于拓扑空间 X，记全体 $X\to\mathbb{R}$ 的连续函数为 $\mathscr{C}(X)$，容易通过集合论的等同将其视为 $\mathbb{R}^{|X|}$ 的子集．此时，$\mathscr{C}(X)$ 上的收敛就是一致收敛．这被称为**连续函数环**．

⋙⋙ 习题 §6.6 ⋘⋘

习题 6.31 对于完备距离空间 X，$Y\subseteq X$ 作为子空间也完备当且仅当 Y 是闭集．

习题 6.32 (预度量空间) 已知非空集合 X，$d:X\times X\to\mathbb{R}$ 满足：

(1)$d(x,y)\geq 0$，且 $d(x,x)=0$． (半正定性)

(2)$d(x,y)=d(y,x)$. *(对称性)*

(3)$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$. *(三角不等式)*

则称 d 是 X 上的**预度量**或**预距离**, 定义关系

$$x\sim y:\iff d(x,y)=0$$

求证: $\sim$ 是等价关系, 且 $X/\sim$ 成为度量空间.

习题 6.33 (完备化) 我们将要证明, 对于任何距离空间 X, 都存在一个 $\hat{X}$, 使得 $\hat{X}$ 是包含 X 的完备距离空间之中最小的, 我们称 $\hat{X}$ 为 X 的**完备化**. 具体来说, 存在等距嵌入 $\iota: X\to\hat{X}$, 使得 $\iota(X)\subseteq\hat{X}$ 稠密.

(1) 考虑所有 X 的 *Cauchy* 列构成的集合 $\mathfrak{C}$, 在其上定义预距离

$$d((x_n),(y_n))=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$$

求证: 这个极限是存在的. (提示: 注意到 $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|<d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)$.)

由这个预距离, 诱导出等价关系 $\sim$, 这使得 $\hat{X}=X/\sim$ 成为度量空间.

(2) 若定义 ι 为常数映射,

$$\iota: X\longrightarrow\hat{X}\qquad x\longmapsto(x,x,\ldots)$$

求证: 这是等距嵌入 $\iota: X\to\hat{X}$, 使得 $\iota(X)\subseteq\hat{X}$ 稠密.

(3) 证明 $\hat{X}$ 是完备的. (提示: 对于一列 $\hat{X}$ 的 Cauchy 列 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, 因为 $\iota(X)$ 在 $\hat{X}$ 中稠密, 所以可以找 $(x_i)_{i=1}^{\infty}\subseteq X$ 使得

$$d(\iota(x_i),\xi_i)\to 0$$

这样就证明了 $\xi_i\to(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 所在的等价类.)

(4) 证明如下性质

$\forall$完备度量空间 Y
$\forall$连续映射 $\varphi: X\to Y$
$\exists^!\hat{\varphi}:\hat{X}\to Y$
s.t. $\quad\varphi=\hat{\varphi}\circ\iota$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \hat{X} \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(提示: 因为 Y 完备, 而连续函数将 Cauchy 列变为 Cauchy 列, 所以定义 $(x_i)\mapsto \lim f(x_i)$, 这是良定义的. 这还顺便证明了这是连续的, 因为逐点连续.)

习题 6.34 已知一族度量空间 $\{(X_i,d_i)\}_{i\in I}$, 设箱拓扑 *(参见习题6.28)* 的开集族为 $\mathfrak{B}$, 乘积拓扑的开集族为 $\mathfrak{T}$, 一致拓扑的开集族为 $\mathfrak{U}$, 求证:

$$\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{B}$$

并说明 I 无穷时, $\mathbb{R}^I$ 上他们都不相同. (提示: 考虑 $U=(-1,1)^I, V=\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$)

问题 6.35 (压缩映照原理) 一个完备的度量空间 X, 若 $f:X\to X$ 满足存在 $0<c<1$ 使得

$$d(f(x),f(y))\le c\cdot d(x,y)$$

求证: 必然存在 $x\in X$ 使得 $f(x)=x$. (提示: 证明 $\{f^n(x)\}$ 是 Cauchy 列.)

问题 6.36 一个赋范线性空间 V 完备当且仅当如下的**Weierstrass 判别法**成立.

对序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subseteq V$, 若 $\sum_{n=1}^\infty ||x_n||$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 收敛. 且

$$\left|\left|\sum_{n=1}^\infty x_n\right|\right|\le\sum_{n=1}^\infty ||x_n|$$

(提示: 容易根据 Cauchy 得到 Weiestrass 判别法以及估计. 反之, 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subseteq X$ 是 Cauchy 列, 可以找 $n(k)$ 单调递增趋于无穷使得

$$||x_{n(k+1)}-x_{n(k)}||<\frac{1}{2^k}$$

此时

$$\sum_{k=1}^\infty(x_{n(k+1)}-x_{n(k)})$$

根据 Weierstrass 判别法, 这是收敛的, 即 $x_{k(n)}$ 收敛.)

并说明连续函数环 $\mathscr{C}(X)$ 总是完备的.

问题 6.37 (Baire 纲定理) 令 X 是完备的度量空间，若 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $(\overline{F_n})^{\circ}=\varnothing$，则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^{\circ}=\varnothing$$

(提示：通过转化，只需要证明对于完备的度量空间 X，若 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\overline{U_n}=X$，则

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n}=X$$

假如非空开集 $U\subseteq X$，由于 $\overline{U_1}=X$，故可以取 V_1 使得

$$V_1\subseteq\overline{V_1}\subseteq U\cap U_1$$

由于 $\overline{U_2}=X$，故可以取 V_2 使得

$$V_2\subseteq\overline{V_2}\subseteq V_1\cap U_2$$

以此类推，可以得到 $\{V_n\}$ 使得

$$V_n\subseteq\overline{V_n}\subseteq V_{n-1}\cap U_n\subseteq V_{n-1}\subseteq\ldots U$$

我们还可以假定 V_n 的半径不断缩小，从而任取 $x_n\in V_n$ 就成为 Cauchy 列. 假设 $x_n\to x$，此时 $x\in U\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$，故 $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$ 稠密.)

刁题 6.38 对连续函数 $f(x)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)=0$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
(提示：给定 $\forall\epsilon>0$，记

$$E_N=\{x\in[0,1]:\forall n>N,|f(x+\ln n)|\leq\epsilon/2\}$$

这是一个闭集. 显然，根据假设

$$\bigcup_{N=1}^{\infty}E_N=[0,1]$$

根据 Baire 纲定理, 有某个 N 使得 E_N 有内部, 设 $(a_\epsilon, b_\epsilon) \subseteq E_N$. 根据上面的观察, 存在 $M > 0$ 使得

$$(M, \infty) \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} (a_\epsilon + \ln n, b_\epsilon + \ln n)$$

于是 $\forall x > M$, x 必然落入某个 $(a_\epsilon + \ln n, b_\epsilon + \ln n)$ 中, 于是容易验证, $|f(x)| < \epsilon$ 成立. 这就证明了 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.)

习题 **6.39** 证明: 平面的开集不能被可数条连续可微曲线覆盖. 这里连续可微曲线指的是 $[0,1]$ 到平面的可微映射. (提示: 先将开集缩小成一个闭长方形, 再利用 Baire 纲定理, 重点在于证明可微曲线没有内点, 也就是连续可微曲线无法填满平面, 只要按照导数的上下界为比例打网格, 如果取参数间隔充分小, 就不可能填满经过所有网格.)

习题 **6.40** 若 $[0,1]$ 上的连续函数 f 满足

$$\forall x \in [0,1], \exists n, \mathrm{s.t.}\ f_n(x) = 0$$

其中 $f_1 = \int_0^x f, f_2 = \int_0^x f_1, \ldots$, 那么 $f = 0$. (提示: 实际上, $f \neq 0$ 的点是开集, 在这个开集的某个开区间内的闭区间上运用 Baire 纲定理.)

第七章　分离公理和可数公理

本章要对拓扑做进一步要求.

7.1　分离公理

定义 7.1 (分离公理) 已知拓扑空间 X, **分离公理**如下:

T1 任何 $x \neq y \in X$, 存在 x 的邻域 U, 使得 $y \notin U$.

T2 任何 $x \neq y \in X$, 存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使得 $U \cap V = \varnothing$.

T3 任何 $x \in X$, 闭集 A, 如果 $x \notin A$, 则存在 x 的邻域 U 和 A 的邻域 V, 使得 $U \cap V = \varnothing$.

T4 任何闭集 A, B, 如果 $A \cap B = \varnothing$, 则存在 A 的邻域 U 和 B 的邻域 V, 使得 $U \cap V = \varnothing$.

这几条分别被叫做**第一分离公理**, **第二分离公理**, **第三分离公理**, **第四分离公理**.

满足 *T1* 公理的 X 被称为 **T1 空间**; 满足 *T2* 公理的 X 被称为 **Hausdorff 空间**或 **T2 空间**; 满足 *T3* 公理的 X 被称为**正则 (regular) 空间**或 **T3 空间**; 满足 *T4* 公理的 X 被称为**正规 (normal) 空间**或 **T4 空间**.

也有的文献要求正则空间还需满足 T1, 正规空间还需满足 T1, 不过我们涉及 T3 和 T4 时都尽量避免可能引发混乱的说法.

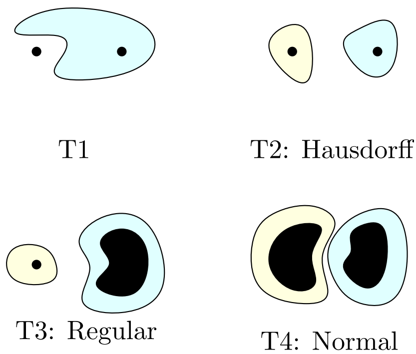


图 7.1: 分离公理

显然, 分离公理是拓扑性质, 即两个同胚的拓扑空间同时具有或不具有这一性质.

命题 7.2 *拓扑空间 X 是 $T1$ 空间的充分必要条件是 X 的单点集是闭集.*

证明 因为

$$\begin{aligned}
& T1 = \forall x \neq y \in X, \exists\ x \text{ 的邻域} U, \mathrm{s.t.}\, y \notin U \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in X, \forall y \notin \{x\}, \exists\ y \text{ 的邻域} U, \mathrm{s.t.}\, x \notin U \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in X, \forall y \in X \setminus \{x\}, \exists\ y \text{ 的邻域} U, \mathrm{s.t.}\, U \subseteq X \setminus \{x\} \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in X, X \setminus \{x\} \text{是开集}. \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in X, \{x\} \text{是闭集}.
\end{aligned}$$

命题得证. □

推论 7.3 *关于分离公理有如下关系:*

(1) $T2 \Rightarrow T1$. (2) $T3, T1 \Rightarrow T2$. (3) $T4, T1 \Rightarrow T3$.

我们将在习题中展示各种反例以说明 T1,T2,T3,T4 之间, 仅有如上的必然关系.

命题 7.4 拓扑空间 X 是 $T3$ 空间的充分必要条件是

$$\forall x \in X, \forall\ x \text{ 的邻域} U, \exists\ x \text{ 的邻域} V, \mathrm{s.t.}\, \overline{V} \subseteq U$$

即任何一点邻域可以缩小一点使得闭包还在原来的邻域之中，换句话说，每一点都有闭邻域基.

证明 若 X 是 T3 空间. 对于 x 的邻域 U, 不妨通过缩小一些假设 U 是开邻域, 这样, 对 $\{x\}$ 和 U^c 用 T3 分离可以得到

$$x \text{ 的开邻域 } V \quad U \text{ 的开邻域 } W \quad U \cap W = \varnothing$$

这样 $\overline{V} \subseteq W^c \subseteq (U^c)^c = U$, 条件得证.

反之, 若条件成立, 则对于任意分离的单点集 $\{x\}$ 和闭集 A, 则 A^c 是 x 的邻域, 故按照条件可以缩小 A^c 为一个邻域 V 使得 $\overline{V} \subseteq A^c$, 这样, V 和 $(\overline{V})^c$ 就成为分离 x 和 A 的两个邻域. □

命题 7.5 拓扑空间 X 是 $T4$ 空间的充分必要条件是

$$\forall \text{ 闭集 } A, \forall\ A \text{ 的邻域} U, \exists\ A \text{ 的邻域} V, \mathrm{s.t.}\, \overline{V} \subseteq U$$

即任何闭集的邻域可以缩小一点使得闭包还在原来的邻域之中.

证明 仿照 (7.4). □

推论 7.6 $T3, T4$ 可以分别被加强为

T3 任何 $x \in X$, 闭集 A, 如果 $x \notin A$, 则存在 x 的邻域 U 和 A 的邻域 V, 使得 $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

T4 任何闭集 A, B, 如果 $A \cap B = \varnothing$, 则存在 A 的邻域 U 和 B 的邻域 V, 使得 $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

例 7.7 距离空间总是满足 $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ 公理. 具体来说,

- 距离空间单点集总是闭的, 因为 $\{x\} = \{y \in X : d(x, y) = 0\}$, 当中利用了 (6.77) 以及常函数是连续的事实.

- 任意两点 $x \neq y$, 则 $d := d(x, y) > 0$, 于是 $B_{d/2}(x)$ 和 $B_{d/2}(y)$ 分离 x, y.

- 任意 x 以及闭集 A, 因为 $x \notin A$, 则 $d : d(x, A) > 0$, 于是

$$B_{d/2}(x) \qquad \bigcup_{a \in A} B_{d/2}(a)$$

  分离 x, A.

- 任意闭集 A, B. 对每一点 $a \in A$, 都有 $d = d_a = d(a, B) > 0$ 使得 $B_d(x)$ 与 B 不交, 作同样, 对 $b \in B$, 都有 $d = d_b = d(b, A) > 0$ 使得 $B_d(x)$ 与 A 不交, 作

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{d/2}(a) \qquad V = \bigcup_{b \in A} B_{d/2}(b)$$

  这两者是不交的, 否则存在 $x \in U \cap V$, 即 $d(x, a) < d_a/2, d(x, b) < d_b/2$, 对某个 $a \in A, b \in B$, 这样 $d(a, b) < (d_a + d_b)/2$, 产生矛盾.

⋙⋙ 习题 §7.1 ⋘⋘

习题 7.1 仿照 *(7.4)* 证明 *(7.5)*.

习题 7.2 已知 *Hausdorff* 空间 X, 若 $f : Y \to X$ 连续, 求证: 图像 $\Gamma = \{(y, x) \in Y \times X : x = f(y)\}$ 为闭集. (提示: 证明 Γ^c 是开集.)

习题 7.3 求证: 至少有两个元素的平凡拓扑, 不满足 *T1,T2,T3,T4* 公理.

习题 7.4 求证: 无限集合上的余有限拓扑 *(6.8)* 是 *T1* 空间, 但不是 *T2* 空间.

习题 7.5 求证: 离散拓扑满足 *T1,T2,T3,T4* 公理.

习题 7.6 求证: 有限集上只有离散拓扑满足 *T1* 公理.

习题 7.7 (奇偶拓扑空间) 在 $X = \mathbb{N}$ 上, 赋予子集族

$$\mathfrak{B} = \{\{2n-1, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

生成的拓扑, 称为奇偶拓扑空间. 求证:

(1) 开集和闭集完全相同;

(2)X 是 *T3*, *T4* 空间.

(3)X 不是 *T1*,*T2* 空间.

习题 7.8 (切盘拓扑空间) 在 $X = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 上. 若 $a = (a_1, a_2)$, 定义

$$B_r(a) = \begin{cases} \{x \in X \| x - a| < r\} & a_2 > 0, r < a_2 \\ \{x \in X \| (a_1, r) - x| < r\} \cup \{a\} & a_2 = 0 \end{cases}$$

参见下图.

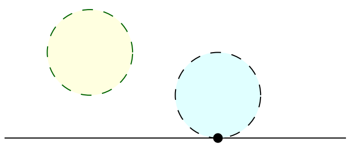


图 7.2: 切盘拓扑空间

则集合族

$$\mathfrak{B} = \{B_r(a) | a = (a_1, a_2) \in X, a_2 > 0 \text{ 时}, r < a_2\}$$

是拓扑基. 赋予 X 以 $\mathfrak{B}$ 生成的拓扑, 称为切盘拓扑空间.

求证:

(1)$\{0\} \times \mathbb{R}$ 上任意子集都是即开又闭的.

(2)X 是 *T1*,*T2*,*T3* 空间. (提示: 参见下图)

(3)X 不是 *T4* 空间. (提示: 证明 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 的每个子集 A, 可以找开集分离 A 和 $\mathbb{R} \setminus A$, 这些开集 $\cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{>0}$ 是两两不同的, 然后可以用集合的基数导出矛盾.)

(4)$X \times \{0, 1\}$ 不是 *T1*, *T2*, *T4* 空间, 但仍然是 *T3* 空间, 其中 $\{0, 1\}$ 上定义的是平凡拓扑.

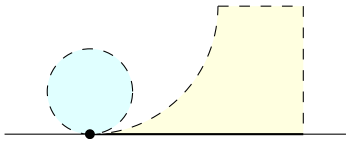


图 7.3: 切盘拓扑空间

习题 7.9 (半盘拓扑空间) 在 $X=\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上, 记 $X^+=\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. 若 $a=(a_1,a_2)$, 定义

$$B_r(a)=\begin{cases}\{x\in X \mid |x-a|<r\}\cap X^+ & a_2>0, r<a_2\\ (\{x\in X \mid |x-a|<r\}\cap X^+)\cup\{a\} & a_2=0\end{cases}$$

参见下图.

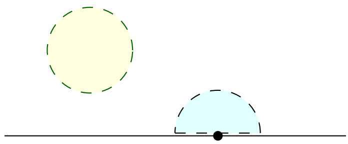


图 7.4: 半盘拓扑空间

则集合族

$$\mathfrak{B}=\{B_r(a)|a=(a_1,a_2)\in X, a_2>0 \text{ 时}, r<a_2\}$$

是拓扑基. 赋予 X 以 $\mathfrak{B}$ 生成的拓扑, 称为半盘拓扑空间. 求证:

(1)$\{0\}\times\mathbb{R}$ 上任意子集都是即开又闭的.

(2)X 是 *T1*,*T2* 空间.

(3)X 不是 *T3* 空间.

习题 7.10 在 $X=\mathbb{R}$ 上, 定义

$$\mathbb{R} \text{ 的开集族}=\{(x,+\infty):x\in\mathbb{R}\}$$

求证:

(1)X 是 $T4$ 空间. (提示: 不相交闭集只能有一个是 $\varnothing$.)

(2)X 不是 $T1$,$T2$,$T3$ 空间.

习题 7.11 研究以下两个拓扑空间的分离性:

(1)$X=\{1,2,3\},\mathfrak{T}=\{\varnothing,\{1\},\{2,3\},X\}$;

(2)$X=\{1,2,3,4\},\mathfrak{T}=\{\varnothing,\{1,2\},\{3,4\},X\}$;

习题 7.12 根据 $T1$,$T2$,$T3$,$T4$ 的关系, 可画出关系图如下

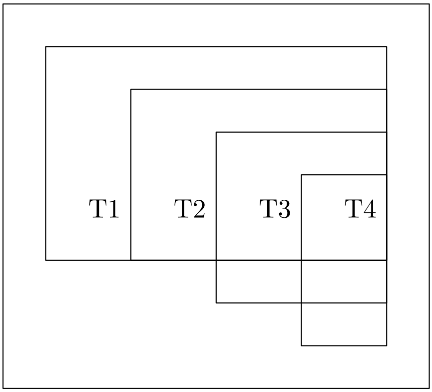


图 7.5: T1,T2,T3,T4 的关系

在每个部分填入上面习题中的例子. (提示: 如下图.)

7.2 分离公理的性质

下面我们来看分离性能否保持到子空间和乘积空间上.

命题 7.8 关于子空间,

(1) $T1$ 空间的子空间还是 $T1$ 空间.

(2) *Hausdorff* 空间的子空间还是 *Hausdorff* 空间.

(3) $T3$ 空间的子空间还是 $T3$ 空间.

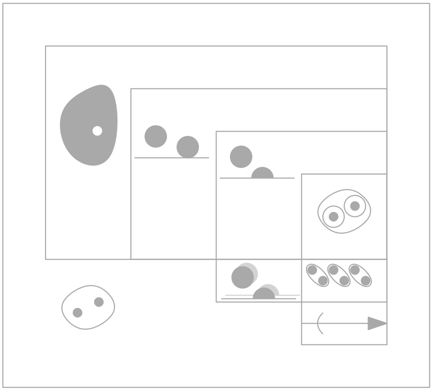


图 7.6: T1,T2,T3,T4 的关系

(4) *T4 空间的闭子空间还是 T4 空间.*

证明 根据 (6.21)(1)(2) 是显然的, (3) 需要用 (7.4) 以及 (6.21) 对闭包的刻画. (4) 类似 (3), 只需要 (6.21) 对闭子空间的刻画. □

命题 7.9 *关于乘积空间,*

(1) *T1 空间的乘积空间还是 T1 空间.*

(2) *Hausdorff 空间的乘积空间还是 Hausdorff 的.*

(3) *T3 空间的乘积空间还是 T3 空间.*

证明 (1)(2) 需要注意到两个点不同则至少有一个分量不同, 然后利用 (6.63). (3) 需要利用 (7.4) 对 T3 的刻画, 根据 (6.63), 对于一族 T3 空间 $\{X_i\}$, 任意取 $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$, 取一个邻域基中的元素为

$$U = \prod_{i\in I} U_i \qquad \text{只有有限的 } U_i \neq X_i$$

对这些有限的 U_i, 找 V_i 使得 $x \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$, 并约定 $V_i = U_i$ 当 $U_i = X_i$, 这样

$$V = \prod_{i\in I} V_i \qquad \overline{V} = \prod_{i\in I} \overline{V_i} \subseteq \prod_{i\in I} U_i = U$$

命题得证. □

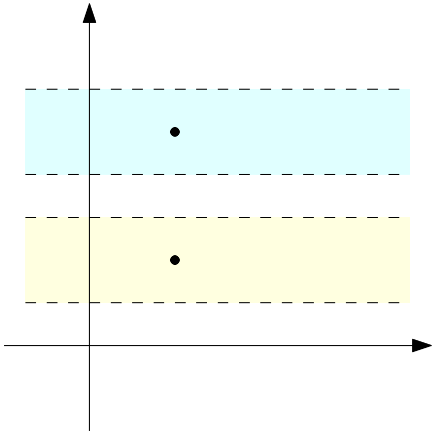


图 7.7: T2 的乘性

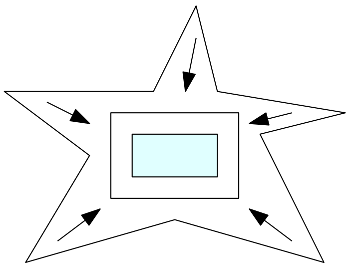


图 7.8: T3 的乘性

评注 7.10 对一族拓扑空间 $\{X_i\}_{i\in I}$, 其乘积空间 $X = \prod_{i\in I} X_i$. 有

- X 是 *T1* 空间 $\iff$ 每个 X_i 都是 *T1* 空间.
- X 是 *T2* 空间 $\iff$ 每个 X_i 都是 *T2* 空间.
- X 是 *T3* 空间 $\iff$ 每个 X_i 都是 *T3* 空间.
- X 是 *T4* 空间 $\iff$ 每个 X_i 都是 *T4* 空间.

这是因为 X_i 同胚于 X 的闭子空间.

≫≫≫≫ 习题 §7.2 ≪≪≪≪

习题 7.13 (Sorgenfrey 平面) 在 $\mathbb{R}$ 上, 赋予集合族

$$\mathfrak{B} = \{[a,b) \mid a < b\}$$

生成的拓扑, 记为 $\mathbb{R}_\ell$, 这被称为**上限拓扑**. 求证:

(1) 开区间是开集;

(2)$\mathbb{R}_\ell$ 是 *T1*,*T2*,*T3*,*T4* 空间. (提示: 对任意 $a \in A$, 选择 $[a, x_a) \cap B = \varnothing$, 然后全部并起来)

Sorgenfrey 平面指的是乘积空间 $\mathbb{R}_\ell^2$.

(3) 求证: $L = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ 的每个子集都是闭的.

(4) 求证: *Sorgenfrey* 平面不满足 *T4* 公理. (提示: 仿照习题7.8处理)

习题 7.14 已知集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, 定义

$$X \text{ 的开集族} = \{\varnothing, \{4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, X\}$$

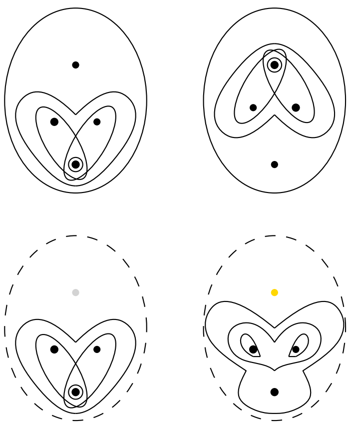


图 7.9: T4 不具有遗传性

求证:

(1) 上述定义为良定义.

(2)X 满足 T_4 公理; (提示: X 中没有不相交的闭集, 自然满足 T4 公理)

(3) 子空间 $\{2,3,4\}$ 不满足 T_4 公理.

习题 7.15 举例说明分离性和商空间的分离性没有必然关系.

7.3 可数公理

回忆 (6.54) 和 (6.49) 对邻域基和拓扑基的定义.

定义 7.11 (可数公理) 已知拓扑空间 X, **可数公理**如下:

C1 X 中任何一点都有至多可数邻域基.

C2 X 中有至多可数拓扑基.

这几条分别被叫做**第一可数公理**, **第二可数公理**.

满足 *C1* 公理的 X 被称为 **C1 空间**; 满足 *C2* 公理的 X 被称为 **C2 空间**或**完全 (totally) 可分空间**.

补充 7.12 (可分) 已知拓扑空间 X, 若 X 有可数的稠密子集, 则称 X **可分 (separable)**.

在一段历史时期内, 可分用来代表完全可分空间.

命题 7.13 可数公理有如下关系:

(1)C2$\Rightarrow$*C1*. *(2)* 完全可分 $\Rightarrow$ 可分.

证明 (1) 根据 (6.55) 为显然. (2) 只需在可数拓扑基的每一个成员任意取一个元素, 那么任何开集都与之有交. □

例 7.14 $\mathbb{R}$ 是第二可数的.

读者可能会想, 若即可分又 C1, 可否将这些可数稠密子集的每一个点上的可数邻域基并起来成为一个拓扑基? 习题6.7已经断言了这是不可能的, 他们的并甚至都不能覆盖整个空间. 习题7.20将会给出 C1 与可分不能得到 C2 的例子.

补充 7.15 *度量空间都是第一可数的, 且可分 $\iff$ C2.*

具体来说, 第一可数是因为 $\{B_{1/n}(x) : n = 1, 2, \ldots\}$ 就是一个 x 的一个可数邻域基.

假如距离空间 X 有可数稠密子集 Q, 那么

$$\mathfrak{F} = \{B_{1/n}(q) : q \in Q, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

就是一个拓扑基. 具体来说, 我们证明任意一点 x, $\mathfrak{F}_x = \{U \in \mathfrak{F}, x \in U\}$ 构成 x 的邻域基, 然后根据 (6.55) 即得.

只需要任意 x 的邻域 U, 不妨通过缩小假设 $U = B_{1/n}(x)$, 假设 $q \in B_{1/2n}(x) \cap Q$, 这样

$$x \in B_{1/2n}(q) \subseteq B_{1/n}(x) \qquad \because d(y,q) < 1/2n \overset{d(x,q)<1/2n}{\Rightarrow} d(x,y) < 1/n$$

故 $B_{1/2n}(q) \in \mathfrak{F}$ 满足条件.

下面说明一个可数公理和分离公理的一个重要联系.

定理 7.16 (Lindelöf 定理) *C2, T3 $\Rightarrow$ T4.*

证明 设满足条件假设的 X, 可数拓扑基 $\mathfrak{F}$. 对任何两个闭集 A, B, 首先, 根据 T3(7.6), 有

$$\forall a \in A, \exists\ a \text{ 的邻域} U_a, \mathrm{s.t.}\ \overline{U_a} \cap B = \varnothing$$

不妨通过缩小 U_a, 使得 $U_a \in \mathfrak{F}$, 从而 $\{U_a\}$ 至多可数, 不妨重整下标为 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. 同理, 有

$$\forall b \in B, \exists\ b \text{ 的邻域} V_b, \mathrm{s.t.}\ \overline{V_b} \cap A = \varnothing$$

不妨通过缩小 V_b, 使得 $V_b \in \mathfrak{F}$, 从而 $\{V_b\}$ 至多可数, 不妨重整下标为 $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$. 作

$$U_n' = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \qquad V_n' = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

此时新的集族 $\{U_i'\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{V_j'\}_{j=1}^{\infty}$ 是开集族, 则开集

$$U' = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i' \qquad V' = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j'$$

满足

$$A \subseteq U' \qquad B \subseteq V' \qquad U' \cap V' = \varnothing$$

因为否则 $x \in U_i' \cap V_j', i \leq j$, 则

$$x \in U_i' \Rightarrow x \in U_i \quad x \in V_j' \Rightarrow x \notin \overline{U_i}$$

矛盾. □

参见下图.

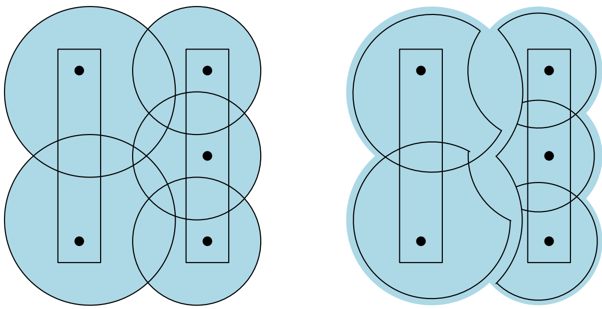


图 7.10: Lindelöf 定理

≫≫≫≫ 习题 §7.3 ≪≪≪≪

习题 7.16 求证: *C1 空间的任何一点 x, 都有邻域基 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $U_{i+1} \subseteq U_i$.* (提示: 设原本的邻域基为 $\{V_i\}$, 则 $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ 满足.)

习题 7.17 $C2$ 空间有一族不交的开集 $\mathfrak{U}$, 求证: $\mathfrak{U}$ 是至多可数的.

习题 7.18 若有 $C2$ 空间 X, 求证: 任何 X 之中的开覆盖都有可数子覆盖. 即, 若有开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$, 必有 I 的可数子集 J 使得

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{j\in J} U_j$$

(提示: 与习题3.12完全类似. 对于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$, 可以定义对于每一个 i 和 $x \in U_i$, 存在 $U_{ix} \in \mathfrak{B}$ 使得 $x \in U_{ix} \subseteq U_i$. 则

$$\bigcup_{i\in I} \bigcup_{x\in U_i} U_{ix} = \bigcup_{i} U_i$$

左边剔去重复的 U_{ix}, 即上述过程定义了

$$\varphi : \{(x,i) : x \in U_i\} = \bigsqcup_{i\in I} U_i \longrightarrow \mathfrak{B} \qquad (x,i) \longmapsto U_{ix}$$

则 $\operatorname{Im}\varphi$ 是至多可数集, 设之为 $\{B_n\}$, 则对每一个 n, 设 $(x_n, i_n) \mapsto n$, 则

$$\bigcup_{n} U_{i_n} \supseteq \bigcup_{n} U_{i_n x_n} = \bigcup_{n} B_n = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{x\in U_i} B_n = \bigcup_{i} U_i$$

反之是容易的. 换句话说, 我们是证明任何一个开覆盖都可以加细成为一个可数覆盖, 通过选取将这个可数覆盖的每一个开集原来所在的开集来选取子覆盖.)

习题 7.19 求证: $C2$ 空间 X 的任意拓扑基都可以缩小为一个可数拓扑基. (提示: 假设可数拓扑基为 $\mathfrak{B}$, 则任意一个拓扑基 $\mathfrak{F}$. 则任何 $\mathfrak{B}$ 的成员都是 $\mathfrak{F}$ 可数个成员的并.)

习题 7.20 考虑在 $\mathbb{R}$ 上赋予这样一个拓扑,

$$\{ \quad U \cup V : U \text{ 是子空间 } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ 的开集}, V \subseteq \mathbb{Q} \quad \}$$

即赋予无理数子空间拓扑, 有理数以离散拓扑的无交并空间.

(1) 求证: 这个拓扑是 $C1$ 且可分的.

(2) 求证: 这个拓扑不是 $C2$ 的.

习题 7.21 求证: 赋予离散拓扑的不可数集是 *C1* 空间, 不可分. (提示: 任何点 x, $\{\{x\}\}$ 就是一个邻域基. 假如可分, 取补集.)

习题 7.22 求证: 赋予余有限拓扑 *(6.8)* 的不可数集不是 *C1* 空间, 但是可分. (提示: 否则将由可数个有限集满足任何有限子集都包含于其中之一. 任何可数集都必与一个余有限集合相交.)

习题 7.23 求证: 赋予余可数拓扑 *(6.9)* 的不可数集不是 *C1* 空间, 也不可分.

习题 7.24 求证: 下限拓扑 (参见习题7.13)$\mathbb{R}_\ell$ 是可分的 *C1* 空间但不是 *C2* 空间. (提示: 不妨假设拓扑基是从 $[a,b)$ 之中选取的, 可以断言 a 取遍所有实数, 因为 $[x,x+1)$ 中含 x 的开邻域必须为 $[x,\ldots)$.)

习题 7.25 在 $X=\mathbb{R}$ 上定义

$$\text{开集族}=\{(-\infty,a)|-\infty\le a\le+\infty\}$$

求证: X 是 *C2* 空间. 若赋予 $\mathbb{R}$ 以离散拓扑, 求证: $\mathbb{R}\times X$ 是 *C1* 空间, 但不可分.

习题 7.26 求证: 赋予一致度量的 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是 *C1* 空间而但不可分. (提示: 考虑 $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ 每个点以 $1/2$ 为半径的邻域)

习题 7.27 函数空间 $\mathscr{C}([a,b])$ 是可分的. (提示: 即任何 $\mathbb{R}$ 上的连续函数都可以被可数个给定的函数一致逼近. 例如可以取有理系数多项式.)

习题 7.28 根据 *C1*, *C2*, 可分和度量拓扑的关系, 可画出关系图如下
在每个部分填入上面习题中的例子. (提示: 如下图.)

7.4 可数公理的性质

命题 7.17 关于关于子空间,

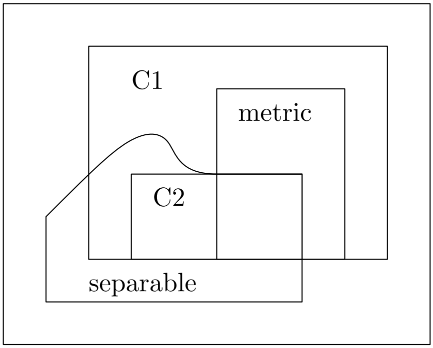


图 7.11: C1, C2, 可分和度量拓扑的关系

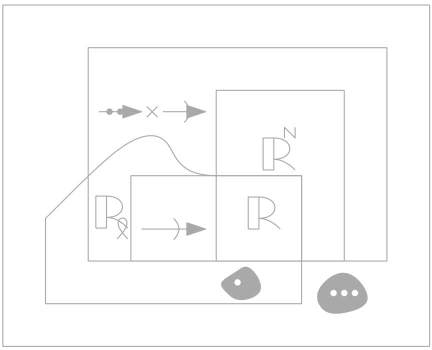


图 7.12: C1, C2, 可分和度量拓扑的关系

(1) *C1* 空间的子空间还是 *C1* 空间.

(2) *C2* 空间的子空间还是 *C2* 空间.

(3) 可分空间的开子空间还是可分的.

证明 根据 (6.21), 容易. □

命题 7.18 关于关于乘积空间,

(1) *C1* 空间的至多可数乘积还是 *C1* 空间.

(2) *C2 空间的至多可数乘积还是 C2 空间.*

(3) *可分空间的有限乘积还是可分的.*

证明 (1) 对于一列 C1 空间 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, 每个空间每点 $x_i \in X_i$ 有邻域集 $\mathfrak{U}_{ix_i}$, 则对于 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$,

$$\left\{ \prod_{i=1}^{\infty} U_i : \quad \text{有限的 } U_i \in \mathfrak{U}_{ix_i}, \text{其余 } U_i = X_i \right\}$$

交给读者去验证这是可数集. (2) 类似. (3) 对于一列可分空间 $\{X_i\}_{i=1}^{n}$, 设每个空间有可数稠密子集 $Q_i \subseteq X_i$, 那么 $\prod_{i=1}^{n} Q_i$ 是可数的稠密子集. 因为 (6.63). □

命题 7.19 *任何非平凡拓扑空间的不可数积一定不是 C1 空间.*

证明 设 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 满足命题假设. 由 X_i 非平凡性, 可选取

$$x_i \in X_i, \text{s.t.} \quad x_i \text{ 的邻域数目至少有 } 2 \text{ 个}$$

取 $x = (x_i)_{i\in I}$, 若为 C1 空间, 假设有邻域基 $\mathfrak{U}$. 则可以将 $\mathfrak{U}$ 中每一个成员都缩小一些, 具体来说, 任何 $U_n \in \mathfrak{U}$, 某个

$$U_n' = \prod_{i\in I} U_n^{(i)} \subseteq U_n \qquad \text{只有有限的 } i, \text{满足 } U_n^{(i)} \neq X_i$$

设这些有限的 i 组成的集合为 I_n, 则可以断言

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

否则, 取 $m \in I \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, 邻域

$$V = \prod_{i\in I} \begin{cases} X_i, & i \neq m, \\ V_i, & i = m. \end{cases} \qquad V_m \subset X_m \text{ 是 } X_m \text{ 的一个非 } X_m \text{ 的邻域}$$

不包含 $\mathfrak{U}$ 中任何成员, 矛盾. 从而

$$|I| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right| \leq \mathbb{N}$$

与 I 不可数矛盾. □

⋙⋙ 习题 §7.4 ⋘⋘

习题 7.29 *利用习题7.8, 指出可分空间的子空间未必可分.*

习题 7.30 *根据本节 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是 $C2$ 空间, 但习题7.26中却不是 $C2$ 空间, 这是否矛盾?*

第八章　拓扑性质

本章介绍两个重要的拓扑性质.

8.1　紧致性

定义 8.1 (覆盖, 子覆盖) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$. $\mathfrak{C} \subseteq 2^X$, 若 $A \subseteq \bigcup_{U\in\mathfrak{C}} U$, 称 $\mathfrak{C}$ 为 A 在 X 中的**覆盖 (covering)**.

特别地, 若 $\mathfrak{C}$ 的成员都是开集, 则称 $\mathfrak{C}$ 为**开覆盖**. 若 $|\mathfrak{C}| < \infty$, 则称 $\mathfrak{C}$ 为**有限覆盖**. 以此类推, **闭覆盖**, **可数覆盖**等概念被自然定义.

若 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}$ 仍然是 A 的覆盖, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**子覆盖 (subcovering)**.

定义 8.2 (紧致) 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$, 若 A 在 X 中的每个开覆盖都有有限子覆盖, 则称 A 是**紧致的 (compact)**. 准确地说, 对于一族开集 $\mathfrak{C}$,

$$A \subseteq \bigcup_{U\in\mathfrak{C}} U \quad \Rightarrow \quad \exists U_1,\dots,U_m \in \mathfrak{C}, \text{s.t.} \quad A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m$$

例 8.3 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧致的 $\iff A$ 是有界闭集[1].

例 8.4 在任何拓扑空间中, 单点集合是紧致的. 有限个紧致的子空间的并是紧致的.

[1] 在数学分析在我们证明了 $\mathbb{R}$ 中 $[a,b]$ 是紧致的, 例如利用下面的 (8.6), 再如选择 $\sup\{x \in (a,b) : (a,x)$可被有限覆盖$\}$. 再根据 (8.18) 得到 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块是紧致的, 再利用 (8.10) 得到任何有界闭集都紧致. 反之若紧致, 根据 (8.11) 知是闭集, 若无界则半径逐渐增大的实心开球就没有有限子覆盖.

命题 8.5 已知拓扑空间 X, $A \subseteq X$. 则 A 是紧致的充分必要条件是 A 作为 X 的子空间是紧致的.

证明 必要性: 设 $\{U_i \cap A\}_{i\in I}$ 是 A 在 A 中的开覆盖, 则 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 A 在 X 中的开覆盖, 则 $\{U_k\}_{k=1}^n$ 是 A 在 X 中的有限子覆盖, 则 $\{U_k \cap A\}_{k=1}^n$ 是 A 在 A 中的有限子覆盖.

充分性: 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 A 在 X 中的开覆盖, 则 $\{U_i \cap A\}_{i\in I}$ 是 A 在 A 中的开覆盖, 则 $\{U_k \cap A\}_{k=1}^n$ 是 A 在 A 中的有限子覆盖, 则 $\{U_k\}_{k=1}^n$ 是 A 在 X 中的有限子覆盖. □

由此可知, 紧致的概念可以不论 "在某拓扑空间下", 直接称子集紧致即可.

命题 8.6 (推广的闭区间套定理) 对于拓扑空间 X, X 是紧致的充分必要条件是若闭集族 $\mathfrak{F}$ 满足有限交性质

$$\forall F_1, \ldots, F_n, \quad F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \varnothing$$

则无限交非空 $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F \neq \varnothing$.

