多元统计

陈崇双

西南交通大学数学学院统计系

ccsmars@swjtu.edu.cn

2018-2019学年

1. 均值向量和协方差阵的检验
    - 均值向量的检验
    - 协方差阵的检验

数理统计给出了，

（1）一个一元正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，均值μ各种假设的U检验和t检验，方差σ^2假设的χ^2检验；

（2）两个一元正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$，均值差$\mu_1-\mu_2$假设的$U$检验和$t$检验，方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$假设的$F$检验。

数理统计给出了，

（1）一个一元正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，均值μ各种假设的U检验和t检验，方差σ^2假设的χ^2检验；

（2）两个一元正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，均值差$\mu_1-\mu_2$假设的$U$检验和$t$检验，方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$假设的$F$检验。

对于多维正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$而言，也需要对均值向量μ和协差阵Σ进行统计推断。

回顾:假设检验的一般步骤

1. 针对总体X的分布P_θ提出原假设$H_0: \theta = \theta_0$和备择假设$H_1: \theta \neq \theta_0$;
2. 抽取样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$构造检验统计量$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，在H_0成立时分布已知;
3. 确定拒绝域形式$W = \{x_1, x_2, \cdots, x_n | T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \gtreqless K\}$，其中$K$为待定界限值;
4. 确定界限值K，控制第一类错误的概率不超过显著性水平α，即$P_{H_0}(T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \gtreqless K) = \alpha$;
5. 根据观测值$T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是否落入W，决定是否拒绝H_0。

均值向量的检验类型

- 单个正态总体均值向量的检验
  1. Σ已知
  2. Σ未知
- 两个正态总体均值向量差的检验
  1. Σ_1, Σ_2已知
  2. $\Sigma_1 = \Sigma_2$未知
  3. $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$未知
- 多个正态总体均值向量的检验

均值向量的检验（Σ已知）

回顾一元情形:

正态总体$N(\mu, \sigma^2)$，其中σ^2已知。均值μ的检验$H_0 : \mu = \mu_0$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$。抽取样本$X_1, \cdots, X_n$，观测值为$x_1, \cdots, x_n$。

回顾一元情形:

正态总体$N(\mu, \sigma^2)$，其中σ^2已知。均值μ的检验$H_0 : \mu = \mu_0$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$。抽取样本$X_1, \cdots, X_n$，观测值为$x_1, \cdots, x_n$。样本均值$\overline{X}$的观测值为$\bar{x}$。则$\overline{X}$是μ的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\bar{x} - \mu_0|$应该较小。

均值向量的检验（Σ已知）

回顾一元情形:

正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知。均值μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，观测值为$x_1,\cdots,x_n$。样本均值$\overline{X}$的观测值为$\bar{x}$。则$\overline{X}$是μ的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\bar{x}-\mu_0|$应该较小。故取拒绝域形式$\{|\bar{x}-\mu_0|>K\}$。

均值向量的检验（Σ已知）

回顾一元情形:

正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知。均值μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，观测值为$x_1,\cdots,x_n$。样本均值$\overline{X}$的观测值为$\overline{x}$。则$\overline{X}$是μ的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\overline{x}-\mu_0|$应该较小。故取拒绝域形式$\{|\overline{x}-\mu_0|>K\}$。

当H_0成立时，检验统计量$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。犯第一类错误的概率$P(|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|>z_{\alpha/2})=\alpha$，其中$z_{\alpha/2}$为标准正态分布的双侧$\alpha/2$分位点。从而有界限值$K=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$。

回顾一元情形:

正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知。均值μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，观测值为$x_1,\cdots,x_n$。样本均值$\overline{X}$的观测值为$\overline{x}$。则$\overline{X}$是μ的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\overline{x}-\mu_0|$应该较小。故取拒绝域形式$\{|\overline{x}-\mu_0|>K\}$。

当H_0成立时，检验统计量$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。犯第一类错误的概率$P(|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|>z_{\alpha/2})=\alpha$，其中$z_{\alpha/2}$为标准正态分布的双侧$\alpha/2$分位点。从而有界限值$K=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$。

