第 4 讲 微积分

4-5 微分方程

4-5-1 求解常微分方程

求解常微分方程和常微分方程组的一般形式：

- DSolve[eqns, y[x], x]
  解y(x)的微分方程或方程组 eqns，x为变量。
- DSolve[eqns, y, x]　　在纯函数的形式下求解，纯函数部分请看第7讲。

```
DSolve[y'[x] == x * y[x], y[x], x]
```

```
DSolve[{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x]}, {y[x], z[x]}, x]
```

一般一个一阶线性微分方程都可以通过积分运算求解，但是如果方程的个数大于1，或阶数大于2，求解就没有固定的方法，一些简单的二阶线性方程的解被当做特殊函数来表示其它方程的解。

```
DSolve[y''[x] - Cot[x]^2 y[x] == 0, y[x], x]
```

一些特殊类型的二阶线性微分方程可能有形式简单的解

```
DSolve[x^2 y''[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```

三阶以上的方程只有极少的方程能够被解出

```
DSolve[y'''[x] == x * Sin[y[x]], y[x], x]
```

例1：求解初值问题 $(1+x^2)\,y''+2\,xy'-6\,x^2-2=0,\ \ y(-1)=0,\ y'(-1)=0.$

```
sol =
 DSolve[{(1 + x^2) * y''[x] + 2 x * y'[x] - 6 * x^2 - 2 == 0, y[-1] == 0, y'[-1] == 0}, y[x], x]
```

```
Plot[y[x] /. sol, {x, -1, 4}]
```

- 纯函数形式的解可以代入微分的运算 DSolve[eqns,y,x]

```
sol1 = DSolve[{y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[0] == 0}, y, x]
```

```
FullSimplify[y''[x] + y[x]^2 /. sol1]
```

```
sol2 = DSolve[{y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[0] == 0}, y[x], x]
```

```
FullSimplify[y''[x] + y[x]^2 /. sol2]
```

4-5-2 求解偏微分方程

求解偏微分方程的命令是
DSolve[eqn, y, {x1, x2, ..}]
DSolve[eqns, {y1,y2,..}, {x1, x2, ..}]

例2：求解偏微分方程 $\frac{\partial y(x1,\ x2)}{\partial x1}+\frac{\partial y(x1,\ x2)}{\partial x2}=\frac{1}{x1\ x2}$

```
DSolve[D[y[x1, x2], {x1}] +
  D[y[x1, x2], {x2}] ==
  1 / (x1 * x2), y[x1, x2],
 {x1, x2}]
```

例3：求解调和方程$u_{xx} + u_{yy} = 0$

```
DSolve[D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}] == 0, u, {x, y}]
```