证明 容易注意到, 可以通过取补集将闭集和开集联系起来. 若 X 是紧致的, 且闭集族 $\mathfrak{F}$ 满足有限交性质, 则

$$\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{F\in\mathfrak{F}} F^c = X$$

后者说明 $\{F^c : F \in \mathfrak{F}\}$ 是 X 的开覆盖, 于是有有限子覆盖 $\{F_i^c\}_{i=1}^n$, 这样,

$$\bigcup_{i=1}^n F_i^c = X \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^n F_i = \varnothing$$

违背于有限交性质. 反之, 任意 X 的开覆盖 $\mathfrak{C}$, 若无有限子覆盖, 即任何 $\mathfrak{C}$ 任何有限子集都无法覆盖 X, 即

$$\forall U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{C}, \quad \bigcup_{i=1}^n U_i \neq X \quad \text{i.e.} \quad \bigcap_{i=1}^n U_i^c \neq \varnothing$$

也就是说 $\{U^c : U \in \mathfrak{C}\}$ 是满足有限交的闭集族, 根据条件,

$$\bigcap_{U\in\mathfrak{C}} U^c \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{U\in\mathfrak{C}} U \neq X$$

产生矛盾. □

除此之外, 紧致集还表现出一些分离性.

命题 8.7 已知 *Hausdorff* 空间 X,

(1) $A \subseteq X$ 紧致, $x \notin A$, 则

$$\exists\ x \text{ 的邻域} U,\ A \text{ 的邻域} V, \text{s. t.} \quad U \cap V = \varnothing$$

(2) $A, B \subseteq X$ 紧致, $A \cap B = \varnothing$, 则

$$\exists\ A \text{ 的邻域} U,\ B \text{ 的邻域} V, \text{s. t.} \quad U \cap V = \varnothing$$

证明 (1) 因为 Hausdorff, 故

$$\forall a \in A, \exists\ x \text{ 的邻域} U_a,\ a \text{ 的邻域} V_a, \text{s. t.} \quad V_a \cap U_a = \varnothing$$

不妨缩小 U_a, V_a 为开邻域. 这样 $\{V_a : a \in A\}$ 是 A 的开覆盖, 从而有子覆盖 $\{V_{a_i}\}_{i=1}^n$, 这样

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

分别是包含 x 和 A 的开集, 从而第一条得证.

(2) 类似的方法, 根据 (1),

$$\forall a \in A, \exists\ B \text{ 的邻域} U_a,\ a \text{ 的邻域} V_a, \text{s. t.} \quad V_a \cap U_a = \varnothing$$

不妨缩小 U_a, V_a 为开邻域. 这样 $\{V_a : a \in A\}$ 是 A 的开覆盖, 从而有子覆盖 $\{V_{a_i}\}_{i=1}^n$, 这样

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

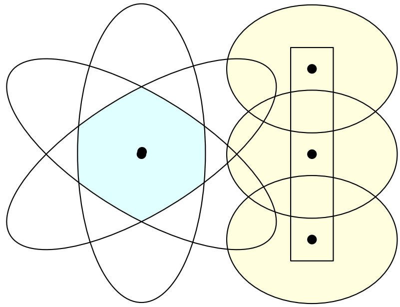


图 8.1: Hausdorff 和紧致子集

分别是包含 B 和 A 的开集, 从而第二条得证. □

最后, 应当注意到, 在实数的几条等价的六条 "公理" 当中, 紧致性是当中唯一一个只需要拓扑, 而不需要度量或者偏序的一个 (传统的闭区间套还要限制区间长度).

补充 8.8 (局部紧致性) 我们会发现紧致性太强了, 以至于 $\mathbb{R}$ 都不是紧致的. 为此, 我们定义局部紧致性, 称拓扑空间 X 是**局部 (locally) 紧致**的, 如果任何一点都有紧致的邻域.

补充 8.9 (列紧性) 我们可以将紧致性视为原本实数上列紧的推广. 在度量空间 X 中, $A \subseteq X$, 若 A 中任何序列都有子列收敛到 A 中的某个元素, 则称 A 是**列紧**的, 有时为了强调会说成**自列紧**. 我们证明对于度量空间列紧 $\iff$ 紧致.

先证明紧致 $\Rightarrow$ 列紧, 对于任何序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, 若没有子列收敛, 这意味着任何一点 $x \in X$, 都有 ϵ_x, 使得 $\{x_i\}$ 只有有限项落入 $B_{\epsilon_x}(x)$. 那么 $\{B_{\epsilon_x}(x)\}$ 形成开覆盖, 从而有有限的子覆盖, 从而 x_i 只有有限项矛盾.

再证明列紧 $\Rightarrow$ 紧致, 对于任何开覆盖 $\mathfrak{U}$, 可以定义

$$\delta : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sup_{U \in \mathfrak{U}} d(x, U^c)$$

因为 d 是连续的, 不难验证 δ 也是连续的, 我们根据列紧性容易类似数学分析的手法得到 δ 必取得最小值 ℓ. 因为 U^c 是闭集, 从而容易验证最小

值 $\ell > 0$. 这也就是说, 任何 $0 < \epsilon < \ell$, 任何 $x \in X$, 必然存在 $U \in \mathfrak{U}$, 使得 $B_\epsilon(x) \subseteq U$. 我们断言, 存在有限个 x 使得 $B_\epsilon(x)$ 覆盖了 X, 否则, 可以挑选一列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, 使得两两之间距离 $> \epsilon$, 这与列紧矛盾, 命题得证.

再回忆完备性的定义 *(6.72)*. 若 A, B 是 X 的子集首先, 对于 $\delta > 0$, 我们称 B 是 A 的 **δ-网 (net)**, 如果

$$\bigcup_{b \in B} B_\delta(b) = A \quad \text{i.e.} \quad \forall a \in A, \exists b \in B, \text{s.t.}\, d(a,b) < \delta$$

Hausdorff 的著名定理断言, X 列紧 $\iff$ X 完备且 $\forall \delta > 0$, A 都存在有限的 δ-网.

首先, X 列紧得到 X 完备完全类似于数学分析, 利用*6.73*容易证明. 而若某个 δ 没有有限的 δ-网, 那么必然可以找可以挑选一列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq A$, 使得两两之间距离 $> \delta$, 这与列紧矛盾.

反之, 对于序列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq A$, 我们采取著名的对角线法则

- 记 $\{x_i\}_{i=1}^\infty = \{x_{1i}\}_{i=1}^\infty$.
- 对有限的 $\frac{1}{2}$-网 N_2, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 存在无限项距离某个 N_2 的成员 y_2 距离 $< \frac{1}{2}$, 将这些项选为子列 $\{x_{2i}\}_{i=1}^\infty \subseteq \{x_i\}_{i=1}^\infty$.
- 对有限的 $\frac{1}{3}$-网 N_3, $\{x_{2i}\}_{i=1}^\infty$ 存在无限项距离某个 N_3 的成员 y_3 距离 $< \frac{1}{3}$, 将这些项选为子列 $\{x_{3i}\}_{i=1}^\infty \subseteq \{x_i\}_{i=1}^\infty$.
- 以此类推可以得到

$$\{x_{1i}\} \supseteq \{x_{2i}\} \supseteq \{x_{3i}\} \supseteq \dots$$

- 我们想要每一个子列再选择一个成为新的子列, 为了确保顺序, 我们取对角线 $\{x_{ii}\}$. 这样

$$\{x_{1i}\} \supseteq \{x_{2i}\} \supseteq \{x_{3i}\} \supseteq \dots \supseteq \{x_{ii}\}$$

此时

$$\forall k > 0, \forall m, n > k, \quad d(x_{mk}, x_{nk}) \leq d(x_{mk}, y_k) + d(x_{nk}, y_k) < \frac{2}{k}$$

特别地，根据 x_{ii} 的选取，$d(x_{mm}, x_{nn}) < \frac{2}{k}$，从而 $\{x_{ii}\}$ 是 *Cauchy* 列，从而收敛。这样我们就找到了 $\{x_i\}$ 的收敛子列。

就实数而言，δ-网就是 δ 网格 $\delta\mathbb{Z}$.

⋙⋙ 习题 §8.1 ⋘⋘

习题 8.1 对于拓扑空间 X，给定拓扑基 $\mathfrak{B}$，求证：X 是紧致的，当且仅当由 $\mathfrak{B}$ 组成的开覆盖都有有限子覆盖。

习题 8.2 对于拓扑空间 X，证明 X 是紧致的当且仅当每一点 x 都选定 x 的邻域 U_x 时，$\{U_x\}$ 有有限子覆盖。

问题 8.3 回忆习题*6.27*，证明 $\mathbb{Z}$ 的拓扑不是紧致的。(提示：考虑 $\{a\mathbb{Z}+b : a\text{是素数}, b=0,1,\ldots,a-1\}$.)

问题 8.4 对于度量空间 X，A 是列紧的 $\iff \overline{A}$ 是自列紧的。(提示：充分性显然。必要性，无非是要处理落在 $\overline{A}$ 上的子列的情况，事实上，若有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{A}$，则存在 $y_n \in A$ 使得 $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$，这样就转化到 $\{y_n\} \subseteq A$ 上的。)

习题 8.5 对于 *T3* 空间 X，$A \subseteq X$ 是紧致的，求证：$\overline{A}$ 也是紧致的。(提示：根据 T3，每个点的邻域都缩小一些成为一个闭邻域，而任何 $\overline{A}$ 的开覆盖都是 A 的开覆盖，通过一开始缩小开集，利用闭包和有限并可以交换可以得到 $\overline{A}$ 的有限子覆盖。)

习题☠ 8.6 (Ascoli 引理) 回忆连续函数环 *(6.78)*。若度量空间 X 是完备的，对于 $F \subseteq \mathscr{C}(X)$，求证：$F$ 是列紧的，当且仅当一致有界且等度连续如下

$$\begin{cases} {}^{\exists M>0, \forall f\in F} \quad |f| < M & \text{一致有界} \\ {}^{\forall \epsilon>0, \exists\delta>0, \forall f\in F, x,y\in X} \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon & \text{等度连续} \end{cases}$$

(提示：我们已经知道 $\mathscr{C}(X)$ 是完备的，根据 (8.9)，F 列紧等价于 $\forall\delta > 0$，存在有限的 δ-网。必要性，通过找 $\delta = 1$-网，足够说明一致有界性。对

$\epsilon > 0$, 可以找有限 $\epsilon/3$-网 N, 而

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_i(x)|+|f(y)-f_i(x)|+|f_i(x)-f_i(y)| < \frac{2}{3}\epsilon+|f_i(x)-f_i(y)|$$

其中某个 $f_i \in N$, 因为 f_i 只有有限的选择, 可以充分地小, 得证. 反之, 根据等度连续性, 对于 $\epsilon > 0$, 找 δ 使得

$$\forall f \in F, x, y \in X, \quad (d(x,y) < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/3)$$

可以找 X 的有限 δ-网 N. 再定义求值映射

$$T : F \longrightarrow \mathbb{R}^{|N|} \qquad f \longmapsto (f(n))_{n \in N}$$

可以验证 $\operatorname{Im} T$ 是有界集, 因为 $\mathbb{R}^{|N|}$ 的有界集是列紧的, 所以有 $\epsilon/3$-网, 设这些有限网为 $\{Tf_1, \ldots, Tf_m\}$, 这样任何 $f \in F$

$$|f(x) - f_j(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f_j(x) - f_j(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| < \epsilon$$

这样便得证.)

8.2 紧致性的性质

显然, 紧致性不具有遗传性, 例如 $\mathbb{R}$ 上闭区间内的一个开区间.

命题 8.10 *已知紧致空间 X, $A \subseteq X$, 若 A 是闭集, 则 A 是紧致的.*

证明 考虑 A 在 X 中的覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 则 $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{A^c\}$ 仍然是开覆盖, 随后用 X 的紧致性得证. □

命题 8.11 *已知 Hausdorff 空间 X, $A \subseteq X$, 若 A 是紧致的, 则 A 是闭集.*

证明 根据 (8.7) 分离性, A^c 是开集. □

推论 8.12 *已知紧致的 Hausdorff 空间 X, $A \subseteq X$, 则 A 是紧致的 $\Longleftrightarrow$ A 是闭的.*

推论 8.13 每一个紧致的 *Hausdorff* 空间都是 T_4 空间.

命题 8.14 紧致空间在连续映射下的像也紧致.

推论 8.15 紧致空间的商空间也紧致.

推论 8.16 (最值定理) 已知紧致空间 X, 连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$. 则 $f(X)$ 有界, 并 f 能达到最大最小值.

证明 因为 $\mathbb{R}$ 的紧致集是有界闭集. □

最后是乘积空间. 无限乘积需要用到选择公理, 我们和有限情形分开处理.

引理 8.17 (管引理) 已知拓扑空间 X, Y, $A \subseteq X$ 紧致, $y_0 \in Y$, 则

$$\forall\ A \times \{y_0\} \text{ 的邻域 } W\ , \exists\ A \text{ 的邻域 } U,\ y_0 \text{ 邻域 } V, \text{s.t.} \quad U \times V \subseteq W$$

证明 对任何 $x \in A$, $(x, y_0) \in A \times \{y_0\}$, 有邻域

$$(x, y_0) \in U_x \times V_x \subseteq W \qquad U_x \text{ 是 } x \text{ 邻域}, V_x \text{ 是 } y_0 \text{ 的邻域}$$

则 $\{U_x\}_{x\in A}$ 构成 A 的开覆盖, 设有限子覆盖 $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$, 记

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \qquad V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$$

分别是含 A 和 y_0 的开集, 且 $U \times V \subseteq W$. □

称为管引理是因为有如下的几何直观, 参见下图.

命题 8.18 紧致空间的有限积空间是紧致的.

证明 只需要证明两个的情况即可. 设 $X \times Y$ 满足命题假设. 设 $X \times Y$ 的开覆盖 $\mathfrak{U}$, 因为

$$\forall y \in Y, X \times \{y\} \cong X$$

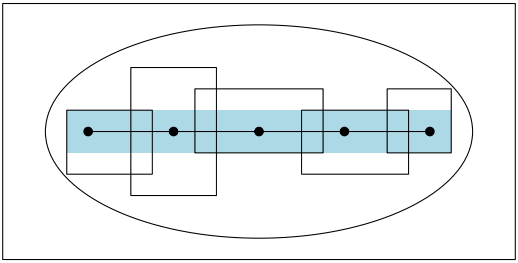


图 8.2: 管引理

U_i 也覆盖 $X \times \{y\}$, 故有有限子覆盖 $\mathfrak{U}_y$, 设

$$W_y = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_y} U \supseteq X \times \{y\}$$

按管引理,

$$\exists\, y \text{ 的邻域} V_y, \text{s. t.} \quad X \times V_y \subseteq W_y$$

而 $\{V_y\}_{y \in Y}$ 又是 Y 的开覆盖, 设有限子覆盖 $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$, 从而

$$\mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{U}_{y_i}$$

使得

$$\bigcup_{U \in \mathfrak{U}'} U = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_{y_i}} U = \bigcup_{i=1}^n W_i \supseteq \bigcup_{i=1}^n X \times V_{y_i} = X \times Y$$

这就找到了 $X \times Y$ 的有限子覆盖. □

下面我们来论证任意乘积空间的紧致性.

引理 8.19 对于不紧致空间的空间 X, 则必有极大无有限子覆盖开覆盖 $\mathfrak{U}$.

即 $\mathfrak{U}$ 没有有限子覆盖, 且任何 $U \notin \mathfrak{U}$, $\{U\} \cup \mathfrak{U}$ 都有有限子覆盖.

证明 利用 Zorn 引理. 考虑

$$\Sigma = \{\mathfrak{U} : \mathfrak{U} \text{ 是 } X \text{ 的开覆盖, 而无有限子覆盖}\}$$

容易验证 $\Sigma \neq \varnothing$, 且任何一条链 $\{\mathfrak{U}_i\}_{i\in I}$, 都有上界

$$\mathfrak{U} := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{U}_i$$

因为, 若 $\mathfrak{U}$ 具有有限子覆盖 $U_1, \ldots, U_n$, 这些开集必然散落在有限个 $\mathfrak{U}_i$ 之中, 挑选这些有限个 $\mathfrak{U}_i$ 之中最大者 $\mathfrak{U}_0$, 则 $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{U}_0$, 此时 $U_1, \ldots, U_n$ 就是一个 $\mathfrak{U}_0$ 的有限子覆盖. 从而根据 Zorn 引理, Σ 存在极大元, 设为 $\mathfrak{U}$, 也就说任何 $U \notin \mathfrak{U}$, $\{U\} \cup \mathfrak{U}$ 都有有限子覆盖. □

引理 8.20 (Alexander 子基定理) *对于拓扑空间 X, 给定拓扑子基 $\mathfrak{B}$, 则 X 是紧致的, 当且仅当由 $\mathfrak{B}$ 组成的开覆盖都有有限子覆盖.*

证明 必要性是显然的.

充分性则需要用 (8.19), 若 X 不紧致, 则存在极大无有限子覆盖开覆盖 $\mathfrak{U}$. 我们断言, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}$ 不能覆盖 X. 因为若覆盖了 X, 则根据假设, 有有限子覆盖, 这也是 $\mathfrak{U}$ 的子覆盖, 矛盾.

从而有 $x \in X$ 不被 $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}$ 覆盖, 因为 $\mathfrak{U}$ 是覆盖, $\mathfrak{B}$ 是拓扑子基, 可以设

$$x \in B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq U \qquad B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}, U \in \mathfrak{U}$$

而对于每个 B_i, $B_i \cup \mathfrak{U}$ 都有有限的子覆盖, 且这些子覆盖必然含 B_i, 假设子覆盖为 $\{B_i\} \sqcup \mathfrak{U}_j$. 我们断言, $\mathfrak{U}$ 的有限子集 $\{U\} \cup \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{U}_j$ 是子覆盖. 因为

$$x \notin U \quad \Rightarrow \quad \exists x \text{ 不在某个 } B_i \text{ 中} \quad \Rightarrow \quad x \text{ 被 } \mathfrak{U}_i \text{ 覆盖}$$

$x \in U$, 则已经被 U 覆盖. 我们就这样找到了 $\mathfrak{U}$ 的有限子覆盖, 从而和 $\mathfrak{U}$ 的选取矛盾. □

定理 8.21 (Tychonoff 定理) *对于一族紧致空间 $\{X_i\}_{i\in I}$, 乘积拓扑空间*

$$X := \prod_{i\in I} X_i$$

还是紧致的.

证明 根据 Alexander 子基定理 (8.20), 只需要验证子基的情形. 也就是说只要验证由

$$\prod_{i\in I}\begin{cases} X_i & i\neq j \\ U & i=j \end{cases} \qquad j\in I, U \text{ 是 } X_j \text{ 中开集}$$

组成的开覆盖都有有限子覆盖. 对于这样的开覆盖 $\mathfrak{U}$, 将当中开集按上面的 j 分类, 假设

$$\mathfrak{U}=\bigsqcup_{j\in I}\mathfrak{U}_j \qquad \mathfrak{U}'_j \text{ 是 } \mathfrak{U}_j \text{ 各成员在 } j \text{ 上的分量}$$

注意到, 根据元素的形式

$$\mathfrak{U}_j \text{ 覆盖了整个 } X \iff \mathfrak{U}'_j \text{ 覆盖了整个 } X_j$$

我们断言, 某个 $j\in I$ 使得 $\mathfrak{U}_j$ 覆盖了整个 X, 这样, 根据 X_j 的紧致性, 本定理即刻得证. 否则, 对每个 $j\in I$, 存在 $x_j\in X_j$ 不被 $\mathfrak{U}_j$ 覆盖. 从而 $(x_j)_{j\in I}$ 不被 $\mathfrak{U}$ 覆盖, 产生矛盾. □

⋙⋙ 习题 §8.2 ⋘⋘

习题 8.7 证明: 对于一列度量空间 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, 求证 $X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ 在乘积拓扑下是列紧的. 此时乘积拓扑下的收敛指的是, 对每个 i, 按分量逐点收敛. (提示: 抽取对角线.)

习题 8.8 列紧空间在连续映射下的像也列紧的.

习题 8.9 回忆 *(8.8)*, 求证: *Haussdorff* 的局部紧致空间 X 有紧致的邻域基. (提示: 因为有紧致的邻域, 这个邻域成为 Hausdorff 紧致空间.)

习题 8.10 已知拓扑空间 X,Y, X 紧致, Y *Hausdorff*, 连续的双射 $f: X\leftrightarrow Y$, 求证: f 是同胚. 并以此说明不存在 $[0,1]$ 到 $[0,1]\times[0,1]$ 的连续双射. (提示: 可以证明 f 是闭映射.)

问题 8.11 (Baire 纲定理) 令 X 是 *Hausdorff* 紧致空间, 若 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $(\overline{F_n})^\circ = \varnothing$, 则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^\circ = \varnothing$$

(提示: 类似习题6.37, 不过最后用闭区间套论证.)

习题 8.12 已知紧致 *Hausdorff* 空间 X, X 的拓扑不是离散拓扑. 求证: $|X| \geq \mathfrak{c}$. (提示: 这需要类比 Cantor 集的构造. 首先, 因为不是离散拓扑, 这让 X 是无穷集, 习题7.6. 任意选取两个不同的点 x_0, x_1, 则因为 T4, 可以选择 $x_0 \in U_0, x_1 \in U_1$, 其中 U_0, U_1 开, 使得 $\overline{U_0} \cap \overline{U_1} = \varnothing$, 这样, 继续在 U_i 中动土, 选取 U_i 中不同的点 x_{i0}, x_{i1}, 再选取 $x_{i0} \in U_{i0} \subseteq U_i, x_{i1} \in U_{i1} \subseteq U_i$, 其中 U_{i0}, U_{i1} 开, 使得 $\overline{U_{i0}} \cap \overline{U_{i1}} = \varnothing$, 这样一直下去, 我们会得到

$$\{(x_I, U_I) : I \text{ 是有限 } \{0,1\} \text{ 序列}\} \qquad x_I \in U_I$$

$U_I \cap U_J = \varnothing$ 除非 I 是 J 的截断, 或 J 是 I 的截断. 且对于任何无限 $\{0,1\}$ 序列 I, 假设其前 n 项截断为 I_n, 则 $\{\overline{U_{I_n}}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足有限交性质, 所以根据紧致性 (8.6) 确保 $\bigcap \overline{U_{I_n}}$ 非空. 且两个无限 $\{0,1\}$ 序列 I, J, 若 $I \neq J$, $\bigcap \overline{U_{I_n}} \cap \bigcap \overline{U_{J_n}} = \varnothing$.)

8.3 连通性

下面我们介绍连通性.

定义 8.22 (连通性) 已知拓扑空间 X, 非空子集 A, B, 若

$$X = A \sqcup B \text{(无交并)} \quad \Rightarrow \quad A \cap \overline{B} \neq \varnothing \text{ 或 } \overline{A} \cap B \neq \varnothing$$

则称 X 是**连通的 (connected)**.

以上定义无非是说任意将 X 拆成两部分后, 他们的边界 (参见习题6.5) 还粘着着.

命题 8.23 *已知拓扑空间 X, 下列命题等价:*

(1) *X 连通.*

(2) *X 不能分解成两个非空不交开集之并.*

(3) *X 不能分解成两个非空不交闭集之并.*

(4) *X 的既开又闭的子集仅有 $\varnothing$ 和 X 本身.*

证明　容易知道 (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4).

(1)$\Rightarrow$(3). 若 X 可以分解为两个非空不交闭集的并 $X = A \sqcup B$, 则

$$A \cap \overline{B} = A \cap B = \varnothing \qquad \overline{A} \cap B = A \cap B = \varnothing$$

从而不是连通的.

(2), (3), (4)$\Rightarrow$(1). 反之, 若不连通, 则存在分解 $X = A \sqcup B$, 其中 A, B 非空, 使得

$$A \cap \overline{B} = \varnothing \qquad \overline{A} \cap B = \varnothing$$

这迫使 $A = (\overline{B})^c = (B^c)^\circ = A^\circ$, 故 A 为开集, B 为闭集, 同样可得 B 为开集, A 为闭集. 这样 (2), (3), (4) 全部违背. □

直观地说, 在一个连通集内, 点一把火就能够让整个连通集都烧着, 因为一点着火则必然蔓延到附近, 故着火点是开集. 若某点任意邻域内都有着火点, 那么必然该点也被波及, 故着火点是闭集. [2]

直接地看, 一旦有火, 这个着火点必然有一个邻域着火, 且这个邻域的闭包也在这个集合中, 然后闭包中的每一点继续蔓延, 以 “星星之火, 可以燎原” 之势填充完整个连通集.

例 8.24 *在实数 $\mathbb{R}$ 上, $A \subseteq \mathbb{R}$ 是连通的 $\iff$ A 是区间*[3].

[2]这只是一个思想实验, 请读者在现实中远离火灾隐患.

[3] 因为所谓区间指的就是满足性质 $a, b \in A \Rightarrow [a, b] \subseteq A$ 的集合. 若不是区间, 即有 “断裂点”$c \in A \setminus (a, b)$, 则 $[(-\infty, c) \cap A] \sqcup [(c, +\infty) \cap A]$ 给出分解不是连通集. 反之, 根据下面的命题 (8.27), 只要证明 $[a, b]$ 连通即可. 假如分成两个非空不相交闭集的并 $U \sqcup V$, 不妨假设 $b \in V$, 取 U 的上确界 u, 因为 U 是闭集故 $u \in U$, 从而 $u < b$, 但 U 是开集又逼迫 u 右边还有 U 中元素, 矛盾.

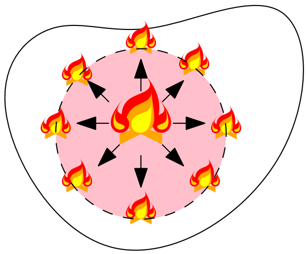


图 8.3: 着火啦

例 8.25 对任何拓扑空间 X, 任何单点集都是连通的.

命题 8.26 已知拓扑空间 X, 一族连通的子空间 $\{U_i\}_{i\in I}$, 若

$$\forall i,j\in I,\quad U_i\cap U_j\neq\varnothing$$

则 $\bigcup_{i\in I}U_i$ 连通.

证明 不失一般性地假设 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$. 设 $Y\subseteq X$ 即开又闭, 则 $Y\cap U_i$ 在 U_i 中既开又闭, 根据 U_i 的连通性

$$Y\cap U_i=\varnothing\qquad\text{或}\qquad Y\cap U_i=U_i\quad\text{i.e.}\quad U_i\subseteq Y$$

且两者不会同时成立. 依此将 $\{U_i\}_{i\in I}$ 分成两族 $\{U_i\}_{i\in I_1},\{U_j\}_{j\in I_2}$. 分别从两族中分别取一个元素 U_i,U_j, 则

$$\varnothing=U_j\cap(Y\cap U_i)=(U_j\cap Y)\cap U_i=U_j\cap U_i\neq\varnothing$$

矛盾. 从而 $\{U_n\}_{n\in I_1},\{U_m\}_{m\in I_2}$ 中必有一集合为空集, 于是 $Y=\varnothing$ 或X. □

这个命题最简单的特例是两个连通集合若有交点, 则其并连通, 这是容易想象的.

推论 8.27 已知拓扑空间 X, 一个连通子空间 A, 一族连通的子空间 $\{U_i\}_{i\in I}$, 若

$$\forall i\in I,U_i\cap A\neq\varnothing$$

则 $A\cup\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)$ 连通.

证明 根据 (8.26), 容易验证 $\{A\cup U_i\}$ 每一个成员都连通, 再根据 (8.26), $\bigcup_{i\in I}(A\cup U_i)$ 连通. □

命题 8.28 已知拓扑空间 X, 若 $A\subseteq Y\subseteq\overline{A}$, 则 A 连通 $\Rightarrow Y$ 连通. 特别地, A 连通则 $\overline{A}$ 连通.

证明 若 Y 有既开又闭的非空子集 Z, 则 $Z\cap A$ 在 A 中既开又闭, 根据 A 的连通性,

$$Z\cap A=\varnothing\ \text{或} A\subseteq Z$$

因为 Z 是包含在 $\overline{A}$ 之中的开集不可能出现 $Z\cap A=\varnothing$ 的情况, 故 $A\subseteq Z$. 根据 (6.21), 从而在 Y 中取闭包得

$$Y=\overline{A}\cap Y\subseteq Z\subseteq Y$$

故 $Z=Y$. □

定义 8.29 (连通分支) 已知拓扑空间 X, 连通集 $A\subseteq X$, 若对于任何连通集 B 都有

$$A\subseteq B\iff A=B$$

则称 A 是 X 的一个**连通分支 (connected component)**.

即 A 是 X 的极大连通子集. 且根据 (8.28), 连通分支总是闭集.

命题 8.30 已知拓扑空间 X, X 的每个连通子集都包含在唯一的一个连通分支中.

证明 设连通子集 A, 作 $\mathfrak{F}=\{F\subseteq X\mid F\text{连通}, F\cap A\neq\varnothing\}$, 取

$$Y=A\cup\bigcup_{F\in\mathfrak{F}}F$$

由上面的命题 (8.26) 知 Y 是连通的. 容易验证其是极大的. □

推论 8.31 一个拓扑空间 X 可以写成连通分支的并.

补充 8.32 (道路连通) 一个也很重要的概念是道路连通性. 对于拓扑空间 X, 一条**道路 (path)** 指的是 $[0,1] \to X$ 的连续映射. 称道路 $p:[0,1] \to X$ 连接了 $x, y \in X$, 是指 $p(0)=x, p(1)=y$. 若 X 中任意两点都有道路相连, 则称 X 是**道路连通**的.

道路连通必然可以推出连通, 因为, 固定一点 x, 所有点 y 都与 x 存在道路相连, 则道路的像满足 *(8.26)* 的条件.

容易得到, *(8.26)* 仍然适用, 因为任意两条道路如果首尾相接, 就可以合成一条新的道路, 具体来说, 若 p, q 是两条道路, 且 $p(1)=q(0)$, 则

$$qp:[0,1] \longrightarrow X \qquad t \longmapsto \begin{cases} p(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ q(2t-1) & 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

是一条道路 *(例如, 根据粘结引理, 习题6.17)*.

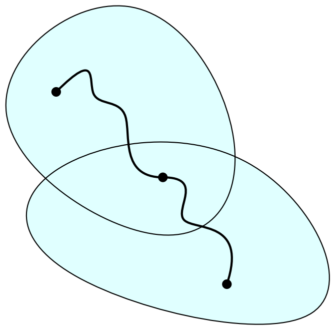


图 8.4: 道路连通

那么同样, 也存在道路连通分支. 这实际上可以直接利用等价关系

$$x \sim y \iff x, y \text{ 之间有道路相连}$$

定义. 另外, 因为道路连通 $\Rightarrow$ 连通, 故每个连通分支都是一些道路连通分支的无交并.

≫≫≫ 习题 §8.3 ≪≪≪

问题 8.13 (拓扑学家的正弦曲线) 下面的例子说明连通未必是道路连通的. 在 $X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上, 考虑子集

$$A=\left\{(x,y): y=\sin\frac{1}{x}, x>0\right\}$$

求证:

(1)A 是道路连通的.

(2) 求 $\overline{A}$.

(3) 求证: $\overline{A}$ 不是道路连通的.

习题☠ 8.14 已知拓扑空间 X, 一族连通的子空间 $\{U_i\}_{i\in I}$, 在 I 上定义关系

$$i\sim j :\Longleftrightarrow U_i\cap U_j\neq\varnothing$$

若 $\sim$ 的传递闭包是全关系, 求证: $\bigcup_{i\in I}U_i$ 连通. (提示: 固定 i 任何 j 都有连通子集包含 U_i, U_j, 再对 j 求并.)

问题 8.15 对于欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 连通 $\Longleftrightarrow$ 道路连通. (提示: 连通推道路连通是因为每一个点附近都有道路连通的邻域, 故 "可以不断向外延伸", 具体来说, 对任意一点 x, 作集合

$$A=\{y\in X: x \text{ 和 } y \text{ 道路连通}\}$$

从而这是一个非空开集. 若某点有道路连通邻域与 A 有交, 则这点也与 x 道路连通, 从而 A 还是闭集. 根据连通性, A 就是整个开集.)

习题 8.16 证明: $\mathbb{R}^2$ 删去可数个点还是连通的. (提示: 任意两点都有 "折线" 相连.)

8.4 连通性的性质

命题 8.33 连通空间在连续映射下的像也连通.

推论 8.34 连通空间的商空间也连通.

推论 8.35 (介值定理) 已知连通空间 X, 连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$. 若 $x, y \in X$ 使得 $f(x) < f(y)$, 那么 f 取遍 $f(x), f(y)$ 之间所有中间值. 即任意 $f(x) < a < f(y)$, 都存在 $z \in X$ 使得 $a = f(z)$.

证明 因为 $\mathbb{R}$ 的连通集是区间. □

关于乘积空间.

命题 8.36 连通空间的有限积也是连通的.

证明 只需要证明两个的情况即可. 设 $X \times Y$ 满足命题假设. 对于任意 y, $X \times \{y\}$ 同胚于 X, 故

$$\{X \times \{y\} | y \in Y\} \cup \{\{x\} \times Y\}$$

是满足 (8.27) 的集合族, 命题得证. □

如下图所示:

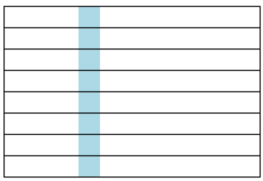


图 8.5: 连通空间的有限积

命题 8.37 连通空间的无限积也是连通的.

证明 设 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 满足命题假设, 任意取 $x = (x_i)_{i \in I}$, 则

$$\mathfrak{F}_x = \left\{ \prod_{i \in I} Y_i \,\middle|\, Y_i = \begin{cases} X_i & \text{有限的 } i \\ \{x_i\}, & \text{其余情况} \end{cases} \right\}$$

是满足 (8.26) 的集合族. 可知 $U_x = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_x} F$ 是连通的. 容易验证 $\overline{U_x} = X$, 命题得证. □

≫≫≫≫ 习题 §8.4 ≪≪≪≪

习题 8.17 求证：道路连通空间在连续映射下的像也道路连通.

习题 8.18 求证：道路连通空间的任意乘积也是道路连通的. (提示: 把道路合成, 连续性依赖于习题6.29.)

问题 8.19 (Darboux 定理) 对于 $[a,b]\to\mathbb{R}$ 的可导函数[4] f, 证明, f' 也具有介值性质. (提示: 通过转化, 只需要证明 $f'(a)>0>f'(b)$ 时, 存在导数值为 0 的点即可, 根据极限保号性, 在 a 右侧有高于 $f(a)$ 的点, 在 b 左侧有高于 $f(b)$ 的点, 不妨假设 $f(a)>f(b)$, 这样对 a 右侧的点和 b 用连续函数的介值定理, 这样就会得到另一点取 $f(a)$, 再利用 Rolle 中值定理.)

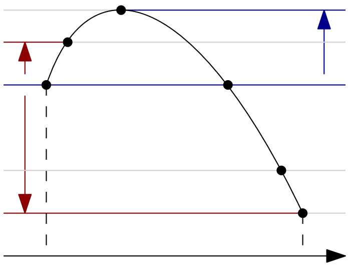


图 8.6: Darboux 定理

问题 8.20 下面的问题是, 是否所有具有介值性的函数都是某个函数的导数？答案是否定的, 因为两个具有介值性的函数相加都可能不具有介值性. 考虑习题6.23定义的函数 f, 定义

$$g(x)=\begin{cases}0 & x=f(x)\\ f(x) & x\neq f(x)\end{cases}$$

求证：$g(x)$ 依旧具有介值性, 但 $g(x)-x$ 则不具有介值性.

---

[4] $[a,b]$ 上的可导函数, 指的是 f 在 a 有右导数, 在 b 有左导数.

注记

本部分的目的在于介绍拓扑最为基本的概念, 以便读者能够用更统一的观点看待数学中的连续性. 另外的目的在于向读者展示公理化的语言. 同样, 限于篇幅, 我们只介绍了最为常用和基本的概念, 这些距离真正拓扑学所研究的话题还有相当的距离. 有意深入了解点集拓扑学的读者可以参考 [45] 或 [35]. 前者是最为经典和著名的本科拓扑学教材, 介绍了拓扑方方面面的话题, 不过请读者小心, 在这本书中邻域指的是开邻域. 后者则是 GTM 系列 (Graduate Text of Mathematics, 美国研究生数学教材) 丛书.

另外, 在拓扑的学习中, 过多的反例通常被认为是偏离主题的, 所以我们将反例主要放置在习题. 尽管如此, 有这方面兴趣的读者可以参考 [52].

以下是分条目的评注.

在 §6.1, 我们利用开集和闭集定了拓扑, 并建立起了闭包和取内部与开集闭集的关系. 而在习题6.2给出了如何用闭包公理来定义拓扑, 这是由 Kuratowski 首先发现的. 以及习题6.3给出了如何用邻域公理来定义拓扑. 在稍后习题6.25还介绍了如何用邻域基公理来定义拓扑. 这样, 与其说拓扑是由开集定义的, 倒不如说拓扑是如下语言的协调一致

$$\ldots\text{是开集}\quad \ldots\text{是闭集}\quad \ldots\text{是点}\ldots\text{的邻域}\quad \ldots\text{的闭包}\quad \ldots\text{的内部}$$

实际上可以各自用来定义拓扑空间. 更详细的内容参见 [8], 邻域公理 P65 §2.3, 闭包公理 P73 §2.4.

习题6.5和习题6.6分别给出了边界和导集的概念. 习题6.8提到了完全

集的概念, 即导集等于自身的集合. 这放在欧式空间是说, 这个点可以用除自己以外的序列逼近. 这些概念在分析中有相当大的用途, 因为"孤立点"和"非孤立点"的分析性质完全不同, 但我们这里就暂不多谈了.

强烈推荐读者了解**网**和**滤子**的语言, 这将推广我们序列收敛的概念从而进一步完备拓扑的语言, 参见习题13.5以及习题13.6, 参见 [35] Chapter2 或 [2]. 很多书都谈论了网和滤子之中的一个, 例如 [21]P125 §4.3 谈论了网, [18] §1.6, 1.7 谈论了滤子.

习题6.10提到了 Dirichlet 的著名定理, 这是鸽笼原理的应用, 也是数论中 **Diophantus 逼近**最为初等的考虑. 实际上, 这个估计可以做得更加精确, **Hurwitz 定理**指出, 对无理数 x, 求证存在无穷个分数 $p/q \in \mathbb{Q}$ 使得

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

且这里的 $\sqrt{5}$ 和指数 2 都不能再改进了, 参见 [12] P241 §10.4 以及 [55] P46 Problem1. 实际上还可以证明任何无理数 γ, $n\gamma$ 的小数部分不仅在 $[0,1]$ 上稠密, 其甚至是**一致分布 (equidistributed)** 的, 最为简洁的方法是 Fourier 分析, 参见 [54] P106 §4.2 或 [38] P11 §3.

习题6.17介绍了**粘结引理**, 表明闭集上的连续性也可以一定程度上反映整体的连续性, 这可以用来证明两条道路的拼接还是道路, 参见 (8.32).

习题6.23介绍了一个连续性非常差的函数, 这是作者从 [19] P5 Example 1.3 上看到的. 实际上, 在任何一个区间上取遍实数的函数有很多, 参见 [46].

习题6.19介绍的集合被用于证明**日出 (sunrise) 引理**, 然后继续推倒关于可微性的定理. 这是由 Riesz 证明的, 因此也被称为 **Riesz 引理**, 参见 [56] P87 §3.3 或 [55] P121 Lemma 3.5.

习题6.24介绍了**调和 (harmonic) 函数**和**拟调和函数**, 这是椭圆型偏微分方程的一个重要研究对象. 复变函数也有这方面的考虑, 例如 [23]P64 §2.5 或 [53]P92, P102.

在 (6.48), 我们介绍了**弱拓扑**. 这有助于读者理解泛函分析中的弱拓扑, 参见 [50] P60 §3.8.

习题6.29介绍了乘积空间的**泛性质**, 这是范畴论中常用的类推, 即将同样的构造加在不同的范畴中, 直接看就是更换名词 “集合”→“拓扑空间”, “映射”→“连续映射”, “Cartesius 积”→“乘积空间”, 也就是说, 乘积空间是 “拓扑空间的 Cartesius 积”.

习题6.27介绍了 **Furstenberg** 通过点集拓扑证明素数无穷的精彩文章, 参见 [22].

在 (6.67) 我们介绍了 $\mathbb{Q}$ 上的 **p 进度量**. 实际上 p 进度量还是对应一个绝对值, 著名的 **Ostrowski 定理**表明 $\mathbb{Q}$ 上的绝对值除了从 $\mathbb{R}$ 继承而来的绝对值, 就只有 p 进绝对值了.

我们在 (6.72) 定义了**完备性**, 在习题6.33给出了**完备化**的过程. 完备化有很多例子, 例如对 $\mathbb{Q}$ 施加以完备化就成为了 $\mathbb{R}$, 这是构造实数的一种方法, 当然, 在没有实数前, Cauchy 列可以定义为

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{>0}, \exists N \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall n, m > N, \quad d(x_n, x_m) < \frac{1}{k}$$

除此之外, 如果对 $\mathbb{Q}$ 赋以 p 进赋值, 完备化后就会得到 **p 进数域** $\mathbb{Q}_p$, 这是代数数论的经典研究对象, 参见 [44]Chapter7, 或 [13] 第十章.

