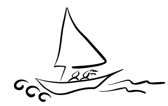
第三章

第二节

随机变量的独立性

- 随机变量的独立性
- 离散型随机变量的独立性
- 连续型随机变量的独立性



一、随机变量的独立性

1. 定义

Def. 设$F(x,y)$及$F_X(x)$、$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数，若$\forall x,y$，有

$$P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x\}\cdot P\{Y\le y\}$$

即 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

则称随机变量X与Y是相互独立的。

注 意

(1) X与Y是独立的其本质是：

对任意实数$a<b$, $c<d$，有

$$P\{a<X<b,\ c<Y<d\}=P\{a<X<b\}\cdot P\{c<Y<d\}$$

(2) X与Y是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.

二、离散型随机变量的独立性

1. 独立性的判定

定理 离散型随机变量X和Y相互独立

$$\Leftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

$$\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i.}p_{.j} \qquad i,j=1,2,\cdots$$

二、离散型随机变量的独立性

2. 不独立的判别

只要$\exists(i,j)$，满足$p_{ij}\ne p_{i.}p_{.j}$则X与Y必不相互独立。

命题 若二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布表中存在某个$p_{i_0j_0}=0$则X与Y必不相互独立。

三、连续型随机变量的独立性

1. 独立性的判定

定理　连续型随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow p(x,y)=p_X(x)\,p_Y(y)$$

例　设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

则 X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

三、连续型随机变量的独立性

例1. 设r. v. X 与 Y i.i.d. $N(0,1)$，试求 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$。

解：因 X,Y i.i.d. $N(0,1)$，

故 (X,Y) 的概率密度为边缘密度乘积，即

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

三、连续型随机变量的独立性

$$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}p(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$　$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1$

则

$$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot rdr$$

$$=-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{2}}=0.3935$$

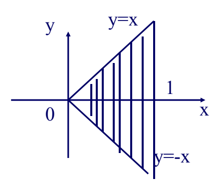
三、连续型随机变量的独立性

例2. 设r. v. $(X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x, 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

试问随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

解：$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



三、连续型随机变量的独立性

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 1dx=1-y & 0<y<1\\ \int_{-y}^1 1dx=1+y & -1<y<0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$p_X(x)\cdot p_Y(y)\ne p(x,y)\Rightarrow X$ 与 Y 不相互独立

三、连续型随机变量的独立性

2. 连续型随机变量的独立性判定条件

命题　若 (X,Y) 为连续型随机变量，其概率密度为 $p(x,y)$，则 X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

1^0 存在连续函数 $h(x),g(y)$，使

$$p(x,y)=\begin{cases}h(x)g(y) & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

2^0 a,b,c,d 均为与 x,y 无关的常数（可为∞）。

课堂练习

设连续型随机变量(X,Y)具有下述概率密度，试讨论X与Y的相互独立性。

$$(1)\ p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xe^{-x}}{(1+y)^2} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$(2)\ p(x,y)=\begin{cases}4 & -\dfrac{1}{2}\le x\le 0,0\le y\le 2x+1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$