

航天飞行动力学

第三次作业 —— 飞行方案设计

一、题目

1. 导弹参数：

- * 导弹质量 $m_0 = 320kg$
- * 发动机推力 $P = 2000N$
- * 初始速度 $V_0 = 250m/s$
- * 初始位置 $x_0 = 0m$
- * 初始高度 $H_0 = 7000m$
- * 初始弹道倾角 $\theta = 0^\circ$
- * 初始俯仰角 $\varphi_0 = 0^\circ$
- * 初始攻角 $\alpha_0 = 0^\circ$
- * 初始俯仰角速度 $\dot{\varphi}_0 = 0rad/s$
- * 初始速度 $V_0 = 250m/s$
- * 参考长度 $S_{ref} = 0.45m^2$
- * 参考面积 $L_{ref} = 2.5m$
- * 升力系数 $C_y = 0.25\alpha + 0.05\delta_z$
- * 阻力系数 $C_x = 0.2 + 0.005\alpha^2$
- * 俯仰力矩系数 $m_z = -0.1\alpha + 0.024\delta_z$

2. 大气密度计算公式：

$$\begin{cases} \rho_0 = 1.2495 \text{ kg/m}^3 \\ T_0 = 288.15K \\ T = T_0 - 0.0065H \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{4.25588} \end{cases} \quad (1)$$

3. 飞行方案：

(1) 当 $x < 9100m$ 时，采用瞬时平衡假设

$$\begin{cases} H^* = 2000 \times \cos(0.000314 \times 1.1 \times x) + 5000 \\ \delta_z = k_\varphi \times (H - H^*) + \dot{k}_\varphi \times (H - H^*) \\ \delta_z = k_\varphi(H - H^*) + \dot{k}_\varphi H \\ m_s = 0.0kg/s \end{cases} \quad (2)$$

(2) 当 $24000m > x > 9100m$ 时, 等高飞行方案, 采用瞬时平衡假设。

$$\begin{cases} H^* = 3050m \\ \delta_z = k_\varphi(H - H^*) + \dot{k}_\varphi H \\ \delta_z = k_\varphi(H - H^*) + \dot{k}_\varphi H \\ m_s = 0.46kg/s \end{cases} \quad (3)$$

(3) 当 $x > 24000m$ 且 $y > 0$, 目标位置为 $x_m = 30000m$, 采用比例导引法和瞬时平衡假设

$$\begin{cases} x_m = 30000m \\ m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z = 0 \\ m_s = 0.0kg/s \end{cases} \quad (4)$$

注: 舵偏角约束 $|\delta_z| \leq 30^\circ$

二、公式推导

1. $x < 24000m$ 的飞行方案:

基于“瞬时平衡”假设, 将包含 20 个方程的导弹运动方程组简化为铅垂平面内的质心运动方程组。

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha_b - X_b - mg \sin \theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} = P \sin \alpha_b + Y_b - mg \cos \theta \\ \frac{dx}{dt} = V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} = V \sin \theta \\ \frac{dm}{dt} = -m_s \\ \alpha_b = -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} \delta_{zb} \\ \delta_z = k_\varphi(H - H^*) + \dot{k}_\varphi(\dot{H} - \dot{H}^*) \\ H^* = 2000 \times \cos(0.000314 \times 1.1 \times x) + 5000 \end{cases} \quad (5)$$

2. $x > 24000m$ 的飞行方案:

(1) 末段第一种计算方法:

$$\begin{cases} r \frac{dq}{dt} = V_m \times \sin \eta - V_T \sin \eta_T \\ \tan q = \frac{y_T - y_m}{x_T - x_m} \\ \frac{d\theta^*}{dt} = k \frac{dq}{dt} \\ \theta^* - \theta_0 = k(q - q_0) \\ \theta_0, q_0? \\ \delta_z = k_\theta(\theta - \theta^*) + k_{\dot{\theta}}(\dot{\theta} - \dot{\theta}^*) \end{cases} \quad (6)$$

(2) 末段第二种计算方法:

只需要给出比例导引系数根据运动学方程

$$\begin{cases} r \frac{dq}{dt} = V_m \times \sin \eta - V_T \sin \eta_T \\ \tan q = \frac{y_T - y_m}{x_T - x_m} \\ \frac{dq}{dt} = \frac{-V_m \sin(\theta - q)}{r} \end{cases} \quad (7)$$

由比例导引法 $\dot{\theta}^* = k\dot{q}$, 可得动力学方程第二式

$$mV_m \dot{\theta}^* = P \sin \alpha + Y - mg \cos \theta \Rightarrow mV_m k\dot{q} = P \sin \alpha + Y - mg \cos \theta \quad (8)$$

