第四章

第三节

大数定律 (LLN)

问题引入

$$a_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}++\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

If $n=1000,\ x=2,$ *then* $a_{1000}(2)=?$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)=e^x \quad \Rightarrow a_{1000}(2)\approx e^2$

【引申】 概率论中也存在着类似的情况

什么情况下可以将频率作为概率的近似呢？

- 连续掷一枚质量均匀的硬币，正、反两面出现的次数
- 16,000名在校本科生的平均身高

  — 随机选1人，10人，100人 ……

小结：**当试验次数足够多时，某随机事件发生的频率或者观测值的算术平均值才具有稳定性。**

一、大数定律的概念

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是随机变量序列，$E(X_k)$存在

$(k=1,2,\ldots)$，令$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，若$\forall\varepsilon>0$,

有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\overline{X_n}-E(\overline{X_n})\right|\ge\varepsilon\right\}=0$

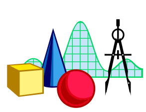
或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\overline{X_n}-E(\overline{X_n})\right|<\varepsilon\right\}=1$

则称$\{X_n\}$服从大数定律，或大数法则成立。

意义 指明了平均结果 $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的渐近稳定性。

二、常用的大数定律

- 伯努利大数定律
- 切比雪夫大数定律
- 马尔可夫大数定律
- 辛钦大数定律



二、常用的大数定律

1. 伯努利大数定律

若r. v. 序列$X_1,X_2,\cdots$i. i. d. (0-1)分布，即

$P(X_i=1)=p,\ P(X_i=0)=1-p \quad i=1,2,\ \ldots$

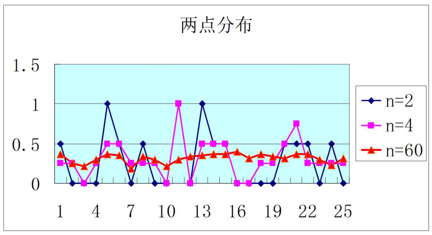
记$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则$\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

Proof ?

例如，当$P(A)=p=0.3$时，应有$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}0.3$

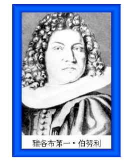
当$n=2, n=4, n=60$时，$\overline{X}_n$的分布情形如下：



当n越来越大时，$\overline{X}_n$的值会越来越靠近期望值0.3。

伯努利(1654 – 1705)

(雅各布第一·伯努利)



瑞士数学家，他家祖孙三代出过十多位数学家. 1694年他首次给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式. 1695年提出了著名的伯努利方程, 1713年出版了他的巨著《猜度术》, 这是组合数学与概率论史上的一件大事, 书中给出的贝努利数在很多地方有用. 而伯努利定理则是大数定律的最早形式. 此外, 他对双纽线, 悬链线和对数螺线都有深入的研究.

例1 (用Monte Carlo法计算定积分)

设 0< $h(x)$<1，求 $J=\int_0^1 h(x)dx=?$

解：设 $(X,Y)\sim$ 二维均匀分布 $D:\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

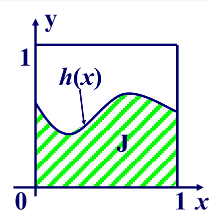
则 X、Y i.i.d. $U(0,1)$

记 $A=\{Y<h(X)\}$

$$p=P(A)=\int_0^1\int_0^{h(x)}dydx=\int_0^1 h(x)dx=J$$

Remark.

- 利用伯努利大数定律可以利用重复试验中A出现的频率作为 p 的估计.
- 这种求定积分的方法也称为随机投点法.



i.e. 将随机点(X, Y)落在区域{ $y<h(x)$ }的频率作为定积分的近似值.

例如，计算 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

精确值	$n=10^4$	$n=10^5$
0.341 344	0.340 698	0.341 355

注意：对于一般区间[a, b]上的定积分：

$$J'=\int_a^b g(x)dx$$

只需作线性变换$y=(x-a)/(b-a)$，即可化为[0,1]上的定积分.

二、常用的大数定律

2. 切比雪夫大数定律

若随机变量序列{X_n}两两不相关，且X_n方差存在，有共同的上界，则{X_n}服从大数定律.

证明用到切比雪夫不等式

Chebyshev切比雪夫 (1821 – 1894)

俄国数学家，生于俄国卡卢加一个贵族家庭。1845年，切比雪夫利用十分初等的工具，对伯努利大数定律作了精细的分析和严格的证明。一年以后，他对泊松提出的大数定律给出了证明。1887年，他发表了“关于概率的两个定理”的论文，开始了对中心极限定律进行讨论。他在1882年建立的切比雪夫不等式，解决了许多困难的极限估值问题。

例2 设$\{X_n, n\geq 2\}$是相互独立的随机变量序列,

$$P\left\{X_n=\pm\sqrt{n}\right\}=\frac{1}{n},\quad P\left\{X_n=0\right\}=1-\frac{2}{n}$$

试证明$\{X_n, n\geq 2\}$服从大数定律。

二、常用的大数定律

3. 马尔可夫大数定律

若随机变量序列$\{X_n\}$满足：

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\to 0 \quad \text{(马尔可夫条件)}$$

则$\{X_n\}$服从大数定律.

例3 设$\{X_n\}$为同分布，方差存在的随机变量序列，且X_n仅与X_{n-1}和X_{n+1}有关，而与其它的X_i不相关，试问该随机变量序列$\{X_n\}$是否服从大数定律?

二、常用的大数定律

4. 辛钦大数定律

设随机变量序列$\{X_n\}$ *i.i.d.*，且$E(X_i)=\mu$，则$\forall\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

证明思路：

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu \Leftarrow \varphi_{Y_n}(t)\longrightarrow\varphi_{\mu}(t)$$

注：提供了求随机变量数学期望近似值的方法

Remark.

(1) 伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例

(2) 切比雪夫大数定律是马尔可夫大数定律的特例

(3) 伯努利大数定律是辛钦大数定律的特例