赋范线性空间 (6.69) 和**内积空间** (6.70) 是非常典型的距离空间的例子. 其中完备的赋范线性空间被称为 **Banach 空间**, 完备的内积空间被称为 **Hilbert 空间**, 这两个空间乃是泛函分析的重点研究对象, 参见 [20].

在 (6.78) 提到的**连续函数环**. 注意到此时 $\mathscr{C}(X)$ 是一个线性空间, 以连续函数环为工具将拓扑问题代数化, 参见 (10.10). 这是分析, 代数, 几何的重要研究对象.

习题6.35介绍了**压缩映照原理**, 这是最为基本的不动点的定理之一. 相关应用可以参见 [6] 第二卷 P186 定理 5 或 [1] 第一章 §1.

习题6.36提到的 **Weierstrass 判别法**采用的证明途径颇有实变函数的风味, 参见 [21] P152. 可以解决大部分判断完备性的问题, 例如 [55] P70.

习题6.37介绍了完备度量空间版本 **Baire 纲 (category) 定理**, 习题8.11则是紧致的 Hausdorff 空间的版本. 参见 [50] P42 §2.2. 更多在泛

函分析中的推论可以参考 [1]§2.3. 习题6.38, 习题6.39以及习题6.40都是其的简单运用. 更多地, 如何从这个角度研究实数, 参见 [47].

习题6.38的连续性要求是不能去掉的, 因为可以任意选取 $x_1 \in \mathbb{R}$, 令

$$f(x_1)=1 \qquad f(2x_1)=0 \qquad f(3x_1)=0 \qquad \ldots$$

再取尚未定义的 $x_2 \in \mathbb{R}$, 使之满足 $x_2 > x_1$, 定义

$$f(x_2)=1 \qquad f(2x_2)=0 \qquad f(3x_2)=0 \qquad \ldots$$

以此类推, 一切完成之后补充其余所有点为 0. 我们得到一个递增序列 $x_n \to \infty$, 但 $f(x_n)=1$.

习题6.38不能把条件 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)=0$ 改成 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)=0$. 这个例子不难举, 取 $a_n = 1-\frac{1}{n}$, 在区间 $[n, n+1]$ 上定义 f 为在 $[n, n+a_{n-1}] \cup [n+a_{n+1}, n+1]$ 上为 0, $n+a_n$ 处为 1, 中间相连以任意连续函数, 这样, 对固定的 x, n 充分大时, nx 恒为 0, 但极限不为 0.

正规 / 正则空间的定义 (7.1) 各方材料不尽相同, 因为一个空间如果没有 Hausdorff 性, 这个空间性质差到难以研究, 所以通常都会假定 Hausdorff 性. 但我们是为了完善体系起见, 故不假定正规/正则空间满足 T1.

习题7.7, 习题7.8, 习题7.9, 习题7.10是关于分离性一些反例, 是完成习题7.12表格的关键部分. 相较之下, 为了完成习题7.28的表格则容易一些. 完整表格可以在 [52]P15 以及 P23 找到, 或 [2], [7]. 其中习题7.8被称作 **Moore 平面**. 习题7.13介绍的 **Sorgenfrey 平面** 则是更加出名一些的反例.

习题7.14提供的反例是作者想到的, 所以未见诸于其他文献. 不过如果要找一个 T4 同时满足 T1 的反例则比较复杂, 参见 [45]§32.

习题7.18介绍了 **Lindelöf 覆盖定理**, 这是对习题3.12的推广. 实际上, 我们还可以称一个空间 X 是 **Lindelöf** 的, 如果 X 中任何开覆盖族都有可数子覆盖.

关于无限积的可数性 (7.19) 的证明是作者自己想到的, 但是这个证明应当早被发现过. 其证明思路和证明维数不变性是相同的, 参见习题5.18.

在 (8.9) 我们介绍了 **列紧性**, 虽然序列收敛的概念可以在任何拓扑空间上定义, 但是这在距离空间上讨论才有意义, 不过实际上紧致 $\Rightarrow$ 列紧对所有 C1 空间均成立, 利用习题7.16. 固然关于用序列描述拓扑能有很多结论, 但大部分情况都非常不完备. 而对于度量空间, 因为有了 (6.71), 于是讨论序列才是合理的. 想要推广序列收敛的概念, 就会涉及 **网** 和 **滤子** 的概念, 用这种语言才是完备的, 参见习题13.5以及习题13.6.

(8.9) 证明中的 ℓ 被称为 **Lebesgue 数**.

(8.9) 介绍了 Hausdorff 的著名定理. 如果对任何 $\delta > 0$, 都有 δ-网, 满足这样的性质的 A 被称为 **完全有界**, 显然完全有界集是有界的. 另外, 此网非彼网, 网和滤子中的网指的不是这个网.

习题8.6介绍的 **Ascoli 引理** 在分析中十分重要, 也可以不利用完备空间对列紧性的刻画 (8.9) 来证明, 而是现场抽取对角线. 除此之外, Ascoli 引理也可以继续推广, 参见 [45]§47.

Alexander 子基定理 (8.20) 显然是一个十分漂亮的定理, 这和习题8.1很像, 但是难度上却完全不同.

Tychonoff 定理 (8.21) 还可以用别的方法证明. 例如如果读者知道滤子的理论, 将会利用 **超滤子** 给出相当简洁和直接的证明. Tychonoff 定理可以视为习题8.7的推广, 只不过选取的 “子列” 的过程需要使用选择公理. 除此之外, 我们之前提到过, Tychonoff 定理和选择公理是等价的, 参见第一部分的评注.

习题8.12的结果摘自 [31]P31(4.26).

习题8.10说明 Hausdorff 紧致集开集再多就不紧致了, 因为开集多一些不影响 Hausdorff 性, 开集再少就不 Hausdorff 了, 因为开集少一些不影响紧致性, 这表明了 Hausdorff 紧致空间的刚性. 同时, 这还否定了双射的 **Peano 曲线** 的存在.

最值定理 (8.16) 和 **介值定理** (8.35) 分别是连续函数在闭区间上性质的的推广, 所以本质上, 最值性和介值性是紧致性和连通性的反映, 这也是为什么这两个拓扑性质是最为重要的拓扑性质.

习题8.15说明了欧式空间中的开集道路连通和连通是等价的, 其证明

方法是典范的, 即做一个 “即开又闭” 的集合. 实际上, 习题6.24介绍了调和函数的最大值原理就已经用到了连通性, 可以将取到极值的点收集起来, 证明既开又闭. 在传统的分析学中, 利用开集的连通性更多地采用道路连通的方法, 可以将任意两点通过相连, 再通过道路上每一点的邻域形成道路的开覆盖, 利用紧致性得到有限个开集, 例如调和函数这里就可以顺着开集归纳得到道路的末端也取到极值. 所以读者会在很多分析材料中看到类似下图的插图. 实际上这两种方法是等价的.

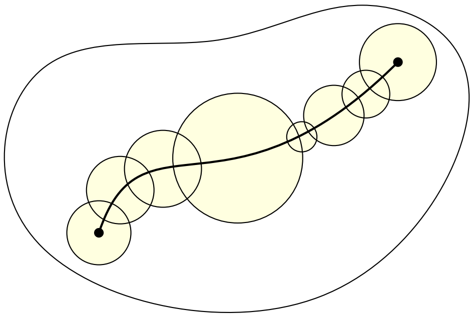


图 8.7: 传统分析如何利用连通性

习题8.19介绍了 **Darboux 中值定理**, 这表明具有介值性的函数很多, 可以不连续. 习题8.20则表明具有介值性的函数非常差, 最初对这个问题的回答是 **Conway 13 函数**, 实际上, 在任何一个区间上取遍实数的函数有很多, 参见 [46]. 介值性被称为 **Darboux 性**, [19]Chapter 1 有很多探讨, 例如任何函数都是 Darboux 函数列的逐点收敛极限, 任何函数都是两个 Darboux 函数之和.

第三部分

代数结构

导言

代数学是对运算的研究. 狭义来说, 代数就是加减乘除.

从代数学的发展史来看, 代数最初研究的对象是方程, 之后逐渐转移到代数结构的研究上. 并且, 在很长的一段历史时期内, 代数都和数论没有完全分离, 所以有很多问题来自数论. 另外, 群还可以反映对称性, 这对于几何学有着非常深刻的作用.

代数的分支十分广阔, 对别的分支的作用也很大, 基本的群环域的语言早就已经被数学各个分支作为基本语言运用. 因此, 代数的缺失将使读者无法接近数学任何深入的分支.

本部分的目的同样也不在于提供代数完备体系的介绍, 因为代数学太过博大, 不如如何选材, 限于篇幅, 也都只能粗略介绍. 我们只介绍最为基本的概念, 令读者了解代数的语言.

本部分共三章, 分别是群环域. 第九章是群的介绍, 像之前我们介绍的一样, 介绍子结构, 商结构, 同态, 乘积结构; 除此之外是对特殊群对称群的考虑; 最后一节还会简单介绍一下群作用. 第十章是环的介绍, 同样是介绍子结构, 商结构, 同态, 乘积结构; 除此之外是对特殊环多项式环的考虑; 最后一节会简单介绍一下模. 第十一章是域的介绍, 这章只有一节, 我们对域只做最初步的介绍.

第九章　群的基本概念

本章是对群的讨论. 主要讨论群的基本构造, 最后会简单介绍一些对称群以及群作用.

9.1　群的定义和例子

回忆封闭的二元运算的定义 (2.29).

定义 9.1 (群) 已知非空集合 G 和 G 上封闭的二元运算 $\cdot$ 组成的对 $(G, \cdot)$, 满足

Grp1 $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. *(结合律)*

Grp2 $\exists e \in G, \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$; *(存在单位元)*

Grp3 $\forall a \in G, \exists a^{-1}, \mathrm{s.\,t.}\, a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. *(存在逆元)*

则称 $(G, \cdot)$ 为 **群 (group)** . 其中 e 被称为 G 的 **单位元 (unit, identity)** , a^{-1} 被称为 a 的 **逆元 (inverse)** . 更方便地, 我们会将 $x \cdot y$ 简单记为 xy, 并且记 $e = 1$. 另外, 群的基数更多时候被称为 **阶** .

定义 9.2 (半群, 幺半群) 更弱地, 若 $(G, \cdot)$ 只满足 *(Grp1)*, 则称 $(G, \cdot)$ 为 **半群 (semigroup)** , 若 $(G, \cdot)$ 只满足 *(Grp1)* 和 *(Grp2)*, 则称 $(G, \cdot)$ 为 **幺半群** 或 **么半群 (monoid)** .

定义 9.3 (Abel 群) 更强地, 若群 $(G, \cdot)$ 还满足

Ab $\forall a,b\in G, a\cdot b=b\cdot a$. *(交换律)*

则称 $(G,\cdot)$ 为 **Abel 群 (abelian group)** 或 **交换 (commutative) 群**.

此时可以将运算写成加法, 方便起见, 写成加法时称为**加法群**, 此时改记单位元为 0 称为 G 的**零元**, 改记 x 的逆元为 $-x$ 称为 G 的**负元**. 与之对应的, 如果为了强调写成乘法会称为**乘法群**.

为了方便书写, 下面默认 $ab=a\cdot b$; 在不引起混淆的情况下直接称 G 为群, 半群, 幺半群, 群或 Abel 群, 并默认为为乘法 $\cdot$, 单位元为 1.

另外, 为了研究方便, 记 $a^n=\begin{cases} e & ,n=0, \\ \underbrace{aa\dots a}_{n} & ,n>0, \\ \underbrace{a^{-1}a^{-1}\dots a^{-1}}_{|n|} & ,n<0. \end{cases}$ 若在加法群中, 则记为 na.

命题 9.4 群中的单位元和每个元的逆元都是唯一的.

证明 设群 G, 若有两个单位元, 设之为 $e,1$, 则按照定义有 $e=e1=1$, 从而单位元是唯一的. 若对于 $x\in G$ 有两个逆元 y,z, 则 $z=(yx)z=y(xz)=y$, 也是唯一的. □

命题 9.5 关于群中的逆元有如下性质:

(1) $1^{-1}=1$.

(2) $(a^{-1})^{-1}=a$.

(3) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

证明 完全类似于 (2.19). □

下面是一些群的例子.

例 9.6 (平凡群) 如果一个集合只有一个元素 $\{1\}$, 且规定 $1\cdot 1=1$, 此时显然构成一个群, 这样的群被称为**平凡群**, 很多时候被直接记为 1.

例 9.7 在关于数的例子若干,

1. $(\mathbb{Z},+)$ 是加法 *Abel* 群, 零元是 0, a 的负元为 $-a$.
2. 同样, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ 都是加法 *Abel* 群, 零元都是 0, a 的负元都为 $-a$.
3. $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ 对普通乘法作成 *Abel* 群, 单位元为 1, a 的逆元为 $1/a$.
4. 同样, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$, $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ 都对普通乘法作成 *Abel* 群, 单位元都为 1, a 的逆元都为 $1/a$.

例 9.8 (剩余类) 对固定的正整数 m, 在 $\mathbb{Z}$ 上可以定义等价关系

$$x\equiv y \iff m|x-y$$

这样确定了一个商集 $\mathbb{Z}/\equiv$, 这被称为模 m 的剩余类. 记 x 所在的等价类为 $\overline{x}$, 容易验证,

$$\overline{x}\cdot\overline{y}:=\overline{xy}\qquad \overline{x}+\overline{y}:=\overline{x+y}$$

是良定义的运算. 此时

1. 模 m 的剩余类
$$\mathbb{Z}_m=\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{m-1}\}$$
对剩余类的加法作成加法 *Abel* 群, 零元为 $\overline{0}$, $\overline{a}$ 的负元为 $\overline{-a}$. 另外, 当 $n=p$ 是素数时, 记 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p$.
2. 模 m 的剩余类中所有的可逆元组成的集合
$$\mathbb{Z}_m^\times=\{\overline{n}:(n,m)=1\}$$
对剩余类的乘法作成 $\varphi(n)$ 阶 *Abel* 群, 其中 φ 是 *Euler* 函数, 单位元为 $\overline{1}$, $\overline{a}$ 的逆元为数论倒数. 具体而言, 由于 $(a,m)=(a\pm m,n)$, 故 $\overline{a}\in\mathbb{Z}_m^\times$ 意味着 $(a,m)=1$, 根据 *Bézout* 定理, 有 $xa+ym=1$, 故在模 m 的意义下, $\overline{x}\,\overline{a}=\overline{1}$, 此时 $\overline{x}$ 便是 $\overline{a}$ 的逆元. 这被称为模 m 的缩剩余类.

例 9.9 有关于矩阵的例子若干

1. $\mathbb{R}$ 上全体 $m \times n$ 矩阵 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 对矩阵加法作成加法 $Abel$ 群, 零元为 $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$ 的负元为 $-\boldsymbol{A}$.
2. $\mathbb{R}$ 上全体 n 阶可逆方阵对矩阵乘法作成群, 称为 $\mathbb{R}$ 上的**一般线性群**, 记为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 单位元为单位阵 $\boldsymbol{I}$, 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆元为逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 下同;
3. $\mathbb{R}$ 上全体 n 阶行列式为 1 的方阵对矩阵乘法作成群, 称为 $\mathbb{R}$ 上的**特殊线性群**, 记为 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$;
4. $\mathbb{R}$ 上全体 n 阶正交方阵对矩阵乘法作成群, 称为 $\mathbb{R}$ 上的**正交群**, 记为 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;
5. $\mathbb{R}$ 上全体 n 阶行列式为 1 的正交方阵对矩阵乘法作成群, 称为 $\mathbb{R}$ 上的**特殊正交群**,
6. $\mathbb{C}$ 上全体 n 阶酉方阵 (即满足 $U_nU_n^H = \boldsymbol{I}$ 的矩阵, 其中 $*^H$ 指的是共轭转置) 对矩阵乘法作成群, 称为**酉群**, 记为 U_n.
7. $\mathbb{C}$ 上全体 n 阶行列式为 1 的酉方阵对矩阵乘法作成群, 称为**特殊酉群**, 记为 SU_n.

例 9.10 关于线性空间, 线性变换的例子若干

1. 将线性空间的数乘运算遗忘, 只考虑向量的加法, 则线性空间成为 $Abel$ 群, 零元为 $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}$ 的负元为 $-\boldsymbol{a}$;
2. 一个线性空间 V, 全体 $V \to V$ 的可逆线性变换关于映射的复合构成一个群, 单位元为单位变换, 变换之逆即映射之逆.

例 9.11 对于集合 X, 所有 X 到 X 自身的全体双射对复合构成一个群, 记为 $\mathfrak{S}_X$, 称为 X 的**对称群**. 其中单位元为 id_X, 双射 f 对应的逆元为逆映射 f^{-1}. 特别地, 当 $X = \{1, \ldots, n\}$ 时, 记 $\mathfrak{S}_X$ 为 $\mathfrak{S}_n$. 这是一类非常重要的群, 我们留至9.6节具体研究.

例 9.12 对于一些小阶群 (即基数比较小的群), 我们可以通过列表的方式决定一个群的运算.

	1	a
1	1	a
a	a	1

	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	b	c	d	1
b	b	c	d	1	a
c	c	d	1	a	b
d	d	1	a	b	c

第三个群被称为 **Klein 四元群**.

补充 9.13 (阶) 已知群 G, 对于 $x \in G$, 记

$$\operatorname{ord} x = \inf\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : x^n = 1\}$$

为 x 的**阶**, 显然, 元素的阶在 $\mathbb{Z}_{>0} \sqcup \{\infty\}$ 中取值, 从而下确界总能取到. 且 $\operatorname{ord} x = a < \infty$ 自然蕴含 $x^a = 1$. 关于阶有如下结论

(1) $\operatorname{ord} e = 1 \iff e = 1$.

(2) 设 $\operatorname{ord} a = n$, 则 $a^m = 1 \iff n|m$. 其中 "$|$" 指的是整除.

充分性显然, 对于必要性, 若任意 m 使得 $a^m = 1$, 此时, 运用整数上的带余除法,

$$m = qn + r \quad q, r \in \mathbb{Z}, 0 \geq r < n$$

若 $r > 0$, 则 $1 = a^m = a^{qn+r} = a^r$, 从而 $0 < r \in \{m \in \mathbb{Z} : a^m = 1\}$, 这与阶的定义相矛盾, 故只有 $r = 0$, 按上式有 $n|m$.

(3) 设 $\operatorname{ord} a = n$, 则 $\operatorname{ord} a^k = \frac{n}{(k,n)}$. 其中 (k,n) 是 k,n 的最大公约数.

首先, $(a^k)^{\frac{n}{(k,n)}} = (a^n)^{\frac{k}{(k,n)}} = 1$, 这是因为 $\frac{k}{(k,n)}$ 是整数. 另一方面, 设 $(a^k)^m = 1$, 则

$$n|km \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{(n,k)} \Bigg| \frac{k}{(n,k)} m \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{(n,k)} \Bigg| m$$

这是由于 $\frac{n}{(n,k)}$ 与 $\frac{k}{(n,k)}$ 互素.

(4) 设 $\operatorname{ord} a = st$, 则 $\operatorname{ord} a^s = t$.

这是 *(3)* 的自然推论.

补充 9.14 (共轭) 已知群 G, $x \in G, y \in G$ 被称为**共轭 (conjugate)** 的, 当存在 $c \in G$ 使得 $x = cyc^{-1}$. 容易验证, 共轭关系是等价关系, 依此划分的每一个等价类称为**共轭类 (class)**. 显然, 当一个群是 *Abel* 群时, 元素只与自身共轭. 除此之外, 容易直接验证

(1) $(cxc^{-1})(cyc^{-1}) = cxyc^{-1}$;

(2) $\operatorname{ord} x = \operatorname{ord} cxc^{-1}$.

⋙⋙ 习题 §9.1 ⋘⋘

习题 9.1 求证: 群中有消去律, 即

$$ab = ac \Rightarrow b = c \qquad ba = ca \Rightarrow b = c$$

问题 9.2 (群的判定定理) 已知非空集合 G 和 G 上封闭的二元运算 $\cdot$ 组成的对 $(G, \cdot)$, 满足

(1)$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. *(结合律)*

(2)$\exists e \in G, \forall a \in G, e \cdot a = a$. *(存在左单位元)*

(3)$\forall a \in G, \exists a^{-1}, \text{s.t.}\ a^{-1} \cdot a = e$. *(存在左逆元)*

求证:

(1)$(G, \cdot)$ 为群. (提示: 先证明存在逆元, 再证明存在单位元)

(2) 改 (2) 为存在右单位元: $\exists e \in G, \forall a \in G, ae = a$, $(G, \cdot)$ 是否仍然为群? (提示:

	0	1
0	0	0
1	1	1

)

问题 9.3 (群的判定定理) 已知非空集合 G 和 G 上封闭的二元运算 $\cdot$ 组成的对 $(G, \cdot)$, 满足关于 X 的方程

$$a \cdot X = b \qquad X \cdot c = d$$

在 G 中对任意 $a, b, c, d \in G$ 都有解. 求证: $(G, \cdot)$ 为群. (提示: 先证明存在左单位元. 先任意固定 $c \in G$. 取 $Xc = c$ 的解记为 e, 对于任何 $g \in G$, 取 $cX = g$ 的解 h, 则 $eg = ech = ch = g$. 对于任何 $x \in G$, 取 $b = e$, 得存在左逆元.)

习题 9.4 已知群 G, 若 $\forall x \in G, x^2 = 1$, 求证: G 是 *Abel* 群. (提示: $xyxy = 1 = xxyy$.)

习题 9.5 已知群 G, $x \in G$, n 与 $\operatorname{ord} x$ 互质, 求证: $\operatorname{ord} x^n = \operatorname{ord} x$.

9.2 子群与商群

下面来研究如何赋予子结构和商结构以群的结构.

定义 9.15 (子群) 若群 G 的一个非空子集 H 对 G 的运算也成为一个群, 那么称 H 为 G 的子群 (*subgroup*), 记为 $H \leq G$.

其中最简单的例子是 G 本身和只有单位元 $\{e\}$ 两个群, 这两个子群被称为平凡 (trivial) 子群, 其余子群被称为非平凡 (nontrivial) 子群.

例 9.16 关于子群有如下容易的例子

1. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ 每一个包含符号实际上都是作为加法群的子群的关系.

2. $\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{C}^*$ 每一个包含符号实际上都是作为乘法群的子群的关系.

3. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 每一个包含符号实际上都是子群的关系.

4. $\{1, a\}, \{1, b\}, \{1, c\}$ 是 *Klein* 四元群 $\{1, a, b, c\}$ 的所有非平凡子群. (参见 (9.12))

5. $\mathbb{Z}$ 作为加法群的所有子群都形如 $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$(利用带余除法).

命题 9.17 已知群 G, H 是 G 的子群, 则 H 的单位元即 G 的单位元, 且对 $a \in H$, a 在 H 中的逆元即 a 在 G 中的逆元.

证明 假设 H 的单位元为 e, 则 $ee = e$, 于是 $e = 1$. 关于逆元的论断则是直接推论. □

命题 9.18 已知群 G, 非空子集 $H \subseteq G$, H 是 G 的子群的充分必要条件是

$$\forall a, b \in H, \quad ab^{-1} \in H$$

证明 必要性显然, 充分性 $1 = aa^{-1} \in H$, $a^{-1} = 1a^{-1} \in H$, $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. □

命题 9.19 已知群 G, 若 $\{H_i\}_{i \in I}$ 一族 G 的子群, 则 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 仍然是 G 的子群.

下面我们定义子集的乘法, 这在代数中是通用, 自然的记号. 已知群 G, 元素 $a \in G$, 子集 $H, K \subseteq G$, 定义记号如下:

$$\begin{array}{ll} aH = \{ah | h \in H\} & HK = \{hk | h \in H, k \in K\} \\ Ha = \{ha | h \in H\} & H^{-1} = \{h^{-1} | h \in H\} \end{array}$$

若在加法群中则记为 $a + H, H + K, H + a, -H$. 称 aH 为 H 的**左陪集 (coset)**, Ha 为 H 的**右陪集**.

补充 9.20 (陪集分解) 对于群 G, 子群 H, 我们可以在 G 上定义等价关系

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

此时 x 所在的等价类

$$[x] = \{y \in G : x^{-1}y \in H\} = \{y \in G : y \in xH\} = xH$$

根据 (5.2), 这就意味着

- $x^{-1}y \in H \iff x \in yH \iff xH = yH;$
- $x^{-1}y \notin H \iff x \notin yH \iff xH \cap yH = \varnothing;$
- $G = \bigsqcup_{[x]} xH.$ (左陪集分解)

最后一条被称为左陪集分解, 通过作双射

$$\varphi : H \longrightarrow xH \qquad h \longmapsto xh$$

可以得到 $|H| = |xH|$, 于是所有 H 的左陪集基数都相同.

同理, 我们也可以得到

- $xy^{-1} \in H \iff x \in Hy \iff Hx = Hy;$
- $xy^{-1} \notin H \iff x \notin Hy \iff Hx \cap Hy = \varnothing;$
- $G = \bigsqcup_{x} Hx$ (右陪集分解)

最后一条被称为右陪集分解, 同样可以证明 $|H| = |Hx|$, 所有 H 的右陪集基数都相同. 通过作

$$\theta : \{xH | x \in G\} \longrightarrow \{Hx | x \in G\} \qquad xH \longmapsto Hx^{-1}$$

这是良定义的双射从而 $\#\{xH|x \in G\} = \#\{Hx|x \in G\}$, 就是说左陪集数目和右陪集数目一样多.

这诱使我们定义 H 在 G 中的**指数** $[G:H] = \#\{xH|x \in G\}$. 根据陪集分解, 有

$$|G| = [G:H]|H|$$

这被称为 **Lagrange 定理**.

下面关于商集的讨论则颇费周章. 考虑群 G 的商集 $G/\sim$, x 的等价类记为 $[x]$, 若要保持运算, 最自然的定义应当是

$$[x][y] = [xy]$$

但是由于代表元的选取, 上述定义未必为良定义, 为此需要费一番口舌解释为何要像下面这样定义, 参见习题9.9.

定义 9.21 (正规子群) *已知群 G, $N \leq G$, 若*

$$\forall x \in G, xN = Nx$$

则称 N 为 G 的 **正规子群 (normal subgroup)**, *记为 $N \trianglelefteq G$.*

命题 9.22 *已知群 G, 正规子群有如下性质:*

(1) 若 $N \trianglelefteq G$, 且 $N \leq H \leq G$, 则 $N \trianglelefteq H$;

(2) 若 $H \leq G, N \trianglelefteq G$, 则 $H \cap N \trianglelefteq H$ 且 $HN = NH \leq G$.

(3) 若 $N \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G$, 则 $N \cap K \trianglelefteq G$ 且 $NK = KN \trianglelefteq G$.

证明 习题见. □

定义 9.23 (商群) *已知群 G, 正规子群 N, 记*

$$G/N = \{gN|g \in G\}$$

乘法定义为

$$(xN) \cdot (yN) = (xy)N$$

因为若 $x'N = xN, yN = y'N$, 则利用结合律

$$(x'y')N = x'(yN) = x'(Ny) = (xN)y = x(yN) = (xy)N$$

从而是良定义的运算. 称 G/N 称为群 G 模掉 N 的**商群 (quotient group)**, 其中单位元为 N, aN 的逆元为 $a^{-1}N$.

例 9.24 对于加法群 $\mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z}=\{mk:k\in\mathbb{Z}\}$ 是一个正规子群, 则

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_m$$

因为 $x-y\in m\mathbb{Z}$ 正是 (9.8) 定义的同余关系.

⋙⋙ 习题 §9.2 ⋘⋘

习题 9.6 已知群 G, 非空子集 $H\subseteq G$, 求证: H 是 G 的子群的充分必要条件是

$$1\in H \qquad \forall a,b\in H,\quad ab\in H$$

习题 9.7 证明 (9.22).

习题 9.8 已知群 G, $H,K\le G$, 求证:

$$H\cup K\le G \iff H\subseteq K \text{ 或} K\subseteq H$$

问题 9.9 下面说明为何商群如正文中所定义. 已知群 G 的商集 $G/\sim$ 还是群, 满足

$$[x]\cdot[y]=[xy]$$

其中 $[x]$ 为 x 所在等价类. 按下列步骤推导存在正规子群 N 使得

$$x\sim y \iff xN=yN$$

(1)$[1]$ 是 $G/\sim$ 的单位元, $[x^{-1}]$ 是 $[x]$ 的逆元. (提示: $[1]\cdot[x]=[x]$ 可得 $[1]$ 是单位元, $[x]\cdot[x^{-1}]=[1]$ 可得 $[x^{-1}]$ 是 $[x]$ 的逆元.)

(2)$[1]$ 是子群. (提示: 而 $x,y\in[1]$ 满足 $[1]=[1]\cdot[1]=[x]\cdot[y^{-1}]=[xy^{-1}]$, 故 $xy^{-1}\in[1]$.)

(3)$[x]=x[1]=[1]x$, 从而 $[1]$ 是正规子群. (提示: $y\in x[1] \iff x^{-1}y\in[1] \iff [x^{-1}y]=[1] \iff [x]=[y] \iff y\in[x]$.)

(4)$[x]=[y] \iff [xy^{-1}]=[1]$.

(5) 证明结论.

习题 9.10 已知群 G, 若 $N \leq G$, 求证: N 是 G 的正规子群当且仅当

$$\forall a \in G, aNa^{-1} \subseteq N$$

(提示: 换 a 为 a^{-1} 得到另一边.)

习题 9.11 (Dedekind 法则) 已知群 G, 子群 H, L, 子群 $M \subseteq H$, 求证:

$$(ML) \cap H = M(L \cap H) \qquad H \cap (LM) = (H \cap L)M$$

习题 9.12 (中心) 已知群 G, 定义

$$Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G, gx = xg\}$$

称为 G 的**中心 (center)**. 求证:

(1)$Z(G)$ 是 *Abel* 群.

(2)$Z(G) \trianglelefteq G$.

问题 9.13 群的中心的指数不能是素数. (提示: 否则, 设 $\langle \pi(x) \rangle = G/Z$, 从而 $G = Z \sqcup xZ \sqcup x^2 Z \sqcup \ldots$ 给出了陪集分解, 回看中心, 会发现其实 G 是 Abel 群.)

问题 9.14 求证: $(\mathbb{R}, +)$ 的子群 H 必居以下两种情形之一:

(1)$H = a\mathbb{Z}, a \geq 0$;

(2)H 稠密. (提示: 考虑 $\inf\{x \in H, x > 0\}$, 若为 0, 则通过 "打网格" 可得稠密, 若 > 0, 证明必然可以取到.)

习题 9.15 (周期函数) 下面是对周期函数的讨论,

(1) 已知在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, 求证:

$$\{T \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$$

是 $(\mathbb{R}, +)$ 的子群.

(2) 求证: 非常数连续函数必存在最小正周期.

(3) 求证: 对任何三个实数 a, b, c 都存在分别以 a, b, c 为周期的非常数周期函数 f, g, h 使得 $f + g = h$. (提示: 因为分别存在同时以 a, b 为周期, b, c 为周期, a, c 为周期的非常数函数. 经过恰当地选取使之加减不会消成常数.)

(4) 若在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数 f, g 之中有一个连续, 且两函数周期在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关, 那么 $f + g$ 不是周期函数. (提示: 设 f 连续, 假设 $f + g$ 是周期函数, 周期为 T, 则

$$0 = (f(x+T)+g(x+T))-(f(x)+g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x+T)-f(x) = -g(x+T)+g(x)$$

定义 $F = f(x + T) - f(x)$, 此时 F 是连续的, 但是却同时共有 f, g 的周期, 矛盾!)

习题☠ 9.16 已知群 G,

(1) 若 H 和 K 都具有有限指数, 则 $H \cap K$ 也具有有限指数, 且 $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$. (提示: 证明, 当 $aH \cap bK \neq \varnothing$ 时, 任意选择 $c \in aH \cap bK$, 有 $aH \cap bK = cH \cap cK = c(H \cap K)$.)

(2) 若 H 具有有限指数, 则 xHx^{-1} 也具有有限指数, 且 $[G : H] = [G : xHx^{-1}]$. (提示: 因为 $G = xGx^{-1} = \bigsqcup xyHx^{-1} = \bigsqcup(xyx^{-1})xHx^{-1}$.)

习题☠ 9.17 (有限拓扑) 已知群 G, 考虑如下集合族生成的拓扑

$$\{xH : x \in G, [G : H] < \infty\}$$

容易验证这是一个拓扑基. 求证: 在这个拓扑下, 乘法和求逆元都是连续的. (提示: 任意给 G 的有限指数子群 H, $xyH = xyHH = x(yHy^{-1})yH$, 乘法是连续的. 求逆元连续显然.)

9.3 生成的子群

下面, 我们来谈论生成的概念

定义 9.25 (生成的子群) 已知群 G, 子集 $S \subseteq G$, 若子群 H 满足任何子群 K 都有

$$S \subseteq K \iff H \subseteq K$$

则称 H 是 S **生成的子群**, 记为 $\langle S \rangle$.

命题 9.26 已知群 G, 子集 $S \subseteq G$, 有

(1) S 生成的子群是存在且唯一的, 且等于

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\text{子群 } H \supseteq S} H$$

(2) $S \subseteq \langle S \rangle$. (递增性)

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$. (单调性)

(4) $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$. (幂等性)

(5) S 是 G 的子群的当且仅当 $\langle S \rangle = S$.

证明 根据 (9.19), 任意子群的交还形成子群, 故第一个等号成立. 剩下部分完全类似于 (4.19). □

命题 9.27 已知群 G, 子集 $S \subseteq G$, S 生成的子群有如下刻画

$$\langle S \rangle = \{s_1^{\delta_1} \dots s_n^{\delta_n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \{s_i\} \subseteq S, \delta_i = \pm 1\}$$

其中约定 $n = 0$ 时, $s_1^{\delta_1} \dots s_n^{\delta_n} = 1$. 即 S 生成的子群是 S 成员及其逆的有限乘法组合.

证明 容易验证右边已经构成群, 故 $\langle S \rangle \subseteq$ 右边. 而 $S \subseteq \langle S \rangle$, 右边是 S 的组合, 自然在 $\langle S \rangle$ 当中. □

定义 9.28 (生成元) 已知群 G, 若 $S \subseteq G$ 使得 $\langle S \rangle = G$, 则称 S 整体为**生成元**集, 其中元素为**生成元 (generator)**.

若群有有限的生成元集, 则称该群为**有限生成 (finite generated)** 的.

命题 9.29 对于群 G.

- 若 G 是有限生成的, 则 G 的任何商群 G/N 也是有限生成的.
- 若正规子群 N 和对应商群 G/N 都是有限生成的, 则 G 也是有限生成的.

证明 根据刻画 (9.27), 这两则都是显然的. 习题见. □

一般而言, 有限生成的群的子群不一定是有限生成的. 这和线性空间不同.

例 9.30 (循环群) 若群 G 由一个元素生成, 即 $\exists a \in G, \mathrm{s.t.} \quad \langle a\rangle = G$ 则称 G 为 a 生成的 **循环 (cyclic) 群**, 等价的描述是

$$\exists a \in G, \forall x \in G, \exists n \in \mathbb{Z}, \mathrm{s.t.} \quad x = a^n$$

典型的例子有作为加法群的 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_m$, 1 或 $\overline{1}$ 就是其生成元. 容易验证循环群的阶等于生成元的阶, 循环群的子群和商群必定为循环群.

补充 9.31 (Euler 定理) 作为 *Lagrange* 定理 *(9.20)* 的推论, 在有限群 G 中, 对于 $a \in G$, 考虑其生成的群, $A = \{a^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 容易验证 $|A| = \operatorname{ord} a < \infty$, 而 A 又成为子群, 这使得 $\operatorname{ord} a \mid |G|$. 即著名的 "元素的阶整除群的阶".

至此, 我们可以得到数论中著名的 **Fermat 小定理** 和 **Euler 小定理** 对于模 n 剩余类的缩系 $\mathbb{Z}_n^\times$, 根据 *Lagrange* 定理有

$$\forall \overline{m} \in \mathbb{Z}_n^\times, \quad \overline{m^{\varphi(n)}} = \overline{1}$$

即如下的 *Euler* 定理

$$\forall (x \in \mathbb{N}, (x, m) = 1), \quad x^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$$

特别地, 对于 n 是素数 p 的情况, $\varphi(p) = p - 1$, 故可得 *Fermat* 小定理

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad x^p \equiv x \mod p$$

补充 9.32 (生成的正规子群) 已知群 G, 子集 $S \subseteq G$, 若正规子群 N 使得任何正规子群 $K \subseteq G$ 满足

$$S \subseteq K \iff N \subseteq K$$

则称 N 为 S **生成的正规子群**. 则群中任何子集都存在其的生成正规子群, 且

$$S \text{ 生成的正规子群} = \bigcap_{\text{正规子群 } N \supseteq S} N$$

读者将会验证, 上式其实等于

$$\{g_0 h_1 g_1 h_2 \dots g_{n-1} h_{n-1} g_n : \{g_i\} \subseteq G, g_0 g_1 \dots g_n = 1, \{h_i\} \subseteq \langle S \rangle\}$$

≫≫≫≫ 习题 §9.3 ≪≪≪≪

习题 9.18 证明 *(9.29)*.

习题 9.19 已知群 G, 对于 $S \subseteq G$,

$$\forall x \in \langle S \rangle, \exists T \subseteq S, \text{s. t.} \quad |T| < \infty, x \in \langle T \rangle$$

习题 9.20 求证: 加法群 $\mathbb{Z}_n$ 没有非平凡的子群 $\iff n$ 是素数.

习题 9.21 求证: $\mathbb{Z}_n$ 的生成元只有 $\varphi(n)$ 个, 其中 φ 是 *Euler* 函数, 即

$$\#\{x \in \mathbb{Z}_n : \langle x \rangle = \mathbb{Z}_n\} = \varphi(n)$$

习题 9.22 已知有限生成群 G, 若子集 S 生成了 G, 求证: 存在有限子集 $T \subseteq S$ 生成 G.

问题 9.23 对于群 G, 若非有限生成子群组成的集合族 $\{H_i\}_{i\in I}$ 对包含关系作成全序集. 求证: $\bigcup_{i\in I} H_i$ 是群, 且非有限生成. 并说明当一个群不是所有子群都有限生成时, 有极大非有限生成子群. (提示: 否则, $\bigcup_{i\in I} H_i$ 的生成元散落在有限的 H_i 之中, 这与某个 H_i 的非有限生成性矛盾. 最后这是 Zorn 引理的标准运用.)

习题☠ 9.24 已知群 G, 有限指数的子群 H, 求证: G 是有限生成的 $\Longleftrightarrow H$ 是有限生成的. (提示: 设生成元为 $\{g_i\}$ 与左陪集代表元 $\{x_j\}$(不妨约定其中有 1), 则 $S=\{x_j^{-1}g_ix_k\}\cap H$ 生成了 H. 具体而言, 对任何 g_ix_k 都存在 x_j 使得 $x_j^{-1}g_ix_k\in H$, 于是任何 $H\ni g=g_\bullet\dots g_\bullet$ 的组合都可以写成

$$x_\bullet(x_\bullet^{-1}g_\bullet x_\bullet)\dots(x_\bullet^{-1}g_\bullet 1)$$

而若 g 落在 H 里, 则第一位为 1, 得证.)

习题☠ 9.25 (Dietzmann) 已知群 G 由 $x_1,\dots,x_m$ 生成, 且 $\operatorname{ord}x_i<\infty$, x_i 只有有限的共轭, 求证: G 是有限群. (提示: 存在 $x_1,\dots,x_n$ 使得其对任意 $g\in G, x\mapsto gxg^{-1}$ 和任意 $i\in\mathbb{Z}, x\mapsto x^i$ 封闭, 证明, G 中每个元素都可以表示成长度不超过 n 个的 x_i 的乘积.)

问题 9.26 (换位子群) 已知群 G, 定义

$$G'=\langle xyx^{-1}y^{-1}:x,y\in G\rangle$$

称为 G 的换位子群或导群. 求证:

(1)G' 是正规子群. (提示: 注意到

$$c(xyx^{-1}y^{-1})c^{-1}=(cxc^{-1})(cyc^{-1})(cxc^{-1})^{-1}(cyc^{-1})^{-1}$$

事实上, 只要验证每一个生成元 "正规" 即可.)

(2)G/G' 是 *Abel* 群. (提示: 因为在 G/G' 中, $xG'yG'=yG'xG'$.)

9.4 同态与同构

下面, 我们用映射将两个群联系起来, 其中, "好" 的映射, 应当是保持运算不变的映射.

定义 9.33 (同态, 同构) 已知群 G_1,G_2, 设映射 $\varphi:G_1\to G_2$, 若

$$\forall a,b\in G_1,\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

称 φ 为 G_1 到 G_2 的同态 **(homomorphism)**. 并且

- 若 φ 为满射, 称 φ 为 G_1 到 G_2 的**满同态**.
- 若 φ 为单射, 称 φ 为 G_1 到 G_2 的**嵌入 (embedding)** 或**单同态**.
- 若 φ 为双射, 称 φ 为 G_1 到 G_2 的**同构 (isomorphism)**, 记为 $\varphi : G \cong H$.