由于攻角较小, 进行线性化可得

$$mV_m k\dot{q} = P\alpha + Y^\alpha \alpha + Y^{\delta_z} \delta_z - mg \cos \theta \quad (9)$$

由于瞬时平衡 $m_z = 0$, 可得

$$-0.1\alpha + 0.024\delta_z = 0 \Rightarrow \delta_z = 0.1\alpha/0.024 \quad (10)$$

代入, 可得

$$\alpha = \frac{mV_m k\dot{q} + mg \cos \theta}{P + Y^\alpha + Y^{\delta_z}(0.1/0.024)} \Rightarrow \frac{mV_m k\dot{q} + mg \cos \theta}{P + C_y^\alpha q L_{ref} + C_y^{\delta_z} q L_{ref}(0.1/0.024)} \quad (11)$$

最后得到弹道方程为

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{P \cos \alpha - X}{m} - g \sin \theta \\ \alpha = \frac{mV k\dot{q} + mg \cos \theta}{P + C_y^\alpha q L_{ref} + C_y^{\delta_z} q L_{ref}(0.1/0.024)} \\ \frac{dx}{dt} = V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} = V \sin \theta \\ \dot{\theta}^* = k\dot{q} \\ \dot{\theta}^* = \dot{\theta} \\ \tan q = \frac{y_T - y_m}{x_T - x_m} \\ \frac{dq}{dt} = \frac{-V \sin(\theta - q)}{r} \\ \delta_z = 0.1\alpha/0.024 \end{cases} \quad (12)$$

推力 \mathbf{P} 在弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 中的分量用 P_{x1} 、 P_{y1} 、 P_{z1} 表示, 则根据题目信息可以得到

$$\begin{cases} \frac{P_{y1}}{P_{x1}} = \tan(-30^\circ) \\ \frac{P_{y1}}{P_{z1}} = \tan 45^\circ \\ P_{x1}^2 + P_{y1}^2 + P_{z1}^2 = P^2 \end{cases} \quad (13)$$

带入 $\vec{P} = 50000N$ 求得推力大小:

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38730 \\ -22361 \\ -22361 \end{pmatrix} \quad (14)$$

(1) 按照 $\psi \rightarrow \varphi \rightarrow \gamma$ 的顺序转换

从地面坐标系 $Axyz$ 转换为弹体坐标系 $Ox_1y_1z_2$ 的坐标变换矩阵为

$$L(\psi, \varphi, \gamma) = L_x(\gamma) L_z(\varphi) L_y(\psi) \quad (15)$$

其中:

$$L_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$L_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$L_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (18)$$

代入则有:

$$L(\psi, \varphi, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma & \cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma \\ \sin\varphi\cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma & -\cos\varphi\sin\gamma & -\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\psi\cos\gamma \end{pmatrix} \quad (19)$$

同时, $L^{-1}(\psi, \varphi, \gamma) = L^T(\psi, \varphi, \gamma)$, 所以

$$L^T(\psi, \varphi, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma & \sin\varphi\cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\gamma & -\cos\varphi\sin\gamma \\ -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma & -\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\psi\cos\gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

发动机推力矢量 \vec{P} 在地面坐标系 $Axyz$ 的投影为

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = L^T(\psi, \varphi, \gamma) \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

(2) 按照 $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$ 的顺序转换

从地面坐标系 $Axyz$ 转换为弹体坐标系 $Ox_1y_1z_2$ 的坐标变换矩阵为

$$L(\varphi, \psi, \gamma) = L_x(\gamma) L_y(\psi) L_z(\varphi) \quad (22)$$

代入式 (4)、式 (5)、式 (6) 得到:

$$L(\varphi, \psi, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \\ \sin \psi \cos \varphi \sin \gamma - \sin \varphi \cos \gamma & \sin \psi \sin \varphi \sin \gamma + \cos \varphi \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma \\ \sin \psi \cos \varphi \cos \gamma + \sin \varphi \cos \gamma & \sin \psi \sin \varphi \cos \gamma - \cos \varphi \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (23)$$

同时, $L^{-1}(\psi, \varphi, \gamma) = L^T(\psi, \varphi, \gamma)$, 所以

$$L^T(\psi, \varphi, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \sin \varphi \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \varphi & \cos \varphi \cos \gamma & -\cos \varphi \sin \gamma \\ -\cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \varphi \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (24)$$

发动机推力矢量 \vec{P} 在地面坐标系 $Axyz$ 的投影为

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = L^T(\psi, \varphi, \gamma) \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

二、编程计算结果

(1) 按照 $\psi \rightarrow \varphi \rightarrow \gamma$ 的顺序转换计算结果

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2996 \\ -49152 \\ 8667 \end{pmatrix} (N) \quad (26)$$