检验标准：若$|\overline{x}-\mu_0|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$，则拒绝$H_0$；否则接受$H_0$。

均值向量的检验（Σ已知）

正态总体$N_p(\mu, \Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0 : \mu = \mu_0$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$。

均值向量的检验（Σ已知）

正态总体$N_p(\mu, \Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0 : \mu = \mu_0$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)}, \cdots, \mathbf{x}_{(n)}$，样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$的观测值为$\overline{\mathbf{x}}$。当$H_0$成立时，偏差$\overline{\mathbf{x}} - \mu_0$应接近于零向量（而非一个数），

均值向量的检验（Σ已知）

正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)},\cdots,\mathbf{x}_{(n)}$，样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$的观测值为$\bar{\mathbf{x}}$。当$H_0$成立时，偏差$\bar{\mathbf{x}}-\mu_0$应接近于零向量（而非一个数），$\overline{\mathbf{X}}$到总体的马氏距离$(\bar{\mathbf{x}}-\mu_{\mathbf{0}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\mu_0)$应该较小。故取拒绝域形式$\{(\bar{\mathbf{x}}-\mu_0)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\mu_0)>K\}$。

均值向量的检验（Σ已知）

正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)},\cdots,\mathbf{x}_{(n)}$，样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$的观测值为$\overline{\mathbf{x}}$。当$H_0$成立时，偏差$\overline{\mathbf{x}}-\mu_0$应接近于零向量（而非一个数），$\overline{\mathbf{X}}$到总体的马氏距离$(\overline{\mathbf{x}}-\mu_{\mathbf{0}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0)$应该较小。故取拒绝域形式$\{(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0)>K\}$。

当H_0成立时，检验统计量$\underline{T^2=n(\overline{\mathbf{X}}-\mu_0)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\mu_0)\sim\chi^2(p)}$。犯第一类错误的概率$P(T^2>\chi^2_\alpha(p))=\alpha$，其中$\chi^2_\alpha(p)$为自由度为$p$的$\chi^2$分布的上$\alpha$分位点。从而有界限值$K=\chi^2_\alpha(p)/n$。

均值向量的检验（Σ已知）

正态总体$N_p(\mu, \Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)}, \cdots, \mathbf{x}_{(n)}$，样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$的观测值为$\overline{\mathbf{x}}$。当$H_0$成立时，偏差$\overline{\mathbf{x}} - \mu_0$应接近于零向量（而非一个数），$\overline{\mathbf{X}}$到总体的马氏距离$(\overline{\mathbf{x}} - \mu_{\mathbf{0}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \mu_0)$应该较小。故取拒绝域形式$\{(\overline{\mathbf{x}} - \mu_0)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \mu_0) > K\}$。

当H_0成立时，检验统计量$\underline{T^2 = n(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0) \sim \chi^2(p)}$。犯第一类错误的概率$P(T^2 > \chi^2_\alpha(p)) = \alpha$，其中$\chi^2_\alpha(p)$为自由度为$p$的$\chi^2$分布的上$\alpha$分位点。从而有界限值$K = \chi^2_\alpha(p)/n$。

检验标准：若$(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0) > \chi^2_\alpha(p)/n$，则拒绝$H_0$；否则接受$H_0$。

均值向量的检验（Σ未知）

回顾一元情形：

正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2未知。均值μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，观测值为$x_1,\cdots,x_n$。

均值向量的检验（Σ未知）

回顾一元情形：

正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2未知。均值μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，观测值为$x_1,\cdots,x_n$。样本均值$\overline{X}$是μ的无偏估计，样本方差S^2是σ^2的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\bar{x}-\mu_0|$应该较小。

回顾一元情形：

正态总体$N(\mu, \sigma^2)$，其中σ^2未知。均值μ的检验$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$。抽取样本$X_1, \cdots, X_n$，观测值为$x_1, \cdots, x_n$。样本均值$\overline{X}$是μ的无偏估计，样本方差S^2是σ^2的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\bar{x} - \mu_0|$应该较小。

