大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和

陈景润

(中国科学院数学研究所)

摘要

本文的目的在于用筛法证明了每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和.
关于孪生素数问题亦得到类似的结果.

目录

一. 引言

把命题“每一个充分大的偶数都能表示为一个素数及一个不超过 a 个素数的乘积之和”简记为 $(1,a)$.

不少数学工作者改进了筛法及素数分布的某些结果，并用以改善 $(1,a)$. 现在我们将 $(1,a)$ 发展历史简述如下：

- $(1,c)$ — Renyi
- $(1,5)$ — 潘承洞, Барбан
- $(1,4)$ — 王元, 潘承洞, Барбан
- $(1,3)$ — Бухщтаб, Виноградов, Bombieri

在文献 [10] 中我们给出了 $(1,2)$ 的证明提要. 命 $p_x(1,2)$ 为适合下列条件的素数 p 的个数:

$$x-p=p_1 \quad 或 \quad x-p=p_2p_3$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数. 用 x 表示一充分大的偶数. 命

$$C_x=\prod_{\substack{p|x\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}(1-\frac{1}{(p-1)^2})$$

对于任给定的偶数 h 及充分大的 x, 用 $x_k(1,2)$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数:

$$p\le x, \qquad p+h=p_1 \quad 或 \quad p+h=p_2p_3$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

本文的目的在于证明并改进作者在文献 [10] 内所提及的全部结果, 现在详细叙述如下.

- **定理 1.** $(1,2)$ 及 $p_x(1,2)\ge\frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$
- **定理 2.** 对于任意的偶数 h, 都存在无限多的素数 p，使得 $p+h$ 的素因子的个数不超过两个及 $x_h(1,2)\ge\frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$

在证明定理 1 时，主要用到了本文中的引理 8 和引理 9. 在证明引理 8 时，我们使用较为简单的数字计算方法；而证明引理 9 时，我们使用了 Bombieri 定理及 Richert 中的一个结果.

二. 几个引理

引理 1 假设 $y\ge0$, 而 $[\log x]$ 表示 $\log x$ 的整数部分, $x>1$,

$$\Phi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i^\infty}^{2+i^\infty}\frac{y^\omega\ \mathrm{d}\omega}{\omega\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}$$

显见, 当 $y\le1$ 时, 有 $\Phi(y)=0$. 对于所有的 $y\ge0$，则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数. 当 $\log x\ge10^4$ 及 $y\ge2\mathrm{e}^{2(\log x)^{0.1}}$ 时，则有:

$$1-x^{-0.1}\le\Phi(y)\le1$$

证. 我们先来证明

$$\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)=\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^r+\sum_{i=1}^{r}\frac{(-1)^i r\cdots(r-i+1)(\log y)^{r-i}}{\omega^i}\right\} \tag{1}$$

成立. 显见, (1) 式当 $r=1$ 和 $r=2$ 时都成立. 现在假定 (1) 式对于 $r=2,\cdots,s$ 时都成立，而证明对于 $S+1$ 也成立. 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{s+1}}{\partial\omega^{s+1}}\left(\frac{y^w}{\omega}\right)&=\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{y^w\left(\frac{(\log y)^s}{\omega}+\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^i S\cdots(S-i+1)(\log y)^{s-i}}{\omega^{i+1}}\right)\right\}\\&=y^\omega\left\{\frac{(\log y)^{s+1}}{\omega}+\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^i S\cdots(S-i+1)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^{i+1}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{(\log y)^s}{\omega^2}+\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}S\cdots(S-i+1)(i+1)(\log y)^{s-i}}{(i)^{t+2}}\right\}\\&=\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{s+1}-\frac{(S+1)(\log y)^s}{\omega}+\frac{(-1)^{s+1}(S+1)!}{\omega^{s+1}}\right.\\&\qquad\left.+\sum_{i=2}^{s}\left(\frac{(-1)^s S\cdots(S-i+1)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^i}+\frac{(-1)' S\cdots(S+2-i)i(\log y)^{s+1-i}}{\omega^i}\right)\right\}\\&=\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{S+1}+\sum_{i=1}^{S+1}\frac{(-1)^i(S+1)\cdots(S+1-i+1)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^i}\right\}\end{aligned}$$