(2) 按照 $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$ 的顺序转换

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = L^T(\psi, \varphi, \gamma) \begin{pmatrix} 11180 \\ -47405 \\ -11305 \end{pmatrix} (N) \quad (27)$$

源代码 1: main.py

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 # 展示高清图
5 from matplotlib_inline import backend_inline
6 backend_inline.set_matplotlib_formats('svg')
7
8 plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
9 plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False
10
11 # 导弹参数
12 S_lef = 0.45
13 L_ref = 2.5
14
15 # 放大系数
16 K_phi = -0.6
17 K_phi_dot = 0.5 * K_phi
18 K_q = 3
19
20
21 # 仿真时间步
22 timestep = 0.001
23
24 # 导弹状态定义
25 class statu():
26     __slot__ = ['Time', 'X', 'H', 'V', 'theta', 'mass', 'alpha', 'deltaz']
27
28     # 位置
29     # 速度
30     # 欧拉角
31     # 角加速度
32     # 舵偏角
33
34     # 初始化
35     def __init__(self, Time, X=0, H=0, V=0, theta=0, mass=0):
36         self.Time = Time
37         self.X = X
38         self.H = H
39         self.V = V
40         self.theta = theta
41         self.mass = mass
```

```
42     self.alpha = 0
43     self.deltaz = 0
44
45     # 显式Euler法, 给定飞行高度
46     def Euler(self, before, dmass):
47         self.Time = before.Time + timestep
48
49         self.X = before.X + before.V * np.cos(before.theta) * timestep
50         self.H = before.H + before.V * np.sin(before.theta) * timestep
51
52         self.deltaz = K_phi * (self.H - High_goal(self.X)) + K_phi_dot * (before.V * np
53             .sin(before.theta) - High_goal_dot(self.X))
54
55         if self.deltaz > 30:
56             self.deltaz = 30
57         elif self.deltaz < -30:
58             self.deltaz = -30
59
60         self.alpha = 0.24 * self.deltaz
61
62         Y = (0.25 * self.alpha + 0.05 * self.deltaz) * 0.5 * air(self.H) * before.V *
63             before.V * S_lef
64
65         X = (0.005 * self.alpha * self.alpha + 0.2) * 0.5 * air(self.H) * before.V *
66             before.V * S_lef
67
68         self.mass = before.mass - dmass * timestep
69         if dmass == 0:
70             P = 0
71         else:
72             P = 2000
73
74         self.V = before.V + (P * np.cos(self.alpha * 3.14159625 / 180) - X - self.mass * 9.8 *
75             np.sin(before.theta)) / self.mass * timestep
76         self.theta = before.theta + (P * np.sin(self.alpha * 3.14159625 / 180) + Y - self.
77             mass * 9.8 * np.cos(before.theta)) / self.mass / self.V * timestep
78
79     # 比例导引法, 给定目标位置
80     def Euler2(self, before, Ym, Xm):
81         self.Time = before.Time + timestep
82
83         self.X = before.X + before.V * np.cos(before.theta) * timestep
84         self.H = before.H + before.V * np.sin(before.theta) * timestep
```

```
80     self.mass = before.mass
81     r = np.sqrt((self.X - Xm)^2 + (self.H - Ym)^2)
82     self.q = np.arctan((before.H - Ym)/(before.X - Xm))
83     self.dq = -before.V * np.sin(before.theta - self.q)/ r * timestep
84
85     self.theta = before.theta + K_q *self.dq * timestep
86
87     P = 0
88
89     self.alpha = (self.mass* before.V * K_q * self.dq + self.mass * 9.8 *np.cos(
        self.theta))/(P + )
90
91     self.deltaz = self.alpha / 0.24
92
93     if self.deltaz > 30:
94         self.deltaz = 30
95     if self.deltaz < -30:
96         self.deltaz = -30
97
98
99 # 大气参数
100 def air (High):
101     rho0 =1.2495
102     T0  = 288.15
103     Temp = T0 - 0.0065*High
104     rho = rho0 * np.exp(4.25588*np.log(Temp / T0))
105     return rho
106
107 # 飞行方案
108 def High_goal(X):
109     if X <= 9100:
110         return 2000 * np.cos(0.000314 * 1.1 * X) + 5000
111     elif X <= 24000:
112         return 3050
113     else:
114         return 0
115
116 def High_goal_dot(X):
117     if X <= 9100:
118         return -2000 * 0.000314 * np.sin(0.000314 * 1.1 * X)
119     elif X <= 24000:
120         return 0
121     else:
```