当H_0成立时，检验统计量$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$。犯第一类错误的概率$P(|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}| > t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$，其中$t_{\alpha/2}(n-1)$为自由度为$n-1$的$t$分布的双侧$\alpha/2$分位点。

回顾一元情形：

正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2未知。均值μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，观测值为$x_1,\cdots,x_n$。样本均值$\overline{X}$是μ的无偏估计，样本方差S^2是σ^2的无偏估计。当H_0成立时，偏差$|\overline{x}-\mu_0|$应该较小。

当H_0成立时，检验统计量$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$。犯第一类错误的概率$P(|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}|>t_{\alpha/2}(n-1))=\alpha$，其中$t_{\alpha/2}(n-1)$为自由度为$n-1$的$t$分布的双侧$\alpha/2$分位点。

因而有拒绝域$\{|\overline{x}-\mu_0|>\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\}$。

均值向量的检验（Σ未知）

正态总体$N_p(\mu, \Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0 : \mu = \mu_0$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$。

均值向量的检验（Σ未知）

正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)},\cdots,\mathbf{x}_{(n)}$。样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$是$\mu$的无偏估计，样本协差阵$\frac{1}{n-1}\mathbf{L}$是$\Sigma$的无偏估计。

均值向量的检验（Σ未知）

正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)},\cdots,\mathbf{x}_{(n)}$。样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$是$\mu$的无偏估计，样本协差阵$\frac{1}{n-1}\mathbf{L}$是$\Sigma$的无偏估计。

当H_0成立时，检验统计量

$$T^2=n(n-1)(\overline{\mathbf{X}}-\mu_0)^{\mathsf{T}}\mathbf{L}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\mu_0)\sim T^2(p,n-1)$$

均值向量的检验（Σ未知）

正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$，均值向量μ的检验$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$。

抽取样本$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n)}$，观测值为$\mathbf{x}_{(1)},\cdots,\mathbf{x}_{(n)}$。样本均值向量$\overline{\mathbf{X}}$是$\mu$的无偏估计，样本协差阵$\frac{1}{n-1}\mathbf{L}$是$\Sigma$的无偏估计。

当H_0成立时，检验统计量

$$T^2=n(n-1)(\overline{\mathbf{X}}-\mu_0)^{\mathsf{T}}\mathbf{L}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\mu_0)\sim T^2(p,n-1)$$

同时有关系：$\frac{(n-1)-p+1}{(n-1)p}T^2(p,n-1)=F(p,(n-1)-p+1)$，给出拒绝域

$$\{\frac{n(n-p)}{p}(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0)^{\mathsf{T}}\mathbf{L}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\mu_0)>F_\alpha(p,n-p)\}$$

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2$，其中方差σ^2相等且已知。检验$H_0:\mu_1-\mu_2=0$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1, \cdots, X_{n_1}$；$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值分别为$\overline{X}, \overline{Y}$。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1, \cdots, X_{n_1}$；$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值分别为$\overline{X}, \overline{Y}$。则$\overline{X} - \overline{Y}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1, \cdots, X_{n_1}$；$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值分别为$\overline{X}, \overline{Y}$。则$\overline{X} - \overline{Y}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

当H_0成立时，可选检验统计量

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(\overline{X} - \overline{Y})^2}{\sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2} \sim \chi^2(1)$$

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1, \cdots, X_{n_1}$；$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值分别为$\overline{X}, \overline{Y}$。则$\overline{X} - \overline{Y}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

当H_0成立时，可选检验统计量

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(\overline{X} - \overline{Y})^2}{\sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2} \sim \chi^2(1)$$

因而有拒绝域$\{|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2}}| > z_{\alpha/2}\}$，或$\{\frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2} > \chi^2_\alpha(1)\}$。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

两正态总体$N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2$，其中协差阵Σ相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}$。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