一般而言, "同构" 是指有逆同态, "嵌入" 指的是同构于子结构. 对于群来说这和我们定义是一致的.

一个同态一定将单位元映为单位元, 将逆元映为像的逆元, 因为对于同态 φ

$$\begin{cases} \varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1)\varphi(1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(1) = 1 \\ 1 = \varphi(1) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \end{cases}$$

例 9.34 利用目前为止的结论有如下读者可以验证的小例子.

1. 取行列式 $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是同态.
2. 取模长 $|\cdot| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ 是同态.
3. 对于有限群 G, 若有同态 $\varphi : G \to (\mathbb{Z}, +)$, 则 φ 是平凡同态.
4. 对于有限群 G, 若有同态 $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$, 则 $\operatorname{Im} \varphi$ 全部分布在单位圆上.
5. $(\mathbb{R}, +)$ 与 $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ 通过指数映射 e^x 同构.
6. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ 与 $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ 不同构, 因为前者 $x^2 = 1$ 有两个解, 而后者只有一个.
7. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ 与 $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ 不同构, 因为基数不同.
8. $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ 与 $(\mathbb{Q}, +)$ 不同构, 因为后者可以任意开 n 次方 (对于加法就是除以 n), 而前者不行.

9. (9.12) 中第一第二第四第五个群分别同构于 $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_5$，而 Klein 四元群与 $\mathbb{Z}_4$ 不同构.

以及一些抽象的例子.

1. H 是群 G 的子群，则包含映射 $\iota: H\to G, h\mapsto h$ 是单同态，此时改称 ι 为**包含同态**；此时 $\operatorname{Ker}\iota=\{1\}$, $\operatorname{Im}\iota=H$.

2. G/N 是群 G 的商群，则自然映射 $\pi: G\to G/N, x\mapsto xN$ 是满同态，此时改称 π 为**自然同态**；此时 $\operatorname{Ker}\pi=N$, $\operatorname{Im}\pi=G/N$.

3. 群 G 的恒等映射 $\mathrm{id}_G: G\to G, x\mapsto x$ 是同构；此时 $\operatorname{Ker}\mathrm{id}=\{1\}$, $\operatorname{Im}\mathrm{id}=G$.

4. 群同态 $\varphi: G_1\to G_2$, $\psi: G_2\to G_3$，则 $\psi\circ\phi: G_1\to G_3$ 也是群同态.

5. 对于群 G, $G\cong G$；若群 $G_1\cong G_2$，则 $G_2\cong G_1$；若群 $G_1\cong G_2$, $G_2\cong G_3$，则 $G_1\cong G_3$.

6. 已知群 G, $c\in G$，则左平移作用 $G\to G, x\mapsto cx$ **不是**同构，除非 $c=1$.

7. 已知群 G，取逆 $\nu: G\to G, x\mapsto x^{-1}$ **不是**同构，除非 G 是 Abel 群.

定义 9.35 (核, 像) 已知群同态 $\varphi: G_1\to G_2$，记

(1) $\operatorname{Ker}\varphi=\varphi^{-1}(1)=\{x\in G:\varphi(x)=1\}=\varphi^{-1}(1)$ 称为 φ 的**核 (kernel)**.

(2) $\operatorname{Im}\varphi=\varphi(G_1)=\{\varphi(x):x\in G\}$ 称为 φ 的**像 (image)**.

命题 9.36 群同态 $\varphi: G_1\to G_2$，则

(1) $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 G_1 的正规子群；

(2) $\operatorname{Im}\varphi$ 是 G_2 的子群；

(3) $\operatorname{Ker}\varphi = \{1\} \iff \varphi$ 是单同态;

(4) $\operatorname{Im}\varphi = G_2 \iff \varphi$ 是满同态.

证明 (1) 先说明 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是子群, 注意到

$$\varphi(x) = 1, \varphi(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(xy^{-1}) = 1$$

再说明是正规子群,

$$\forall x \in G_1, k \in \operatorname{Ker}\varphi, \varphi(xkx^{-1}) = \varphi(x)1\varphi(x^{-1}) = 1$$

故 $xkx^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, 即 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是正规子群.

(2) 因为 $\varphi(x)\varphi(y)^{-1} = \varphi(xy^{-1})$, 从而成为子群.

(3) 需要稍微验证的是 $\Rightarrow$ 方向.

$$\begin{array}{ccc}
\varphi(x) = \varphi(y) & \iff & \varphi(xy^{-1}) = 1 \\
 & & \Updownarrow \\
 & & xy^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi \\
 & & \Updownarrow \\
x = y & \iff & xy^{-1} = 1
\end{array}$$

(4) 常识. □

回忆 (5.9), 群同态有更好的刻画.

命题 9.37 对于两个群 G_1, G_2, 映射 $\varphi : G_1 \to G_2$, 记 $\pi : G_1 \to G_1/\operatorname{Ker}\varphi$ 为自然映射, $\iota : \operatorname{Im}\varphi \to G_2$ 为包含映射, 则

(1) 存在唯一的满同态 $\bar{\varphi} : G_1 \to \operatorname{Im}\varphi$ 使得 $\iota \circ \bar{\varphi} = \varphi$.

(2) 存在唯一的单同态 $\tilde{\varphi} : G_1/\operatorname{Ker}\varphi \to G_2$ 使得 $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

(3) 存在唯一的同构 $\hat{\varphi} : G/\operatorname{Ker} \to \operatorname{Im}\varphi$ 使得 $\iota \circ \hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, bend left, "\bar{\varphi}"] & Y \\
X/\sim \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[ur, bend left, "\tilde{\varphi}"] & I \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

证明 我们只证明同构的结论, 其余是类似的. 不妨直接验证, 下列函数

$$\hat{\varphi} : G_1/\operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi \qquad x\operatorname{Ker}\varphi \longmapsto \varphi(x)$$

是良定义的, 因为

$$x\operatorname{Ker}\varphi = y\operatorname{Ker}\varphi \iff xy^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(xy^{-1}) = 1 \iff \varphi(x) = \varphi(y)$$

这还顺便证明了 $\hat{\varphi}$ 是单射. 且满射是显然的. 从而 $\hat{\varphi}$ 是双射. 而

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(x\operatorname{Ker}\varphi \cdot y\operatorname{Ker}\varphi) = \hat{\varphi}(xy\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(xy) \\ \hat{\varphi}(x\operatorname{Ker}\varphi)\hat{\varphi}(y\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \end{cases}$$

这说明 $\hat{\varphi}$ 是同态, 从而得证. □

推论 9.38 (群同构基本定理) 对于两个群 G_1, G_2, 映射 $\varphi : G_1 \to G_2$, 则

$$G_1/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im} G_2 \qquad x\operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(x)$$

定理 9.39 (第一群同构定理) 已知群 G, 正规子群 N, K, 且 $K \subseteq N$, 则

$$G/N \cong (G/K)/(N/K)$$

证明 方便起见, 记 $\pi : G \to G/K$ 为自然映射. 作映射

$$\varphi : G/K \longrightarrow G/N \qquad xK \longmapsto xN$$

因为 $K \subseteq N$, 从而

$$xK = yK \iff xy^{-1} \in K \quad \Rightarrow \quad xy^{-1} \in N \iff xN = yN$$

故是良定义的满同态, 我们只需要计算 $\operatorname{Ker}\varphi$. 注意到

$$xN = N \iff x \in N \iff xK \in \varphi(N) = N/K$$

故根据 (9.38), $G/N \cong (G/K)/(N/K)$. □

第一群同构定理表明在同构意义下, 商群的商群还是商群.

定理 9.40 (第二群同构定理) *已知群 G, 子群 $H \le G$, 正规子群 $N \trianglelefteq G$, 则*

$$HN/N \cong H/H \cap N$$

证明 几个 (9.22) 的结论保证了 HN 是群, N 是 HN 的正规子群, $H \cap N$ 是 H 的正规子群. 作映射

$$\varphi : H \longrightarrow G/N \qquad a \longmapsto aN$$

这是投影映射的限制. 容易计算 $\operatorname{Ker}\varphi = H \cap N$. 此时,

$$\operatorname{Im}\varphi = \{aN : a \in H\} = \{aN : a \in HN\} = HN/N$$

故根据 (9.38), $HN/N \cong H/H \cap N$. □

第二群同构定理表明了子群的商群结构.

⋙⋙ 习题 §9.4 ⋘⋘

习题 9.27 *已知群 G, $N \trianglelefteq G$, 设 π 为 $G \to G/N$ 的自然同态.*

(1) 若 $N \le H \le G$, $A \subseteq G$. 求证:

$$\pi(A \cap H) = \pi(A) \cap \pi(H)$$

而没有 $N \le H$ 的条件下一般不成立.

(2) 若 $\overline{X} \subseteq G/N$, 求证:

$$\pi^{-1}(\overline{X}) = \bigcup_{xH \in \overline{X}} xH$$

(3)$A \subseteq G$, $\overline{B} \subseteq G/N$. 求证:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = AN \quad \pi(\pi^{-1}(\overline{B})) = \overline{B}$$

(3)$A, B \subseteq G$, 求证:

$$\pi(A) = \pi(B) \iff AN = BN$$

问题 9.28 (群同构第三定理) 已知群 G, $N \trianglelefteq G$, 设 π 为 $G \to G/N$ 的自然同态. 求证:

(1) 任何 G/N 的子群都是 G 的某个子群在 π 下的像.

(2) 任何 G/N 的正规子群都是 G 的某个正规子群在 π 下的像.

问题 9.29 (自同构群) 已知群 G, 记所有 G 到自身的同构组成的集合为 $\operatorname{Aut} G$, 这被称为 **自同构 (automorphism) 群**.

(1) 验证: $\operatorname{Aut} G$ 是一个群.

(2) 回忆共轭 (9.14), 求证: 对任何 $c \in G$, $x \mapsto cxc^{-1}$ 都是自同构. 这被称为 **内 (inner) 自同构**.

(3) 求证: 全体内自同构组成 $\operatorname{Aut} G$ 的正规子群.

(4) 回忆中心的概念 (习题9.12), 求证: 内自同构群 $\cong G/Z(G)$. (提示: 证明 $\operatorname{Ker}[G \to \operatorname{Aut} G, \quad c \mapsto [x \mapsto cxc^{-1}]] = Z(G)$.)

(5) 回忆中心的概念 (习题9.12) 若 $Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G, xg = gx\} = \{1\}$, 求证:

$$Z(\operatorname{Aut} G)\{\varphi \in \operatorname{Aut} G : \forall \sigma \in \operatorname{Aut} G, \varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi\} = \{\mathrm{id}\}$$

(提示: 利用内自同构 $g \mapsto xgx^{-1}$.)

习题 9.30 (反同构) 将 (9.33) 中的同态映射的定义改为

$$\forall a, b \in G, \varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$$

则对应于同态和同构分别称之为 **反同态** 和 **反同构**.

(1) 验证下列两个例子是反同构.

(a) 已知群 G,

$$\begin{aligned} \nu : \quad G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

(b) 矩阵群的转置.

(2) 回忆 (2.28) 对反运算的定义, 求证: $(G, \cdot)$ 与 $(H, \cdot)$ 反同构当且仅当 $(G, \cdot)$ 与 $(H, \cdot^{op})$ 同构.

问题 9.31 对于加法群 $(\mathbb{R},+)$ 考虑任何一个无理数 r, 记 $r\mathbb{Z}=\{rn|n\in\mathbb{Z}\}$, 按群的同构定理有

$$r\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\cap r\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}+r\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$$

而 $\mathbb{Z}\cap r\mathbb{Z}=\{0\}$, 从而 $r\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\cap r\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$. 但由习题*6.9*知, $\mathbb{Z}+r\mathbb{Z}$ 是稠密的. 且可以验证 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的自然映射是连续的, 从而 $(\mathbb{Z}+r\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是稠密的.

这与群的第二同构定理矛盾吗? 为什么?

9.5 群的直积

下面我们在群的 Cartesius 积上赋予群的结构.

定义 9.41 (二元直积) 已知群 G_1,G_2, 在 $G_1\times G_2$ 上定义运算

$$(g_1,g_2)(g_1',g_2')=(g_1g_1',g_2g_2')$$

作成一个群, 称为 G_1 与 G_2 的 **直积 (direct product)** , 记为 $G_1\times G_2$.

定义 9.42 (有限直积) 已知群 $G_1,G_2,\ldots,G_n$, 可以递归地定义有限个群的 **直积** 如下

$$G_1\times G_2\times G_3\times\ldots\times G_n=(G_1\times G_2)\times G_3\times\ldots\times G_n$$

化为 $n-1$ 的情况.

定义 9.43 (一般直积) 已知一族群 $\{G_i\}_{i\in I}$, 在 $\prod_{i\in I}G_i$ 上定义运算

$$(g_i)_{i\in I}(g_i')_{i\in I}=(g_ig_i')_{i\in I}$$

这成为一个群, 称为 $\{G_i\}_{i\in I}$ 的 **直积** .

下面, 我们主要用到有限直积的情况. 对于一个群 G 如果同构于 $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$, 那么必然有 G 的 n 个子群分别与对应同构

$$\overline{G_1}=\{(g_1,1,\ldots,1):g_1\in G_1\},\ldots,\overline{G_n}=\{(1,1,\ldots,g_n):g_n\in G_n\}$$

同构, 我们的问题是反过来, 给定 n 个子群, 何时 G 同构于这 n 个子群的直积?

定理 9.44 已知群 G, 正规子群 N_1, N_2, 满足

$$N_1 \cap N_2 = \{1\} \qquad N_1N_2 = G$$

则 $G \cong N_1 \times N_2$.

证明 作

$$\varphi : N_1 \times N_2 \longrightarrow G \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1x_2$$

对于 $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$,

$$x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1} \in \begin{cases} x_1N_2x_1^{-1}N_2 = N_2 \\ N_1x_2N_1x_2^{-1} = N_1 \end{cases}$$

故 $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1} \in N_1 \cap N_2 = \{1\}$, 即 $x_1x_2 = x_2x_1$, 这样 N_1 与 N_2 中的元素交换, 从而

$$\varphi(x_1, x_2)\varphi(y_1, y_2) = x_1x_2y_1y_2 = x_1y_1x_2y_2 = \varphi(x_1y_1, x_2y_2)$$

故 φ 是同态. 因为 $N_1N_2 = G$, 故是 φ 满射, 下面验证 $\operatorname{Ker}\varphi = \{1\}$, 若

$$x_1x_2 = 1 \iff x_1 = x_2^{-1} \iff x_1 = x_2 = 1$$

因为 $x_1 = x_2^{-1} \in N_1 \cap N_2$. 命题得证. □

定理 9.45 已知群 G, 正规子群 $N_1, N_2, \ldots, N_m$, 满足

$$\forall x \in G, \exists! x_i \in N_i, \text{s.t. } x = x_1x_2\ldots x_m$$

则 $G \cong N_1 \times \ldots \times N_m$.

证明 作

$$\varphi : N_1 \times \ldots \times N_m \longrightarrow G \qquad (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto x_1 \ldots x_m$$

如果能够证明这是同态, 那么根据存在唯一性, 上述映射是双射, 那么就形成同构.

下面证明这是同态. 类似 (9.44) 的证明, 我们只需要证明 $N_i \cap N_j = \{1\}$, 当 $i \neq j$ 时. 因为若 $x \in N_i \cap N_j \setminus \{1\}$, $1 = xx^{-1}$ 就是 1 的另一种表示方法, 从而矛盾. □

推论 9.46 已知群 G, 正规子群 $N_1, N_2, \ldots, N_m$, 满足

$$G = N_1 N_2 \ldots N_m \qquad \exists! x_i \in N_i, \mathrm{s.\,t.}\, 1 = x_1 x_2 \ldots x_m$$

则 $G \cong N_1 \times \ldots \times N_m$.

证明 类似 (9.44) 证明 (9.45). □

⋙⋙ 习题 §9.5 ⋘⋘

习题 9.32 若 $G = G_1 \times G_2$, 若记

$$\overline{G_1} = \{(x_1, 1) : x \in G_1\} \subseteq G \qquad \overline{G_2} = \{(1, x_2) : x \in G_2\}$$

求证:

$$G_2 \cong G/\overline{G_1} \qquad G_1 \cong G/\overline{G_2}$$

习题 9.33 (直和) 已知一族群 $\{G_i\}_{i \in I}$, 考虑

$$\bigoplus_{i \in I} G_i := \left\{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i : \text{只有有限的 } i \text{ 满足 } g_i \neq 1. \right\}$$

求证: $\bigoplus_{i \in I} G_i$ 是 $\prod_{i \in I} G_i$ 的子群. 这被称为**直和**.

习题 9.34 举例说明, 存在群 G 和三个正规子群 N_1, N_2, N_3, 且

$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 = \{0\} \qquad N_1 N_2 N_3 = G$$

(提示: 考虑 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的横轴 $\{(x, 0)\}$ 纵轴 $\{(0, x)\}$ 和对角线 $\{(x, x)\}$.)

问题 9.35 (Cauchy 列) 记

$$A = \left\{ \{a_n\} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \epsilon \in \mathbb{Q}^{+}, \exists N \in \mathbb{N}, \\ \forall m, n > N, |a_m - a_n| < \epsilon. \end{array} \right\}$$

即全体有理 *Cauchy* 列的集合. 令

$$B = \left\{ \{a_n\} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \epsilon \in \mathbb{Q}^{+}, \exists N \in \mathbb{N}, \\ \forall n > N, |a_n| < \epsilon. \end{array} \right\}$$

即全体收敛到 0 的数列的集合.

(1) 求证: $B \trianglelefteq A$;

(2) 求证: $B/A \cong \mathbb{R}$.

问题 9.36 若群 $G \cong G_1 \times G_2$, 通过将 G_1 等同于 $\{(x,1) : x \in G_1\}$. 我们可以认为 $G_1 \subseteq G$. 此时, 称 $G_1 \subseteq G$ 是 G 的**直和项 (summand)** .

(1) 求证: G 正规子群 H 是直和项当且仅当, 存在子群 N 使得 $H \cap N = \{1\}, NH = G$.

(2) 求证: 若正规子群 K, N 满足 $K \subseteq N \subseteq G$, 若 K 是 G 的直和项, 则 K 是 N 的直和项. (提示: 证明: 若 $G \cong K \oplus H$, 则 $N \cong K \oplus (H \cap N)$, 当中的 $\cong$ 都是"自然"同构. 这是因为 $K(H \cap N) = (KH) \cap N = G \cap N = N$, 参见习题9.11.)

问题 9.37 回忆 §*2.3*介绍的泛性质 *(2.22)* 和 *(2.23)*, 群的直积也可以有类似的性质. 对于一族群 $\{A_i\}_{i \in I}$, 则

$$(P, \{\pi_i\}) \quad \left| \quad \text{直积} P = \prod_{i \in I} A_i, \pi_i : P \to A_i \text{是投影同态} \right.$$

满足如下的泛性质

$$\begin{array}{l|l} \forall \text{群 } X, \forall \text{一族群同态 } \{\varphi_i : X \to A_i\} & \\ \exists ! \text{群同态 } \lambda : X \to P & \\ \quad \text{s.t.} \quad \forall i \in I, \pi_i \circ \lambda = \varphi_i & \end{array}
\qquad
\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ P \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

且满足上述性质的 $(P,\{\pi_i\})$ 之间必然可以建立同构，具体来说，若

$$(P,\{\pi_i\}),(P',\{\pi_i'\})$$

满足上述泛性质，则存在同构 $\alpha : P \to P', \beta : P' \to P$，使得

$$\begin{aligned} \alpha\circ\beta &= \mathrm{id}_{P'} \\ \beta\circ\alpha &= \mathrm{id}_P \\ \pi_i\circ\beta &= \pi_i' \\ \pi_i'\circ\alpha &= \pi_i \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[d, shift left, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\pi_i'"] & \\ P \arrow[u, shift left, dashed, "\alpha"] \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

也就是说，把“集合”换成“群”，“映射”换成“同态”，“*Cartesius* 积”换成“直积”，上述泛性质也对.

9.6 对称群

回忆 (9.12) 对对称群的定义.

定义 9.47 (对称群) 当 $X=\{1,\ldots,n\}$ 时，记 $\mathfrak{S}_X$ 为 $\mathfrak{S}_n$. 称其中元素为 **置换 (permutation)** 或排列，对称群的子群被称为 **置换群**.

命题 9.48 $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

证明 乘法原理. □

为了方面描述，我们介绍一些记号.

定义 9.49 对于 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$，记

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

且忽略列与列之间的顺序.

忽略顺序指的是，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

命题 9.50 若 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ x & y & \dots & z \end{pmatrix}$, 则

(1) $\tau\sigma = \begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ \tau(x) & \tau(y) & \dots & \tau(z) \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(a) & \tau(b) & \dots & \tau(c) \\ x & y & \dots & z \end{pmatrix}$.

(3) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & \dots & z \\ a & b & \dots & c \end{pmatrix}$.

证明 直接计算. □

另一种方式是轮换的记号.

定义 9.51 (轮换, 对换) 对于 $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$, k 个不同的数, 记

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_k \\ a_2 & \dots & \dots & a_k & a_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

其中没有被写出的数都保持不变, 称为一个 **k-轮换 (cycle)**. 特别地, 称 2-轮换为 **对换**, 用 $(1) = (2) = \dots = (n)$ 来表示恒等映射.

如果两个轮换没有重复的元素, 我们称其为 **不相交 (disjoint) 轮换**. 显然, 两个不相交轮换是可以交换的.

命题 9.52 每个置换都可表为不相交轮换之积, 且在不计顺序的意义下, 表法是唯一的.

证明 在 $\{1, \dots, n\}$ 上定义容易验证是等价关系的等价关系,

$$i \sim j \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \mathrm{s.t.}\, i = \sigma^k(j)$$

则容易验证 σ 在每个等价类上的限制都是轮换, 记为 $(a_1, \dots, a_k)$, 再叠乘便得存在性.

若 σ 分解为不相交轮换 $(a\dots b)(x\dots y)\dots(p\dots q)$, 则上述等价关系确立的划分为

$$\{\{a,\dots,b\},\{x,\dots,y\},\dots,\{p,\dots,q\}\}$$

而 σ 从而在每个等价类上的作用都是轮换, 这些轮换的叠乘法反过来会确定原本的置换, 从而被唯一决定. □

这个定理应当是容易想象的, 先任意选择一个元素, 找这个在这个置换下的像, 然后继续找像的像, 一直下去, 直到回到这个元素. 若其他元素还有变动, 则继续重复操作即可. 唯一性也是显而易见, 因为若有不同则可立刻导出置换不同.

命题 9.53 每个置换都可表为一些对换之积.

证明 因为 (9.52) 确保了置换是一些轮换的乘积, 只需要证明轮换是一些对换的乘积即可, 因为 $(abc\dots yz)=(az)(ay)\dots(ac)(ab)$. □

补充 9.54 (交错群) 事实上, 每个置换分解成对换之积时, 这些对换数目的奇偶性是唯一的. 这个论证需要一些技巧. 可以采取逆序数的论证方式, 记

$$\delta(\sigma)=\sum_{1\le i<j\le n}\begin{cases}1 & \sigma(i)>\sigma(j)\\ 0 & \sigma(i)<\sigma(j)\end{cases}=\#\{(i,j):i<j,\sigma(i)>\sigma(j)\}$$

为逆序数, 再记 $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{\delta(\sigma)}$.

若 σ 与一个对换 (ab) 复合为 $\sigma'=(ab)\sigma$, 则

$$\operatorname{sgn}(\sigma')=-\operatorname{sgn}(\sigma)$$

这是因为交换 a,b, 将 a,b 之间的所有数和 a,b 的大小关系改变, 判断变号偶数次, 再加上 a,b 自身的大小关系改变, 再变号一次. 从而其对换的数目的奇偶性将由 $\operatorname{sgn}\sigma$ 的负正性决定.

对于对称群 $\mathfrak{S}_n$, 若置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 能够分解成偶 (奇) 数个对换的乘积, 则称 σ 为**偶 (奇) 置换**. 记所有偶置换为 $\mathfrak{A}_n$, 这构成一个群, 这被称为**交错群** $\mathfrak{A}_n$.

实际上, 偶置换的一大特点就是任何偶置换都可以写成一些 3-轮换的乘积. 因为例如 $(12)(23) = (123)$, $(12)(34) = (314)(123)$.

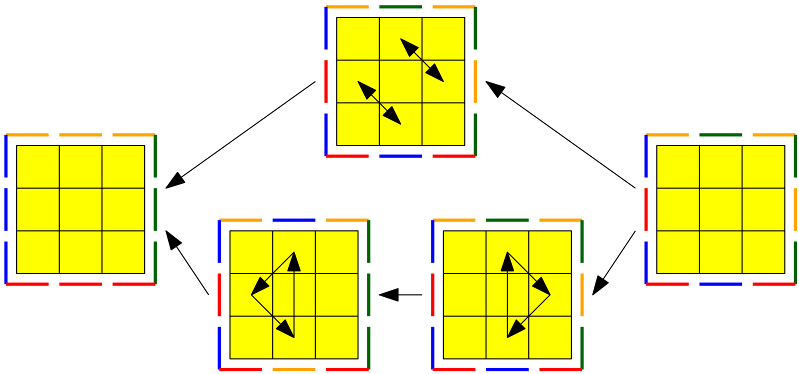


图 9.1: $(12)(34) = (314)(123)$

于是

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ 是偶置换} \\ -1 & \sigma \text{ 是奇置换} \end{cases}$$

容易验证, sgn 是一个同态, 而 $\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} = \mathfrak{A}_n$. 从而 $n > 2$ 时, $|\mathfrak{A}_n| = n!/2$.

下面我们来说明如何用群去描述对称性.

我们称一个 “结构” 的对称群指的是保持结构不变的双射组成的集合.

例 9.55 下面研究汉字 “田” 的对称性群. 如下图给 “田” 的顶点标号, 则置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

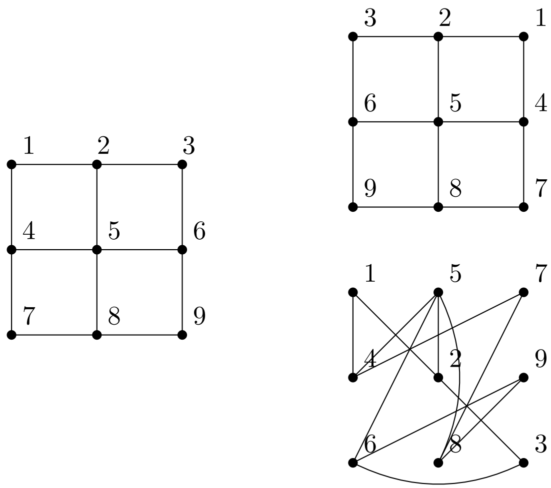


图 9.2: “田” 的对称性

在 “田” 的对称群中, 但

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 9 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

不在.

可以确定, “田” 的对称性群包括旋转 (四个角度), 对称 (四条对称轴). 类似地, “日” 的对称性包括旋转 (两个角度), 对称 (两条对称轴), 故 “田” 的对称性强于 “日” 的对称性.

例 9.56

再如 “H” 的对称性群, 如下图给 “H” 的顶点标号, 则置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

在 “H” 的对称群中, 但

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

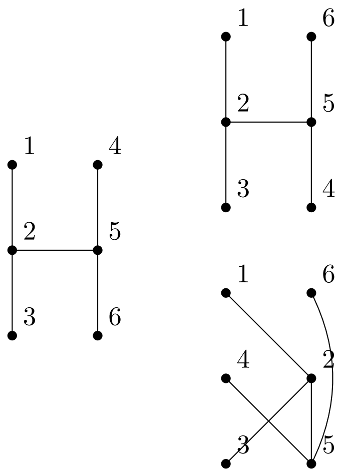


图 9.3: “H” 的对称性

不在.

更多地, 保持线性空间的线性关系不变的全体双射即全体可逆矩阵. 保持欧式空间线性关系和长度不变的全体双射即全体正交矩阵. 保持群的结构不变的全体双射 (即全体自同构) 就是自同构群, 见习题9.29.

评注 9.57 (Erlangen 纲领) *Klein 于 1872 发表作了题为《关于近代几何研究的比较考察》的论文演讲, 被后世称为 Erlanger 纲领. 内容是说一切几何都是研究变换群的不变量. 举例来说, Euclid 几何研究的是在旋转, 平移, 对称下的不变量, 这些变换构成一个变换群. 朴素的例子如平行还是平行, 三角形还是三角形.*

这一观点的回答了究竟有多少种 “几何” 的问题 —有多少种变换群, 就有多少种几何. 尽管这一观点颇为 “代数”, 但至少某种程度上定义了几何 (当然, 现在已经不会有人要求对几何学下定义), 且纲领也不是几何的完全概括, 但是不可否认其产生的重大影响.

≫≫≫≫ 习题 §9.6 ≪≪≪≪

习题 9.38 *正 n 面体群的对称性群被称为*二面体群*, 记为 D_{2n}. $(n \geq 3)$*

求证：

$$D_{2n} = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

其中元素 σ 表示旋转，τ 某一个翻转，且满足：

$$\sigma^n = \tau^2 = \tau\sigma\tau\sigma = 1$$

习题 9.39 设 A 表示欧式平面上的旋转和平移组成的集合；B 表示平移变换组成的集合；C 表示平移整数格组成的集合．求证：A, B, C 都是群，且

$$C \trianglelefteq B \trianglelefteq A \quad C \text{ 不是 } A \text{ 的正规子群}$$

习题 9.40 (Cayley 定理) 任何一个群都同构于一个对称群的子群．(提示：利用左平移作用)

习题 9.41 (15 拼板问题) *15* 平板问题是一个经典的小游戏，将一个拼版分成如下图所示的 4×4 共 16 小块，拿去一块后编号，这被称为初始状态．然后允许每一块在这个正方性内部如华容道般移动，即与空缺处邻接的块可以和空缺处交换位置．如下图

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\Rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	14	15	12

$\Rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		11
13	14	15	12

图 9.4: 15 拼板问题

(1) 求证：下图所示情况不能被还原为初始状态．(提示：将空缺看成 16，每次移动都是和 16 的对换，证明对换了偶数次才可能将 16 移动回原来的位置，从而必须是偶置换．)

(2) 若某状态 X，空缺处在右下角，剩余 *15* 块板是初始状态的一个置换 σ．求证：$\sigma \in \mathfrak{A}_{15} \iff X$ 可以被还原为初始状态．

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

图 9.5: 1514 问题

刁题 9.42 证明: 对于无限群 X, $|\mathfrak{S}_X| = |2^X|$. (提示: 考虑 $\operatorname{Fix}\sigma = \{x \in X : \sigma(x) = x\}$, 证明, 除非 X 的子集的余集是单点集, 这个子集总是某个置换的 Fix. 这需要利用 (3.21). 然后论证需要 (3.25) 和 (3.23), 具体来说, 2^X 等势于 $2^X \setminus \{\{x\}^c : x \in X\}$ 与 $\{\{x\}^c : x \in X\}$ 之中的较大者, 而根据 Cantor 定理 (3.16) 保证后者不能是较大者.)

9.7 群作用简介

回忆 (2.31) 对作用的定义.

定义 9.58 (群作用) 已知群 G, 集合 X. G 左作用在 X 上, 为方便记为 $(g, x) \mapsto g \cdot x$, 满足

GrpAction1 $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$. *(单位律)*

GrpAction2 $\forall g, h \in G, x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. *(结合律)*

则称群 G 左作用在集合 X 上, 称之为**群作用 (action)**. 称 X 是一个 **G-集**.

方便时当然会采取更加直接的记号, 直接省略 $g \cdot x$ 的算符成为 gx.

定义 9.59 已知群 G, 集合 X. G 右作用在 X 上, 为方便记为 $(x, g) \mapsto x^g$, 满足

GrpAction1' $\forall x \in X, x^1 = 1$. *(单位律)*

GrpAction2' $\forall g,h\in G, x\in X, (x^g)^h = x^{gh}$. *(结合律)*

则称群 G **右作用** 在集合 X 上.

为了阐明, 我们常采用下面的函数式记法.

命题 9.60 已知群 G 左作用在 X 上, 对于 $g\in G$, 记 $\sigma_g : x\mapsto g\cdot x$, 则

(1) $\sigma_1 = \mathrm{id}_X$.

(2) $\sigma_g\circ\sigma_h = \sigma_{gh}$.

(3) $\forall g\in G$, σ_g 是双射. 且 $\sigma_g^{-1} = \sigma_{g^{-1}}$.

命题 9.61 已知群 G 右作用在 X 上, 对于 $g\in G$, 记 $\varsigma_g : x\mapsto x^g$, 则

(1) $\varsigma_1 = \mathrm{id}_X$.

(2) $\varsigma_g\circ\varsigma_h = \varsigma_{hg}$.

(3) $\forall g\in G$, ς_g 是双射. 且 $\varsigma_g^{-1} = \varsigma_{g^{-1}}$.

补充 9.62 回忆 *(2.32)* 将 X 在 Y 上到 Z 的作用等同于 X 到 Z^Y 的映射, 这里, 群 G 在 X 上的群作用实际上是 $G\to\mathfrak{S}_X$ 的同态, 因为按原本的等同, 作用等同于是 $G\to X^X$, 但是根据 *(9.60)*, σ 是双射, 所以可以看成 $G\to\mathfrak{S}_X$, 且保持乘法, 故为同态. 而反过来, 任何 $G\to\mathfrak{S}_X$ 的同态将其视为 $G\to X^X$ 的映射又能对应一个群作用, 这交给读者去验证.

下面我们所说的作用除非特别说明指的都是左作用.

定义 9.63 (轨道) 已知群 G 作用在 M 上, $x\in M$, 定义

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{y\in M \mid \exists g\in G, \mathrm{s.t.}\ x = g\cdot y\}\subseteq M$$

称为在 G 作用下 x 的 **轨道 (orbit)** .

命题 9.64 (轨道分解) 已知群 G 作用在 M 上, 则

$$M = \bigsqcup_x \mathrm{Orb}_G(x)$$

证明 只要证明, 关系

$$x \equiv y :\iff \exists g \in G, \mathrm{s.t.}\, x = g \cdot y$$

是等价关系, 从而轨道即等价类.

(1) 自返性: $x = 1 \cdot x \Rightarrow x \equiv x$;

(2) 对称性: $x = g \cdot y \Rightarrow y = g^{-1} \cdot x$;

(3) 传递性: $x = g \cdot y, y = h \cdot z \Rightarrow x = (gh) \cdot z$.

命题得证. □

上述证明中提及的 $\equiv$ 关系常被称为**同余关系**.

例 9.65 (左平移作用) 已知群 G, $g \in G$, **左平移作用**指的是

$$\sigma_g : x \mapsto gx$$

例 9.66 (右平移作用) 已知群 G, $g \in G$, **右平移作用**指的是

$$\varsigma_g : x \mapsto xg$$

例 9.67 (共轭作用) 已知群 G, $g \in G$, **共轭作用**指的是

$$\sigma_g : x \mapsto gxg^{-1}$$

例 9.68 已知集合 M, 群 $\mathfrak{S}_M$ 作用在 M 上, 作用指的是

$$\sigma_\varphi : x \mapsto \varphi(x) \quad \varphi \in \mathfrak{S}_M$$

例 9.69 (矩阵乘法) 回忆矩阵群的几个例子 *(9.9)*, n 阶一般线性群作用在 $\mathbb{R}^n$ 上, 作用指的是

$$\sigma_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

例 9.70 (数乘) $(\mathbb{Z},+)$ 作用在群 G 上, 作用指的是

$$\sigma_n : g \mapsto g^n$$

例 9.71 (函数平移) $(\mathbb{R},+)$ 作用在 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 上, 作用指的是

$$\sigma_a : f(x) \mapsto f(x+a)$$

例 9.72 (上半平面的全纯自同构群) 回忆 *(9.9)*. 2 阶特殊线性群

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}$$

作用在复平面 $\mathbb{C}$ 的上半平面

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

上, 作用指的是

$$\sigma_{\boldsymbol{A}} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

⋙⋙ 习题 §9.7 ⋘⋘

习题 9.43 验证本节的例子都是群作用.

第十章　环的基本概念

本章是环的讨论. 主要讨论环的基本构造, 最后会简单介绍一些多项式环以及模.

10.1　环的定义和例子

回忆半群的定义 (9.2).

定义 10.1 (环) 已知非空集合 R 和 R 上封闭的两个二元运算 "$+,\cdot$" 组成的对 $(R,+,\cdot)$, 满足

Rng1 $(R,+)$ 是一个 *Abel* 群, 其中记加法单位元为 0, 称为**零元**.

Rng2 $(R,\cdot)$ 是一个半群. *(结合律)*

Rng3 $\forall x,y,z\in R,\ \begin{cases} x(y+z)=xy+xz \\ (y+z)x=yx+zx \end{cases}.$ *(分配律)*

则称 $(R,+,\cdot)$ 为**环 (ring)**.

定义 10.2 (幺环) 若环 $(R,+,\cdot)$ 还满足

Ring $(R,\cdot)$ 是一个幺半群, 记乘法单位元为 1, 称为**单位元**或**幺元**或**么元**.

则称 $(R,+,\cdot)$ 为**幺环**.

定义 10.3 (交换环) *若环* $(R,+,\cdot)$ *还满足*

Comm $\forall x,y\in R, xy=yx.$ *(交换律)*

则称 $(R,+,\cdot)$ *为* **交换 (commutative) 环**.

应当说, 大部分数学家在做研究时都会直接假定环含单位元, Jacobson 则发明了一个新的单词 “rng” 来表示 “无幺环”, 取 identity 的 i 之意表示单位元, 但是这个词并不被广泛接受, 也尚无中文翻译[1]. 应当说, 并不是所有数学感兴趣的环都含幺, 因此为了展示一般的理论, 我们还是用一般的环来介绍, 但为了读者未来考虑, 我们会采用**无幺环**, **幺环**, 以及**环 (不必含幺)** 来描述.

同群论中一样下面加法默认为 $+$, 乘法默认为 $\cdot$, 零元为 0, 单位元 (如果有的话) 为 1.

为了方便, 记

$$na=\begin{cases}0 & ,n=0,\\ \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n} & ,n>0,\\ \underbrace{(-a)+(-a)+\ldots(-a)}_{|n|} & ,n<0.\end{cases}$$

同时, 在幺环中, 以 2 记 $1+1$, 3 记 $2+1$, 以此类推.

命题 10.4 *已知环 (不必含幺)*R, *则:*

(1) $\forall a\in R, 0a=a0=0.$

(2) $\forall a,b\in R,(-a)b=a(-b)=-(ab),(-a)(-b)=ab.$

(3) $\forall a,b\in R,(na)(mb)=(mn)(ab).$

证明 (1) 只证 $0a=0$,

$$0a=(0+0)a=0a+0a\Rightarrow 0a=0$$

[1] 或许可以翻译为 “坏”, 反正没有单位元的环也不好

(2) 只证 $(-a)b = -(ab)$,

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0 \Rightarrow (-a)b = -(ab)$$

(3) 只证明 $m, n \in \mathbb{N}^+$ 时, 剩余情况利用 (1),(2) 好证.

$$\begin{aligned}(na)(mb) &= (\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n})(\underbrace{b + b + \ldots + b}_{m}) \\ &= \underbrace{ab + ab + \ldots + ab}_{mn} = (mn)(ab)\end{aligned}$$

等号成立只需通过数数. □

补充 10.5 (Newton 二项式定理) 对于交换环 R, $x, y \in R$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 有如下的二项式公式

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

其中连加号是环上有限的加法, 二项式系数的定义为

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \in \mathbb{Z}$$

下面是一些环的例子.

例 10.6 (零环) 对于任何一个加法群 A, 定义 $xy = 0$, A 成为一个无幺环. 若要成为幺环, 则零元即幺元, 则所有元素皆为 0, 故 A 只有一个元素. 我们称这种环为零环.

例 10.7 有如下关于数的环

1. $\mathbb{Z}$ 对普通加法和乘法构成一个交换幺环, 零元为 0, 幺元为 1.
2. $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 构成一个交换幺环, 其中 $i^2 = -1$ 是虚数单位, 这被称为 **Gauss 整数环**.
3. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 对对普通加法和乘法构成一个交换幺环, 零元为 0, 幺元为 1.

4. $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ 对剩余类的加法和乘法 (回忆 (9.8)) 作成一个交换幺环, 零元为 $\overline{0}$, 幺元为 $\overline{1}$, 这被称为**剩余类环**.

5. $k\mathbb{Z} = \{kn : n \in \mathbb{Z}\}$ 对普通加法和乘法构成一个交换无幺环.

6. $k\mathbb{Z}_n = \{kn : n \in \mathbb{Z}_n\}$ 在 k 和 n 的最大公约数 $(k, n) > 1$ 时构成一个交换无幺环.

例 10.8 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 以及剩余类换 $\mathbb{Z}_n$ 上的多项式组成的集合

$$\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X], \mathbb{Z}_n[X]$$

都是交换幺环. 零元为零多项式 0, 幺元为多项式 1, 这被称为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n$ 上的**多项式环**.

例 10.9 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 以及剩余类换 $\mathbb{Z}_n$ 上的 $m \times m$ 级矩阵组成的集合

$$\mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_m(\mathbb{Q}), \mathbb{M}_m(\mathbb{R}), \mathbb{M}_m(\mathbb{C}), \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}_n)$$

都是幺环. 零元为零矩阵 $\boldsymbol{O}$, 幺元为单位阵 $\boldsymbol{I}$. 这被称为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n$ 上的**矩阵环**.