```
122         return 0
123
124
125 # 飞行初始状态
126 statu_n = [statu(0, 0, 7000, 250, 0, 320)]
127 statu_n[0].alpha = 0
128 statu_n[0].deltaz = 0
129
130 Time_goal = np.arange(0,200,timestep)
131 X_goal = np.arange(0,24000,10)
132 H_goal = [High_goal(i) for i in X_goal]
133 plt.plot(X_goal,H_goal, 'b--', alpha=0.5, linewidth=1, label='飞行方案高度')
134
135 while statu_n[-1].X < 9100:
136     statu_n.append(statu(statu_n[-1].Time + timestep))
137     statu_n[-1].Euler(statu_n[-2],0)
138     #print(statu_n[-1].alpha)
139
140 while statu_n[-1].X <= 24000:
141     statu_n.append(statu(statu_n[-1].Time + timestep))
142     statu_n[-1].Euler(statu_n[-2],0.46)
143     #print(statu_n[-1].alpha)
144
145 X_data = [n.X for n in statu_n]
146 H_data = [n.H for n in statu_n]
147 plt.plot(X_data,H_data, 'r-.', alpha=0.5, linewidth=1, label='实际飞行高度')
148
149 # 飞行高度绘图
150 plt.legend() #显示上面的label
151 plt.xlabel('X') #x_label
152 plt.ylabel('H')#y_label
153 plt.ylim(0,8000)
154 plt.xlim(0,25100) #仅设置y轴坐标范围
155
156
157 plt.figure(2)
158 T_data = [n.Time for n in statu_n]
159 deltaz_data = [n.deltaz for n in statu_n]
160 plt.plot(T_data,deltaz_data, 'r-.', alpha=0.5, linewidth=1, label='舵偏角$\delta z$')
161 plt.legend() #显示上面的label
162 plt.xlabel('Time(s)') #x_label
163 plt.ylabel('$\delta z$')#y_label
164 plt.ylim(-50,50)
```

```
165 plt.xlim(0,200)
166
167 """
168 plt.figure(3)
169 M_data = [n.mass for n in statu_n]
170 plt.plot(T_data,M_data, 'r-.', alpha=0.5, linewidth=1, label='实际飞行速度V')
171 plt.legend() #显示上面的label
172 plt.xlabel('Time(s)') #x_label
173 plt.ylabel('速度V')#y_label
174 plt.ylim(250,350)
175 plt.xlim(0,200)
176 """
177 plt.figure(4)
178 V_data = [n.V for n in statu_n]
179 plt.plot(T_data,V_data, 'r-.', alpha=0.5, linewidth=1, label='实际飞行速度V')
180 plt.legend() #显示上面的label
181 plt.xlabel('Time(s)') #x_label
182 plt.ylabel('速度V')#y_label
183 plt.ylim(100,250)
184 plt.xlim(0,200)
185
186 plt.show()
```

源代码 2: work.tex

```
1 \documentclass[UTF8]{ctexart}
2 \newcommand{\mycmdB}[1]{\heiti #1}
3 \renewcommand{\normalsize}{\fontsize{12}{12}\fangsong}
4 \usepackage{listings}
5 \usepackage{xcolor}
6 \usepackage{amsmath}
7 \usepackage{graphicx}
8 \usepackage{float}
9 \usepackage{indentfirst}
10 \usepackage{longtable}
11 \usepackage{fancyhdr}
12 \usepackage[a4paper, left=2.5cm, right=2.5cm, top=3cm, bottom=2
    cm]{geometry}
13 \usepackage{matlab-prettifier}
14 \usepackage{latexcolors}
15
16 \setlength{\parindent}{2em} %2em代表首行缩进2个字符
17
18 % 页眉页脚设置
19 \pagestyle{fancy}
20 \fancyhf{}
21 \lhead{2021300045}
22 \chead{李宗霖}
23 \rhead{第\thepage 页}
24
25 % 去除图注冒号
26 \usepackage{caption}
27 \captionsetup[table]{labelsep=space} % 表
28 \captionsetup[figure]{labelsep=space} % 图
29
30 \CTEXsetup[format={\Large\bfseries}]{section}
31
32 % 源代码引用
33 \renewcommand{\lstlistingname}{源代码}
34 \lstset{
35     basicstyle          = \zihao{5} \ttfamily,           % 基
        本代码风格
36     keywordstyle        = \bfseries,                       % 关键字风格
37     commentstyle        = \ttfamily\itshape,              % 注释的风格,
        斜体
38     stringstyle         = \ttfamily,                       % 字符串风格
39     flexiblecolumns,    % 别问为什么, 加上这个
40     numbers             = left,                             % 行号的位置在左边
41     showspaces          = false,                           % 是否显示空格, 显示了有点
```