两正态总体$N_p(\mu_i,\Sigma)$，$i=1,2$，其中协差阵Σ相等且已知。检验$H_0:\mu_1-\mu_2=\mathbf{0}$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)},\cdots,\mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}},\overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1-\mu_2$的无偏估计。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

两正态总体$N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2$，其中协差阵Σ相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)}, \cdots, \mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。当$H_0$成立时，二者的马氏距离$(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})$应该较小。

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

两正态总体$N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2$，其中协差阵Σ相等且已知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)}, \cdots, \mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。当$H_0$成立时，二者的马氏距离$(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})$应该较小。

由于$\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}} \sim N_p(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\Sigma)$，当$H_0$成立时，$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}) \sim N_p(0, I)$，从而$\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}) \sim \chi^2(p)$

均值向量差的检验（Σ相等且已知）

两正态总体$N_p(\mu_i,\Sigma)$，$i=1,2$，其中协差阵Σ相等且已知。检验$H_0:\mu_1-\mu_2=\mathbf{0}$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)},\cdots,\mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}},\overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1-\mu_2$的无偏估计。当$H_0$成立时，二者的马氏距离$(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})$应该较小。

由于$\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}\sim N_p(\mu_1-\mu_2,(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\Sigma)$，当$H_0$成立时，$\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}})\sim N_p(0,I)$，从而$\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}})\sim\chi^2(p)$

从而有拒绝域$\{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})>\chi^2_\alpha(p)\}$，其中$\chi^2_\alpha(p)$为自由度为$p$的$\chi^2$分布的上$\alpha$分位点。

均值向量差的检验（Σ相等且未知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且未知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

均值向量差的检验（Σ相等且未知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且未知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1, \cdots, X_{n_1}$；$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值向量分别为$\overline{X}, \overline{Y}$。则$\overline{X} - \overline{Y}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

均值向量差的检验（Σ相等且未知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2$，其中方差σ^2相等且未知。检验$H_0:\mu_1-\mu_2=0$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1,\cdots,X_{n_1}$；$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$，样本均值向量分别为$\overline{X},\overline{Y}$。则$\overline{X}-\overline{Y}$是$\mu_1-\mu_2$的无偏估计。

当H_0成立时，检验统计量$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$。其中$s_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

均值向量差的检验（Σ相等且未知）

回顾一元情形：

两正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2$，其中方差σ^2相等且未知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。从两个总体分别抽样$X_1, \cdots, X_{n_1}$；$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值向量分别为$\overline{X}, \overline{Y}$。则$\overline{X} - \overline{Y}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

当H_0成立时，检验统计量$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$。其中$s_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

因而有拒绝域$\{\frac{|\overline{x}-\overline{y}|}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}$。

均值向量差的检验（Σ相等且未知）

两正态总体$N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2$，其中协方差阵Σ相等且未知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}$。

两正态总体$N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2$，其中协方差阵Σ相等且未知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)}, \cdots, \mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

均值向量差的检验（Σ相等且未知）

两正态总体$N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2$，其中协方差阵Σ相等且未知。检验$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}$，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)}, \cdots, \mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计。

当H_0成立时，

$$T^2 = \frac{n_1 + n_2 - 2}{1/n_1 + 1/n_2} (\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}})^{\mathsf{T}} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}) \sim T^2(p, n_1 + n_2 - 2)$$

两正态总体$N_p(\mu_i,\Sigma)$，$i=1,2$，其中协方差阵Σ相等且未知。检验$H_0:\mu_1-\mu_2=\mathbf{0}$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mathbf{0}$。从两个总体分别抽样$\mathbf{X}_{(1)},\cdots,\mathbf{X}_{(n_1)}$；$\mathbf{Y}_{(1)},\cdots,\mathbf{Y}_{(n_2)}$，样本均值向量分别为$\overline{\mathbf{X}},\overline{\mathbf{Y}}$。则$\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}$是$\mu_1-\mu_2$的无偏估计。

当H_0成立时，

$$T^2=\frac{n_1+n_2-2}{1/n_1+1/n_2}(\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}})^{\mathsf{T}}(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}})\sim T^2(p,n_1+n_2-2)$$