例 10.10 对于拓扑空间 X, 全体 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数 $\mathscr{C}(X)$, 对函数的乘法和加法构成交换环, 称为 X 上的**连续函数环**. 另外回忆连续函数环的拓扑含义 (6.78).

例 10.11 对于 Abel 群 A, 称同态 $\varphi : A \to A$ 是 A 的**自同态**, A 的全体自同态组成的集合 $\mathrm{End}(A) = \mathrm{Hom}(A, A)$ 上的加法和复合构成环, 具体来说

$$\begin{array}{rccclcrcccl} \varphi+\psi: & A & \longrightarrow & A & & \qquad\qquad & \varphi\psi: & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \varphi(x)+\psi(x) & & & & x & \longmapsto & \varphi(\psi(x)) \end{array}$$

其中 0 为平凡同态, 1 为恒等映射, 这被称为 Abel 群的**自同态 (endomorphism) 环**.

类似地, 对于 $\mathbb{R}$-线性空间 V, $\mathrm{End}\, V$ 上的加法和复合构成环, 如果 V 是有限维, 这就对应矩阵环.

补充 10.12 (特征) 对于幺环 R, 记

$$\operatorname{Char} R=\min\{n\in\mathbb{Z}_{>0}: n\cdot 1=0\}$$

并舍弃 $\operatorname{Char} R=\infty$ 时的记号, 改记为 $\operatorname{Char} R=0$. 例如 $\operatorname{Char}\mathbb{Z}_n=n, \operatorname{Char}\mathbb{Z}=0$. 更一般地, 可以对无幺环 R 定义其特征为

$$\operatorname{Char} R=\min\{n\in\mathbb{Z}_{>0}: \forall x\in R, nx=0\}$$

同样舍弃 $\operatorname{Char} R=\infty$ 时的记号, 改记为 $\operatorname{Char} R=0$. 显然, 二者是相容的.

补充 10.13 (零因子, 单位, 幂零元, 幂等元) 对于环 R, 当中有一些特殊元, 值得我们关注

- 对于 $r\in R$. 若存在 $s\in R\setminus\{0\}$ 使得 $rs=0$, 则称 r 为**左零因子**; 若存在 $t\in R\setminus\{0\}$ 使得 $tr=0$, 则称 r 为**右零因子**. 左零因子右零因子合称为**零因子 (zero-divisor)**. 若交换幺环 R 只有 0 是零因子, 则称 R 为**整环 (integer domain)**. 在有的材料中, 不认为 0 是零因子, 这样就可以称**无零因子**代替 "只有 0 是零因子".

- 此时限定 R 为幺环. 对于 $r\in R$. 若存在 $s\in R$ 使得 $rs=1$, 则称 s 为 r 的右逆, r **右可逆 (invertible)**; 若存在 $t\in R$ 使得 $tr=1$, 则称 t 为 r 的左逆, r 为**左可逆**. 若既左可逆又右可逆, 读者会论证所有左逆等于所有右逆, 此时称 r 为**单位 (unit)**. 容易验证, 全体单位构成一个群, 称为环 R 的**单位群**.

- 对于 $r\in R$, 若存在 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $r^n=0$, 则称 r 是**幂零元 (nilpotent)**. 在幺环中, 对一个幂零元 r, $1-r$ 必然是单位, 因为有著名的公式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots\qquad \text{有限和}$$

这说明幂零元和可逆相差很远, 或者说单位变动一个幂零元仍然是单位.

- 对于 $e \in R$, 若 $e^2 = e$, 则称 e 是**幂等元 (idempotent)**. 显然 $0, 1$ 都是幂等元. 读者会验证, 在幺环中, $e' := 1 - e$ 是唯一满足

$$e + e' = 1 \qquad ee' = e'e = 0$$

的元素, 且 e' 也是幂等元. 称 e' 为 e 的**互补 (complementary) 幂等元**.

⋙⋙ 习题 §10.1 ⋘⋘

习题 10.1 (Boole 代数) 回忆特征 *(10.12)*, 已知幺环 R, 每个元素都幂等, 即

$$\forall r \in R, r^2 = r$$

求证: R 为特征为 2 的交换环.

习题 10.2 对于环 R, $x, y \in R$, 求证:

(1)xy 左可逆, 则 y 左可逆.

(2)x^n 是单位, 则 x 是单位.

(3)x 左可逆而非右零因子, 则 x 是单位. (提示: $xyx = x$.)

习题☠ 10.3 在环 R 中, 若 $1 - xy$ 是单位, 则 $1 - yx$ 是单位. (提示: 考虑 $1 + y(1 - xy)^{-1}x$.)

习题☠ 10.4 (Kaglansky) 对于环 R, 若 $x \in R$ 只有有限的左逆则必然有右逆, 从而是单位. (提示: 若有左逆 y, 则 $z \mapsto 1 - xy + z$ 是左逆的一个置换, 从而那个映到 z 的左逆就是右逆.)

习题 10.5 求证: 整环的特征是 0 或素数. (提示: 否则合数 $ab = 0$, 这样 a, b 就是零因子.)

习题 10.6 在整环 R 中, 一个重要的特征是消去律成立. 求证:

$$ab = cb \iff a = c \text{ 或 } b = 0$$

习题 10.7 求证:

(1) 连续函数环 (10.10) 一般不是整环.

(2) 矩阵环一般不是整环.

(3) 整数环是整环.

(4) 剩余类环 $\mathbb{Z}_n$ 是整环当且仅当 n 是素数.

习题☠ 10.8 在幺环 R 中, 定义关系

$$\begin{aligned} x|y &\iff \exists a\in R, \text{s. t. } x=ay \\ x\sim y &\iff \exists \text{单位} u\in R, \text{s. t. } x=uy \end{aligned}$$

(1) 求证: $\sim$ 是等价关系, $|$ 是预序关系 (习题5.12).

(1) 对于整环 R, 求证: $x|y, y|x \iff x\sim y$.

(2) 对于矩阵环 $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, 求证: $\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X} \iff \boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{Y}$. (提示: 这是线性代数的经典习题, 也就是说, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 使得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Y} \qquad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}$$

则存在可逆阵 $\boldsymbol{W}$ 使得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}$. 引入不定元 X, 则

$$(1+X\boldsymbol{V})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{V}+X)\boldsymbol{Y}$$

证明可以取 X 使得避过 $\det(1+X\boldsymbol{V})$ 和 $\det(\boldsymbol{V}+X)$ 所有的零点.)

问题 10.9 (数论函数的卷积) 考虑所有 $\mathbb{Z}_{\geq 1}\to\mathbb{R}$ 的函数 X, 这样的函数被称为**数论 (arithmetical) 函数**, 在 X 上定义两个函数的**卷积 (involution)**

$$(f*g)(n)=\sum_{k|n} f(k)g(n/k)=\sum_{kh=n} f(k)g(h)$$

并且约定自然的加法 $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$. 求证:

(1)X 对加法和卷积作成交换幺环, 其中幺元为

$$\delta(n):=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n\geq 2 \end{cases}$$

(2) 证明 **Möbius 函数** μ 是常函数 1 的逆元. (提示: 事实上, 只有那些无平方因子的 $d|n$ 幸存, 这只需要对 n 的素因子计数, 然后利用常用的组合恒等式

$$1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}=1 \qquad k\geq 1$$

而 $k=1$ 时显然为 1.)

可能会用到的数论常识: *Möbius* 函数定义为

$$\mu(n):=\begin{cases}1 & n=1\\ (-1)^r & n \text{ 无平方因子, 是 } r \text{ 个不同素数的乘积}\\ 0 & n \text{ 含平方因子}\end{cases}$$

(3)(**Möbius 反转公式**)对于数论函数 f,g,

$$\sum_{d|n}f(d)=F(n) \iff \sum_{d|n}F(d)\mu(n/d)=f(n)$$

(提示: 记常函数 1 为 ι, 则 $f*\iota=F \iff F*\mu=f$, 这是显然的.)

10.2 子环与商环

定义 10.14 (子环) 对于环 *(不必含幺)*R 的一个非空子集 S 对 R 的运算也成为一个环, 那么称 S 为 R 的 **无幺子环** .

对于幺环 R, 还要求 $1\in S$, 才称之为 **子环 (subring)** .

例 10.15 有如下例子

- 对于幺环 R, $\{0\}$ 不是子环, 但是是无幺子环.
- 剩余类环 $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$ 中的 $\{\overline{0},\overline{3}\}$ 对剩余类的加法和乘法构成一个幺环, 但 $\{\overline{0},\overline{3}\}$ 不是子环, 只是无幺子环.
- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, 每一个包含关系都是子环关系.

- $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}[X]$ 的子环.
- $\mathbb{Z}$ 没有非平凡的子环, 所有无幺子环都形如 $n\mathbb{Z}$.
- 对于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ 上的所有上三角矩阵组成的子集 U 构成一个子环.

对子环的讨论在含幺无幺的问题是十分微妙, 我们不想作过多探讨. 下面是商环的讨论

定义 10.16 (理想) 已知环 *(不必含幺)*R, $(R,+)$ 的加法子群 $\mathfrak{A}$, 若

$$\forall r \in R, a \in \mathfrak{A}, \qquad ra, ar \in \mathfrak{A}$$

则称 $\mathfrak{A}$ 为 R 的**理想 (ideal)** .

倘若只要求 $ra \in \mathfrak{A}$, 则称 $\mathfrak{A}$ 为**左理想** , 只要求 $ar \in \mathfrak{A}$, 则称 $\mathfrak{A}$ 为**右理想** . 有时为了为了强调, 会称理想为**双边理想** .

显然, 对于幺环 R, 理想 $\mathfrak{A}$, 则 $1 \in \mathfrak{A} \iff R = \mathfrak{A}$.

定义 10.17 (商环) 已知环 R, 理想 $\mathfrak{A}$, 在 $(R,+)$ 的商集上

$$R/\mathfrak{A} = \{r + \mathfrak{A} : r \in R\}$$

可以再定义乘法为

$$(x + \mathfrak{A}) \cdot (y + \mathfrak{A}) = xy + \mathfrak{A}$$

称为环 R 模去 $\mathfrak{A}$ 的**商环 (quotient ring)** , 其中零元为 $0 + S = S$.

有时还会采取数论的记法, 改记 $x + \mathfrak{A}$ 为 $x \bmod \mathfrak{A}$, 而 $x + \mathfrak{A} = y + \mathfrak{A}$ 则改记为 $x \equiv y \mod \mathfrak{A}$.

例 10.18 对于交换幺环 $\mathbb{Z}$, 其任何无幺子环 *(都形如 $n\mathbb{Z}$)* 都是理想. 理想的包含关系揭示了数论中的整除关系, 数论的语言和事实通过环论的语言转换如下

$$\begin{array}{ccc}
a|b & \iff & b \in a\mathbb{Z} \iff a\mathbb{Z} \supseteq b\mathbb{Z} \\
a|b|c \Rightarrow a|c & & a\mathbb{Z} \supseteq b\mathbb{Z} \supseteq c\mathbb{Z} \Rightarrow a\mathbb{Z} \supseteq c\mathbb{Z} \\
a|b \Rightarrow a|bn & & b \in a\mathbb{Z} \Rightarrow bn \in a\mathbb{Z} \\
a \equiv b \mod n & \iff & a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}
\end{array}$$

注意到商环

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$$

因为乘法和 *(9.8)* 定义的乘法一模一样.

补充 10.19 (生成的理想) 同样, 对于一个环 R, 我们还可以定义子集 $S \subseteq R$ **生成的 (左, 右, 双边) 理想** . 这和 *(9.25)* 和 *(9.26)* 完全一样.

而且我们甚至可以直接写出来, 当 R 是幺环时, $S \subseteq R$ 生成的理想是

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i y_i : n \in \mathbb{N}, s_i \in S, x_i, y_i \in R \right\}$$

并且约定 $n = 0$ 时求和号为 0. 当 R 不是幺环时则要复杂一些, 是如下形如

$$\sum s + \sum xs + \sum sy + \sum xsy \qquad s \in S, x, y \in R$$

的元素组成的集合. 具体细节交给读者去验证. 生成的左, 右理想则是分别形如

$$\sum xs + \sum s \qquad \sum sy + \sum s \qquad s \in S, x, y \in R$$

其中由一个元素生成的理想被称为**主 (principal) 理想** , 对于 $a \in R$, 带入上面的公式, 其生成的主理想是 $RaR + Ra + aR + \mathbb{Z}a$. 特别地, R 是交换幺环时, a 生成的主理想就是 aR.

⋙⋙ 习题 §10.2 ⋘⋘

习题 10.10 下面说明为何商环如正文中所定义. 已知环 R 的商集 $R/\sim$ 还是环, 满足

$$[x] + [y] = [x + y] \qquad [x][y] = [xy]$$

其中 $[x]$ 是 x 所在的等价类. 求证:

(1)$[0]$ 是 R 的加法子群. (提示: 习题9.9已经替我们解决过了.)

(2)$[0]$ 是理想. (提示: 对于任何 $r \in R, x \in [0]$, 有 $[rx] = [r][x] = [r][0] = [0]$, 故 $rx \in [0]$, 同理 $xr \in [0]$.)

习题 10.11 对于幺环 R, 理想 $\mathfrak{A}$, 若某单位 $u\in\mathfrak{A}$, 则 $\mathfrak{A}=R$. (提示: 单位 u, 设其逆为 v, 则 $1=vu\in\mathfrak{A}$, 然后, 任意 $x\in R$, $x=x1\in\mathfrak{A}$.)

习题 10.12 在二元多项式环 $\mathbb{R}[X,Y]$ 中, 考虑

$$\mathfrak{a}=\{f\in\mathbb{R}[X,Y]:f\text{无常数项}\}$$

证明 $\mathfrak{a}$ 由多项式 X,Y 生成, 且不是主理想.

问题 10.13 (极大理想) 对于非零幺环 R, 理想 $\mathfrak{M}$ 被称为是**极大理想**, 如果对任何理想 $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{A}\subseteq R\iff\mathfrak{M}=\mathfrak{A}\text{或}\mathfrak{A}=R$$

(1) 证明: 每个环都存在极大理想. (提示: 考虑 R 中所有 $\neq R$ 的理想, 这样, 任何一条包含链 $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ 的并都是理想, 并且因为 $1\notin\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$, 从而并 $\neq R$, 这就证明了每条链都有上界, 这样就可以运用 Zorn 引理了.)

(2) 证明: 每个理想 $\mathfrak{A}\neq R$, 都存在极大理想 $\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{M}$. (提示: 如出一辙.)

10.3 环同态

定义 10.20 (同态, 同构) 已知环 *(不必含幺)*R_1,R_2, 设映射 $\varphi:R_1\to R_2$, 若

$$\forall a,b\in R_1,\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

称 φ 为 R_1 到 R_2 的**无幺同态 (homomorphism)** .

若 R_1,R_2 都是幺环还要求 $\varphi(1)=1$, 才称之为**同态** .

并且

- 若 φ 为满射, 称 φ 为 R_1 到 R_2 的**(无幺) 满同态** .

- 若 φ 为单射, 称 φ 为 R_1 到 R_2 的 **(无幺) 嵌入** 或 **(无幺) 单同态**.
- 若 φ 为双射, 称 φ 为 R_1 到 R_2 的 **(无幺) 同构**, 记为 $\varphi : R \cong H$.

定义 10.21 (核, 像) 已知环同态 $\varphi : R_1 \to R_2$, 记

(1) $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(1) = \{x \in R : \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(0)$ 称为 φ 的 **核 (kernel)**.

(2) $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(R_1) = \{\varphi(x) : x \in R\}$ 称为 φ 的 **像 (image)**.

下面和群的版本如出一辙, 首先当我们忘记乘法, 下面大部分的同构都已经成立, 剩下的只是验证乘法结构, 和在含幺时验证单位元的像, 这都十分好验证, 故不再赘述.

命题 10.22 环同态 $\varphi : R_1 \to R_2$, 则

(1) $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 R_1 的理想.

(2) $\operatorname{Im}\varphi$ 是 R_2 的子环.

(3) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \iff \varphi$ 是单同态.

(4) $\operatorname{Im}\varphi = R_2 \iff \varphi$ 是满同态.

回忆 (5.9).

命题 10.23 对于两个 *(无)* 幺环 R_1, R_2, 映射 $\varphi : R_1 \to R_2$, 记 $\pi : R_1 \to R_1/\operatorname{Ker}\varphi$ 为自然映射, $\iota : \operatorname{Im}\varphi \to R_2$ 为包含映射, 则

(1) 存在唯一的 *(无幺)* 满同态 $\bar{\varphi} : R_1 \to \operatorname{Im}\varphi$ 使得 $\iota \circ \bar{\varphi} = \varphi$.

(2) 存在唯一的 *(无幺)* 单同态 $\tilde{\varphi} : R_1/\operatorname{Ker}\varphi \to R_2$ 使得 $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

(3) 存在唯一的 *(无幺)* 同构 $\hat{\varphi} : R/\operatorname{Ker} \to \operatorname{Im}\varphi$ 使得 $\iota \circ \hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, bend left, "\bar{\varphi}"] & Y \\
X/\sim \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] \arrow[ur, bend left, "\tilde{\varphi}"] & I \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

推论 10.24 (环同构基本定理) 对于两个 (无) 幺环 R_1, R_2, (无幺) 同态 $\varphi : R_1 \to R_2$, 则

$$R_1/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im} R_2 \qquad x\operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(x)$$

定理 10.25 (第一环同构定理) 已知 (无) 幺环 R, 理想 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, 且 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, 则

$$R/\mathfrak{B} \cong (R/\mathfrak{A})/(\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$$

定理 10.26 (第二环同构定理) 已知 (无) 幺环 R, (无) 幺子环 S, 理想 $\mathfrak{A} \trianglelefteq R$, 则

$$(S + \mathfrak{A})/\mathfrak{A} \cong S/S \cap \mathfrak{A}$$

⋙⋙ 习题 §10.3 ⋘⋘

习题 10.14 (Frobenius 自同态) 在一个特征为 $p > 0$ 的交换幺环 R 中, 求证:

$$F : R \longrightarrow R \qquad x \longmapsto x^p$$

是一个环同态, 这被称为 **Frobenius 自同态**. 并由此给出一个 *Fermat* 小定理 *(9.31)* 的另外证明. (提示: 即证明 $(x+y)^p = x^p + y^p$, 注意到 Newton 二项式公式 (10.5), 以及 $p \mid \binom{p}{i}$, 对任何 $1 < i < p$. 证明 Fermat 小定理只需要在 $\mathbb{F}_p$ 中利用 $x^p = (1 + \ldots + 1)^p = 1 + \ldots + 1 = x$.)

习题 10.15 回忆连续函数环 *(10.10)*, 对于拓扑空间 X, Y, 如果存在连续映射 $f : X \to Y$, 证明如下映射是环同态

$$\mathscr{C}(f) : \mathscr{C}(Y) \longrightarrow \mathscr{C}(X) \qquad g \longmapsto$$

10.4 环的直积

同样, 问题是如何在环的 Cartsuis 积上赋予直积.

定义 10.27 (二元直积) 已知环 (不必含幺)R_1, R_2, 在 $R_1 \times R_2$ 上定义运算

$$(r_1, r_2) + (r_1', r_2') = (r_1 + r_1', r_2 + r_2')$$
$$(r_1, r_2)(r_1', r_2') = (r_1 r_1', r_2 r_2')$$

作成一个环, 称为 R_1 与 R_2 的直积.

定义 10.28 (有限直和) 已知环 $R_1, R_2, \ldots, R_n$, 可以递归地定义有限个环的直和如下

$$R_1 \times R_2 \times R_3 \times \ldots \times R_n = (R_1 \times R_2) \times R_3 \times \ldots \times R_n$$

化为 $n-1$ 的情况.

定义 10.29 (一般直积) 已知一族环 $\{R_i\}_{i\in I}$, 在 $\prod_{i\in I} R_i$ 上定义运算

$$(r_i)_{i\in I}(r_i')_{i\in I} = (r_i r_i')_{i\in I}$$

这成为一个群, 称为 $\{R_i\}_{i\in I}$ 的直积.

对于幺环而言, 直积还是幺环, 单位元显然就是 $(1)_{i\in I}$.

下面和群论中的处理不同, 我们需要注意到, 对于直积 $R = R_1 \times \ldots \times R_n$, 容易验证投影映射 $\pi_i : R \to R_i$ 是满同态, 从而根据环同构基本定理 (10.24), 在同构意义下 $R_1, \ldots, R_n$ 都是 R 的商环. 我们下面的主要目的是为了找理想 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_2$ 使得 $R/\mathfrak{A}_i \cong R_i$.

定义 10.30 (理想的互素) 对于幺环 R, 理想 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 被称为是互素的, 如果 $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = R$.

显然, 这等价于, 存在 $a, b \in R$ 使得 $a + b = 1$.

互素来自于数论中的类比, 因为对于整数 m, n, 理想 $m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}$ 互素当且仅当 m, n 互素.

定理 10.31 (中国剩余定理, CRT) 设幺环 R, 理想 $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n$ 两两互素, 则

$$R/(\mathfrak{A}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{A}_n)\cong R/\mathfrak{A}_1\oplus\ldots\oplus R/\mathfrak{A}_n$$

证明 作

$$\varphi: R\longrightarrow R/\mathfrak{A}_1\oplus\ldots\oplus R/\mathfrak{A}_n\qquad x\longmapsto (x+\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n$$

则

$$x\in\operatorname{Ker}\varphi\iff\forall 1\leq i\leq n, x\in\mathfrak{A}_i\iff x\in\mathfrak{A}_1\cap\ldots\mathfrak{A}_n$$

故根据环同构基本定理 (10.24), 下面我们只要论证 $\operatorname{Im}\varphi=R/\mathfrak{A}_1\oplus\ldots\oplus R/\mathfrak{A}_n$. 若记

$$e_i=(0,\ldots,\underbrace{1+\mathfrak{A}_i}_{i},\ldots,0)\in R/\mathfrak{A}_1\oplus\ldots\oplus R/\mathfrak{A}_n$$

本质上, 我们只要对每个 i, 找 $x\in R$ 使得 $\varphi(x)=e_i$, 也就是找 x 使得

$$x\in\mathfrak{A}_1\quad\ldots\quad x\in 1+\mathfrak{A}_i\quad\ldots\quad x\in\mathfrak{A}_n$$

这样任何

$$r=(r_1+\mathfrak{A}_1,\ldots,r_n+\mathfrak{A}_n)\in R/\mathfrak{A}_1\oplus\ldots\oplus R/\mathfrak{A}_n$$

只要取 $x=r_1e_1+\ldots r_ne_n$, 那么 $\varphi(x)=r$. 由于对称性, 我们只要找 e_1, 由于 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{A}_i$ 互质 $(2\leq i\leq n)$, 这样

$$\exists b_i\in\mathfrak{A}_1, a_i\in\mathfrak{A}_i,\qquad b_i+a_i=1$$

考虑 $x=b_2\ldots b_n=(1-a_2)\ldots(1-a_n)$, 故

$$x\in 1+\mathfrak{A}_1\qquad x\in\mathfrak{A}_2\quad\ldots\quad x\in\mathfrak{A}_n$$

这样就找到了 x. □

推论 10.32 (中国剩余定理, 方程版本) 设幺环 R, 理想 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ 两两互素, 则任意 $r_1, \ldots, r_n \in R$, 则如下关于 X 的方程始终有解

$$\begin{cases} X \equiv r_1 \mod \mathfrak{A}_1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv r_n \mod \mathfrak{A}_n \end{cases}$$

注意这里采用了 *(10.17)* 的数论记号.

例 10.33 (数论中的中国剩余定理) 已知正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 两两互素, 则

$$\mathbb{Z}_{m_1 \ldots m_n} \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_n}$$

用方程的语言说, 即对于任意的整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 同余方程组

$$\begin{cases} X \equiv a_1 \mod m_1 \\ X \equiv a_2 \mod m_2 \\ \ldots \\ X \equiv a_n \mod m_n \end{cases}$$

必定有解, 且所有解模 $m_1 m_2 \ldots m_n$ 同余.

补充 10.34 (理想的乘积) 实际上, 对于环 R, 理想 I, J, 我们可以定义两个理想的乘积

$$I \cdot J := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J \right\}$$

其中 $n = 0$ 时 $\sum$ 约定为 0, 容易验证 $I \cdot J$ 也是一个理想, 实际上其是 $\{xy : x \in I, y \in J\}$ 的加法组合.

当 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 互素时, R 是交换环时, 我们可以证明 $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. 首先, 根据理想的定义

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$$

反之，假设 $1 = a + b$，$a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}$，从而任何 $r \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ 都有

$$r = r \cdot 1 = r(a+b) = ar + rb \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

因为 ar, rb 都在 $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ 之中.

上面对中国剩余定理的证明可以用理想进一步简化，如果 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ 两两互素，则 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$ 互质. 具体来说，

$$R = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \cdot \ldots (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_n) \subseteq \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$$

因为上式展开后为 $\mathfrak{A}_1$ 在左右边乘一串理想的和以及 $\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$.

这样证明可以进一步简化. 特别地，当 R 是交换环时，

$$\mathfrak{A}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$$

⋙⋙ 习题 §10.4 ⋘⋘

习题 10.16 考虑 $\mathbb{Z}$ 的理想 $n\mathbb{Z}$，注意到此时

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} n\mathbb{Z} = \{0\} \qquad \mathbb{Z}/\bigcap_{n=2}^{\infty} n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

但

$$\prod_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \qquad \because x = (1, 0, \ldots) \neq 0 \,\mathrm{s.t.}\, 2x = 0$$

这和中国剩余定理矛盾吗，为什么？

习题 10.17 考虑多项式 $f(X) = (X^2-2)(X^2-7)(X^2-14)$，这显然是一个在 $\mathbb{Q}$ 上无零点的多项式，但是我们要证明，对任何 n，$f(X)$ 在 $\mathbb{Z}_n$ 中恒有解. (提示：先证明，对任何素数 p, $p \nmid a$，若 $X^2 \equiv a \mod p$ 有解，则对任何 k，$X^2 \equiv a \mod p^k$ 都有解，然后利用中国剩余定理.)

可能会用到的数论知识：根据二次剩余的理论，对任何素数 $p \neq 2, 7$，

$$X^2 \equiv 2 \mod p \quad X^2 \equiv 7 \mod p \quad X^2 \equiv 14 \mod p$$

之中至少有一个有解, 而 $p=2$ 时, $X^2\equiv 7 \mod p$ 有解 $X\equiv 1$, $p=7$ 时, $X^2\equiv 2 \mod p$ 有解 $X\equiv 3$.

问题 10.18 (p 进数) 对于固定的素数 p, 考虑如下良定义的同态

$$\varphi_{i+1}:\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\qquad x \bmod p^{i+1}\mathbb{Z}\longmapsto x \bmod p^i\mathbb{Z}$$

这样形成一个

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\xleftarrow{\varphi_2}\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\xleftarrow{\varphi_3}\ldots\xleftarrow{\varphi_n}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\xleftarrow{\varphi_{n+1}}\ldots$$

求证*:*

$$\mathbb{Z}_p=\left\{(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}:\forall i\geq 1,\varphi_{i+1}(x_{i+1})=x_i\right\}$$

是一个环, 且通过 $x\mapsto(x \bmod p^i\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}_p$ 的单射, 但不是满射. (提示: 不会有元素映射到 $1,1+p,1+p+p^2,\ldots.$)

问题 10.19 考虑无幺环 R, 作集合 $R^1=\mathbb{Z}\times R$, 定义加法

$$(m,a)+(n,b)=(m+n,a+b)$$

定义乘法 *(*这和直积不同*)*

$$(m,a)(n,b)=(mn,mb+na+ab)$$

求证*:* R^1 是幺环, 且通过 $r\mapsto(0,r)$, 一个无幺环得以嵌入进入一个幺环.

习题 10.20 证明环的直积 $R=R_1\times\ldots\times R_n$ 的理想都形如

$$\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_n$$

其中 $\mathfrak{A}_i$ 是 R_i 的理想. (提示: 用 $e_i=(0,\ldots,\underbrace{1}_{i},\ldots,0)$ 左乘. 再利用 $1=\sum e_i$.)

问题 10.21 对于幺环 R, 若理想 $\mathbb{A},\mathfrak{B}$ 满足

$$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=\{0\}\qquad \mathfrak{A}+\mathfrak{B}=R$$

则 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 对 R 原本的加法和乘法作成一个幺环, 且 $R\cong\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$. (提示: 根据群的理论, 已经有作为加法群的直和. 假设 $e+f=1$, 其中 $e\in\mathfrak{A}, f\in\mathfrak{B}$, 于是对于 $x\in\mathfrak{A}$, 故 $xf\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=\{0\}$, 这样 $x=xe+xf=xe$, 同理可得 e 是 $\mathfrak{A}$ 的单位元.)

习题 10.22 对于幺环 R, 若

$$R\cong A_1\oplus\ldots\oplus A_n\cong B_1\oplus\ldots\oplus B_m$$

且 A_i,B_j 都不能写成两个环的直积. 则 $n=m$, 且存在置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, 使得 $A_i\cong B_{\sigma(i)}$. (提示: 实际上, 类似于习题9.36直和项的概念, 因为理想也有模性. 故, 通过因为 A_1 可以视为 R 的理想, 从而根据上题10.21, A_1 分解到 B_j 的分量也是 B_j 的直和项, 根据对 B_j 的假设, 必有 $A_1=B_j$, 然后商掉或者找对应子环可归纳得.)

10.5 多项式环

多项式作为最重要的环之一, 在代数中起到极其重要的作用.

定义 10.35 (一元多项式环) 已知环 R, 考虑 $R^{\mathbb{N}}$ 的子环

$$\left\{(a_n)_{n=0}^{\infty}\in R^{\mathbb{N}}: \text{只有有限的 } a_n\neq 0\right\}$$

定义

$$(a_n)+(b_n)=\{a_n+b_n\}$$
$$(a_n)(b_n)=(c_n)\qquad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{i+j=n}a_ib_j$$

容易验证全体这样的序列全体作成一个环, 为了方便引入不定元 X 的幂级数来记这个有限序列

$$f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_dX^d=\sum_{i=0}^{d}a_iX^i$$

这被的 f 被称为**多项式 (polynomial)**, 称为 R 上的**一元多项式环**, 记这个环为 $R[X]$.

多项式和多项式函数有很大的不同. 多项式函数的 x 是变量, 有规定的取值范围. 但多项式中的未定元是的规定了记号的文字, 没有范围的限制. 当然若对多项式实行代入的操作则需规定其范围, 转化为多项式函数.

定义 10.36 已知环 R, 我们再引入常用的定义

- 形如 $X^n \in R[X]$ 的多项式被称为为 n 次**单项式 (monomial)**
- 对于任何 $r \neq 0$, 形如 $rX^n \in R[X]$ 的多项式为 n 次**项 (term)**.
- 任何非零多项式 $f = \sum_{i \geq 1} r_i X^i \in R[X]$, 定义 $\deg f = \max\{i : r_i \neq 0\} < +\infty$, 称为 f 的**次数 (degree)**. 并约定 0 次数为 $-\infty$.
- 则任何非零多项式 $f \in R[X]$ 都可以唯一地写成 $r_0 + r_1 X + \ldots + r_n X^n$ 其中 $r_n \neq 0$, $n = \deg f$. 在此基础上, 称 $\{r_i\}_{i=1}^n$ 为全体**系数 (coefficients)**, 称 r_n 为**首项系数**, r_0 为**常数 (constant) 项**. 并且规定 0 的首项系数和常数项均为 0.
- 首项系数为 1 的多项式被称为**首一 (monic) 多项式**.

引理 10.37 已知环 R, 非零多项式 $f(x), g(x) \in R[x]$ 则

(1) $\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$.

(2) $\deg(fg) \leq (\deg f)(\deg g)$.

取等号的条件是 f, g 的常数项相乘不为 0.

命题 10.38 (带余除法) 对于幺环 R, 多项式 $f, g \in R[X]$, 若 g 是首一多项式, 则存在唯一的 $q, r \in R[X]$ 使得

$$f = qg + r \qquad 0 \leq \deg r < \deg g \text{或} r = 0$$

也有唯一的 $p, s \in R[X]$ 使得

$$f = gp + s \qquad 0 \leq \deg s < \deg g \text{或} s = 0$$

证明 由于对称性, 我们只证明前一个断言.

存在性 设 $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + \ldots + X^m$. 倘若 $m > n$, 则 $f = 0g + f$ 就已经适合命题所断言. 不妨假设 $m \le n$, 则

$$f_0 = f - a_nX^{n-m}g \qquad \text{s.t.} \deg f_0 < n$$

可以利用归纳法, 假设 f_0 已经满足断言, 则 $f_0 = q_0g + r_0$, 带回上式得

$$f = a_nX^{n-m}g + (q_0g + r_0) = (a_nX^{n-m} + q_0)g + r_0$$

则 $q = a_nX^{n-1} + q_0, r = r_0$ 便满足要求.

唯一性 若有两个带余除法

$$f = q_1g + r_1 \qquad f = q_2g + r_2$$

则

$$q_1g + r_1 = q_2g + r_2 \quad \Rightarrow \quad (q_1 - q_2)g = r_1 - r_2$$

而根据要求以及 (10.37)

$$\deg(r_1 - r_2) \le \max(\deg r_1, \deg r_2) \le \deg g$$

次数小于 g 的次数, 而若 $\deg q_1 - q_2 \ge 0$, 则

$$\deg(q_1 - q_2)g = \deg(q_1 - q_2)\deg g \ge \deg g$$

因为 g 首项系数为 1, 根据 (10.37). 矛盾. 从而 $q_1 - q_2 = 0$, $r_1 - r_2 = (q_1 - q_2)g = 0$, 从而 $q_1 = q_2, r_1 = r_2$. 唯一性得证. □

补充 10.39 (带入) 对于交换环 R, $x \in R$, $f(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in R[X]$, 定义

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

于是这定义了 $R[X]$ 上的**计算同态**

$$c_x : R[X] \longrightarrow R \qquad f(X) \longmapsto f(x)$$

容易利用交换性可得这是同态. 定义 f 的在 R 上的根就是 $f(x) = 0$ 的 $x \in R$.

对于整环 R, $f(X) \in R[X]$ 在 R 上的根不会超过 $\deg f$ 个.

这是因为, 若 $f(X)$ 有一根 x_0, 则做 $f(X)$ 对 $X - x_0$ 的带余除法可得

$$f(X) = f_0(X - x_0) + r \qquad r\text{至多是 1 次的} \quad \text{i.e.} \quad r \in R$$

通过带入 x_0 得 $r = 0$. 根据 *(10.37)*, $\deg f_0 = \deg f - 1$, 这样一直下去, 问题转化到证明证明一次多项式至多只有一个根. 倘若 $aX + b$ 有两个根 x_1, x_2, 则

$$ax_1 + b = ax_2 + b = 0 \iff a(x_1 - x_2) = 0$$

因为 $a \neq 0$, 故 $x_1 - x_2 = 0$ 即 $x_1 = x_2$. 这样就证明了结果.

最后我们给出多元多项式的定义.

定义 10.40 (有限元多项式) 递归地定义**多元多项式环**

$$R[X, Y, \dots, Z, W] = (R[X, Y, \dots, Z])[W]$$

则 $f(X, Y, \dots, Z, W) \in R[X, Y, \dots, Z, W]$ 可以记为

$$\begin{aligned} f(X, Y, \dots, Z, W) &= \sum_{i=0}^{r} f_i(X, Y, \dots, Z) W^i \\ &= \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{b} \dots \sum_{k=0}^{r} a_{ij\dots k} X^i Y^j \dots W^k \end{aligned}$$

定义 10.41 (任意元多项式) 对环 R, 在任意指标集 I 下定义多项式环

$$R[X_i]_{i \in I} = \{f \in R[X_i]_{i \in S} : S \subseteq I \text{ 有限}\}$$

⋙⋙ 习题 §10.5 ⋘⋘

问题 10.23 试证明：所有交换幺环都是某个 $\mathbb{Z}$ 上的多项式环的商环.（提示：对于交换幺环 R，考虑 $\mathbb{Z}[X_r]_{r\in R}$，定义同态 $X_r \mapsto r$.）

习题 10.24 (进制表示) 已知幺环 R，$f(X), p(X) \in R[X]$，p 是首一的，且 $\deg p = n \geq 1$，求证：

$$\exists!\text{次数小于 } n \text{ 的} a_0(X), a_1(X), \ldots, a_r(X) \in R[x], \text{s. t. } f(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i(X)[p(X)]^i$$

（提示：模仿数论的进制操作，作带余除法归纳.）

问题 10.25 下面在多项式环上运用中国剩余定理.

(1) 已知 $\mathbb{R}$ 的多项式 $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)$ 两两互素，求证：对于任意的多项式 $a_1(X), a_2(x), \ldots, a_n(X)$ 同余方程组

$$\begin{cases} g(X) \equiv a_1(X) \mod f_1(X) \\ g(X) \equiv a_2(X) \mod f_2(X) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(X) \equiv a_n(X) \mod f_n(X) \end{cases}$$

必定有解，且所有解模 $f_1(X)f_2(X)\ldots f_n(X)$ 同余.

*(2)***(Lagrange 插值多项式)**对于 $\mathbb{R}^2$ 上不同横坐标的点

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

求证：存在唯一的不超过 $n-1$ 次的多项式 $f(x)$ 经过这些点，并具体写出其表达式.（提示：注意到 $f(x_i) = y_i \iff f(X) \equiv y_i \mod X - x_i$.）

习题☠ 10.26 (Lagrange 插值多项式) 已知 $\mathbb{R}^2$ 上的点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$，其中 x_i 两两不同，在 $\mathbb{R}$ 上考虑 **Lagrange 基底**

$$L_i(x) = \frac{\prod_{k\neq i}(x - x_k)}{\prod_{k\neq i}(x_i - x_k)} = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

(1) 求证：$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

(2) 求证: $f(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$ 是经过点 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$ 的不超过 $n-1$ 次多项式.

(3) 已知次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 求证: $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$.

(4) 设 $L_i(x)=a_{i1}x^{n-1}+a_{i2}x^{n-2}+\ldots+a_{in}$, 其中 a_{ij} 是关于 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 的函数, 利用 (3), 用 $\{a_{ij}\}$ 来表示如下 **Vandermonde 矩阵** 的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {a_1}^{n-1} & {a_2}^{n-1} & \ldots & {a_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

(提示: $L_k(x)$ 实际上构成一组基, 和 x^k 换基过程中将得出现 Vandermonde 矩阵)

(5) 下面我们求 $\int_a^b L_i(x)\mathrm{d}x$, 记之为 I_i. 求证:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} I_1 & + & I_2 & + & \ldots & + & I_n & = & b-a \\ x_1 I_1 & + & x_2 I_2 & + & \ldots & + & x_n I_n & = & \frac{b^2-a^2}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ x_1^{n-1} I_1 & + & x_2^{n-1} I_2 & + & \ldots & + & x_n^{n-1} I_n & = & \frac{b^n-a^n}{n} \end{array}\right.$$

解上述方程组是近似计算积分的重要方法.

10.6 模简介

模本质上是环在 Abel 群上的作用, 同时还要求满足一定的相容性.

定义 10.42 (模) *已知幺环 R, 加法 Abel 群 M, R 左作用在 M 上, 为方便记为 $(r,x)\mapsto r\cdot x$, 若满足*

Mod1 $\forall r\in R, x,y\in M \quad r\cdot(x+y)=r\cdot x+r\cdot y.$ *(分配律)*

Mod2 $\forall r,s\in R, x\in M \quad (r+s)\cdot x=r\cdot x+s\cdot x.$ *(分配律)*

Mod3 $\forall r,s\in R, x\in M \quad r\cdot(s\cdot x)=(rs)\cdot x.$ *(结合律)*

Mod4 $\forall x \in M \quad 1 \cdot x = x.$ *(单位律)*

则称 M 是一个**左 R-模 (module)**. 简称 R-模.

对无幺环, 也可以定义其上的模, 这只需要将最后一条要求去掉. 同样, 方便起见可以将省略乘号.

定义 10.43 (右模) 已知幺环 R, 加法 *Abel* 群 M, 如果 R 右作用在 M 上, 为方便记 $(x, r) \mapsto x \cdot r$, 满足

Mod1' $\forall r \in R, x, y \in M \quad (x+y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r.$ *(分配律)*

Mod2' $\forall r, s \in R, x \in M \quad x \cdot (r+s) = x \cdot r + y \cdot r.$ *(分配律)*

Mod3' $\forall r, s \in R, x \in M \quad (x \cdot r) \cdot s = x \cdot (rs).$ *(结合律)*

Mod4' $\forall x \in M \quad x \cdot 1 = x.$ *(单位律)*

则称 M 是一个**右 R-模**.

定义 10.44 (双模) 如果一个加法 *Abel* 群 M 既是一个左 R-模, 又是一个右 S-模, 且满足结合律

$$\forall r \in R, s \in S, x \in M, \qquad (r \cdot x) \cdot s = r \cdot (x \cdot s)$$

则称 M 是 **R, S-双模**.

定义 10.45 (子模, 商模) 已知幺环 R, R-模 M, 子群 $N \subseteq M$ 满足

$$\forall r \in R, x \in N, rx \in N$$

则称 N 为 M 的**子模 (submodule)**.