```

    乱，所以不现实了
42     numberstyle      =    \zihao{5}\ttfamily,      % 行号的样
        式，小五号，tt等宽字体
43     showstringspaces  =    false,
44     captionpos        =    t,      % 这段代码的名字所呈现的位
        置，t指的是top上面，b指下面
45     frame             =    lrtb %lrtb,      % 显示边框
46 }
47 \lstset{
48     language          =    matlab,
49     basicstyle         =    \zihao{5}\ttfamily,      % 基本代
        码风格
50     rulesepcolor      =    \color{gray}, % 代码块边框颜色
51     breaklines        =    true, % 代码过长则换行
52     numbers           =    left, % 行号在左侧显示
53     numberstyle       =    \zihao{5}\ttfamily, % 行号字体
54     showspace        =    false, % 不显示空格
55     columns           =    fixed, % 字间距固定
56     %morekeywords     =    {as}, % 自加新的关键字(必须前后
        都是空格)
57     %deletendkeywords =    {compile} % 删除内定关键字；删除
        错误标记的关键字用deletekeywords删！
58 }
59
60 \lstdefinestyle{Python}{
61     language          =    Python, % 语言选Python
62     basicstyle         =    \zihao{5}\ttfamily,
63     numberstyle       =    \zihao{5}\ttfamily,
64     keywordstyle      =    \color{blue},
65     keywordstyle      =    [2] \color{teal},
66     stringstyle       =    \color{magenta},
67     commentstyle      =    \color{red}\ttfamily,
68     breaklines        =    true, % 自动换行，建议不要写太长的行
69     columns           =    fixed, % 如果不加这一句，字间距就不固
        定，很丑，必须加
70     basewidth         =    0.5em,
71 }
72
73 \begin{document}
74
75 \begin{center}
76     {\zihao{-2} \bf 航天飞行动力学}\\
77     {\zihao{3} 第三次作业\ ——\ 飞行方案设计}
78
79 \end{center}

```

```

80 |
81 | \section*{\zihao{-4} 一、题目}
82 | \noindent {\heiti 1. 导弹参数: }
83 |
84 | \begin{itemize}
85 |     \item[*] 导弹质量 $m_0=320\text{kg}$ 
86 |     \item[*] 发动机推力 $P=2000\text{N}$ 
87 |     \item[*] 初始速度 $V_0=250\text{m/s}$ 
88 |     \item[*] 初始位置 $x_0=0\text{m}$ 
89 |     \item[*] 初始高度 $H_0=7000\text{m}$ 
90 |     \item[*] 初始弹道倾角 $\theta=0^\circ$ 
91 |     \item[*] 初始俯仰角  $\varphi_0=0^\circ$ 
92 |     \item[*] 初始攻角  $\alpha_0=0^\circ$ 
93 |     \item[*] 初始俯仰角速度 $\dot{\varphi}_0=0\text{rad/s}$ 
94 |     \item[*] 初始速度 $V_0=250\text{m/s}$ 
95 |     \item[*] 参考长度 $S_{\text{ref}}=0.45\text{ m}^2$ 
96 |     \item[*] 参考面积 $L_{\text{ref}}=2.5\text{m}$ 
97 |     \item[*] 升力系数 $C_y=0.25\alpha+0.05\delta_z$ 
98 |     \item[*] 阻力系数 $C_x=0.2+0.005\alpha^2$ 
99 |     \item[*] 俯仰力矩系数 $m_z=-0.1\alpha+0.024\delta_z$ 
100 | \end{itemize}
101 |
102 | \noindent {\heiti 2. 大气密度计算公式:}
103 | \begin{align}
104 |     \begin{cases}
105 |         \rho_0=1.2495\text{ kg/m}^3 \\
106 |         T_0=288.15\text{ K} \\
107 |         T=T_0-0.0065H \\
108 |         \rho=\rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{4.25588}
109 |     \end{cases}
110 | \end{align}
111 |
112 | \noindent {\heiti 3. 飞行方案: }
113 |
114 | \begin{itemize}
115 |     \item[(1)] 当 $x<9100\text{m}$ 时, 采用瞬时平衡假设
116 |         \begin{align}
117 |             \begin{cases}
118 |                 H^*=2000\times\cos(0.000314\times1.1\times x) \\
119 |                 \quad +5000 \\
120 |                 \delta_z=k_\varphi\times(H-\text{H}^*)+k_\varphi \\
121 |                 \quad \varphi\times(H-\text{H}^*) \\
122 |                 \delta_z=k_\varphi(H-H^*)+\dot{k}_\varphi\varphi \\
123 |                 \quad H
\end{cases}
\end{align}

```