同时有关系：$\frac{(n_1+n_2-2)-p+1}{(n_1+n_2-2)p}T^2=F(p,(n_1+n_2-2)-p+1)$，给出拒绝域$\{\frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)p}T^2>F_\alpha(p,n_1+n_2-p-1)\}$

均值向量差的检验（Σ不相等）

协方差阵未知且不相等时,两总体均值向量差的检验是著名的Behrens-Fisher问题。目前只有一些近似的处理方法。详见教材P.29。

In statistics, the Behrens–Fisher problem, named after Walter Behrens (1902-1962) and Ronald Fisher(1890–1962), is the problem of interval estimation and hypothesis testing concerning the difference between the means of two normally distributed populations when the variances of the two populations are not assumed to be equal, based on two independent samples.

https://en.wikipedia.org/wiki/Behrens-Fisher_problem

多总体均值向量的检验

一元情形的处理方法：方差分析ANOVA。

多元情形，类似地有多元方差分析，分析的基本思想相同，但公式将更加繁琐。

回顾:一元情形的方差分析

r个总体$G_i : N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, 2, \cdots, r$，假设方差都相等(也称为方差齐性假定)。比较所有总体的均值是否相等，即检验假设：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r, \quad H_1 : \mu_i, i = 1, 2, \cdots, r\text{不全相等}$$

为此，从各个总体中分别抽样，

$$\begin{aligned}
&X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2) \\
&X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2) \\
&\vdots \\
&X_{r1}, X_{r2}, \cdots, X_{rn_r} \sim N(\mu_r, \sigma^2)
\end{aligned}$$

Analysis of covariance (ANCOVA) is a general linear model which blends ANOVA and regression. ANCOVA evaluates whether the means of a dependent variable are equal across levels of a categorical independent variable often called a treatment, while statistically controlling for the effects of other continuous variables that are not of primary interest, known as covariates or nuisance variables. Mathematically, ANCOVA decomposes the variance in the dependent variable into variance explained by the covariates, variance explained by the categorical independent variable, and residual variance. Intuitively, ANCOVA can be thought of as 'adjusting' the dependent variable by the group means of the covariates.

https://en.wikipedia.org/wiki/Analysis_of_covariance

引入记号。

总样本数：$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值：$\overline{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

全部样本的均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

回顾:一元情形的方差分析

引入记号。

总样本数：$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值：$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

全部样本的均值：$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

总离差平方和：$SST = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X})^2$

组间平方和：$SSA = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (\overline{X}_i - \overline{X})^2$

组内平方和：$SSE = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$

回顾:一元情形的方差分析

引入记号。

总样本数：$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值：$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

全部样本的均值：$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

总离差平方和：$SST = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}\right)^2$

组间平方和：$SSA = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$

组内平方和：$SSE = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2$

方差分解：并在H_0成立时

回顾:一元情形的方差分析

引入记号。

总样本数：$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值：$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

全部样本的均值：$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

总离差平方和：$SST = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X})^2$

组间平方和：$SSA = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (\overline{X}_i - \overline{X})^2$

组内平方和：$SSE = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$

方差分解：并在H_0成立时

$SSA + SSE = SST \sim \sigma^2\chi^2(n-1)$

$SSA \sim \sigma^2\chi^2(r-1), SSE \sim \sigma^2\chi^2(n-r)$且相互独立

回顾:一元情形的方差分析

检验的主要过程，可以整理成如下方差分析表。

方差来源	离差平方和	自由度	均方	比值
组间	SSA	$r-1$	$SSA/(r-1)$	
组内	SSE	$n-r$	$SSE/(n-r)$	$\frac{SSA/(r-1)}{SSE/(n-r)}$
全部	SST	$n-1$	$SST/(n-1)$	