故 (1) 式成立. 又当 $y\ge 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(y)&=1+\left\{\frac{(\log x)^{1.1+1.1[\log x]}}{[\log x]!}\right\}\left\{\frac{\partial^{[\log x]}}{\partial\omega^{[\log x]}}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\right\}_{\omega=-(\log x)^{1.1}}\\&=1-e^{-(\log x)^{1.1}(\log y)}\sum_{\nu=0}^{[\log x]}\frac{\{(\log x)^{1.1}(\log y)\}^\nu}{\nu!}\\&=\left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_0^{(\log x)!^{-1}(\log y)}e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

因为 $0\le y\le 1$ 时,$\Phi(y)=0$. 故由上式得到: 当 $y\ge 0$ 时, 则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数. 又当 $y\ge \mathrm{e}^{2(\log x)^{-1.0}}$ 时，有

$$\begin{aligned}0<1-\Phi(y)&=\left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_{(\log x)^{1.1}(\log y)}^{\infty}e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\,\mathrm{d}\lambda\\&=\left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_{2[\log x]}^{\infty}e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\,\mathrm{d}\lambda\\&=\left\{\frac{([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\right\}\cdot\int_2^\infty e^{-\lambda[\log x]}\lambda^{[\log x]}\,\mathrm{d}\lambda\\&=\left\{\mathrm{e}^{-[\log x]}\frac{([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\right\}\cdot\int_1^\infty e^{-\lambda[\log x]}(1+\lambda)^{[\log x]}\,\mathrm{d}\lambda\\&\le x^{-0.1}\end{aligned}$$

其中用到 $\log x\ge 10^4$ 及当 $\lambda\ge 1$ 时，有 $\mathrm{e}^{\log(1+\lambda)}\le \mathrm{e}^{\lambda\log 2}$.

引理 2 令 $\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{e}^{2\pi i}\alpha, S(\alpha)=\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n\mathrm{e}(n\alpha), Z=\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$, 其中 a_n 是任意的实数. 我们用 $\sum_{\chi_q}^{*}$ 来表示和式之中经过且只经过 q 模的所有原特征, 则有

$$\sum_{q\leq x}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{x_q}^{*}\Big|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\Big|^2\leq(X^2+\pi N)\sum_{n=M+1}^{M+N}\Big|u_n\Big|^2 \tag{2}$$

$$\sum_{D<q\leq Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{x_q}^{*}\Big|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\Big|^2\ll\Big(Q+\frac{N}{D}\Big)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2 \tag{3}$$

引理 3 当 $S=\sigma+it$ 和 $\sigma\geq\frac{1}{2}$ 时，则有

$$\sum_{q\leq Q}\sum_{x_q}^{*}\mid L(s,\chi_q)\mid^4\ll Q^2\mid S\mid^2(\log Q)^4$$

引理 4 当 k 是无平方因子的奇数，而 $m\neq 1$ 时，我们有

$$\left|\sum_{x_k}^{*}\chi_k(m)\right|\leq|(m-1,k)|$$

引理 5 设 x 是偶数，则有

$$\Omega\leq\frac{M_1+M_2}{1-e}+O(\frac{x}{(\log x)^{2.01}})$$

引理 6 我们有

$$M_2\ll\frac{x}{(\log x)^{2.01}}$$

引理 7 对于大偶数 x, 我们有

$$M_1\leq\left\{\frac{(8+24\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq(\frac{x}{p_1}{}^{1/2})}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\}$$

其中 $C_x=\prod_{\substack{p|x\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$

引理 8 设 x 是大偶数，则有

$$\Omega\leq\frac{3.9404xC_x}{(\log x)^2}$$

引理 9 设 x 是大偶数，则有

$$P_x(x,x^{1/10})-(\frac{1}{2})\sum_{x^{1/10}<p\leq x^{1/3}}P_x(x,p,x^{1/10})\geq\frac{2.6408xC_x}{(\log x)^2}$$

其中 $C_x=\prod_{\substack{p|x\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$

三. 结果

显见，我们有

$$p_x(1,2) \geq p_x(x, x^{1/10}) - (\frac{1}{2}) \sum_{x^{1/10} < p \leq x^{1/3}} p_x(x, p, x^{1/10}) - \frac{\Omega}{2} - x^{0.91} \tag{4}$$

由 (28) 式, 引理 8 和引理 9, 即得到定理 1

$$(1,2) \quad \text{或} \quad P_x(1,2) \geq \frac{0.67 x C_x}{(\log x)^2}$$

的证明. 完全类似的方法可得到定理 2 的证明.