对于 M 的子模 N, 其作为 *Abel* 群的商群 M/N 具有自然的 R-模结构

$$r \cdot (m + N) = rm + N$$

称 M/N 为**商模 (quotient module)**.

例 10.46 任何 *Abel* 群 (写作加法)G, 都是 $\mathbb{Z}$-模, 其中乘法就是 $n \cdot g = ng$. 子模即子群.

也就是说, 其实任何左 R-模都是 $R, \mathbb{Z}$-双模, 任何右 S-模都是 $\mathbb{Z}, S$-双模. 换句话说任和模都可以无害地看成双模.

例 10.47 任何环 R, R 本身就是 R-模, 乘法为 $r \cdot s = rs$. 子模为左理想.

例 10.48 已知域 K, K-模, 根据线性空间的几条公理, 就是 K-线性空间. 子模即子空间, 商模即商空间.

例 10.49 已知域 K, K-线性空间 V, 线性变换 $\mathscr{A} : V \to V$, 则 V 还可以视作 $K[X]$-模, 通过如下乘法

$$f(X) \cdot \boldsymbol{x} = f(\mathscr{A})\boldsymbol{x}$$

则子模即 $\mathscr{A}$-不变子空间.

评注 10.50 (模同态) 对于固定的幺环 R, 两个 R-模 M, N, 若 *Abel* 群的同态 $\varphi : M \to N$ 满足

$$\forall r \in R, x \in M, \qquad r \cdot \varphi(x) = \varphi(r \cdot x)$$

则称 f 是 **R-模同态**, 也称 f 为 **R-线性的**.

于是, 也有 **模同构基本定理**. 对于 R-模同态 $\varphi : M \to N$, 有

$$M / \operatorname{Ker} \varphi \cong \operatorname{Im} N$$

以及 **模同构第一, 二定理** 已知 R-模 M, 子模 N, L, 且 $L \subseteq N$, 则

$$M/N \cong (M/L)/(N/L)$$

已知 R-模 M, 子模 N, L, 则

$$(N + L)/N \cong L/(L \cap N)$$

⋙⋙ 习题 §10.6 ⋘⋘

习题 10.27 (模性) [2] 对于 R-模 M, 子模 A, B, C, 若 $B \subseteq A$, 求证:

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$$

其中 $B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\}$.

[2] 这也是模性得名的原因.

第十一章　域

11.1　域的定义和例子

定义 11.1 (体) *已知环 F, 若 $F\setminus\{0\}$ 对乘法作成一个群, 则称 F 为* **体 (skew-field)** *或* **除环 (division ring)** .

定义 11.2 (域) *已知环 F, 若 $F\setminus\{0\}$ 对乘法作成一个 Abel 群, 则称 F 为* **域 (field)** .

同时我们约定, 只有一个元素的环 $\{0\}$ 虽然按照定义构成一个域, 但是我们将其排除在外, 换句话说, 我们下面说的域基数都大于 1.

命题 11.3 *已知交换幺环 F, F 是域的充分必要条件是 F 的理想只有 $\{0\}$ 和 F.*

证明　必要性. 对于任何 F 的非零理想 I, 选 $x\in I-\{0\}$, 则

$$x^{-1}\in F, x\in I \quad\Rightarrow\quad 1=x^{-1}x\in I$$

于是

$$\forall y\in F, 1\in I\Rightarrow y=y1\in I$$

于是 $F=I$.

反之, $\forall x\in F-\{0\}$, 容易验证 xF 是一个非零理想, 从而 $xF=F$, 于是 x 可逆, 具体来说因为 $1\in F$, 故存在 $y\in F$ 使得 $xy=1$. □

例 11.4 (数域) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是一个域, 零元为 0, 幺元为 1.

例 11.5 (模 p 剩余域) p 为素数时, $\mathbb{Z}_p$ 作成一个域, 记为 $\mathbb{F}_p$. 具体而言, $\overline{a} \in \mathbb{F}_p - \{\overline{0}\}$, 由于 a, p 互质, 根据 *Bezout* 定理,

$$\exists x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{s.\,t.}\, xa + yp = 1$$

从而在模 p 意义下有 $\overline{x}\,\overline{a} = \overline{1}$, 这就找到了 $\overline{a}$ 的逆.

在后续的学习中我们会知道, 对每个素数的方幂 p^k, 都存在在同构意义下唯一的 p^k 阶有限域.

例 11.6 (有理分式域) 实系数多项式有理分式 $\mathbb{R}(x)$ 是一个域, 零元为零多项式 0, 幺元为多项式 1.

例 11.7 (四元数体) 下面我们构造四元数. 记

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

容易验证 $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

由于 $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, 还可以认为

$$\mathbb{H} \xlongequal[b=z+wi]{a=x+yi} \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & x & -w & z \\ -z & w & x & -y \\ -w & -z & y & x \end{pmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

容易验证这对矩阵的加法和乘法作成一个环, 其中零元和单位元是零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{I}$. 我们记

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

则任何 $\mathbb{H}$ 中的元素都可以写成 $x+yi+zj+wk$. 且 i,j,k 的如下关系

$$i^2=j^2=k^2=-1 \quad ij=-ji=k \quad jk=-kj=i \quad ki=-ik=j$$

实际上完全决定了乘法.

例 11.8 (二次数域) $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]=\{a+b\sqrt{m}|a,b\in\mathbb{Q}\}$, 其中 m 非 *0*, *1*, 也不含平方数因子, 作成一个域. 具体而言,

$$\frac{1}{a+b\sqrt{m}}=\frac{1}{a^2-b^2m}(a-b\sqrt{m})$$

即我们熟知的分母有理化.

补充 11.9 (商域) 回忆整环的定义 *(10.13)*, 对于整环 R, 可以在 $R\times(R\setminus\{0\})$ 上定义关系

$$(a,b)\sim(c,d) \iff ad=bc$$

容易根据整环的性质验证这是一个等价关系, 这确定了一个商集, 我们记为

$$\operatorname{Frac} R=[\,R\times(R\setminus\{0\})\,]\,/\sim$$

方便起见, 记 (a,b) 所在的等价类为 $\frac{a}{b}$. 我们可以在上面定义加法和乘法

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

容易验证, 此时 $\operatorname{Frac} R$ 构成一个域, 这被称为 R 的**商域 (fraction field)** .

这正是模仿从整数构造有理数的步骤, 参见习题*5.9*.

⋙⋙ 习题 §11.1 ⋘⋘

习题 11.1 (华罗庚恒等式) 已知体 K, 求证:

(1)$\forall x\neq 0,1,(x^{-1}-1)^{-1}=(1-x)^{-1}-1$;

(2)$\forall a,b\neq 0,ab\neq 1,a-(a^{-1}+(b^{-1}-a)^{-1})^{-1}=aba$.

习题 11.2 已知 $A \subseteq \mathbb{R}$, 求证: A 是域的充分必要条件是

(1)$0, 1 \in A$;

(2)$\forall a, b \in A - \{0\}, \begin{cases} a - b \in A \\ a^{-1} \in A \end{cases}.$

(提示: 利用恒等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$)

习题 11.3 对于特征为 p 的有限域 F, 证明: 习题*10.14*中的 *Frobenius* 自同态 F 实际上是同构. *(*换句话说, 任何 F 中的元素都可以开平方根. *)*

习题 11.4 回忆整环的定义 *(10.13)*, 求证: 有限整环一定是域. (提示: 考虑每一个元素的左平移作用, 必有一个元素被移动到 1.)

习题 11.5 求证: 有限域的阶必为素数的方幂. (提示: 利用特征, 此时可以视为 $\mathbb{F}_p$ 的线性空间.)

习题 11.6 (Wilson 定理) 已知有限域 F, 求证: F 中所有非零元的乘积为 -1. (提示: 配对, 将非零元和自己的逆配对.)

问题 11.7 我们曾经证明任何一个环都有极大理想, 回忆习题*10.13*. 对于交换环 R, 理想 $\mathfrak{a}$, 求证:

$$R/\mathfrak{a}\text{是域} \iff \mathfrak{a}\text{ 是极大理想}$$

(提示: 利用 (11.3), 因为商掉一个理想, 将只有包含 $\mathfrak{a}$ 的理想幸存.)

习题 11.8 (代数数域) 回忆习题*3.9*中对代数数的定义. 显然通过通分, 复数 x 是代数数当且仅当复数 x 是某个有理系数多项式的根. 记所有代数数为 $\overline{\text{alg}}\mathbb{Q}$.

(2) 求证: $\overline{\text{alg}}\mathbb{Q}$ 构成一个域. (提示: 对于 α, β, 假设分别是 f, g 的根, 假设 f, g 的所有根为 α_i, β_j 可以构造多项式 $\prod_{i,j}(x - \alpha_i - \beta_j) = \prod_j f(x - \beta_j)$, 这样右边完全是 β_j 的对称多项式, 可以用对称多项式基本定理表出.)

(3) 求证：已知两个二元整系数多项式 $f(X,Y), g(X,Y)$，求证：

$$\begin{cases} f(X,Y)=0 \\ g(X,Y)=0 \end{cases}$$

的根 (x_0, y_0) 是一对代数数.（提示：用结式.）

(4) 求证：任何以代数数为系数的多项式的根都是代数数.（提示：用 Vieta 定理结合 (1)(2).）

问题 11.9 我们曾经提到过森林的概念，参见习题*5.22*. 对于一张图，我们可以认为无向边是顶点的二元子集，通过将其和特征函数等同，再将特征函数和数对等同，则每条边我们可以视为 0,1 序列，且恰有两个元素为 1. 我们将 0,1 视为 $\mathbb{F}_2$ 的元素，这样，可以将每条边都视为 $\mathbb{F}$-线性空间 $\mathbb{F}_2^X$ 的向量. 证明：一组边线性无关 $\iff$ 则组边构成的子图不含圈.

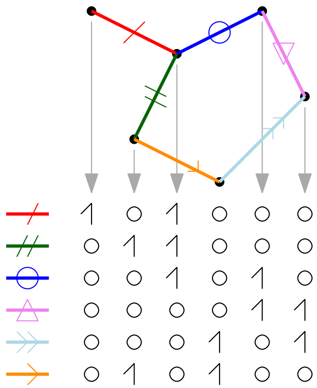


图 11.1: 不含圈与线性无关

注记

本部分的目的在于介绍代数最为基本的概念, 以便在深入学习抽象代数之前就能先行接受群环域的语言. 同样, 限于篇幅, 我们只介绍了最为常用和基本的概念, 这些距离真正代数学的任何话题都相差甚远. 有意深入了解抽象代数的读者可以参考 [25] 或 [13], 前者是介绍了代数各个方面的 GTM 教材, 读起来会比较友好; 后者则是以高观点写成的抽象代数教材.

以下是分条目的评注.

在 (9.1) 我们给出了群的定义, 再通过 (9.4) 给出了单位元是唯一的和取逆元是唯一的事实, 实际上我们可以最开始将群视为具备三个运算的代数结构, 即乘法, 取逆和指定单位元, 参见 (2.30). 然后, 我们就只需要指定这三种运算的复合法则即可. 即下图交换, 其中 μ 是乘法, ν 是取逆, $\mathbf{1}$ 是指定单位元.

$$
\begin{tikzcd}
& G\times G\times G \arrow[dl, "\mu\times\mathrm{id}_G"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_G\times\mu"] & \\
G\times G \arrow[dr, "\mu"'] & & G\times G \arrow[dl, "\mu"] \\
& G &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}_G"] & \\
G\times\{*\} \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times\mathbf{1}"'] & & \{*\}\times G \arrow[d, "\mathbf{1}\times\mathrm{id}_G"] \\
G\times G \arrow[dr, "\mu"'] & & G\times G \arrow[dl, "\mu"] \\
& G &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "(\mathrm{id}_G{,}\nu)"'] \arrow[d] \arrow[dr, "(\nu{,}\mathrm{id}_G)"] & \\
G \times G \arrow[dr, "\mu"'] & \{*\} \arrow[d, "\mathbf{1}"'] & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

这也确实等价于群的定义. 如下文所指出的, **拓扑群** 实际上就是要求上面的集合都是拓扑空间, 箭头都是连续映射.

在 (9.22) 介绍了正规子群的一些性质. 但是正规子群的正规子群一般而言不是正规子群, 参见习题9.39. 更多的例子参见 MSE1185603.

Euler 定理 和 **Fermat 小定理** (9.31) 是数论中非常重要的定理, 这让我们可以更容易地计算同余式. 非群论的初等证明可以参见 [3] P43.

习题9.11介绍的 **Dedekind 法则** 表明了交和乘一定的分配性, 这可以抽象成 **模性**, 在 §14.2会有更一般的考虑.

习题9.14给出了 $\mathbb{R}$ 的子群的刻画, 实际上, 这蕴含了习题6.9. 因为显然 $\mathbb{Z}+r\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子群.

习题9.15给出了周期函数的一些研究, 更多的结论参见 [11]§2.

习题9.16说明任意有限指数的子群的交还具有有限指数, 这种证明非常技术化, 另有证明利用任何指数有限的子群必然包含一个指数有限的正规子群, 再利用群同态第二定理 (9.40) 解决. 任何指数有限的子群必然包含一个指数有限的正规子群的论断可以利用群作用论证, 只需要考虑左陪集作用上的平移.

习题9.17给出了群上的 **有限拓扑**. 更一般地, 如果一个群还是拓扑空间, 如果乘法和取逆连续, 则称这个群是 **拓扑群**. 对于拓扑群的深入的探讨可以参见 [31].

正如 (9.29) 下面所指出的, 有限生成群的子群未必是有限生成的, 一个例子需要用到自由群, 参见MSE7896.

习题9.22和习题7.19有异曲同工之妙, 请读者比较.

习题9.23是作者类比交换代数中 **Cohen** 证明的一个交换环所有理想都是有限生成的当且仅当所有素理想都是有限生成的的证明设计的, 参见

[14]§16 P97 (16.10) 或 [15]P84 exercise 1. 实际上, 这和 **Alexander 子基定理** (8.20) 前的引理 (8.19) 有异曲同工之妙, 都是 Zorn 引理的惯常使用.

习题9.25介绍了 **Dietzmann** 的定理, 这是作者在 [39]P105 15 找到的, 另外参见此书的配套习题解答 [40] P93 Ex.6.15.

习题9.12介绍的 **中心** 和习题9.26介绍的 **换位子群** 都能表示一个群的 "交换" 程度, 二者是否存在关系呢? 参见 [40] P93 Ex.6.16. 若中心具有有限指数, 则导群是有限群.

习题9.29介绍了 **自同构群** 和 **内自同构群**. 这表明群只有平凡的中心可以得到群的自同构群只有平凡的中心. 此时, 一个著名的问题是如果一个群的中心是平凡群, 那么这个群通过看做内自同构群可以看成自同构的群的子群, $G \subseteq \operatorname{Aut} G$, 问题是是否可能一直下去

$$G \subseteq \operatorname{Aut} G \subseteq \operatorname{Aut}(\operatorname{Aut} G) \subseteq \dots$$

使得每一个 $\subseteq$ 都是真包含? 参见 [4] P73.

群同构的三个定理 (9.38), (9.39), (9.40) 是群论中最为基本的定理, 这由 **Noether** 提出. 不过后来, 人们慢慢意识到是否存在同构并不重要, 重要的是这个同构是否 "自然", 而这两个定理所涉及的同态实际上非常好构造和验证, 这两个定理的使用并不频繁.

习题9.31向读者发问拓扑和群结构相容的问题. 当然, 对这个问题的最直接回答是拓扑和代数是两码事. 不过, 倘若从拓扑群的角度, 则说明, 第二同构的同构定义无法推广成同胚的同构. 如何推广群同构定理到拓扑群, 参见 [31] P43 (5.31).

在 §9.5, 我们介绍了群的直积的概念, 一个应当考虑的问题是能否将一个群分解为一些不能分解成更多直和项的群, 这个只要加上恰当的有限性条件就可以做到. 但是另一个问题是这个分解是否是唯一的? 即若

$$G \cong H_1 \times \dots \times H_n \cong K_1 \times \dots \times K_m$$

是否一定有 $n = m$, 且存在某个置换 σ 使得 $H_i \cong K_{\sigma(i)}$? 这是著名的 **Krull-Schmidt 定理**, 参见 [25] P48 §2.2, 更一般的情况是 **Ore 处理** 的, 参见 [26] P127 §8.5.

习题9.33给出了群的**直和**的定义. 直和最为重要的一点, 是各个直和项生成的群就是整个群, 这和直积不同, 因为乘法的有限性使得元素永远受困于有限的桎梏. 除此之外, 直和还有一些别的性质.

习题9.35交代了**Cauchy 列**如何构造实数, 这其实在之前我们就已经做过类似的事儿了, 参见习题6.33. 但是这里的重要之处在于此时定义出来的 $\mathbb{R}$, 自然地具有商群的代数结构.

习题9.34想要直接推广 (9.44), 但因存在反例而作废. 恰当地推广是将条件改成 $N_1 \cap (N_2 N_3) = N_2 \cap N_3 = \{1\}$. 但是这无非是 (9.44) 使用两次, 沦为平凡.

习题9.36介绍了**直和项**的概念, 证明当中出其不意地使用了习题9.11介绍的 Dedekind 法则, 实际上, 这是模格的一般规律, 参见习题14.4.

习题9.37介绍了直积的**泛性质**, 这和拓扑中的习题6.29类比. 这是范畴论的常用的类推.

15 拼版问题, 习题9.41是一个经典的数学娱乐项目. 声称该玩具的发明人**Sam Lord**曾经悬赏 1000 美元, 为如下问题寻求还原方案. 从而人们的兴趣被点燃. 然而令人失望的是, 这个问题并不存在解 (或许因此才悬赏这么多钱), 而且是在 1879 年被证明 —Lord 则是在 1891 年开始声称自己发明这个玩具. 这说明, 数学的优秀将使读者在任何时代少受虚晃利益的诱惑. 参见wiki: 15 puzzle.

§9.7我们简单介绍了**群作用**, 限于篇幅, 我们没有详细介绍. 群作用是研究群的结构的本质工具, 十分推荐读者学习. 参见 [25] P54 §II.3 或 [13] §4.4.

习题10.1实际上就是 Boole 代数的一个定义, 参见 (14.23). 另外, 另一个有趣的结论是如果在幺环 R 中, 对任何 $x \in R$, 都存在 $n(x) \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $x^{n(x)} = x$, 则 R 是一个交换环. 这被称为**Jacobson 定理**, 参见 [39] P209.

习题10.3似乎构造非常不自然, 但是如果用读者熟知的分析学公式 (当然直接用在环上是错误的, 但是有时候 “错误的形式计算” 可能带来正

确的结果)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$$

形式计算, 即 $1-xy$ 和 $1-yx$ 的逆应该形如

$$(1-xy)^{-1}=1+xy+xyxy+\dots \qquad (1-yx)^{-1}=1+yx+yxyx+\dots$$

所以我们有足够的理由猜测,

$$(1-yx)^{-1}=1+y(1-xy)^{-1}x$$

经过验证这是正确的. 这种形式计算还可以推及到矩阵上, 即著名的**Sherman–Morrison 公式**及其推广 **Woodbury 矩阵恒等式**, 参见wiki: Sherman-Morrison formula 以及wiki: Woodbury matrix identity.

习题10.4介绍了**Kaglansky**的定理. 参见 [39]P25 Exercise 14. 事实上, 我们会问, 左可逆是否一定意味着右可逆? 读者优秀的线性代数会确保在有限矩阵上是成立的, 但是到无穷矩阵 (参见习题1.17) 上就不再成立, 例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

我们称左逆必有右逆的环为**Dedekind 有限 (finite)**, 或**von Neumann 有限**, 参见 [39]P4.

习题10.8说明整除意味着相伴, 这和整数上的情况类似, 若 $n|m, m|n$, 则 $m=\pm n$. 关于矩阵的论断, 可以继续推广, 参见 [39]P36 Exercise 6 及其配套参考书 [40]P29 Ex2.6.

习题10.13证明了极大理想的存在性, 我们曾介绍过, 这个选择公理是等价的.

习题10.18构造的 $\mathbb{Z}_p$ 就是 p **进整数**, 其商域就是我们曾经提到的 p **进数**, 参见习题6.33介绍的完备化及其注记. 奇妙的是, 两种定义 p 进数是一致的, 这表明了分析和代数的某些一致性. 同时, 这还是一个**逆向极限**. 例如参见 [44]Chapter7, 或 [13] 第十章, 以及 [51]P11 ChapterII.

习题10.19介绍了如何给无幺环加上幺元. 这个构造无非是强行给 R 加上一个与所有元素都交换, 但是不能 "化简" 的 1(即便这个环本身含 1. 如果采取更具创造力的记号 $(n, x) = n \oplus x$ 会更加清楚, 这样乘法的定义就是

$$(m \oplus a)(n \oplus b) = mn \oplus mb + na + ab$$

习题10.20描述了环的直积的理想的结构, 群中 (正规) 子群则没有这么好的结论, 但也有理论可以刻画群的直积的子群, 这是 **Goursat 定理**, 参见 [16]. 另外, 环也有对直积分解唯一性的考虑, 这个则不如群的 Krull-Schmidt 定理困难, 见习题10.22, 参见 [39]P37 3.8.

习题11.5指出, **有限域**都是素数的方幂. 实际上, 反之, 任何素数的方幂都存在一个在同构意义下唯一的有限域.

习题11.4指出, 任何有限整环都是域. 与之类似的论断是是否存在有限的除环? 答案是否定的, **Wedderburn 小定理**指出有限除环比为域, 参见 [13] §5.2.

习题11.8证明了**代数数域**是一个域且是代数封闭的, 这个习题的证明思路是古典的, 利用域扩张可以给出现代的证明, 因为一个数代数等价于扩张次数有限.

第四部分

偏序结构

导言

回忆 §5.3偏序的定义, 下面开始重提偏序集, 相信读者对概念及章法都已轻车熟路.

本部分有两个目的, 一是补全我们在集合论部分对偏序过于仓促的介绍, 另一是介绍更多偏序集的知识. 其实, 与其说是对偏序集的介绍, 不如说我们是对我们之前讨论的的一些问题的一个总结和抽象. 前面的命题和习题会成为例子.

本部分实际上并没有被赋予足够的重视, 但是对偏序的学习可以统一我们对很多问题和方法, 这会让我们更自然地看待这些问题和方法.

比较精巧的是, 当偏序集加上一些条件, 就可以使其成为一个代数结构, 格. 而如果加上更多条件, 这个格甚至是一个环, 这被称为 Boole 代数.

本部分共三章, 第十二章的主要目的在于谈论更多偏序, 以补充更多的集合论. 第十三章则是介绍格的简单介绍. 第十四章则介绍更多的格, 分别是完备格, 模格, 分配格和 Boole 代数.

第十二章　偏序集的基本概念

下面是对偏序集的介绍.

12.1　偏序集的定义和例子

回忆 §5.3, 我们再陈述一遍.

定义 12.1 (偏序集) *已知集合 X 上的关系 $\le$, 若 $\le$ 满足:*

PO1　$\forall x \in X, x \le x.$　*(自返性)*

PO2　$\forall x, y \in X, \quad x \le y, y \le x \Rightarrow x = y.$　*(反对称性)*

PO3　$\forall x, y, z \in X, \quad x \le y, y \le z \Rightarrow x \le z.$　*(传递性)*

则称 $\le$ 是一个 **偏序 (partial order)** *关系, 称 $(X, \le)$ 是一个* **偏序集 (partial ordered set, poset)** *.*

定义 12.2 (全序关系, 链) *已知集合 X 上的关系 $\le$, 若 $\le$ 为偏序关系, 且*

TO $\forall x, y \in X, \quad x \le y$ *或* $y \le x.$

则称 $\le$ 是一个 **全序 (total order)** *关系或* **线性序** *, 则称 $(X, \le)$ 是一个* **全序集 (totally ordered set)** *, 或* **链 (chain)** *或* **线性序集** *.*

例 12.3 (数的比较大小) *$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 关于 $\le$ 作成全序集.*

例 12.4 (整除) $\mathbb{N}^*$ 关于整除 $|$ 作成偏序集.

例 12.5 (幂集) 已知集合 X, 2^X 关于包含于 $\subseteq$ 作成偏序集.

例 12.6 (子空间) 已知线性空间 V, V 的所有子空间关于子空间关系 $\subseteq$ 作成偏序集.

一般地, 任何一个群 G, 其所有 (正规) 子群关于 $\subseteq$ 作成偏序集. 一个 R-模, 其所有子模关于 $\subseteq$ 作成偏序集.

例 12.7 (划分的加细) 已知集合 X, 集合 X 的全体划分关于加细 *(refinement)* 作成偏序集, 加细指的是

$$X/R_1 \le X/R_2 :\iff R_1 \subseteq R_2$$

例 12.8 (函数大小比较) $\mathbb{R}$ 上所有函数关于 $\le$ 作成偏序集, 其中

$$f \le g :\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \le g(x)$$

定义 12.9 (单调序列) 已知偏序集 P, 序列 $\{a_n\} \subseteq P$,

- 称 $\{a_n\}$ 为**递减 (decreasing) 序列 (sequence)** 当

$$a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots$$

- 称 $\{a_n\}$ 为**严格 (strick) 递减序列**当

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots$$

- 称 $\{a_n\}$ 为**递增 (increasing) 序列**当

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$$

- 称 $\{a_n\}$ 为**严格递增序列**当

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots$$

(严格) 递减和 (严格) 递增序列合称为 **(严格) 单调 (monotonic) 序列**.

⋙⋙ 习题 §12.1 ⋘⋘

习题 12.1 已知偏序集 P, $C \subseteq P$. 若 C 中元素都不能比大小, 即

$$\forall x, y \in C, x \not\leq y, y \not\leq x$$

则称 C 为 **反链 (antichain)**. 称 $|C|$ 为反链的长.

(1) 求证反 *Hausdorff* 定理: 已知非空偏序集 X, 若 X 的每一条反链都包含在某个极大反链中. (提示: 用 Zorn 引理)

*(2)***(Dilworth, 1950)** 已知 $sr+1$ 元偏序集 P, 求证: P 必有长为 $s+1$ 的链或长为 $r+1$ 的反链. (提示: 定义函数 $f: P \to \{1, \ldots, s\}$ 表示以 x 为最大元的最长的链的长度, 然后根据鸽笼原理.)

(3) 已知有限偏序集 P, 最长的链长 r, 求证: P 可以写成 r 条反链的无交并. (提示: 将 Hasse 图按 "行" 选取)

*(4)***(Dilworth 定理)** 已知有限偏序集 P, 最长的反链长 r, 则 P 可以写成 r 条链的无交并. 为了证明这个定理, 我们有

(a) 假定上定理成立, 分解为 $P = \bigsqcup_{i=1}^r C_i$, 求证: 任何长为 r 的反链 A, 都有 $|A \cap C_i| = 1$.

(b) 假定上定理成立, 分解为 $P = \bigsqcup_{i=1}^r C_i$, 设 P 中全体长为 r 的反链为 $\mathfrak{A} = \{A_j\}_{j=1}^m$, 设 $A = \bigcup_{j=1}^m A_j$, 取 $a_i = \max(A \cap C_i)$, 求证:

$$\{a_i\}_{i=1}^r \in \mathfrak{A}$$

(c) 证明定理. (提示 Galvin, 1994: 对 $|P|$ 归纳, 删去 P 的极大元 x, 设最长的反链长为 r, 通过归纳只要证明 P 或有长为 $r+1$ 的反链或可写成 r 条链的无交并. 对于后者, 有 $x > a_i$, 此时删去链 $\{x\} \sqcup \{y \in C_i : y \leq a_i\}$, 再归纳.)

习题 12.2 在全序集中, 求证:

(1) 每个序列都有单调子列. (提示: 反证法, 考虑大于之后的所有项的项.)

*(2)***(Erdös-Szekers, 1935)**$sr+1$ 元序列都有长为 $s+1$ 的递增子列或长为 $r+1$ 的递减子列. (提示 Seidenberg, 1959: 作映射 $P \to \mathbb{Z}^2$, 将 x 映射为第一个分量表示以 x 结尾的最长的递减序列长度, 第二个分量表示以 x 开始的最长的递增序列长度. 这是单射, 故不可能全挤在 $\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,s\}$ 之中.)

12.2 链条件与良序集

定义 12.10 (降链条件) 已知偏序集 P, 若任何严格递减的序列 $\{a_n\}$ 都只有有限项, 则称 P 满足**降链条件 (descending chain condition, d.c.c.)** .

这显然等价于说, 任何递减的序列 $\{a_n\}$ 都满足

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \text{s.t.} \quad a_n = a_N$$

即充分大时, $\{a_n\}$ 相等, 我们称这种情况为**稳定 (stable)** .

满足降链条件的全序被称为**良序 (well order)** , 对应的全序集被称为**良序集** .

命题 12.11 偏序集 P 满足降链条件的充分必要条件是, 偏序集 P 的非空子集都有极小元.

证明 充分性. 显然严格递减序列 $\{a_n\}$ 是一个链, 有极小元, 即必然到某一项结束.

必要性. 否则, 取非空子集 S, 任意取 $a_0 \in S$ 不是极小元, 则

$$\exists a_1 \in S, \text{s.t.} \quad a_0 > a_1$$

a_1 也不是极小元, 则

$$\exists a_2 \in S, \text{s.t.} \quad a_1 > a_2$$

以此类推, 这样得到的 $\{a_n\}$ 迫使降链条件失效. □

推论 12.12 全序集 P 是良序集的充分必要条件是, 全序集 P 的非空子集都有最小元.

证明 因为对于全序集而言, 极小元就是最小元. □

例 12.13 $\mathbb{N}$ 对 $\leq$ 作成良序集.

例 12.14 有限偏序集都满足降链条件.

例 12.15 实数 $\mathbb{R}$ 对数的大小比较不作成良序集.

推论 12.16 (归纳法) 对于良序集 X, 若 $S \subseteq 2^X$ 满足

- X 的最小元 $\in S$.
- 对任意 $x \in X$, $\{y : y < x\} \subseteq S \quad \Rightarrow \quad x \in S$.

其中 $y < x$ 指的是 $y \leq x$ 且 $y \neq x$. 则 $S = X$.

证明 否则, 可以取非空集合 $X \setminus S$ 的最小元 x, 因为 x 是最小的, 从而 $\{y : y < x\} \subseteq S$, 这样就与第二条矛盾 [1]. □

补充 12.17 (递归法) 更一般地, 我们可以这样构造一个良序集 X 到集合 Y 的函数, 先规定最小值的取值, 再对 $x \in X$, 假定任何 $y < x$ 都已经确定取值了, 如果存在某种方法可以确定 x 的取值, 那么 "一直规定下去" 就可以确定整个 X 上的函数. 因为可以 "定义" 取值的集合是满足条件的集合是满足 *(12.16)* 条件的集合. 具体来说, 选取方法是唯一, 可以直接定义

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \text{使得右边条件成立的 } y \end{aligned} \qquad \text{存在 } f_x : \{\xi : \xi < x\} \to Y \text{ 使得} \begin{cases} (i) f_x \text{ 满足选取方法.} \\ (ii) \text{ 规定 } x \mapsto y \text{ 也满足选取方法.} \end{cases}$$

事实上, 右边条件中 f_x 是唯一的, 因为若另有 f'_x, 考虑 $\{\xi \in X : f_x(\xi) = f'_x(\xi)\}$, 用归纳法 *(12.16)*. 又因为选取方法是唯一的, 故 y

[1] 这里我们看似没有用到第一条, 注意到当 x 是最小元的时候第二条立刻得到第一条.

是唯一的. 然后, 对任何 x, 右边条件总是成立的, 因为可以对集合 $\{x \in X : x$满足条件$\}$, 用归纳法 (12.16). 这样便定义了一个函数 f, 这显然满足选取方法.

以上有些 "滥用语言", 但严格的讨论则势必陷入记号的泥潭.

定理 12.18 (良序公理) 任何一个非空集合都可以被赋予良序.

证明 我们使用 Zorn 引理, 对于集合 X, 考虑偏序集

$$\Sigma = \{(S, \leq_S) : S \subseteq X, (S, \leq_S) \text{ 是良序集}\}$$

显然 Σ 非空, 定义

$$(S, \leq_S) \leq (T, \leq_T) \iff \begin{cases} S \subseteq T \\ \forall s_1, s_2 \in S, \qquad s_1 \leq_S s_2 \iff s_1 \leq_T s_2 \\ \forall s \in S, t \in T \setminus S, \qquad s \leq_T t \end{cases}$$

这样, 对于任何一条链 $\{(S_i, \leq_i)\}_{i \in I}$,

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i \qquad x \leq y \iff \exists i \in I, \text{s.t.}\, x \leq_i y$$

交给读者去验证 $(S, \leq)$ 是一个良序集. 于是根据 Zorn 引理 (5.23), Σ 存在极大元 $(S, \leq)$. 我们断言 $S = X$, 否则, 可以任意挑选 $x \in X \setminus S$, 可以找到一个 Σ 中更大的元素

$$S' = S \sqcup \{x\} \qquad a \leq' b \iff a \leq b \in S \text{ 或} b = x$$

这样扩充 $\leq$, 得到的 $(S', \leq')$ 也容易验证是良序集, 这与 $(S, \leq)$ 极大性矛盾, 命题得证. □

最后同样地, 我们也有升链条件.

定义 12.19 (升链条件) 已知偏序集 P, 若任何严格递增的序列 $\{a_n\}$ 都只有有限项, 则称 P 满足**升链条件 (ascending chain condition, a.c.c.)** .

等价地, 任何递增的序列 $\{a_n\}$ 都稳定.

等价地, 任何非空子集都有极大元.

⋙⋙ 习题 §12.2 ⋘⋘

问题 12.3 对于拓扑空间 X, 求证: 下列条件是等价的; *(1)* 开集族满足升链条件. *(2)* 闭集族满足降链条件. *(3)*X 所有开集都是紧致的. (提示: 对于开覆盖, 考虑其中所有有限开集的并, 找极大元. 反之, 对于一族递升的开集, 利用紧致性可以选出有限个, 再在有限个中找极大者.)

习题 12.4 对于良序集 X, $A \subseteq X$ 有上界, 求证: A 总有最大值.

习题 12.5 对于良序集 X, 求证: 任意 $x \in X$, 都存在 y 使得 $(x, y) = \varnothing$, 这被称为 x 的**后继**.

问题 12.6 承认连续统假设 *(3.19)*, 即若集合 X, 满足 $\aleph_0 \leq |X| \leq \mathfrak{c}$, 则 $|X| = \aleph_0$ 或 $|X| = \mathfrak{c}$. 证明: 任何连续统 X(即 $|X| = |\mathbb{R}|$), 都存在一个良序 $\leq$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 使得 $\{y \in X : y < x\}$ 是至多可数集. (提示: 先赋予良序, 再考虑使得 $\{y \in X : y < x\}$ 不可数的集合, 若是空集则已经完成, 否则根据良序, 存在最小元 x_0, 此时 $\{y \in X : y \leq x_0\}$ 是另一个连续统.)

习题 12.7 承认连续统假设 *(3.19)*, 在 $[0, 1]$ 上赋予习题*12.6*所确定的良序 $\leq$, 考虑这样一个概率问题, 若 A, B 两个人向 $[0, 1]$ 区间上投掷飞镖, 分别投中 a, b 两点,

$$a > b \text{ 则 } A \text{ 胜利} \qquad b > a \text{ 则 } B \text{ 胜利}$$

即谁投的数按 $\leq$ 比更大谁就胜利. 显然两人投到同一点的概率为 0, 直觉会认为两人获胜的概率都是 $\frac{1}{2}$, 但是对任何固定的 a, B 掷的数 $b \leq a$ 的概率为 0(因为可数集合 "很少"), 这样计算知道两人获胜的概率都是 0. 请问这是为什么?

习题 12.8 承认连续统假设 *(3.19)*, 欧式平面中存在子集 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ 使得任何直线和 S 交至多两点, 但是 S 和 $\mathbb{R}^2$ 的所有开集都有交点. (提示: 因为 $\mathbb{R}^2$ 是第二可数的, 所有开集都是可数拓扑基可数并, 从而开集是连续统, 从而可以赋予习题12.6所确定的良序. 然后利用良序从小向大选取, 因为可数条直线不会覆盖开集, 所以总能选出.)

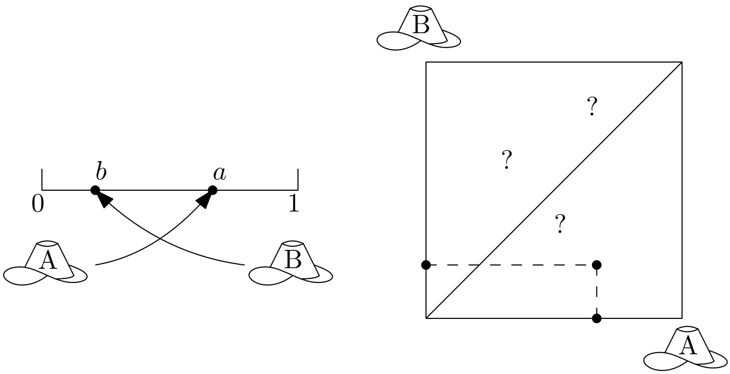


图 12.1: 飞镖游戏

问题 12.9 (Artin 模, Noether 模) 已知 R-模 M, 考虑其全体子模构成的偏序集, 若这个偏序集满足降链条件, 则称 M 是 **Artin 模**, 若这个偏序集满足升链条件, 则称 M 是 **Noether 模**.

(1) 求证: 作为 $\mathbb{Z}$-模, $\mathbb{Z}$ 作为是 Noether 模但不是 Artin 模. (提示: 因为有降链

$$\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z} \supseteq n^2\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

且 $\mathbb{Z}$ 的所有子模都形如 $n\mathbb{Z}$, 故任何理想的升链都得到整除的降链, 参见 (10.18).)

(2) 求证: 作为 $\mathbb{Z}$-模, $\mathbb{Z}_n$ 既是 Noether 模也是 Artin 模. (提示: 因为本身是有限的.)

(3) 求证: 作为 $\mathbb{Z}$-模, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 即不是 Noether 模也不是 Artin 模. (提示: 因为有升链

$$\mathbb{Z}e_1 \subseteq \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 \subseteq \dots$$

和降链

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}e_i \supseteq \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{Z}e_i \supseteq \dots$$

其中 $e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots)$, $\sum A_i$ 是 A_i 的有限加法组合.)

(4) 考虑 $\mathbb{Z}$-模

$$\mathbb{Z}[1/p] = \{f(1/p) \in \mathbb{Q} : f \in \mathbb{Z}[X]\}$$

记 $M = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$, 求证: 是 *Artin* 模但不是 *Noether* 模. (提示: 证明 M 的子模都形如 $\frac{1}{p^k}M$ 或 $\{0\}$, 容易验证他们满足升链条件但不满足降链条件.)

(5) 证明: 对于一个线性空间 V

$$V \text{ 是 } Noether \text{ 的} \iff V \text{ 是 } Artin \text{ 的} \iff \dim V < \infty$$

12.3 偏序集的映射

读者对下面的套路已经很熟悉.

定义 12.20 (单调映射) 已知偏序集 P, Q, $f : P \to Q$,

- 称 f 是递增映射, 若

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- 称 f 是严格递增映射, 若

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- 称 f 是递减映射. 若

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- 称 f 是严格递减映射, 若

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

其中 *(*严格*)* 递减和 *(*严格*)* 递增映射合称为 **(严格) 单调映射**.

以及读者早在高中就已经知道的.

命题 12.21 已知偏序集 P, Q, R 映射 $f: P \to Q, g: Q \to R$, 则:

$$\begin{aligned}
f\text{递增}, g\text{递增} &\Rightarrow g \circ f\text{递增} \\
f\text{递增}, g\text{递减} &\Rightarrow g \circ f\text{递减} \\
f\text{递减}, g\text{递增} &\Rightarrow g \circ f\text{递减} \\
f\text{递减}, g\text{递减} &\Rightarrow g \circ f\text{递增}
\end{aligned}$$

不过偏序集之中最有意思的还并不是上面提到的单调映射. 下面我们介绍更有趣味的映射.

定义 12.22 (闭包映射) 已知偏序集合 P, 映射 $\varphi: P \to P$ 满足

Cl1 $x \leq \varphi(x)$. *(递增性)*

Cl2 $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$. *(单调性)*

Cl3 $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ *(幂等性)*

则称 φ 为 P 的一个闭包映射或闭包算子.

例 12.23 关系的闭包 *(4.18)*, 根据 *(4.19)* 是一个闭包映射. 当然其中也包含 *(5.6)*. 所在的偏序集是集合的所有关系关于 $\subseteq$ 的偏序集.

例 12.24 在拓扑空间中取闭包, 根据 *(6.16)* 是一个闭包映射. 所在的偏序集是拓扑空间的所有子集关于 $\subseteq$ 的偏序集. 同理, 取内部则是在拓扑空间的所有子集关于 $\supseteq$ 的偏序集上闭包映射.

例 12.25 生成的拓扑 *(6.44)*, 根据 *(6.45)* 是一个闭包映射. 所在的偏序集是集合的幂集的所有子集关于 $\subseteq$ 的偏序集.

例 12.26 生成的子群 *(9.25)*, 根据 *(9.26)* 是一个闭包映射. 所在的偏序集是群的所有子集关于 $\subseteq$ 的偏序集.