```

122         \end{cases}
123     \end{align}
124 \item[(2)] 当 $24000\text{m} < x < 9100\text{m}$ 时，等高飞行方案，采用瞬时平衡
      假设。
125     \begin{align}
126         \begin{cases}
127             H^*=3050\text{m} & \backslash\backslash
128             \delta_z=k_\varphi(H-H^*)+\dot{k}_\varphi H & \backslash\backslash
129             \delta_z=k_\varphi(H-H^*)+\dot{k}_\varphi H & \backslash\backslash
130             m_s=0.46\text{kg/s}
131         \end{cases}
132     \end{align}
133 \item[(3)] 当 $x > 24000\text{m}$ 且 $y > 0$ ，目标位置为 $x_m=30000\text{m}$ ，采用
      比例导引法和瞬时平衡假设
134     \begin{align}
135         \begin{cases}
136             x_m=30000\text{ m} & \backslash\backslash
137             m_z^{\alpha}\alpha+m_z^{\delta_z}\delta_z=0 & \backslash\backslash
138             m_s=0.0\text{kg/s}
139         \end{cases}
140     \end{align}
141 \end{itemize}
142
143 注：舵偏角约束 $|\delta_z| \leq 30^\circ$ 
144
145
146
147
148 \section*{\zihao{-4} 二、公式推导}
149
150
151 \noindent {\heiti 1.  $x < 24000\text{m}$ 的飞行方案：}
152
153 基于“瞬时平衡”假设，将包含20个方程的导弹运动方程组简化为铅垂
      平面内的质心运动方程组。
154
155 \begin{align}
156     \begin{cases}
157         m\frac{dV}{dt}=P\cos\alpha_{\text{b}}-X_{\text{b}} \\
158         mV\frac{d\theta}{dt}=P\sin\alpha_{\text{b}}+Y_{\text{b}}-mg\cos\theta \\
159         \frac{dx}{dt}=V\cos\theta
160     \end{cases}
161 \end{align}

```

```

160      \frac{dy}{dt}=V\sin\theta \hfill

      \\
161      \frac{dm}{dt}=-m_s \hfill

      \\
162      \alpha_b=-\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^{\alpha}}\delta_z \hfill

      \\
163      \delta_z = k_{\varphi} \left(H-H^*\right) + \dot{k}_{\varphi} \varphi \left(\dot{H} - \dot{H}^*\right) \hfill \\
164      H^*=2000\times \cos\left(0.000314\times 1.1\times x\right)+5000\hfill
165  \end{cases}
166 \end{align}
167
168
169
170 \noindent {\heiti 2.$x>24000m$的飞行方案：}
171
172 \noindent {(1) 末段第一种计算方法：}
173
174
175 \begin{align}
176   \begin{cases}
177     r\frac{dq}{dt}=V_m\times\sin\eta-V_T\sin\eta_T \\
178     \tan q=\frac{y_T-y_m}{x_T-x_m} \\
179     \frac{d\theta^*}{dt}=k\frac{dq}{dt} \\
180     \theta^*-\theta_0=k(q-q_0) \\
181     \theta_0, q_0? \\
182     \delta_z=k_{\theta}(\theta-\theta^*)+k_{\dot{\theta}}(\dot{\theta}-\dot{\theta}^*)
183   \end{cases}
184 \end{align}
185
186 \noindent {(2) 末段第二种计算方法：}
187
188 只需要给出比例导引系数
189 根据运动学方程
190
191 \begin{align}
192   \begin{cases}
193     r\frac{dq}{dt}=V_m\times\sin\eta:-V_T\sin\eta_T \\
194     \begin{aligned} \tan q&=\frac{y_T-y_m}{x_T-x_m} \end{aligned}
\end{cases}

```