如果比值$\frac{SSA/(r-1)}{SSE/(n-r)} > F_\alpha(r-1, n-r)$，则拒绝$H_0$

多总体均值向量的检验

将上述方法推广到多元。

r个总体$G_i : N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i = 1, 2, \cdots, r$，假设协方差阵都相等。比较所有总体的均值向量是否相等，即检验假设：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r, \quad H_1 : \mu_i, i = 1, 2, \cdots, r\text{不全相等}$$

为此，从各个总体中分别抽样

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_{12}, \cdots, \mathbf{X}_{1n_1} \sim N_p(\mu_1, \Sigma) \\
&\mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_{22}, \cdots, \mathbf{X}_{2n_2} \sim N_p(\mu_2, \Sigma) \\
&\vdots \\
&\mathbf{X}_{r1}, \mathbf{X}_{r2}, \cdots, \mathbf{X}_{rn_r} \sim N_p(\mu_r, \Sigma)
\end{aligned}$$

多总体均值向量的检验

引入记号。

总样本数$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值向量：$\overline{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$

全部样本的均值向量：$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$

引入记号。

总样本数$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值向量：$\overline{\mathbf{X}}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$

全部样本的均值向量：$\overline{\mathbf{X}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$

全部样本离差阵：$SST=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\mathbf{X}_{ij}-\overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{ij}-\overline{\mathbf{X}})^{\mathsf{T}}$

组间样本离差阵：$SSA=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{\mathbf{X}}_i-\overline{\mathbf{X}})(\overline{\mathbf{X}}_i-\overline{\mathbf{X}})^{\mathsf{T}}$

组内样本离差阵：$SSE=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\mathbf{X}_{ij}-\overline{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ij}-\overline{\mathbf{X}}_i)^{\mathsf{T}}$

离差阵分解：并在H_0成立时

多总体均值向量的检验

引入记号。

总样本数$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

第i个总体的样本均值向量：$\overline{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$

全部样本的均值向量：$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$

全部样本离差阵：$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\mathbf{X}_{ij} - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{ij} - \overline{\mathbf{X}})^{\mathsf{T}}$

组间样本离差阵：$SSA = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}})(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}})^{\mathsf{T}}$

组内样本离差阵：$SSE = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\mathbf{X}_{ij} - \overline{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ij} - \overline{\mathbf{X}}_i)^{\mathsf{T}}$

离差阵分解：并在H_0成立时

$SSA + SSE = SST \sim W_p(n-1, \Sigma)$

$SSA \sim W_p(r-1, \Sigma), SSE \sim W_p(n-r, \Sigma)$且相互独立

多总体均值向量的检验

类似地，考虑两个离差阵的对比，用Wilks分布刻画，即

类似地，考虑两个离差阵的对比，用Wilks分布刻画，即在H_0成立时，$\frac{|SSA|}{|SSA+SSE|} = \frac{|SSA|}{|SST|} \sim \Lambda(p, r-1, n-r)$

多总体均值向量的检验

类似地，考虑两个离差阵的对比，用Wilks分布刻画，即

在H_0成立时，$\frac{|SSA|}{|SSA+SSE|} = \frac{|SSA|}{|SST|} \sim \Lambda(p, r-1, n-r)$

在计算时，转化为F分布进行，具体参照教材§1.5.3.

均值向量的检验方法总结

- 单个正态总体均值向量的检验
  1. Σ已知$\Rightarrow\chi^2$检验
  2. Σ未知$\Rightarrow T^2$检验
- 两个正态总体均值向量差的检验
  1. Σ_1,Σ_2已知$\Rightarrow\chi^2$检验
  2. $\Sigma_1=\Sigma_2$未知$\Rightarrow T^2$检验
  3. $\Sigma_1\neq\Sigma_2$未知$\Rightarrow$近似处理
- 多个正态总体均值向量的检验$\Rightarrow$多维方差分析

协方差阵的检验

一元情形，单个总体方差σ^2的假设给出了χ^2检验，两个总体方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的假设给出了$F$检验。

$$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

多元情形，教材简略地罗列了检验统计量和分位点，没有进一步的理论阐述。详见教材§2.2。