同样, 生成的 *(左右双边)* 理想 *(10.19)* 亦同理.

例 12.27 在线性空间 V 中, 向量张成的子空间也是一个闭包映射. 所在的偏序集是 V 的所有子集关于 $\subseteq$ 的偏序集.

命题 12.28 对于偏序集 P, 闭包映射 $\varphi : P \to P$, 则

$$\{\varphi(x) : x \in P\} = \{x \in P : x = \varphi(x)\}$$

即 φ 的不动点就是 φ 的像.

证明 任何 $y = \varphi(x)$, 有 $y = \varphi(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(y)$. 反之, 对于 $x \in P$ 使得 $x = \varphi(x)$, 必有 $x \in \{\varphi(x) : x \in P\}$. □

回忆上下确界的定义 (5.19).

命题 12.29 对于偏序集 P, 闭包映射 $\varphi : P \to P$, $A \subseteq \varphi(P)$, 则

(1) 若 A 在 P 中有下确界 $\inf A$, 则 $\inf A \in \varphi(P)$, 从而

$$A \text{ 在 } \varphi(P) \text{ 的下确界} = \inf A$$

(2) 若 A 在 P 中有上确界 $\sup A$, 则 A 在 $\varphi(P)$ 存在上确界, 且

$$A \text{ 在 } \varphi(P) \text{ 的上确界} = \varphi(\sup A)$$

证明 (1) 因为 $\forall a \in A$, $\inf A \leq a$, 故 $\varphi(\inf A) \leq \varphi(a) = a$, 因为 $\inf A$ 是下确界, 则

$$\varphi(\inf A) \leq \inf A$$

反之, 根据递增性, $\inf A \leq \varphi(x)$, 从而 $\inf A = \varphi(\inf A)$, 故 $\inf A \in \{\varphi(x) : x \in P\}$.

(2) 首先, 因为 $\forall a \in A$, $a \leq \sup A$, 故 $a = \varphi(a) \leq \varphi(\sup A)$. 若 $x = \varphi(x)$ 使得

$$\forall a \in A, a \leq x$$

则 $\sup A \leq x$, 故 $\varphi(\sup A) \leq \varphi(x) = x$, 得证. □

上面的命题解释了为什么子空间的交还是子空间, 子群的交还是子群, 等等我们证明了数次的事.

另一种饶有趣味的映射是 Galois 联络, 这和闭包映射关系密切.

定义 12.30 (Galois 联络) 已知偏序集 X,Y 映射 $\alpha: X \to Y, \beta: Y \to X$, 满足:

Gal1 对于 $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$, *(递减性)*

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \alpha(x_1) \geq \alpha(x_2) \qquad y_1 \leq y_2 \Rightarrow \beta(y_1) \geq \beta(y_2)$$

Gal2 对于 $x \in X, y \in Y$, *(闭包性)*

$$x \leq \beta(\alpha(x)) \qquad y \leq \alpha(\beta(y))$$

则称 (α,β) 为 X,Y 的**Galois 联络 (Galois connection)**.

命题 12.31 若 (α,β) 为偏序集 X,Y 的 *Galois* 联络, 则

$$\alpha(\beta(\alpha(x))) = \alpha(x) \qquad \beta(\alpha(\beta(y))) = \beta(y)$$

证明 因为

$$x \leq \beta(\alpha(x)) \overset{\text{递减性}}{\Rightarrow} \alpha(\beta(\alpha(x))) \leq \alpha(x)$$

且

$$y \leq \alpha(\beta(y)) \overset{y=\alpha(x)}{\Rightarrow} \alpha(x) \leq \alpha(\beta(\alpha(x)))$$

另一条则是类似的. □

命题 12.32 若 (α,β) 为偏序集 X,Y 的 *Galois* 联络, 则 $\beta\circ\alpha$ 和 $\alpha\circ\beta$ 分别是 X,Y 的闭包映射.

证明 直接逐条验证, 习题见. □

命题 12.33 (伴随性) 已知偏序集 X,Y 映射 $\alpha: X \to Y, \beta: Y \to X$, (α,β) 为偏序集 X,Y 的 *Galois* 联络的充分必要条件为

$$y \leq \alpha(x) \iff x \leq \beta(y)$$

证明 必要性:

$$y \leq \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \beta(y) \geq \beta(\alpha(x)) \geq x \quad \Rightarrow \quad x \leq \beta(y)$$

反之亦然.

充分性: 令 $y = \alpha x$, 左边 $\alpha x \leq \alpha x$ 显然成立, 故

$$x \leq \beta(\alpha(x))$$

设 $x_1 \leq x_2$, 根据上式有 $x_1 \leq \beta(\alpha(x_2))$, 令 $x = x_1, y = \alpha x_2$, 右边成立, 故

$$\alpha x_2 \leq \alpha x_1$$

反之亦然. □

以上性质被称为 Galois 联络的伴随性, 源于线性代数中内积空间的伴随变换:

$$\langle \mathscr{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathscr{A}^* \boldsymbol{y} \rangle$$

相信读者可以理解其中的相似性.

例 12.34 已知集合 X, Y, $f: X \to Y$, 根据 *(2.6)*,

$$\begin{array}{rccc} f: & 2^X & \longrightarrow & (2^Y)^{op} \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f^{-1}: & (2^Y)^{op} & \longrightarrow & 2^X \\ & B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

是 *Galois* 联络. 其中 $(2^Y)^{op}$ 指的是偏序集 $(2^Y, \supseteq)$.

Galois 联络的例子非常多, 更多的例子我们习题见.

⋙⋙ 习题 §12.3 ⋘⋘

习题 12.10 验证 *(12.32)*.

习题 12.11 若 (α, β), (α, β') 同为偏序集 X, Y 的 *Galois* 联络, 求证: $\beta = \beta'$. (提示: 利用伴随性.)

习题 12.12 考虑良序集 W, 单调递增的映射 $f: W \to W$, 求证: 对任何 $x \in W$, $x \leq f(x)$. 并由此说明 $W \to W$ 的单调递增双射只有 id_W. (提示: 否则, 找最小的 x 使得 $f(x) < x$, 这样 $f(f(x)) < f(x)$ 是更小的元. 后一个论断是因为 f^{-1} 也递增.)

习题 12.13 若 (α, β) 是偏序集 X, Y 的 *Galois* 联络, 求证: $\beta(\alpha(X))$ 和 $\alpha(\beta(Y))$ 作为偏序集是同构的.

习题 12.14 若 (α, β) 为偏序集 X, Y 的 *Galois* 联络, 求证:

$$y \leq \alpha(x) \iff \alpha(\beta(y)) \leq \alpha(x)$$

习题 12.15 若 (α, β) 是偏序集 X, Y 的 *Galois* 联络, 求证: $\beta(\alpha(X)) = \beta(Y)$. 即

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, \mathrm{s.\,t.}\, \beta(\alpha(x)) = \beta(y)$$

(提示: 证明 $\beta(Y) \subseteq \{x \in X : \beta\alpha x = x\} = \beta(\alpha(X)) \subseteq \beta(Y)$.)

习题 12.16 已知偏序集 X, 闭包映射 φ, 求证: 存在偏序集 Y, 以及 X, Y 的 *Galois* 联络 (α, β), 使得 $\beta\alpha = \varphi$. (提示: 选取 $Y = \varphi(X)$.)

习题 12.17 (根式理想) 已知交换幺环 R, 理想 I, 记

$$\sqrt{I} = \{x \in R | \exists n \in \mathbb{N}, \mathrm{s.\,t.}\, x^n \in I\}$$

称为 I 的**根式 (radical)** .

(1) 求证: I 是理想.

(2) 求证: $\sqrt{*} : I \mapsto \sqrt{I}$ 是闭包映射.

问题 12.18 (Moore 族) 已知集合 X, $\mathfrak{M} \subseteq 2^X$, 若满足

(1)$X \in \mathfrak{M}$.

(2)$\mathfrak{M}$ 的任意交仍然属于 $\mathfrak{M}$.

则称 $\mathfrak{M}$ 为 **Moore 族 (family)** .

求证: *Moore* 族与 2^X 上的闭包映射互相, 互逆确定.

习题 12.19 考虑内积空间 W 的全体子空间 $\mathcal{W}$, 对 $\subseteq$ 作成偏序集, 作

$$\begin{aligned} v: \quad \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{W} \\ W &\longmapsto W^{\perp} \end{aligned}$$

求证: (v, v) 是 V 自身到自身的 *Galois* 联络.

习题 12.20 已知交换幺环 R, 对于理想 I, J, 定义理想的商

$$(I : J) = \{r \in R | rJ \subseteq I\}$$

求证:

(1)$(I : J)$ 是理想.

(2)$(- : J) : I \mapsto (I : J)$ 与 $- \cdot J : I \mapsto IJ$ 形成 *Galois* 联络. (提示: 用伴随性.)

(3)$(I : -) : J \mapsto (I : J)$ 与自身形成 *Galois* 联络.

习题 12.21 考虑域 K, 考虑 n 元多项式 $K[X_1, \ldots, X_n]$ 和 K^n, 考虑 $K[X_1, \ldots, X_n]$ 的所有理想构成的偏序集是 $\mathscr{I}$, K^n 的所有子集构成的偏序集是 $\mathscr{P}$, 证明下面的映射是 $\mathscr{I}, \mathscr{P}$ 之间的 *Galois* 联络

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}: \quad \mathscr{I} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ I &\longmapsto \{x \in K^n : \forall f \in I, f(x) = 0\} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathcal{I}: \quad \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{I} \\ S &\longmapsto \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] : \forall x \in S, f(x) = 0\} \end{aligned}$$

因为 f 有 n 个未知数, K^n 存有 n 个未知数, 故带入是合理的. 并证明

$$\mathcal{Z}(I \cap J) = \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J)$$

(提示: 注意到若 $g \in I, h \in J$ 使得 $g(x) \neq 0 \neq h(x)$, 则 $f = gh \in I \cap J, f(x) \neq 0$.)

12.4 偏序集的直积

定义 12.35 (二元直积) 已知偏序集 P, Q, 在 $P \times Q$ 上定义

- **支配序 (dominated order)**

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) :\iff x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$$

- **字典序 (lexicographical order)**

$$(x_1, y_1) \leqq (x_2, y_2) :\iff x_1 < x_2 \text{ 或} (x_1 = x_2, y_1 \leq y_2)$$

定义 12.36 (有限直积) 已知偏序集 $P_1, P_2, \ldots, P_n$, 可以递归地定义有限个偏序集的支配序和字典序

$$P_1 \times P_2 \times P_3 \times \ldots \times P_n = (P_1 \times P_2) \times P_3 \times \ldots \times P_n$$

化为 $n-1$ 的情况.

定义 12.37 (一般直积) 已知一族偏序集 $\{P_i\}_{i \in I}$, 在 $\prod_{i \in I} P_i$ 上定义支配序

$$(a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I} \iff \forall i \in I, a_i \leq b_i$$

假如 I 还是一个良序集, 还可以定义字典序, 对于 $(a_i)_{i \in I} \neq (b_i)_{i \in I}$

$$(a_i)_{i \in I} \leqq (b_i)_{i \in I} \iff a_j < b_j$$

其中 j 是 $\{i \in I : a_i \neq b_i\}$ 的最小值.

如定义, 字典序是将坐标从左向右逐位比较. 就如同字典上对单词的排列顺序一样. 字典序与支配序有着很大差别, 见下图.

但字典序并不是一个结构良好的序结构, 因为字典序没有交换和结合的性质, 但是字典序有保持全序的特性, 如下.

命题 12.38 已知偏序集 P, Q, $P \times Q$ 上的字典序 $\leqq$, 则

$$P, Q \text{为全序集} \iff (P \times Q, \leqq) \text{为全序集}$$

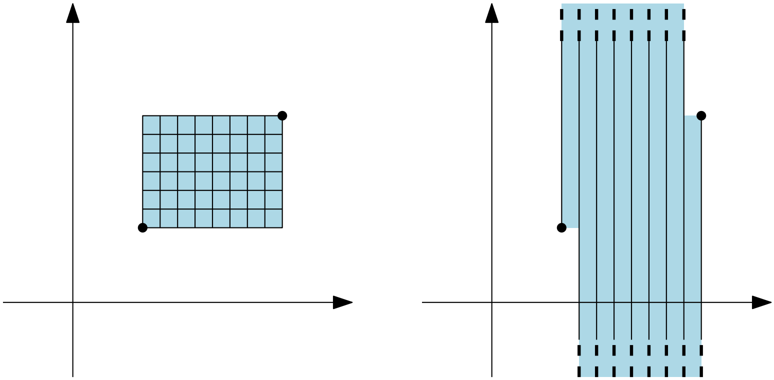


图 12.2: 两种序的比较

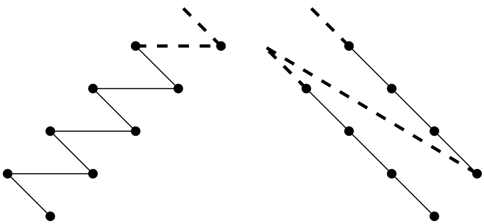


图 12.3: 字典序

例 12.39 证明: $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ 上字典序和 $\{0,1\}\times\mathbb{N}$ 上字典序不同构. 因为前者存在两个元素之间具有无穷个元素在其之间, 后者则不存在.

补充 12.40 (文字的字典序) 对于集合 X, 我们现在称其为**字母表 (alphabet)**, 我们称

$$W=\bigsqcup_{i=0}^{\infty}X^i$$

为**单词表**, 称其中一个元素为**文字 (word)** 或**单词**. 同时, 约定 $X^0=\{\wedge\}$, $\wedge$ 被称为**空字**, $(x_1,\ldots,x_n)\in X^n$ 直接记为 $x_1\ldots x_n$, 称其长度为

n. 假如 X 有全序, 在 W 上, 我们可以真正地建立 "字典" 序, 定义

$$x_1 \dots x_n < y_1 \dots y_m \iff \left(\exists k \le \min(m,n), \begin{cases} \forall i < k, x_i = y_i \\ x_k < y_k \end{cases}\right) \text{或} \, (m > n, \forall i \le n, x_i = y_i)$$

⋙⋙ 习题 §12.4 ⋘⋘

习题 12.22 求证: 良序集的有限字典序还是良序集.

问题 12.23 取 $[0,1]$ 上的通常序 $\le$, 考虑 $[0,1] \times [0,1]$ 上的字典序, 回忆序拓扑 *(6.47)*, 这诱导了 $[0,1] \times [0,1]$ 上的一个拓扑. 求证:

(1) 此时 $[0,1] \times [0,1]$ 是连通的. (提示: 假如有集合 $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ 既开又闭, 则对任何 $x \in [0,1]$, 截面 $A_x = \{y \in [0,1] : (x,y) \in A\}$ 既开又闭 (因为纵截面上的序和原本 $[0,1]$ 上的序完全一样), 这迫使 A 形如 $A_0 \times [0,1]$, 此时 A_0 又既开又闭 (因为横截面上的序和原本 $[0,1]$ 上的序完全一样).)

(2) 但此时 $[0,1] \times [0,1]$ 不是道路联通的. (提示: 例如, $(0,0)$ 就无法和 $(1,1)$ 连接, 对每一点 $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$, 可以构造一个连续函数 f 使得 $x < x_0$ 时, $f(x,y) = 0$, $x > x_0$ 时, $f(x,y) = 1$, $f(x_0, y) = y$. 由于道路连通也有介值定理, 所以这条道理取遍 $[0,1] \times (0,1)$ 所有元素. 但是 $[0,1] \times (0,1) = \bigsqcup_{x \in [0,1]} \{x\} \times (0,1)$, $\{x\} \times (0,1)$ 是一些不交的开集, 其原像是 $[0,1]$ 的开集, 不可数个这样的开集会 "挤爆"$[0,1]$, 从而矛盾, 参见习题3.18.)

刁题☠ 12.24 (单项式序) 在域 K 上, 多元多项式环 $R = K[X_1, \dots, X_n]$, 我们可以考虑给所有的单项式排定一个全序 $\le$, 并且要求其满足如下条件.

(1) 对任何单项式 t, $1 \le t$.

(2) 对任何单项式 t, s_1, s_2, $s_1 \le s_2 \Rightarrow ts_1 \le ts_2$.

则称 $\le$ 是**单项式序**. 求证:

(1) 单项式对文字的字典序是多项式序.

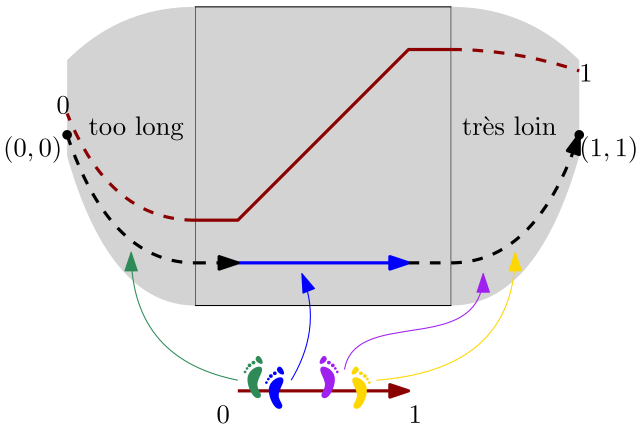


图 12.4: “比脚更长的路”

(2)$n = 1$ 时，多项式序就是

$$1 < X < X^2 < X^3 < \dots$$

*(3)***(Dickson)**对于任何由单项式组成的非空集合 T，则存在有限集合 $S \subseteq T$ 使得

$$\forall t \in T, \exists s \in S, f \in R, \text{s.t.}\, t = sf$$

(提示：任意选择一个元素进入 S，然后会发现被 s 杀掉的 t“维数”降低了，用归纳法。)

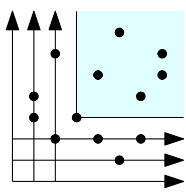


图 12.5: Dickson 定理

(4) 多项式序是良序. (提示：显然 $t = sf$ 蕴含 $s \le t$，故只要找 (3) 中有限子集的最小元。)

第十三章　格的基本概念

本章是对格的讨论.

13.1　格的定义与例子

定义 13.1 (偏序定义) 已知非空集合 L 和 L 上偏序 $\leq$ 组成的对 $(L, \leq)$, 满足

Lat1 $\forall a, b \in L$, a, b 的下确界 $\inf(a, b)$ 存在.

Lat2 $\forall a, b \in L$, a, b 的上确界 $\sup(a, b)$ 存在.

则称 $(L, \leq)$ 为 **格 (lattice)** .

定义 13.2 (代数定义) 已知非空集合 L 和 L 上封闭的二元运算, **交** $\wedge$, **并** $\vee$, 组成的对 $(L, \wedge, \vee)$, 满足

Lat1 $a \wedge b = b \wedge a$ *(交换律)*

$a \vee b = b \vee a$

Lat2 $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ *(结合律)*

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Lat3 $a \wedge a = a$ *(幂等律)*

$a \vee a = a$

Lat4 $(a \vee b) \wedge a = a$ *(吸收律)*

$(a \wedge b) \vee a = a$

则称 $(L, \wedge, \vee)$ 为**格**.

定理 13.3 *以上两个定义 (13.1) 和 (13.2) 是等价的, 具体来说,*

- *对于偏序定义 (13.1) 的格 $(L, \leq)$, 通过定义*

$$a \wedge b = \inf(a, b) \qquad a \vee b = \sup(a, b)$$

这定义了一个代数定义的格.

- *对于代数定义 (13.2) 的格 $(L, \wedge, \vee)$, 通过定义*

$$x \leq y :\iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$$

这定义了一个偏序定义的格.

- *且二者互逆.*

证明 对于偏序定义的格, 需要验证命题面上定义的 $\wedge, \vee$ 满足 (13.2) 四条性质.

交换律 $a \wedge b = \inf(a, b) = \inf(b, a) = b \wedge a$, 另一条是类似的.

结合律 $(a \wedge b) \wedge c = \inf(a, b, c) = a \wedge (b \wedge c)$, 另一条是类似的.

幂等律 $a \wedge a = \inf(a, a) = \inf(a) = a$, 另一条是类似的.

吸收律 $(a \vee b) \wedge a = \inf(a \vee b, a) = a$, 因为

$$\text{(i)} \begin{cases} a \leq a \vee b \\ a \leq a \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x \leq a \vee b \\ x \leq a \end{cases} \iff x \leq a$$

同样, 另一条是类似的.

对于代数定义定义的格, 需要先验证命题面上定义的 $\leq$ 是偏序, 且满足 (13.1) 性质. 首先注意到利用吸收律

$$x \wedge y = x \quad \Rightarrow \quad x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad x \wedge y = x$$

故偏序为良定义, 下面的性质都是对偶的.

自返性 $a \leq a \iff a \wedge a = a$.

传递性 $a \leq b, b \leq c \iff a \wedge b = a, b \wedge c = b$, 于是

$$c \wedge a = c \wedge (a \wedge b) = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a \iff a \leq c$$

反对称性 $a \leq b, b \leq a \iff a \wedge b = a, b \wedge a = b \quad \Rightarrow \quad a = b$.

上下确界存在 $\inf(a, b) = a \wedge b$, 因为

$$\begin{cases} \text{(i)}\begin{cases} a \wedge b \leq a \iff (a \wedge b) \wedge a = a \wedge b \\ a \wedge b \leq b \iff (a \wedge b) \wedge b = a \wedge b \end{cases} \\ \text{(ii) 若 } \begin{cases} x \leq a \iff x \wedge a = x \\ x \leq b \iff x \wedge b = x \end{cases} \text{则} \\ \quad (x \wedge a) \wedge (x \wedge b) = x \wedge x \Rightarrow x \wedge (a \wedge b) = x \iff x \leq a \wedge b \end{cases}$$

另一方面则是对偶的.

最后, 关于互逆, 这不难验证. □

以上结果说明我们在谈论格的时候, 可以同时使用 $\leq, \wedge, \vee$ 作为语言, 二者之间重要的关系是下面的单调性.

命题 13.4 (单调性) *已知格 L, $a, b, c \in L$, 则*

$$a \leq b \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c \qquad a \leq b \Rightarrow a \vee c \leq b \vee c$$

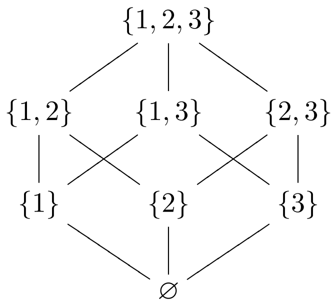
即 $* \wedge c$ 和 $* \vee c$ 都是单调的.

证明 若 $a \leq b$, 则

$$(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$$

即 $a \wedge c \leq b \wedge c$. 对偶的一面是类似的. □

例 13.5 (幂集格) 已知集合 X, 幂集 2^X 作成一个格, 偏序为包含 $\subseteq$, 交并为 $\cap, \cup$. 如下图.



$2^{\{1,2,3\}}$ 的 *Hasse* 图

格的代数定义中正是 (1.14) 中交并性质的前 4 条, 从这个意义上看, 格似乎是为幂集量身定制的, 交和并的称呼也源于此.

例 13.6 (全序格) 已知全序集 X, 则 X 作成一个格, 偏序为全序, 交并为取最小值和取最大值.

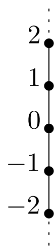
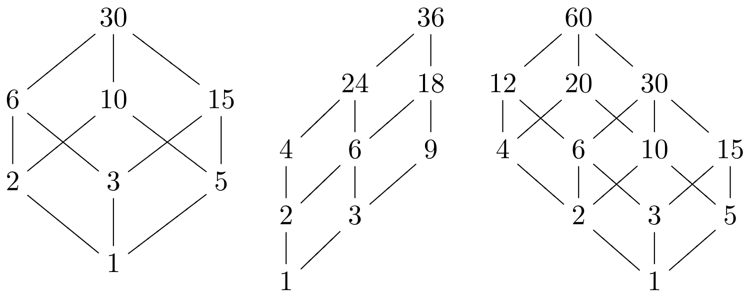


图 13.1: 全序集 $\mathbb{Z}$ 的 Hasse 图

例 13.7 (正整数格) 正整数 $\mathbb{N}^*$ 作成一个格, 偏序为整除 $|$, 交和并为最大公约数和最小公倍数.



30, 36, 60 的因数的 *Hasse* 图

例 13.8 (线性空间的子空间) 已知线性空间 V, V 的所有子空间作成一个格, 偏序为包含 (也即子空间)$\subseteq$, V_1, V_2 的交和并分别为

$$V_1 \cap V_2 \qquad V_1 + V_2$$

更一般地, 对于 R-模 M, M 的子模作成一个格, 偏序为包含 (即子模)$\subseteq$, M_1, M_2 的交和并分别为

$$M_1 \cap M_2 \qquad M_1 + M_2$$

例 13.9 (群的子群) 已知群 G, 所有 G 的子群组成的集合作成一个格, 偏序为 $\subseteq$, H, K 的交和并分别为

$$H \cap K \qquad \langle H \cup K \rangle$$

后者是 $H \cup K$ 生成的子群, 参见 (9.25).

例 13.10 (群的正规子群) 已知群 G, 所有 G 的正规子群组成的集合作成一个格, 偏序为包含 $\subseteq$, N, K 的交和并分别为

$$N \cap K \qquad NK$$

例 13.11 (格的直和) 对于格 L_1, L_2, $L_1 \times L_2$ 是一个格, 交和并为

$$(a, b) \wedge (x, y) = (a \wedge x, b \wedge y) \qquad (a, b) \vee (x, y) = (a \vee x, b \vee y)$$

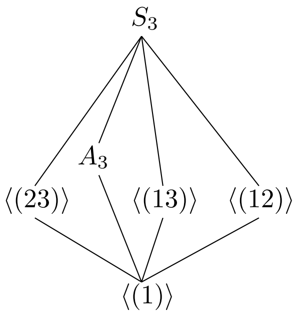


图 13.2: $\mathfrak{S}_3$ 子群的 Hasse 图

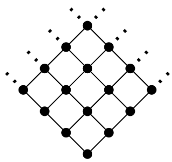


图 13.3: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的 Hasse 图

格的直和的 Hasse 图形状成为一张格点组成的网, 这是格得名的原因.

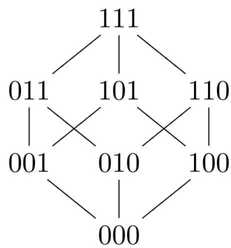
例 13.12 (二进制数串) n 位二进制数串作成一个格, 交和并为与 *(and)* 和或 *(or)*.

事实上, 对于 1 位二进制数 $B = \{0, 1\}$, 定义偏序

$$0 \leq 0 \quad 0 \leq 1 \qquad 1 \not\leq 0 \quad 1 \leq 1$$

则 n 位二进制数正是

$$B^n = B \times B \times \ldots \times B$$



3 位二进制串的 *Hasse* 图

⋙⋙ 习题 §13.1 ⋘⋘

习题 13.1 (半格) *在偏序定义 (13.1) 中, 若只有 (1), 则称 L 为***下半格***; 若只有 (2), 则称 L 为***上半格***.*

在代数定义 (13.2), 若只有 (1)(2)(3) 前半部分, 则称 L 为 **交半格***; 若只有 (1)(2)(3) 后半部分, 则称 L 为***并半格***.*

求证: 下半格等价于交半格; 上半格等价于并半格.

习题 13.2 *求证: 格的极大元即最大元.*

习题 13.3 *对于格 B, 定义对角映射 Δ 和并 $\vee$*

$$\begin{array}{rcccl} \Delta: & B & \longrightarrow & B\times B \\ & x & \longmapsto & (x,x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} \vee: & B\times B & \longrightarrow & B \\ & (x,y) & \longmapsto & x\vee y \end{array}$$

求证: $(\Delta,\vee)$ 是 $B, B\times B$ 的 Galois 联络.

习题 13.4 *定义格 B 中满足*

$$p=a\vee b\Rightarrow p=a \text{ 或} p=b$$

的 p 为 **不可约 (irreducible) 元***. 有最小元 0 的格, 定义满足*

$$(0,p):=\{x\in B:0<x<p\}=\varnothing$$

的 p 称为 **原子 (atom)***. 回答下列问题:*

(1) 若格 L 有最小元 0, 求证: 原子一定是不可约元. 反之则不然 (举出反例).

(2) 若格 L 满足降链条件, 求证:

$$\forall x \in R, \exists \text{不可约元} p_1, p_2, \ldots, p_n, \text{s.t.}\ x = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$$

13.2 子格, 理想与滤子

定义 13.13 (子格) *若格 L 的一个非空子集 S 对 L 的运算 (指的是交和并) 也成为一个格, 那么称 S 为 L 的* **子格 (sublattice)** .

显然, 和所有代数结构一样, 对于子结构有如下判定定理.

命题 13.14 (子格判定定理) *格 L 的一个非空子集 S, $S \leq L$ 的充要条件是*

$$\forall a, b \in S \subseteq L, a \wedge b, a \vee b \in S$$

下面介绍两种特殊的子格, 这两个概念将在更深入的学习中遇到.

定义 13.15 (理想) *已知格 L, 非空子集 $S \subseteq L$ 满足:*

Ideal1 $x \leq y \in S \Rightarrow x \in S.$ *(向下封闭性)*

Ideal2 $x, y \in S \Rightarrow x \vee y \in S.$ *(向上封闭性)*

则称 S 为一个 **理想 (ideal)** *. 若只满足 (1), 则称为* **序理想 (order ideal)** .

称为理想的原因就是因为在更早的记号中, 通常记 $x \wedge y = x * y, x \vee y = x \oplus y$, 在加法和乘法的意义下, 这个定义将完全类似于环中的理想的定义.

定义 13.16 (滤子) *已知格 L, 非空子集 $S \subseteq L$ 满足:*

Filter1 $x \geq y \in S \Rightarrow x \in S.$ *(向上封闭性)*

Filter2 $x, y \in S \Rightarrow x \wedge y \in S$. *(向下封闭性)*

则称 S 为一个**滤子 (filter)**.

滤子是理想的对偶概念, 在拓扑中将有应用.

命题 13.17 已知格 L, 关于子格有如下性质:

(1) 任何一个闭区间 $[a, b]$, 理想, 滤子都是一个子格.

(2) $S, T \leq L$, 则 $S \cap T \leq L$.

补充 13.18 (理想的意义) 一般而言, 对于一个格 L, 理想 $I \subseteq L$ 中的成员通常意味着某种意义下的"小".

例如, 我们可以在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义 **Jordan 零测集**

$$A \text{ 是 Jordan 零测集} \iff \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} m(S_i) : \begin{array}{l} \text{正整数 } m, \\ S_i \text{ 是闭长方体}, \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i \end{array} \right\} = 0$$

其中 $m(S_i)$ 是长方体的体积. 即"面积为 0"的那些集合. 例如, 对于 $\mathbb{R}^2$ 中的连续可微曲线总是 Jordan 零测集[1]. 交给读者去验证, 全体 Jordan 零测度集 $\mathcal{J}$ 是 $2^{\mathbb{R}}$ 的理想.

这样回看理想的定义, 在这个例子中的意义就是说, 有限个面积为 0 的集合的并面积还是为 0, 面积为 0 的集合的子集面积还是 0.

再例如, 全体有限集合也构成一个理想, 交给读者去补充细节.

---

[1] 具体来说, 设连续可微曲线 $(x(t), y(t))$, 假设

$$-M < x(t), y(t), x'(t), y'(t) < M$$

注意到若 t 变动 Δt, x, y 至多变动 $M\Delta t$(Lagrange 中值定理), 固定 Δt, 这条曲线可以用一族边长为 $2M\Delta t$ 的正方体覆盖, 这样的正方体只需要 $\frac{1}{\Delta t}$ 这么多, 故总体积可以估计为 $4M^2\Delta t$, 只要 Δt 足够小, 总面积就足够小.

补充 13.19 (滤子的意义) 对比于理想, 滤子的意义就应该是某种意义下的"大". 例如对于集合 X, $x \in X$, 全体含 x 的集合构成一个滤子. 也就是说, "x 很重", 含 x 的集合就很"大".

类似地, 回忆 *(6.11)*, 对于拓扑空间 X, $x \in X$, x 的全体邻域 $\mathfrak{F}_x$ 是一个滤子, 换句话说, $\mathfrak{F}_x$ 就是那些"围着 x 转的集合".

⋙⋙ 习题 §13.2 ⋘⋘

问题 13.5 我们下面介绍一些滤子的语言.

在拓扑空间 X 中, 我们重新定义滤子指的是非平凡滤子, 即不等于不等于 2^X 的滤子, 即滤子不含空集.

定义拓扑空间的滤子 $\mathfrak{F}$ 收敛到 $x \in X$ 当 x 的任何邻域都在 $\mathfrak{F}$ 之中.

(1) 若子集 $S \subseteq 2^X \setminus \{\varnothing\}$, 满足有限交性质

$$\forall U, V \in S, \quad U \cap V \neq \varnothing$$

求证: 存在滤子 $\mathfrak{F} \supseteq S$.

(2) 求证: 任何滤子 $\mathfrak{F}$ 至多收敛到一个点 $\iff$ X 是 *Hausdorff* 空间. (提示: 否则, 假设有滤子收敛到两个点 x, y, 这样任何 $U \in \mathfrak{F}_x, V \in \mathfrak{F}_y$, 根据 $\varnothing \notin \mathfrak{F}$, 矛盾. 反之, 若 x, y 不能分离, $\mathfrak{F}_x \cup \mathfrak{F}_y$ 将会生成一个滤子, 这个滤子收敛到 x, y.)

(3) 求证: 对于子集 $A \subseteq X$, $x \in \overline{A}$ $\iff$ 存在滤子 $\mathfrak{F} \ni A$ 收敛到 x. (提示: 具体来说, $\mathfrak{F}_x$ 加入 A 是无害的, 因为任何 $U \in \mathfrak{F}_x$, $U \cap A \neq \varnothing$. 反之, 若 $U \in \mathfrak{F}_x$ 使得 $U \cap A = \varnothing$, 那么与 $U \in \mathfrak{F}$ 以及 $A \in \mathfrak{F}$ 矛盾.)

(4) 求证: 任何滤子 $\mathfrak{F}$ 都存在一个滤子 $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ 使得 $\mathfrak{G}$ 收敛 $\iff$ X 紧致. (提示: 假设开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 无有限子覆盖, 则 $\{U_i^c\}_{i\in I}$ 有限交非空, 从而生成一个滤子 $\mathfrak{F}$, 假设 $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ 收敛到 x, 假设 x 被 U_i 覆盖, 但这样, U_i 与 U_i^c 同时落入 $\mathfrak{G}$, 矛盾. 反之, 若滤子 $\mathfrak{F}$ 不满足条件. 则对任意 x, 存在 $U_x \in \mathfrak{F}_x$ 以及 $V_x \in \mathfrak{F}$, 使得 $U_x \cap V_x = \varnothing$, 这样 U_x 形成开覆盖, 可以选出有限个, 设为 U_{x_i}, 这样 V_{x_i} 的交为空集, 与 $\mathfrak{F}$ 是滤子矛盾.)

习题☠ 13.6 除此之外，我们介绍一下网的语言. 更直接地对极限的推广是**网 (net)**.

先定义**有向 (directed) 集**为一个预序集 [2]$(D,\leq)$, 使得

$$\forall i,j\in D,\quad \exists k\in D, \text{s.t.}\, i\leq k, j\leq k$$

即, 总可以找到比有限个元素更大的元素. 显然, 格是一个有向集.

对于拓扑空间 X, 一个**网**是一个有向集到 X 的映射, 对于一个网 $(x_i)_{i\in D}$, 称其**收敛**到 $x\in X$ 当

$$\forall x \text{ 的邻域} U, \exists I\in D, \forall i\geq I,\quad x_i\in U$$

网和滤子可以互相转化如下.

(1) 对于网 $\{x_i\}_{i\in D}$, 记

$$\mathfrak{F}=\{\quad A\subseteq X:\exists i\in D,\forall j\geq i,\quad x_j\in A\quad\}$$

即 $\{x_i\}$"终于"的集合. 这是一个滤子. 验证: $\mathfrak{F}$ 收敛到 $x\iff\{x_i\}$ 收敛到 x.

(2) 对于滤子 $\mathfrak{F}$, 记有向集

$$D=\{(F,x):x\in F\in\mathfrak{F}\}\qquad (F,x)\leq(G,y)\iff F\subseteq G$$

网定义为投影映射 $\left[D\xrightarrow{(F,x)\mapsto x}X\right]$. 验证: $\mathfrak{F}$ 收敛到 $x\iff$ 这个网收敛到 x.

问题 13.7 (超滤子) 已知集合 X, 幂集格 $(2^X,\subseteq)$ 上极大的非平凡滤子 *(即不等于 2^X)* 称为**超滤子 (ultrafilter)**.

(1) 对于滤子 $\mathfrak{F}$, 求证: $\mathfrak{F}$ 是超滤子当且仅当

$$A\in\mathcal{F}\iff A^c\notin\mathcal{F}$$

(2) 求证: 任何滤子 $\mathfrak{F}$, 都存在超滤子 $\mathfrak{G}\supseteq\mathfrak{F}$. (提示: Zorn 引理.)

[2]即不要求反对称性, 参见习题5.12

习题 13.8 对于拓扑空间 X, 记

$$\mathfrak{C} = \{A \subseteq X : \overline{A} \text{ 紧致}\}$$

求证: $\mathfrak{C}$ 是一个理想.

13.3 同态, 同构

定义 13.20 (同态, 同构) 已知格 L, S, 映射 $\varphi : L \to S$,

- 若 φ 单调, 则称 φ 是**序同态**.

  当 φ 是双射时, 称 φ 是**序同构**.

- 称 φ 为 L 到 S 的**交同态**当 $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

  当 φ 为双射时, 称 φ 是 L 到 S 的**交同构**.

- 称 φ 为 L 到 S 的**并同态**若 $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$.

  当 φ 为双射时, 称 φ 是 L 到 S 的**并同构**.

- 若 φ 既是交同态也是并同态, 则称 φ 为 L 到 S 的**格同态**.

  当 φ 为双射时, 称 φ 是 L 到 S 的**格同构**.

如下图所示, 第一个映射是序同态映射, 第二个是并同态映射, 第三个是交同态映射, 第四个是格同态映射.

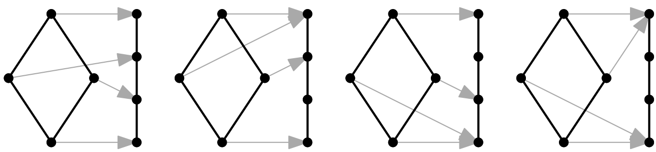


图 13.4: 格的同态

命题 13.21 已知格 L, 关于各种同态的关系如下:

(1) 若 φ 是交同态或并同态, 则 φ 是序同态.

(2) 若 φ 是序同态, 则

$$\varphi(x \wedge y) \leq \varphi(x) \wedge \varphi(y) \qquad \varphi(x \vee y) \geq \varphi(x) \vee \varphi(y)$$

证明 (1) 因为序可以用交或并来表示

$$x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$$

所以保交 (并) 必保序, 故交 (并) 同态蕴含序同态.

(2) 因为

$$\begin{cases} x \wedge y \leq x & \Rightarrow \quad \varphi(x \wedge y) \leq \varphi(x) \\ x \wedge y \leq y & \Rightarrow \quad \varphi(x \wedge y) \leq \varphi(y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

另一则是对偶的. □

定理 13.22 已知格 L, S, $\varphi : L \to S$, 则

$$\varphi \text{ 是序同构} \iff \varphi \text{ 是交同构} \iff \varphi \text{ 是并同构} \iff \varphi \text{ 是格同构}$$

证明 交同构 $\Rightarrow$ 序同构, 因为交同态是序同态, 且是双射.

序同构 $\Rightarrow$ 交同构. 分别对 φ 和 φ^{-1} 用 (13.21) 得到

$$\varphi(x \wedge y) \leq \varphi(x) \wedge \varphi(y) \qquad \varphi^{-1}(a \wedge b) \leq \varphi^{-1}(a) \wedge \varphi^{-1}(b)$$

带入 $a = \varphi(x), b = \varphi(y)$, 得到

$$\varphi^{-1}(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \leq x \wedge y$$

再作用以 φ 得证. □

⋙⋙ 习题 §13.3 ⋘⋘

习题 13.9 求证: 闭包映射是交同态. (提示: 此即 (12.29) 的有限版本.)

第十四章　更多的格

本章我们来介绍更多的格.

14.1　完备格

定义 14.1 (完备格) 对于偏序集 L, 若任何非空子集 $S \subseteq L$, 都存在上确界和下确界则称 L 为**完备格 (complete lattice)**. 显然, 此时 L 有最大元和最小元, 我们记为 $0, 1$.

方便起见, 记 $S \subseteq L$ 的上下确界分别为

$$\bigvee_{s \in S} s \qquad \bigwedge_{s \in S} s$$

并约定 $S = \varnothing$ 时, 上确界为 0, 下确界为 1.

例 14.2 根据确界原理, 扩充实数集 $\mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ 是完备格.

例 14.3 完备格的最典型例子是幂集格, 因为我们定义过无穷个集合的交与并, 交和并不必是有限的, 从而集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ 的上确界和下确界为

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \qquad \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$$

下面我们会看到, 我们可以诉诸幂集来将一般的偏序集完备化.

定理 14.4 (完备格判定定理) 已知偏序集 L, L 是完备格的充要条件是 L 有最大元, 且任何非空子集 $S \subseteq L$, 下确界 $\inf S$ 存在.