```

195 \frac{dq}{dt}&=\frac{-V_m\sin(\theta-q)}{r}\end{aligned}
196 \end{cases}
197 \end{align}
198
199 由比例导引法 $\dot{\theta}^*=k\dot{q}$ , 可得动力学方程第二式
200 \begin{align}
201 mV_m\dot{\theta}^*=P\sin\alpha+Y-mg\cos\theta\rightarrow
mV_mk\dot{q}=P\sin\alpha+Y-mg\cos\theta
202 \end{align}
203
204 由于攻角较小, 进行线性化可得
205 \begin{align}
206 mV_mk\dot{q}=P\alpha+Y^{\alpha}\alpha+Y^{\delta_z}\delta_z-mg\cos\theta
207 \end{align}
208
209 由于瞬时平衡 $m_z=0$ , 可得
210 \begin{align}
211 -0.1\alpha+0.024\delta_z=0\rightarrow\delta_z=0.1\alpha/0.024
212 \end{align}
213
214 代入, 可得
215 \begin{align}
216 \alpha=\frac{mV_mk\dot{q}+mg\cos\theta}{P+Y^{\alpha}+Y^{\delta_z}(0.1/0.024)}\rightarrow\frac{mV_mk\dot{q}+mg\cos\theta}{P+C_y^{\alpha}qL_{ref}+C_y^{\delta_z}qL_{ref}(0.1/0.024)}
217 \end{align}
218
219
220 最后得到弹道方程为
221
222 \begin{align}
223 \begin{cases}
224 \frac{dV}{dt}=\frac{P\cos\alpha-X_m-g\sin\theta}{m} \\
225 \alpha=\frac{mV_k\dot{q}+mg\cos\theta}{P+C_y^{\alpha}qL_{ref}+C_y^{\delta_z}qL_{ref}(0.1/0.024)} \\
226 \frac{dx}{dt}=V\cos\theta \\
227 \frac{dy}{dt}=V\sin\theta \\
228 \dot{\theta}^*=k\dot{q} \\
229 \dot{\theta}^*=\dot{\theta} \\
230 \tan q=\frac{y_T-y_m}{x_T-x_m} \\
231 \frac{dq}{dt}=\frac{-V\sin(\theta-q)}{r} \\
232 \delta_z=0.1\alpha/0.024

```



```

233     \end{cases}
234 \end{align}
235
236 推力{\bf{P}}在弹体坐标系$0x_{1}y_{1}z_{2}$中的分量用$P_{x1}$、$
    P_{y1}$、$P_{z1}$表示，则根据题目信息可以得到
237 \begin{align}
238     \begin{cases}
239         \frac{P_{y1}}{P_{x1}}=\tan{\left( - 30^{\circ}\right)} \ \
240         \frac{P_{y1}}{P_{z1}}=\tan{45^{\circ}}
241         \ \
242         P_{x1}^2 + P_{y1}^2 + P_{z1}^2 = P
243     \end{cases}
244 \end{align}
245
246 带入$\vec{P}=50000N$求得推力大小：
247 \begin{align}
248     \begin{pmatrix}
249         P_{x1} \ \
250         P_{y1} \ \
251         P_{z1}
252     \end{pmatrix}
253     =
254     \begin{pmatrix}
255         38730 \ \
256         -22361 \ \
257         -22361
258     \end{pmatrix}
259 \end{align}
260
261 \noindent {\bf (1)} 按照$\psi \rightarrow \varphi \rightarrow \gamma$的顺序转换}
262
263 从地面坐标系$Axyz$转换为弹体坐标系$0x_{1}y_{1}z_{2}$的坐标变换
    矩阵为
264 \begin{align}
265     L \left( \psi , \varphi , \gamma \right)
266     =
267     L_x \left( \gamma \right)
268     L_z \left( \varphi \right)
269     L_y \left( \psi \right)
270 \end{align}
271 其中：
272 \begin{align}
273     L_y \left( \psi \right)
274     =

```

```

275 \begin{pmatrix}
276 \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\
277 \\
278 0 & 1 & 0 \\
279 \\
280 \sin\psi & 0 & \cos\psi \\
281 \end{pmatrix}
282 \end{align}
283
284 \begin{align}
285 L_z & \left( \varphi \right) \\
286 = & \\
287 \begin{pmatrix}
288 \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\
289 \\
290 -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\
291 \\
292 0 & 0 & 1 \\
293 \end{pmatrix} \\
294 \end{align}
295
296 \begin{align}
297 L_x & \left( \gamma \right) \\
298 = & \\
299 \begin{pmatrix}
300 1 & 0 & 0 \\
301 \\
302 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\
303 \\
304 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \\
305 \end{pmatrix} \\
306 \end{align}
307
308 代入则有：
309 \begin{align}
310 L & \left( \psi , \varphi , \gamma \right) \\
311 = & \\
312 \begin{pmatrix}
313 \cos\varphi \cos\psi & & & & \\
& \sin\varphi & & -\cos\varphi \sin\psi & \\
314 \\
315 -\sin\varphi \cos\psi \cos\gamma + \sin\psi \sin\gamma & \cos\varphi \cos\gamma & \sin\varphi \sin\psi \cos\gamma + \\
& \cos\psi \sin\gamma & \\
316 \\
\end{pmatrix}

```

