密封装订线

姓 名________

密封装订线

学号________

班级________

密封装订线

西南交通大学 2018–2019 学年第（二）学期考试试卷

课程代码 6041929 **课程名称** 拓扑学基础（A 卷） **考试时间** 120 分钟

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总成绩
分 数								

阅卷教师签字：________

考试说明：(1) 所有解答中用到的结论，如课程没有涉及，引用时需给出证明. (2) 部分题目后标有"**数学**"或"**统计**"，仅限选了该班课程的同学解答。

1. (15 分) 设 $\mathbb{R}$ 是实数集，$\mathbb{Q}$ 是有理数集，$(0,1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$.
(1). 证明集族 $\mathscr{T}_c = \{A \subset \mathbb{R} \mid A\text{的补集是可数集}\} \cup \{\emptyset\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑.
(2). 在拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_c)$ 中，求 $\overline{(0,1]}$ 和 $\mathrm{d}(\mathbb{Q})$.

证明：(1) 只需验证 c 满足开集公理的三个条件：

(i) $\mathbb{R}^C = \emptyset$ 是可数集，所以 $\mathbb{R} \in c$. 而由定义知 $\emptyset \in c$;

(ii) 设 $A_\lambda \in c, \lambda \in \Lambda(\Lambda$ 是任意指标集). 不妨设每个 $A_\lambda \neq$ 都非空 (空集对并运算没有影响), 则 A_λ^C 是可数集。从而由 De Morgan 规律知，

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A\right)^C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C$$

上面等式右边是任意多个可数集的交集，从而也是可数集。所以 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in c$.

(iii) 设 $A, B \in c$, 若 A, B 有一个是空集，则 $A \cap B = \emptyset \in c$. 若 A, B 都不是空集，则 A^C, B^C 都是可数集，从而

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

上面等式右端是两个可数集的并集，从而也是可数集。所以 $A \cap B \in c$.

(2) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 以及 x 的任何一个开邻域 U 有 $U \cap (0,1] \neq \emptyset$. 否则, 若 $u \cap (0,1] = \emptyset$, 则 $(0,1] \subset U^C$, 而 U^C 是可数集，这与 $(0,1]$ 不可数矛盾。故有 $x \in \overline{(0,1]}$, 从而 $\overline{(0,1]} = \mathbb{R}$.

对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 令 $U = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{x\}$. 则 $U^C = \mathbb{Q} \cap \{x\}^C$ 是可数集，从而 U 是 x 的一个开邻域。但是 $U \cap (\mathbb{Q} - \{x\}) = \emptyset$. 由聚点的定义知，$x \notin d(\mathbb{Q})$, 从而 $d(\mathbb{Q}) = \emptyset$. $\square$

2. (15 分) 设 Y 是 Hausdorff 空间，$f: X \to Y$ 连续，则 f 的图像 $G = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ 是积空间 $X \times Y$ 的闭子集.

证明：只需证 G^C 是 $X \times Y$ 的开子集。设 $(x, y) \notin G$, 则 $y \neq f(x)$. 因为 Y 是一个 Hausdorff 空间，所以存在 y 的开邻域 V_1 和 $f(x)$ 的开邻域 V_2 使得 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 因为 f 连续，所以 $U_i = f^{-1}(V_i)\,(i = 1, 2)$ 是 X 中的两个开集. 因为 $f(x) \in V_2$, 所以 $x \in f^{-1}(V_2)$, 故 $f^{-1}(V_2) = U_2$ 是 x 的一个开邻域。所以 $U_2 \times V_1$ 是 (x, y) 的一个开邻域。下面说明 $(U_2 \times V_1) \cap G = \emptyset$，即说明：任意 $z \in U_2$ 有 $f(z) \notin V_1$. 这是因为

$$z \in U_2 = f^{-1}(V_2) \Longrightarrow f(z) \in V_2 \xRightarrow{V_1 \cap V_2 = \emptyset} f(z) \notin V_1.$$

从而 $U_2 \times V_1 \subset G^C$, 所以 G^C 是开子集。 $\square$

3. (10 分）设集合

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \\ &= ([0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}). \end{aligned}$$

定义映射:

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad f((x, y)) = x, \ \ \forall (x, y) \in A.$$

证明: f 是一个商映射，但它既不是开映射也不是闭映射.