证明 必要性是显然的. 下面证明充分性, 我们证明任意非空子集 S 都存在上确界. 不妨假设 $S \neq L$, 从而 S 的上界集合

$$U = \{x \in L : \forall s \in S, s \leq x\} \neq \varnothing$$

故有下确界 a, 我们证明 a 是 S 的上确界. 因为

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \forall s \in S, \quad \forall u \in U, s \leq u \quad \Rightarrow \quad s \leq \bigwedge_{u \in U} u = a \\ \text{(ii)} \quad \text{若}\forall s \in S, s \leq x \quad \Rightarrow \quad x \in U \quad \Rightarrow \quad a \leq x \end{cases}$$

命题得证. □

命题 14.5 对于偏序集 L, 闭包映射 φ, 则

$$L \text{ 是完备格} \quad \Rightarrow \quad \varphi(L) \text{ 是完备格}$$

证明 此即 (12.29), 也可根据 (14.4) 以及 (12.29) 下确界的部分推出. □

补充 14.6 (MacNeille 定理) 每个偏序集 X 都可以嵌入到一个完备格中. 且对任何子集 $S \subseteq X$ 若上或下确界存在, 则保持.

具体来收, 对任何子集 $S \subseteq X$, 作下界集合和上界集合

$$L(S) = \{x \in X : \forall s \in S, x \leq s\} \qquad U(S) = \{x \in X : \forall s \in S, s \leq x\}$$

显然,

$$S \subseteq T \Rightarrow \begin{cases} L(S) \supseteq L(T) \\ U(S) \supseteq U(T) \end{cases} \qquad S \subseteq \begin{cases} U(L(S)) \\ L(U(S)) \end{cases}$$

于是 $(L(*), U(*))$ 是 2^X 到 2^X 的一个 *Galois* 联络, 根据 *(12.32)*$L \circ U$ 是闭包映射, 而幂集格 2^X 是完备的, 根据 *(14.5)*,

$$\overline{X} := L(U(2^X)) = \{S \subseteq X : S = L(U(S))\}$$

关于包含关系 $\subseteq$ 也是完备的. 我们证明, 透过

$$\ell : X \longrightarrow \overline{X} \qquad y \longmapsto L(\{y\}) = \{x \in X : y \leq x\}$$

X 嵌入 $\overline{X}$. 首先, ℓ 是单调单射, 因为 $\ell(x)$ 的唯一最大元就是 x. 下面证明保上下确界的命题.

- 假设 $S \subseteq X$ 有下确界 a, 那么我们断言 $\bigcap_{s\in S}\ell(s)=\ell(a)\in\overline{X}$, 因为
$$x\in\bigcap_{s\in S}\ell(s)\iff\forall s\in S,x\leq s\iff x\leq a$$
- 假设 $S\subseteq X$ 有上确界 b, 那么我们断言 $\ell(b)$ 是 $\ell(S)$ 的上确界, 首先, 显然 $\ell(b)$ 是 $\ell(S)$ 的上界. 其次, 若 $T=L(U(T))\in\overline{X}$ 是 $\ell(S)$ 的上界, 则
$$\forall s\in S,\quad s\in\ell(s)\subseteq T\quad \text{i.e.}\quad S\subseteq T$$
根据 b 是上确界, 而[1] $U(\{b\})=U(S)$. 这样,
$$U(\{b\})=U(S)\supseteq U(T)\quad\Rightarrow\quad L(U(\{b\}))\subseteq L(S(T))=T$$
而[2] $L(U(\{b\}))=\ell(b)$,

命题得证.

MacNeille 定理正是 **Dedekind 分割**所作工作的推广. 对有理数 $\mathbb{Q}$ 实行如上操作之后将会得到 $\mathbb{R}\sqcup\{\pm\infty\}$, 为了得到我们常用的 $\mathbb{R}$, 后续的工作还包括定义加法和乘法和验证运算律.

$\ggg\!\!\ggg$ 习题 §14.1 $\lll\!\!\lll$

问题 14.1 (Knaster–Tarski 不动点定理) 已知完备格 L, $f:L\to L$ 是单调递增的, 求证:
$$\exists a\in L,\text{s.t.}\quad a=f(a)$$
(提示: 取 $a=\sup\{x\in L:x\leq f(x)\}$, 因为对任何 $x\leq f(x)$ 有 $x\leq a$, 则 $x\leq f(x)\leq f(a)$, 从而 $a\leq f(a)$. 又 $f(a)\leq f(f(a))$, 从而 $f(a)\leq a$.)

问题 14.2 回忆序拓扑 *(6.47)*, 求证: 全序集 L 是完备格 $\iff$ 对应序拓扑是紧致的. (提示: 用 Alexander 子基定理 (8.20) 证明紧致. 利用 (14.4), 反之, 先证明存在最小元, 然后, 因为上界集都是闭集, 因为序拓扑都是 Hausdorff 的, 从而是紧致的.)

[1] 因为 $\forall s\in S, s\leq x\iff b\leq x$.

[2] 因为 $x\leq b\Rightarrow\forall y\geq b,\quad x\leq y\overset{y=b}{\Rightarrow}x\leq b$.

14.2 模格

下面对格的讨论则会代数一些.

定义 14.7 (模格) 已知格 L, 若

$$\forall a \geq c, a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$$

则称 L 为 **模格 (modular lattice)** 或 **Dedekind 格** .

而由于对于任何格 L 而言, 若 $a \geq c$, 有

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c \qquad \because \begin{cases} a \wedge b \leq b & \Rightarrow (a \wedge b) \vee c \leq b \vee c \\ c \leq a & \Rightarrow (a \wedge b) \vee c \leq (a \wedge b) \vee a = a \end{cases}$$

故当验证一个格是模格时, 只需要验证反方向.

例 14.8 已知群 G, G 的全体正规子群作成模格. 正规子群的交并分别是

$$N \wedge K = N \cap K \qquad N \vee K = NK$$

其是模格的证明就是 *Dedekind* 法则, 参见习题*9.11*. 这也是模格被称为 *Dedekind* 模的原因.

例 14.9 已知线性空间 V, V 的全体子空间作成模格. 子空间的交并分别是

$$U \wedge W = U \cap W \qquad U \vee W = U + W$$

其证明与群论无异. 更一般地, 对于 R-模 M, M 的全体子模作成模格. 这也是模格得名的原因.

命题 14.10 格 L 是模格的充分必要条件是对任何 $b \in L$

$$a \geq c, \quad (a \vee b = c \vee b, a \wedge b = c \wedge b \Rightarrow a = c)$$

证明 必要性. 因为此时

$$a \overset{\text{吸收律}}{=} a \wedge (b \vee a) = a \wedge (b \vee c) \overset{\text{模性}}{=} (a \wedge b) \vee c = (c \wedge b) \vee c \overset{\text{吸收律}}{=} c$$

充分性. 记

$$L := a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c =: R$$

我们要证明 $L = R$, 此时

$$L \vee b = a \wedge (b \vee c) \vee b \leq a \vee b \qquad R \vee b = (a \wedge b) \vee (c \vee b) = a \vee b$$

从而 $L \vee b = R \vee b$, 同理, 对偶地, $L \wedge b = R \wedge b$, 再用条件知 $L = R$, 命题得证. □

推论 14.11 (模格的判定) 一个格 L 是模格的充分必要条件是不含如下子格 N_5

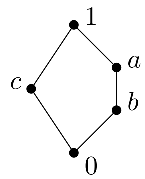


图 14.1: N_5

证明 这就是 (14.10) 的 Hasse 图的同义反复, 习题见. □

补充 14.12 (Dedekind 转置原则) 对于模格 L, $a, b \in L$, 则

$$\begin{array}{rcl} [a \wedge b, a] & \xleftrightarrow{1:1} & [b, a \vee b] \\ c & \longmapsto & c \vee b \\ d \wedge a & \longleftarrow\!\!\shortmid & d \end{array}$$

因为

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c = c \qquad (d \wedge a) \vee b = d \wedge (a \vee b) = d$$

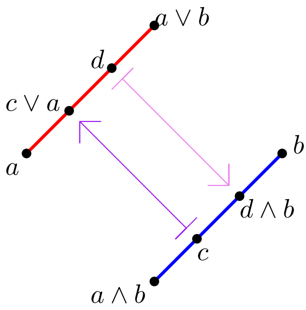


图 14.2: Dedekind 转置原则

这被称为 **Dedekind 转置 (transposition) 原则**. 这和群同构第二定理有异曲同工之妙, 参见 *(9.40)*. 如下图.

⋙⋙ 习题 §14.2 ⋘⋘

习题 14.3 证明 *(14.11)*.

习题 14.4 在模格 L 有最大, $a \leq b \in L$, 对于 $x \in L$, 若存在 $y \in L$ 使得

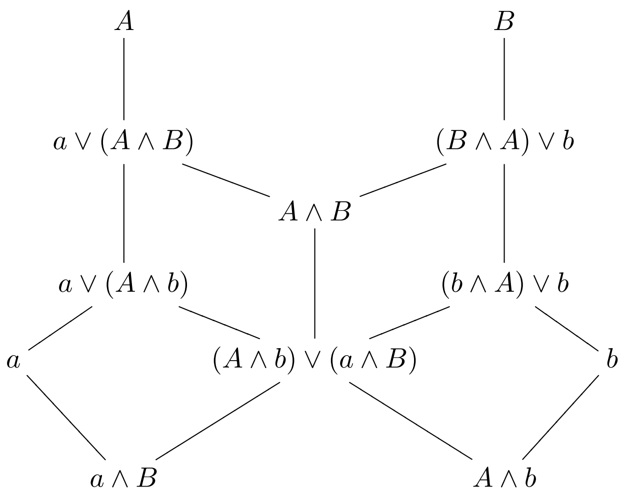
$$x \wedge y = a \qquad x \vee y = b$$

则称 x 在 $[a, b]$ 中可补的. 求证: 若 $x \in [c, d] \subseteq [a, b]$, 则 x 在 $[a, b]$ 中可补, 则必在 $[c, d]$ 中可补. (提示: 类似习题9.36.)

习题☠ 14.5 (蝴蝶引理, Zassenhaus 定理) 已知模格 L, $a \leq A, b \leq B$, 求证:

$$[(A \wedge b) \vee a, (A \wedge B) \vee a] \cong [(B \wedge a) \vee b, (A \wedge B) \vee b]$$

(提示: 证明都与 $[(A \wedge b) \vee (B \wedge a), A \wedge B]$ 同构, 参见下图)



14.3 分配格

定义 14.13 (分配格) 已知格 L, 若

$$\forall a, b, c \in L, \quad \begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

则称 L 为 **分配格 (distributive lattice)** .

与模格类似, 由于对于任何格 L 而言, 有

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad \because \begin{cases} a \wedge (b \vee c) \geq a \vee b \\ a \wedge (b \vee c) \geq a \wedge c \end{cases}$$

又因为当 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ 成立时,

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

故只要验证 $a\wedge(b\vee c)\le(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 即可. 对偶地, 或者只需要验证 $a\vee(b\wedge c)\ge(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ 即可.

命题 14.14 分配格一定是模格.

证明　当 $a\ge c$ 时, $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=(a\wedge b)\vee c$. □

例 14.15 已知集合 X, 幂集格 2^X 是分配格, 因为

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

例 14.16 全序集是分配格, 因为

$$\max(a,\min(b,c))=\min(\max(a,b),\max(a,c))$$

例 14.17 $(\mathbb{N},|)$ 是分配格, 因为

$$[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$$

其中 $(*,*),[*,*]$ 分别表示最大公约数和最小公倍数.

⋙⋙　习题　§14.3　⋘⋘

问题 14.6 对于格 L, 求证: L 是分配格当且仅当对任何 $a,b,c\in L$

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$

(提示: 首先, 这意味着 L 是模格, 然后, 两边同时交 a 用模性一阵计算.)

习题☠ 14.7 对于幺环 R, 若 R 的所有左理想都是作为模的直和项, 求证: R 的全体理想组成的格是分配格. (提示: 证明任意两个理想 I,J 都有 $I\cdot J=I\cap J$, 然后归结为乘法加法的分配律, 当然, 其中需要一些习题14.4类似的操作.)

14.4 Boole 代数

定义 14.18 (有补格) 已知格 L, 有上下界 $1, 0$,

$$\forall a \in S, \exists a' \in S, \mathrm{s.\,t.}\, a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$$

则称 L 为**有补 (complement) 格**. a' 称为 a 的**补**.

例 14.19 有限维线性空间 V 的子空间格是有补格, W 的补是 W', 使得 $W \oplus W' = V$.

例 14.20 已知集合 X 的幂集格 2^X 是有补格, $S \subseteq X$ 的补是 $X - S$.

例 14.21 已知 n 位二进制数串作成一个有补格, 一串二进制码的补为取非 not.

下面, 我们介绍 Boole 代数.

定义 14.22 (格定义) 已知格 B, 有上下界, 分配, 有补, 则称 B 为 **Boole 代数**.

如果对一个 $x \in B$ 有两个补 x', x'', 则

$$x' = x' \wedge 1 = x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') = x' \wedge x''$$

故 $x' \leq x''$, 同理 $x'' \leq x'$, 故 $x' = x''$, 故 x 的补是唯一的.

下面, 我们直接假定, x' 为 x 的补, 上下界为 $0, 1$.

Boole 代数也有 **De Morgan 律**,

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \qquad (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

这只需要直接验证.

定义 14.23 (环定义) 已知幺环 B, 每个元素都幂等 (即 $\forall r \in B, r^2 = r$), 则称 B 为 **Boole 代数**.

直接带入 $r=2$ 立刻得到 $2=0$, 故在幺环 B 的特征是 2. 然后 $(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=x+y$ 得到 $xy+yx=0$, 得到 $xy=(0-1)yx=(2-1)yx=yx$ 故是交换环. 这是我们早在习题10.1就已经知道的.

定理 14.24 *以上两个定义 (14.22) 和 (14.23) 的定义是等价的. 具体来说,*

- *对于格定义 (14.22) 的格 B, 则*

  $$x+y:=(x'\wedge y)\vee(x\wedge y')\qquad x\cdot y:=x\wedge xy\qquad 0=0,1=1$$

  是环定义的格.

- *对于环定义 (14.23) 的格 B, 则*

  $$0=0,1=1\qquad x\wedge y=xy\qquad x\vee y=x+y+xy\qquad x'=1-x$$

  是格定义的格.

- *二者互逆.*

证明 证明分很多步.

- 格定义 $\Rightarrow$ 环定义.

  加法 加法结合是因为

  $$(a+b)+c=(a\wedge b\wedge c)\vee(a'\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b'\wedge c')\vee(a'\wedge b\wedge c')=a+(b+c)$$

  零元为 0. a 的加法逆元为 a 本身, 因为 $a+a=0$, 显然加法交换.

  乘法 乘法结合, 交换显然, 乘法显然幺元 1.. 乘法分配是因为

  $$\begin{aligned} ab+ac &= ((a\wedge b)'\wedge(a\wedge c))\vee((a\wedge b)\wedge(a\wedge c)') \\ &= ((a'\vee b')\wedge a\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge(a'\vee c')) \\ &= (b'\wedge a\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(b+c) &= a \wedge ((b' \wedge c) \vee (b \wedge c')) \\ &= (a \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \end{aligned}$$

幂等 显然, 因为 $a^2 = a \wedge a = a$.

- 反之, 环定义 $\Rightarrow$ 格定义. 我们已经知道这个环是特征为 2 的交换环.

  结合律 $(a \wedge b) \wedge c = abc$,

  $(a \vee b) \vee c = 1 - (1-a)(1-b)(1-c)$.

  幂等律 $a \wedge a = a^2 = a$,

  $a \vee a = a + a - a^2 = a$.

  吸收律 $(a \vee b) \wedge a = (a+b-ab)a = a + ab - ab = a$,

  $(a \wedge b) \vee a = ab + a - aba = a$.

  上下界 $a \wedge 0 = a0 = 0$,

  $a \vee 1 = a + 1 - a = 1$.

  有补 $a \wedge (1-a) = a(1-a) = 1$,

  $a \vee (1-a) = a + (1-a) - a(1-a) = 1$.

  分配 $a \vee (b \wedge c) = a + bc - abc$,

  $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a+b-ab)(a+c-ac) = a + bc - abc$.

- 二者互逆的事实就不证明了.

证明完毕. □

例 14.25 *最简单的 Boole 代数是 $\mathbb{F}_2$, 这就是二进制码, 具体来说, 偏序是 $0 < 1$.*

例 14.26 *已知集合 X, 幂集格 2^X 构成 Boole 代数, 作为环的加法为对称差 (参见习题1.9).*

其中的妙处在于可以通过特征函数, 将 2^X 视为 $\mathbb{F}_2^X$, 即 X 那么多的 $\mathbb{F}_2$ 的直积, 交给读者去验证这两者是一致的.

例 14.27 n 为二进制码构成 *Boole* 代数，作为环的加法为异或

xor :

a	b	$a \operatorname{xor} b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

⋙⋙ 习题 §14.4 ⋘⋘

习题 14.8 求证：有限阶 *Boole* 代数的阶一定是 2 的方幂．(提示：事实上，可以视为 $\mathbb{F}_2$ 线性空间．)

习题 14.9 存在 *Boole* 代数不同构于幂集格．(提示：任意选择某个可数集合的有限子集，他们是可数的 Boole 代数．但是不会有集合的幂集是可数集．)

注记

本部分的目的已经在导言部分陈述. 由于专门讨论偏序的材料有限, 这里不拟推荐教材.

以下是分条目评注.

习题12.1介绍了**反链**, 以及一系列关于反链的组合性质. 证明的思路是 **Galvin** 给出的漂亮的证明. 参见 [34]P98§9.1, P40§4.2.

习题12.2介绍了 **Erdös-Szekers 定理**, **Seidenberg** 给出了更为漂亮的证明, 参见 [34]P38 §4.2.

习题12.7介绍了一个著名悖论, 将朴素的概率观打破 (而不是干掉了 Hilbert 第一问题). 真正的原因在于我们无法衡量集合 $\{(x, y) : y < x\}$ 的 "面积", 即便对固定的 x, $\{y : y < x\}$ 和对固定的 y, $\{x : y < x\}$ 都是 "可测" 的. 这个问题有一个离散版本, 我们将同样的游戏放倒 $\mathbb{Z}_{>0}$ 上, 对固定的 n, 只有有限个 m 使得 $m < n$, 如果采取朴素观点 $m < n$ 的概率应当为 0.

习题12.8改编自 **Sierpinski** 的结论, 参见 [47] P54.

习题12.9介绍了 **Artin 模**, **Noether 模**, 这都可以看为对模的有限性的限制, 因此这是两类非常重要的模.

闭包映射 (12.22) 和 **Galois 联络** (12.30) 很少出现在集合论的书籍之中, 几个比较可靠的来源是 [43] P95 §IV.5, 以及各种格论的材料在介绍完备格的时候, 如 [25] P544 §XIV.2, [17]P65 §IV.6 或 [24] §II.3.13.

习题12.11, 习题12.13, 习题12.14, 习题12.15, 是 Galois 联络的几个简单应用, 这些结论来自作者在具体问题中的抽象, 所以可能未见于任何资

料.

习题12.18介绍了 **Moore 族**. 作者并未找到恰当的参考, 参见wiki: Moore family.

习题12.17介绍了理想的 **根式**, 这是交换代数中的经典考虑, 参见 [14] P14 (3.22) 或 [15]P8.

习题12.19将补空间视作一种 Galois 联络, 需要注意的是, 如果不是有限维空间, 一般没有 $(W^{\perp})^{\perp} = W$. 例如考虑空间

$$\ell^2 = \left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \right\}$$

考虑 $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots)$, 则考虑 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 张成的子空间 W, 因为其张成的子空间时有限的线性组合, 故 $W \neq \ell^2$. 此时内积定义为

$$\langle\, (a_i)\,,\, (b_i)\,\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_j$$

这样容易得到 $W^{\perp} = \{0\}$, 故 $(W^{\perp})^{\perp} = \ell^2 \neq W$. 读者可能会认为用“无限”线性组合不就可以了. 但是, 在没有定义无穷加法的时候, 我们只能做有限的线性组合. 但是, 如果赋予一定的拓扑结构, 有了收敛性, 就可以谈论这一性质了, 在 Hilbert 空间的情况参见 [20] P10 2.9.

习题12.20介绍了两个理想的商, 这也是交换代数的考虑, 参见 [15]P8, 或 [14] P152 (25.1).

习题12.21介绍了代数几何的最初步的考虑, 实际上习题6.2保证闭包映射 $\mathcal{Z} \circ \mathcal{I}$ 定义了一个拓扑, 根据习题12.15, 具体来说, K^n 上的闭集被定义为全体 $\mathcal{Z}(I)$. 显然 $\varnothing = \mathcal{Z}(K[X_1, \ldots, X_n])$, $K^n = \mathcal{Z}(\{0\})$. 且

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{Z}(I_i) = \mathcal{Z}\left(\sum_{i \in I} I_i\right) \qquad \mathcal{Z}(I \cap J) = \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J)$$

其中 $\sum$ 是 I_i 的加法组合. 这满足闭集公理, 这被称为 K^n 上 **Zariski 拓扑**.

一般而言, 对于 X, Y 之间的 Galois 联络, 一个核心的问题如何刻画 X 对应的闭包映射, 而不依赖于 Y 的性质, 例如习题12.21中 K^n 的闭包映射成为一种拓扑上的闭包, 而在 $K[X_1, \ldots, X_n]$ 上情况如何呢? 代数几何中基本的 **Hilbert 零点定理 (Nullstellensatz)** 断言在 K 是代数闭域时, 其闭包映射正是习题12.17介绍的根式理想, 参见 [29] P4 1.3A. 证明参见 [25]P307 §VII.10, [14] P90 (15.7) 或 [15]P69 17.

习题12.23介绍了另一个连通但不道路连通的拓扑空间, 我们提到的第一个例子是拓扑学家的正弦曲线, 参见习题8.13. 这个新例子有一个几何意义, 我们可以认为这个空间就是在 $[0, 1]$ 的每个点上加上 $[0, 1]$ 那么多的无穷小, 假如记更有创造力的符号 $x + \epsilon y := (x, y)$, 这样

$$x_1 + \epsilon y_1 \leq x_2 + \epsilon y_2 \iff x_1 < x_2 \text{ 或} (x_1 = x_2, y_1 \leq y_2)$$

这个新例子连通但不是道路连通的根本原因就是这条看着连通的道路 “太长”, 而无法用一条直线那么长来度量. 因此, 天下或许确实有比脚更长的路, 但这些都比不上数学家们的套路.

习题12.24我们介绍了 **单项式序**, 其本原的动机是为了推广带余除法 (10.38), 这里单项式序就是类比 “比较次数的大小” 的操作. 证明单项式是良序除了这里经典的方法还有 **Hilbert 基定理** 的方法, Hilbert 基定理的证明参见 [14]P98 (16.12) 或 [15]P81 7.5, 利用 Hilbert 基定理证明单项式序是良序参见 [25] P149 §IV.12 12.2. 由此产生的 **Gröbner 基** 在计算中非常有用, 简单的介绍可以参见 [36]P117 Chapter9.

我们给出了 **格** 的两种等价定义 (13.1) 和 (13.2), 这两种定义看似无关, 实则等价, 这在数学中普遍存在, 例如等价关系和划分 (5.4), 拓扑的几种等价刻画. 这种现象被 Garrett Birkhoff 称为 **隐态 (cryptomorphism)**. Boole 代数也是一种隐态.

在 (13.18) 我们介绍了 **Jordan 零测集**, 这是最为经典的 “测度”, 参见 [6] 第二卷 P321 § 十三.4.a.

或许有些突兀, (13.9) 我们说明了一个群的子群作成一个格. 反过来问, 假如两个群的子群作成的格同构, 这两个群是否同构? 答案是否定的, 可以在有限群中搜索找到答案, 参见 mo35455.

在 (13.18) 我们介绍了理想的意义. 但在分析中更为常用的是实数幂集格的 **σ-理想**, 即还要求对至多可数并封闭, 因为分析总是微妙地处理可数性. 这在分析中更有用. 例如全体可数集就是一个 σ-理想. 不过, 分析中最为重要的是如下两例.

- 可以将 Jordan 零测集中的有限和改为可数和, 这就成为 **Lebesgue 零测集**

  $$A \text{ 是 Lebesgue 零测集} \iff \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m(S_i) : \begin{array}{l} S_i \text{ 是闭长方体}, \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \end{array}\right\} = 0$$

  即 "面积为 0" 的那些集合 [3] [4].

- 在拓扑空间 X 上, 我们可以定义 **乏集 (meager)** 或 **第一纲集 (first category)**,

  $$A \text{ 是乏集} \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, (\overline{F_i})^\circ = \varnothing$$

  即乏集可以写成一些闭包没有内部的集合的并. 根据我们的经验, 乏集就是 "到处都是洞" 的集合. 回忆习题6.37, 这说明完备距离度量不是乏集, 也就是说, 乏集是真理想.

---

[3] 稍有困难的是验证可数并, 对于一列零测集 $\{A^j\}_{j=1}^{\infty}$, 取 $\{S_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$A^j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^j \qquad \sum_{i=1}^{\infty} m(S_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$$

这样, $\{S_i^j\}_{i,j\geq 1}$ 就满足

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A^j \subseteq \bigcup_{i,j\geq 1} S_i^j \qquad \sum_{i,j\geq 1} m(S_i) < \epsilon$$

故 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A^j$ 是零测集.

[4] 显然, Jordan 零测集必然是 Lebesgue 零测集, 但反之不然. 注意到, A 是 Jordan 零测集当且仅当 $\overline{A}$ 是 Jordan 零测集, 因为闭包和有限并交换. 例如 $\mathbb{Q}$ 就不是 Jordan 零测集, 但是 Lebesgue 零测集, 因为假设 $\mathbb{Q} = \{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, 任意 $\epsilon > 0$, 总可以作

$$\left\{ \quad \left[r_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right] \quad \right\}$$

覆盖 $\mathbb{Q}$. 这就是 Lebesgue 的测度理论的一个高明之处.

这二者十分类似, 事实上, 一本同时介绍二者, 并加之比较的经典分析教材是 [47]. 聪明的读者会发现, Lebesgue 测度相比 Jordan 测度完备在将有限和改为可数和, 求和这一操作是否可以向更高的基数推广? 答案是否定的, 若指标集 I 标定的 $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的和是有限的, 则必然只有至多可数个 $x_i > 0$. 因为, 此时 $E_n = \left\{i \in I : x_i \geq \frac{1}{n}\right\}$ 都是有限集, 否则和是无限的, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{i \in I : x_i > 0\}$$

是至多可数集.

习题13.5以及习题13.6介绍了 **网** 和 **滤子**. 这是拓扑空间中相当有用的工具性语言. 滤子在 1935 年被 Garrett Birkhoff 提出, 用以替代 E. H. Moore 和 H. L. Smith 在 1922 年发明的网的概念. 网相比滤子更直接一些但是处理复杂, 滤子虽然比网抽象但是比网简单. 网能够更加直接地描述极限, 例如 Riemann 积分是关于 "细分" 的极限 [5], 以及用于定义无穷求和号 [6], [20] P15 到 P16 交界有一个对求和号的简短的说明.

在 (14.6) 我们介绍了 **MacNeille 定理**, 这正是 **Dedekind 分割** 的推广, 参见 [49]P17 附录. 我们指出, 证明中采用 $\overline{X} = L(U(X))$ 和 $U(L(X))$ 是一样的, 参见习题12.13, 故考虑上界集还是下界集是一致的. Dedekind 分割最初定义了 **分割 (cut)** 是 $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ 满足

Cut1 $\alpha \neq \varnothing, \alpha \neq \mathbb{Q}$

---

[5] 具体来说, 考虑 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, 作集合

$$D = \{(\pi, c) : \pi \text{ 是划分}, c \text{ 是选择函数, 用于选择每个区间上的取值}\}$$

定义预序

$$(\pi, c) \leq (\pi', c') :\iff |\pi| \leq |\pi'|$$

其中 $|\pi|$ 是划分的区间长的最大者, 这成为一个有向集. 作网

$$\{\xi_d\}_{d \in D} \quad : \quad \xi_d = \sum_{i=1}^{n} f(c(i)) \quad d = (\{x_i\}_{i=0}^{n}, c)$$

此网的极限即 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分.

[6] 具体来说, 对于 $X \subseteq \mathbb{R}$, 下面我们可以定义 $\sum_{x \in X} x$. 记 X 的全体有限子集为 $\mathfrak{D}$, 这对于包含关系构成一个有向集, 定义 $\sum_{x \in X} x$ 是网 $\left[\mathfrak{D} \xrightarrow{S \mapsto \sum_{x \in S} x} \mathbb{R}\right]$ 的极限. 注意到, 此时根据 Riemann 重排定理, 非绝对收敛的数列并不是此意义下的求和.

Cut2 若 $q < p \in \alpha$, 则 $q \in \alpha$.

Cut3 若 $p \in \alpha$, 则存在 $r \in \alpha$ 使得 $p < r$.

这和 MacNeille 定理的证明过程略有不同, 因为 Cut1 排除了 $\pm\infty$, 因为 $\mathbb{Q}$ 是全序集, 从而通过取补集就是一个上界集, 可知 Dedekind 分割和 MacNeille 所做的是一致的. Dedekind 分割的好处就是没有用到任何分析的概念, 这被看成是代数的构造.

习题14.1介绍了 **Knaster–Tarski 不动点定理**, 这是习题2.14的一个推广.

在 (14.11), 我们给出了模格的判定定理, 实际上分配格也有这样的定理, 除了不含 N_5, 还要求不含如下的 M_5. 直接而不自然的证明参见 P549 [25] §XIV.4.2, 自然而不直接的证明参见 [24] P109 §II.1.1 以及 P85 图 20.

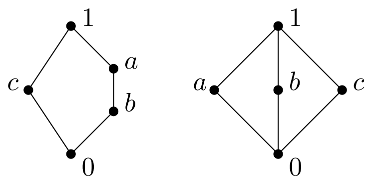


图 14.3: N_5 和 M_5

在习题14.5中我们介绍了 **Zassenhaus 定理**, 这有很多版本, 群论的版本最容易被查找到, 例如参见 [13]§4.6.4. 至于为什么被称为蝴蝶引理, 这个称呼来自 Serge Lang, 想要看到蝴蝶的读者则需有足够的情趣, 例如将那张图倒过来看.

习题14.4推广了代数中直和项的概念, 参见习题9.36. 习题中定义的性质被称为 **相对 (relatively) 可补**, 参见 [17] §VIII.1.

习题14.7介绍的那种性质的环被称为 **半单环**. 半单环的具体例子如除环 D 上的矩阵环 $\mathbb{M}_n(D)$, 事实上, 半单环通过 **Artin-Wedderburn 定理** 得以完全的刻画 —他们就是 $\mathbb{M}_n(D)$ 的有限直积. 参见 [25] P366 §IX. 3 或 [39] Chapter 1. 而这道题本身取自 [39] P31 Ex.§I.2.5. □

附录

补充

第四部分　偏序结构

插图

逻辑符号

为了方便讨论, 我们定义一些常用的逻辑符号. 在本书中, 也是多数文献中出现的逻辑符号与含义如下表所示:

符号	含义	其他记法
$\forall$	对于任意的 (for all)	
$\exists$	存在 (exist)	
$\exists^!$	存在唯一的 (unique)	$\exists!, \exists\vert$
s. t.	使得 (such that)	
i. e.	即 (that is, in other word)	
$\Rightarrow$	所以, 蕴含 (imply)	
$\Leftarrow$	因为, 由于	
$\Longleftrightarrow$	当且仅当 (if and only if), 等价于 (are equivalent)	
$:=$	定义为, 设为 (let be)	$\triangleq, \overset{\text{Def}}{=}$
$\square$	Halmos 记号, 证毕 (Q.E.D.), 得解	$\blacksquare, \blacktriangleleft, ///$
$\because$	因为 (because)	
$\therefore$	所以 (therefore)	

字母表

以下是拉丁和希腊字母的各式字体, 供读者参考.

\mathscr

$\mathscr{A}$	A	$\mathscr{B}$	B	$\mathscr{C}$	C	$\mathscr{D}$	D	$\mathscr{E}$	E	$\mathscr{F}$	F	$\mathscr{G}$	G
$\mathscr{H}$	H	$\mathscr{I}$	I	$\mathscr{J}$	J	$\mathscr{K}$	K	$\mathscr{L}$	L	$\mathscr{M}$	M	$\mathscr{N}$	N
$\mathscr{O}$	O	$\mathscr{P}$	P	$\mathscr{Q}$	Q	$\mathscr{R}$	R	$\mathscr{S}$	S	$\mathscr{T}$	T		
$\mathscr{U}$	U	$\mathscr{V}$	V	$\mathscr{W}$	W	$\mathscr{X}$	X	$\mathscr{Y}$	Y	$\mathscr{Z}$	Z		

\mathfrak

$\mathfrak{A}\mathfrak{a}$	Aa	$\mathfrak{B}\mathfrak{b}$	Bb	$\mathfrak{C}\mathfrak{c}$	Cc	$\mathfrak{D}\mathfrak{d}$	Dd	$\mathfrak{E}\mathfrak{e}$	Ee	$\mathfrak{F}\mathfrak{f}$	Ff	$\mathfrak{G}\mathfrak{g}$	Gg
$\mathfrak{H}\mathfrak{h}$	Hh	$\mathfrak{I}\mathfrak{i}$	Ii	$\mathfrak{J}\mathfrak{j}$	Jj	$\mathfrak{K}\mathfrak{k}$	Kk	$\mathfrak{L}\mathfrak{l}$	Ll	$\mathfrak{M}\mathfrak{m}$	Mm	$\mathfrak{N}\mathfrak{n}$	Nn
$\mathfrak{O}\mathfrak{o}$	Oo	$\mathfrak{P}\mathfrak{p}$	Pp	$\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$	Qq	$\mathfrak{R}\mathfrak{r}$	Rr	$\mathfrak{S}\mathfrak{s}$	Ss	$\mathfrak{T}\mathfrak{t}$	Tt		
$\mathfrak{U}\mathfrak{u}$	Uu	$\mathfrak{V}\mathfrak{v}$	Vv	$\mathfrak{W}\mathfrak{w}$	Ww	$\mathfrak{X}\mathfrak{x}$	Xx	$\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$	Yy	$\mathfrak{Z}\mathfrak{z}$	Zz		

\mathcal

$\mathcal{A}$	A	$\mathcal{B}$	B	$\mathcal{C}$	C	$\mathcal{D}$	D	$\mathcal{E}$	E	$\mathcal{F}$	F	$\mathcal{G}$	G
$\mathcal{H}$	H	$\mathcal{I}$	I	$\mathcal{J}$	J	$\mathcal{K}$	K	$\mathcal{L}$	L	$\mathcal{M}$	M	$\mathcal{N}$	N
$\mathcal{O}$	O	$\mathcal{P}$	P	$\mathcal{Q}$	Q	$\mathcal{R}$	R	$\mathcal{S}$	S	$\mathcal{T}$	T		
$\mathcal{U}$	U	$\mathcal{V}$	V	$\mathcal{W}$	W	$\mathcal{X}$	X	$\mathcal{Y}$	Y	$\mathcal{Z}$	Z		

希腊字母表

$\mathrm{A}\alpha$	alpha	$\mathrm{B}\beta$	beta	$\Gamma\gamma$	gamma	$\Delta\delta$	delta
$\mathrm{E}\epsilon, \varepsilon$	epsilon	$\mathrm{Z}\zeta$	zeta	$\mathrm{H}\eta$	eta	$\Theta\theta, \vartheta$	theta
$\mathrm{I}\iota$	iota	$\mathrm{K}\kappa, \varkappa$	kappa	$\Lambda\lambda$	lambda	$\mathrm{M}\mu$	mu
$\mathrm{N}\nu$	nu	$\Xi\xi$	xi	$\mathrm{O}o$	omicron	$\Pi\pi, \varpi$	pi
$\mathrm{P}\rho, \varrho$	rho	$\Sigma\sigma, \varsigma$	sigma	$\mathrm{T}\tau$	tau	$\Upsilon\upsilon$	upsilon
$\Phi\phi, \varphi$	phi	$X\chi$	chi	$\Psi\psi$	psi	$\Omega\omega$	omega

其他字母拾遗

∇	nabla	$\aleph$	aleph	$\mho$	mho	$\amalg$	coproduct
$\digamma$	digamma	$\beth$	beta	$\gimel$	gimel	$\daleth$	daleth

其他记号

x'	prime	$x^\flat$	flat	$x^\sharp$	sharp
$x^\natural$	natural	$x^\dagger$	dagger	$x^\ddagger$	double dagger
$\bar{x}$	bar	$\hat{x}$	hat	$\check{x}$	check
$\tilde{x}$	tilde	$\dot{x}$	dot	$\ddot{x}$	double dot

参考文献

[1] 林源渠张恭庆 and 郭懋正. *泛函分析讲义*. 北京大学出版社, 1990.

[2] 陆文钊 and 陈肇姜. *点集拓扑学*. 南京大学出版社, 1995.

[3] 冯克勤 and 余红兵. *整数与多项式*. 施普林格出版社, 1999.

[4] 聂灵沼 and 丁石孙. *代数学引论 -第 2 版*. 高等教育出版社, 2000.

[5] 冯荣权 and 宋春伟. *组合数学*. 北京: 北京大学出版社, 2015.

[6] 张筑生. *数学分析新讲*. 北京大学出版社, 1990.

[7] 陈肇姜. *点集拓扑学题解与反例*. 南京大学出版社, 1997.

[8] 熊金城. *点集拓扑讲义*. 高等教育出版社, 2003.

[9] 曹汝成. *组合数学*. 广州: 华南理工大学出版社, 2004.

[10] 姜伯驹. *同调论 (研究生数学基础课教材)*. 北京大学出版社, 2006.

[11] 赵显曾. *数学分析拾遗*. 东南大学出版社, 2006.

[12] 华罗庚. *华罗庚文集: 数论卷 2*. 科学出版社, 2010.

[13] 李文威. *代数学方法, 卷一*. 北京, 高等教育出版社 (尚未出版), 2016. 在`http://www.wwli.url.tw`可以下载.

[14] Steven Kleniman Allen Altman. *a term of commutative algebra.* Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2013. Available at `http://www.centerofmathematics.com/wwcomstore/index.php/commalg.html`.

[15] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[16] Kristine Bauer, Debasis Sen, and Peter Zvengrowski. A generalized Goursat lemma. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 64:1–19, 2015.

[17] Garrett Birkhoff. *Lattice theory.* Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.

[18] Nicolas Bourbaki. *General topology. Chapters 5–10.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[19] Andrew Bruckner. *Differentiation of real functions*, volume 5 of *CRM Monograph Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1994.

[20] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[21] Gerald B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[22] Harry Furstenberg. On the infinitude of primes. *Amer. Math. Monthly*, 62:353, 1955.

[23] Sheng Gong and Youhong Gong. *Concise complex analysis.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, revised edition, 2007.

[24] George Grätzer. *Lattice theory: foundation.* Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[25] Pierre Antoine Grillet. *Abstract algebra*, volume 242 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second edition, 2007.

[26] Marshall Hall, Jr. *The theory of groups.* The Macmillan Co., New York, N.Y., 1959.

[27] Paul R. Halmos. *Measure Theory.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974. Graduate Texts in Mathematics, No. 9.

[28] Paul R. Halmos. *Naive set theory.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974. Reprint of the 1960 edition, Undergraduate Texts in Mathematics.

[29] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[30] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Available at `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`.

[31] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 115. Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[32] Nathan Jacobson. *Lectures in abstract algebra*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Volume II: Linear algebra, Reprint of the 1953 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 31.

[33] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[34] Stasys Jukna. *Extremal combinatorics: with applications in computer science*. Springer Science & Business Media, 2011.

[35] John L. Kelley. *General topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27.

[36] Gregor Kemper. *A course in commutative algebra*, volume 256 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.

[37] KennethH.Rosen, 罗森, 袁崇义, 屈婉玲, 张桂芸, and 陈琼. *离散数学及其应用: 原书第 6 版*. 机械工业出版社, 2011.

[38] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989.

[39] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings*, volume 131 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.

[40] T. Y. Lam. *Exercises in classical ring theory*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003.

[41] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[42] R Duncan Luce. A note on boolean matrix theory. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(3):382–388, 1952.

[43] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[44] James S. Milne. Algebraic number theory (v3.07), 2017. Available at `https://www.jmilne.org/math/`.

[45] James R. Munkres. *Topology: a first course.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[46] Greg Oman. The converse of the intermediate value theorem: from Conway to Cantor to cosets and beyond. *Missouri J. Math. Sci.*, 26(2):134–150, 2014.

[47] John C. Oxtoby. *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 2.

[48] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[49] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[50] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

[51] J.-P. Serre. *A course in arithmetic.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[52] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, Jr. *Counterexamples in topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995. Reprint of the second (1978) edition.

[53] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[54] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis*, volume 1 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. An introduction.

[55] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis*, volume 3 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.

[56] Daniel W. Stroock. *Essentials of integration theory for analysis*, volume 262 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2011.

[57] Terence Tao. *Analysis. I*, volume 37 of *Texts and Readings in Mathematics*. Hindustan Book Agency, New Delhi, third edition, 2014.

索引