```

317      \sin\varphi\cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\cos\gamma & -
        \cos\varphi\sin\gamma & -\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\psi\cos\gamma
318  \end{pmatrix}
319 \end{align}
320
321 同时,  $L^{-1} \left( \psi, \varphi, \gamma \right) = L^T \left( \psi, \varphi, \gamma \right)$ , 所以
322
323 \begin{align}
324   L^T \left( \psi, \varphi, \gamma \right)
325   =
326   \begin{pmatrix}
327     \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi\cos\gamma+\sin\psi\sin\gamma & \sin\varphi\cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\cos\gamma \\
328     \\
329     \sin\varphi & \cos\varphi\cos\gamma & -\cos\varphi\sin\gamma \\
330     \\
331     -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\gamma & -\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\psi\cos\gamma
332   \end{pmatrix}
333 \end{align}
334
335 发动机推力矢量  $\vec{P}$  在地面坐标系  $Axyz$  的投影为
336
337 \begin{align}
338   \begin{pmatrix}
339     P_x \\
340     P_y \\
341     P_z
342   \end{pmatrix}
343   =
344   L^T \left( \psi, \varphi, \gamma \right)
345   \begin{pmatrix}
346     P_{x1} \\
347     P_{y1} \\
348     P_{z1}
349   \end{pmatrix}
350 \end{align}
351
352 \noindent {\bf (2)} 按照  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$  的顺序转换}

```

```

353
354 从地面坐标系$Axyz$转换为弹体坐标系$0x_{1}y_{1}z_{2}$的坐标变换
      矩阵为
355 \begin{align}
356     L \left( \varphi , \psi , \gamma \right)
357     =
358     L_x \left( \gamma \right)
359     L_y \left( \psi \right)
360     L_z \left( \varphi \right)
361 \end{align}
362
363 代入式$\left(4\right)$、式$\left(5\right)$、式$\left(6\right)$
      得到：
364 \begin{align}
365     L \left( \varphi , \psi , \gamma \right)
366     =
367     \begin{pmatrix}
368         \cos \varphi \cos \psi & & \cos \varphi \sin \psi & \\
369         \sin \varphi \cos \psi & & \sin \varphi \sin \psi & \\
370         -\sin \varphi & & 0 & \\
371         \sin \psi \cos \varphi & & \sin \psi \sin \varphi & \\
372         \cos \psi \cos \varphi & & \cos \psi \sin \varphi & \\
373         0 & & 0 & 
374     \end{pmatrix}
375 \end{align}
376 同时，$L^{-1} \left( \psi , \varphi , \gamma \right) = L^T \left( \psi , \varphi , \gamma \right)$，所以
377
378 \begin{align}
379     L^T \left( \psi , \varphi , \gamma \right)
380     =
381     \begin{pmatrix}
382         \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi & \\
383         \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi & 0 & \\
384         -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & \\
385         \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \varphi & 0 & 

```

```

386      -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\gamma & -\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma
      +\cos\psi\cos\gamma
387      \end{pmatrix}
388 \end{align}
389
390 发动机推力矢量 $\vec{P}$ 在地面坐标系 $Axyz$ 的投影为
391
392 \begin{align}
393     \begin{pmatrix}
394         P_x \\
395         P_y \\
396         P_z
397     \end{pmatrix}
398     =
399     L^T \left( \psi, \varphi, \gamma \right)
400     \begin{pmatrix}
401         P_{x1} \\
402         P_{y1} \\
403         P_{z1}
404     \end{pmatrix}
405 \end{align}
406
407 \section*{\zihao{-4} 二、编程计算结果}
408
409 \noindent {\bf (1) 按照 $\psi \rightarrow \varphi \rightarrow \gamma$ 的顺序转换计算结果}
410 \begin{align}
411     \begin{pmatrix}
412         P_x \\
413         P_y \\
414         P_z
415     \end{pmatrix}
416     =
417     \begin{pmatrix}
418         2996 \\
419         -49152 \\
420         8667
421     \end{pmatrix}
422     \left( N \right)
423 \end{align}
424 \noindent {\bf (2) 按照 $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$ 的顺序转换}
425 \begin{align}
426     \begin{pmatrix}

```

```
427      P_{x} \\
428      P_{y} \\
429      P_{z}
430 \end{pmatrix}
431 =
432 L^T \left( \psi , \varphi , \gamma \right)
433 \begin{pmatrix}
434      11180 \\
435      -47405 \\
436      -11305
437 \end{pmatrix}
438 \left( N \right)
439 \end{align}
440
441
442 \clearpage
443 \lstinputlisting[
444     style      =   Python,
445     caption    =   {\bf main.py},
446     label      =   {main.py}
447 ]{./code/main.py}
448
449 \clearpage
450
451 \lstinputlisting[
452     style      =   Matlab-editor,
453     caption    =   {\bf work.tex},
454     label      =   {work.tex}
455 ]{work.tex}
456
457 \end{document}
```