证明：首先验证 f 是一个商映射。f 是满射是显然成立的。接下来验证

$$U\text{是}\mathbb{R}\text{中的开集} \Longleftrightarrow f^{-1}(U)\text{是}A\text{中的开集}.$$

若 U 是 $\mathbb{R}$ 中的开集，则 $f^{-1}(U) = (U \times \mathbb{R}) \cap A$ 是 A 中的开集。反之，若 $f^{-1}(U)$ 是 A 中的开集。设 $x \in U$, 则存在 $y \in \mathbb{R}$, 使得 $(x, y) \in f^{-1}(U)$. 所以存在 $\mathbb{R}$ 中的开集 V, W 使得 $(x, y) \in (V \times W) \cap A \subset f^{-1}(U)$. 所以

$$x = f((x, y)) \in f((V \times W) \cap A) \subset f\left(f^{-1}(U)\right) \overset{f\text{满射}}{=\!=\!=} U.$$

而由 f 的定义知 $f((V \times W) \cap A) = V$. 从而 $x \in V \subset U$，即 U 是 $\mathbb{R}$ 中的开集。所以 f 是一个商映射。

下面说明 f 既不是开映射也不是闭映射。

- f 不是开映射 $\Longleftrightarrow$ 存在 A 中的开集 U, 但 $f(U)$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的开集。取 $U = [0, 1) \times (1, 2)$, 则 $U = (-1, 1) \times (1, 2) \cap A$ 是 A 中开集，但 $f(U) = [0, 1)$ 不是 $\mathbb{R}$ 中开集。

- f 不是闭映射 $\Longleftrightarrow$ 存在 A 中的闭集 B, 但 $f(B)$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集。取
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{1}{x}, x > 0\right\}.$$
则 $B \subset A$ 是 A 的闭集，但 $f(B) = (0, +\infty)$ 不是 $\mathbb{R}$ 的闭集。 $\square$

4. (15 分）设 X 满足 T_4 公理的连通空间，并且 X 中至少有两个点. 证明：X 是不可数的.

证明：设 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$. 则由 X 是 T_4 空间以及 Uryshon 引理知，对于 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 这两个不相交的闭集，存在连续映射 $f: X \to [0,1]$ 满足 $f(x) = 0, f(y) = 1$. 因为 X 是连通空间且 f 是连续映射，所以 $f(X)$ 是 $[0,1]$ 中的连通子集。而 $[0,1]$ 中的连通子集都是区间，又因为 $0,1 \in f(X)$，所以 $f(X) = [0,1]$，从而 $f(X)$ 不可数。 $\square$

5. (15 分) 证明：紧致的度量空间是可分的，也是第二可数的。

证明：设 X 是一个紧致的度量空间。对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，集族 $\mathscr{U}_n = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; x \in X \right\}$ 是 X 的一个开覆盖。由 X 的紧致性知，存在有限子覆盖，设为 $\mathscr{B}_n$. 令 $\mathscr{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_n$，则 $\mathscr{B}$ 是可数个有限集族的并，从而是可数集族。首先说明 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个拓扑基。对任意的 $x \in X$ 以及 x 的任意开邻域 U，由度量拓扑的定义知，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 固定 $n > 2/\varepsilon$，因为 $\mathscr{B}_n$ 是 X 的开覆盖，从而存在 $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}$，使得 $x \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$. 而对任意的 $y \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ 有

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

所以 $x \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. 这说明 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基。从而由 $\mathscr{B}$ 的可数性知 X 是第二可数的。

