

第3讲 初等函数的运算

3-3 解方程运算

3-3-1 方程的表示

- 方程通常表示为: "lhs==rhs"-----逻辑表达式.
- 方程组通常表示为 $\{\text{eqn1}, \text{eqn2}, \dots\}$ 或 $\text{eqn1} \&\& \text{eqn2} \&\& \dots$.
- 将方程中的等号"=="换成不等号"<", ">", "<=", ">=", "!="就得到不等式.
- 方程和不等式也可以被展开、合并、或化简

```
eqn = (1 - x) (1 + y) == (1 + x) (1 - y); Expand[eqn]
```

```
Collect[eqn, x]
```

- Eliminate[eqns,vars] 将方程组eqns中的部分变元消去

```
p1 = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2); p2 = x + y + z - (a + b + c);
```

```
p3 = a^2 + b^2 + c^2 - 2 a + 2 b + 1; p4 = a + b - 2 c;
```

```
Eliminate[{p1, p2, p3, p4} == {0, 0, 0, 0}, {a, b, c}]
```

3-3-2 一般方程的求解

- Solve[eqns,vars] 求方程(组) eqns的所有准确解vars
方程中只有一个未知量时, vars可不写。

```
Solve[a * x^2 + b * x + c == 0, x]
```

例题：求解方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

```
Solve[2 x + 3 y == 7 && 3 x + 4 y == 10, {x, y}]
```

```
Solve[{2 x + 3 y == 7, 3 x + 4 y == 10}, {x, y}]
```

- 说明：1.如果要利用方程的解代入表达式求值，可直接用取代运算符/.
2.方程的解以列表形式给出，可以用Part提取列表元素。

例题：求解方程组 $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ ，并计算表达式 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 在这些解上的值。

```
solution = Solve[{x^2 + y == 4, 2 x - y == 1}, {x, y}]
```

```
Sqrt[x^2 + y^2] /. solution
```

```
Simplify[%]
```

例题：计算方程 $-735 + 1337x - 778x^2 + 198x^3 - 23x^4 + x^5 = 0$ 所有根的平方和。

```
solution = Solve[-735 + 1337 x - 778 x^2 + 198 x^3 - 23 x^4 + x^5 == 0, x]
{{x -> 1}, {x -> 3}, {x -> 5}, {x -> 7}, {x -> 7}}
```

```
solution[[1]]
```

```
solution[[1, 1]]
```

```
solution[[1, 1, 2]]
```

```
Sum[solution[[k, 1, 2]]^2, {k, 1, 5}]
```

■ NSolve[eqns, vars] 求方程eqns的所有数值解vars

■ NSolve[eqns, vars, n]
求方程eqns的所有数值解vars, 达到n位精度

```
NSolve[x^5 == x + 1, x]
```

```
NSolve[x^5 == x + 1, x, 20]
```

■ Roots[eqn, var]
求一元多项式方程eqn的所有准确解var

■ NRroots[eqn, var]
求一元多项式方程eqn的所有数值解var

■ Root[f, k]
求一元多项式f的第k个根

```
Roots[x^5 == x + 1.0, x]
```

```
NRroots[x^5 == x + 1.0, x, 20]
```

■ FindRoot[f, {x, a}] 以a为初值, 求函数f(x)的一个根x

■ FindRoot[eqns, {x, a}] 以a为初值, 求方程eqns的一个解x

例题：求解方程 $\sin x = x^2 - 1$

```
Plot[{Sin[x], x^2 - 1}, {x, -Pi, Pi}]
```

```
FindRoot[Sin[x] == x^2 - 1, {x, -1}]
```

例题：求方程 $x \sin(x) = 1$ 在区间 $[-10, 10]$ 上的解。

```
Plot[x * Sin[x] - 1, {x, -10, 10}]
```

```
a = {-9, -6, -3, -1, 1, 3, 6, 9}
```

```
Table[FindRoot[x * Sin[x] == 1, {x, a[[i]]}], {i, 8}]
```

例题：求方程组 $\begin{cases} e^x + \ln y = 2 \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$ 的近似解。

```
ContourPlot[{Exp[x] + Log[y] == 2, Sin[x] + Sin[y] == 1}, {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]
```

```
sol1 = FindRoot[{Exp[x] + Log[y] == 2, Sin[x] + Sin[y] == 1}, {x, 0.4}, {y, 2}]
```

```
sol2 = FindRoot[{Exp[x] + Log[y] == 2, Sin[x] + Sin[y] == 1}, {x, 1.6}, {y, 0.2}]
```

■ Reduce[expr, vars, dom]
化简方程或不等式expr并求所有解vars

- FindInstance[expr, vars, dom, n]
求方程或不等式expr的n个特解vars

`Reduce[a * x^2 + b * x + c == 0, x]`

`Reduce[3 x - 2 y > a && x + y < b, {x, y}]`

`FindInstance[x^2 + y^2 == z^2 && 0 < x < y < z < 20, {x, y, z}, Integers, 3]`

3-3-3 递归方程的求解

- RecurrenceTable[eqns, expr, nspec]
由递归关系eqns求表达式expr生成的数列
- RSolve[eqns, a[n], n]
由递归关系eqns求数列an的通项公式

`RecurrenceTable[{a[n + 2] == a[n + 1] + a[n], a[1] == a[2] == 1}, a[n], {n, 10, 20}]`

`RSolve[b[1 + n] == $\frac{1}{3}$ (x * b[n] + y), b[n], n]`