每个满足第二可数公理的空间都是可分空间（定理）. $\square$

注: 也可以参考第十次作业第四题的答案. 直接构造出一个可数稠密子集，再由可分的度量空间是 A_2

6. (15 分) 设 X 是一个第一可数空间. 证明:

$$X\text{是 Hausdorff 空间} \iff X\text{中每个收敛序列都只有一个极限点}.$$

证明: $\Longrightarrow$) Hausdorff 空间中的收敛序列极限点唯一。(定理 6.1.5)

$\Longleftarrow$) 反证法: 假设 X 中的每个收敛序列都只有一个极限点，但 X 不是 Hausdorff 空间。则存在 $x, y \in X, x \neq y$, 满足 x 的任意邻域和 y 的任意邻域交集都非空。因为 X 是 C_1 空间，所以 x 和 y 处都有一个可数邻域基, 设它们为 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$. 构造

$$U_n' = \bigcap_{k=1}^{n} U_k, \quad V_m' = \bigcap_{k=1}^{m} V_k.$$

则 $\{U_n'\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $\{V_m'\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ 也是 x 和 y 的邻域族，且满足 $U_i' \supset U_j'(\forall i \leq j), V_i' \supset V_j'(\forall i \leq j)$. 对每个 $i \in \mathbb{Z}_+, U_i' \cap V_i' \neq \emptyset(x, y$ 的任意两个邻域交集都非空), 故可取 $z_i \in U_i' \cap V_i'$. 下面说明序列 $\{z_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 既收敛到 x 又收敛到 y，从而和假设矛盾。事实上对 x 的任意邻域 U, 由邻域基的定义知，存在 $N \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $x \in U_N \subset U$. 从而对所有的 $n > N$, 有

$$U_n' \subset U_N' \subset U_N \subset U.$$

故对所有的 $n > N$, 有 $z_n \in U_n' \subset U$, 即 $\lim_{n\to\infty} z_n = x$. 同理可以说明 $\lim_{n\to\infty} z_n = y$. 但是 $x \neq y$, 这与假设序列收敛则极限点唯一矛盾。 $\square$

7. (15 分)(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_c)$ 是否是道路连通的? 证明你的结论.(**统计**)

(b). 设闭曲面 M 有多边形表示: $abca^{-1}cdeb^{-1}fedf$. 求 M 的曲面类型. (**数学**)

证明: (a) $(\mathbb{R}, c)$ 不是道路连通空间。反证法: 对于 $a, b \in \mathbb{R}(a \neq b)$, 假设存在连续映射 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 使得 $f(0) = a, f(1) = b$. 令 D 是 $[0, 1]$ 中所有有理数的集合，则 D 是可数集。故 $f(D)$ 是可数集，从而是 $(\mathbb{R}, c)$ 中的闭集。故有

$$f([0, 1]) = f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)} = f(D).$$

所以 $f([0, 1]) = f(D)$. 因为 $[0, 1]$ 连通，f 连续，所以 $f(D) = f([0, 1])$ 连通。但是因为 $f(D)$ 是至少含有两个点($f(0) = a \neq b = f(1)$)的可数集,

$$A := f(D) - \{f(0)\} = (\mathbb{R} - \{f(0)\}) \cap f(D), \quad B := \{f(0)\} = (\mathbb{R} - (f(D) - \{f(0)\})) \cap f(D)$$

是 $f(D)$ 中两个不相交的非空开集，且 $f(D) = A \cup B$, 所以 $f(D)$ 不连通，矛盾。

(b) 由于 M 有多边形表示: $abca^{-1}cdeb^{-1}fedf$. 中有同向对，所以曲面不可定向，从而曲面类型应为: $m\mathbb{R}P^2$. 现在确定 m 的值，只需要确定 M 的欧拉示性数。由 M 的多边形表示，易见 $\chi(M) = \text{顶点数} - \text{边数} + \text{面数} = 1 - 6 + 1 = 2 - m \Longrightarrow m = 6$, 故该曲面为 $6\mathbb{R}P^2$.