第5讲　线性代数

5-2 矩阵的基本运算

5-2-1 矩阵的算术运算

- A+B或Plus[A,B]　　矩阵或向量加法
- A-B或Subtract[A,B]　矩阵或向量减法
- -A或Minus[A]　　负矩阵或负向量
- A*B或Times[A,B]　　对应元素相乘
- A/B或Divide[A,B]　　对应元素相除
- A^n或Power[A,n]　　每个元素方幂

```
A = {{1, 2}, {3, 4}}; MatrixForm[A]
B = {{5, 6}, {7, 8}}; MatrixForm[B]
A + B
A - B
A * B
A / B
A^3
```

```
A = {{1, 2}, {3, 4}} // MatrixForm
 B = {{5, 6}, {7, 8}} // MatrixForm
A + B
```

```
5 + A
```

```
{5, 6} + A // MatrixForm
```

```
{{5}, {6}} + A
```

- A.B或Dot[A,B]矩阵乘法或向量的内积
- Cross[A,B]向量的外积
- MatrixPower[A,n]方阵A的方幂
- MatrixExp[A]方阵A的指数函数e^A
- Transpose[A]矩阵A的转置
- ConjugateTranspose[A]复矩阵A的共轭转置

```
a = {1, 2, 3}; b = {4, 5, 6}; {a.b, Cross[a, b]}
```

```
MatrixPower[A, 2]
```

```
A // MatrixForm
Transpose[A] // MatrixForm
```

5-2-2 行列式和逆矩阵

- Det[A]方阵A的行列式
- Inverse[A]方阵A的逆矩阵
- Minors[A]方阵A的余子式
  - Minors[A]也是一个n阶方阵,它在(i,j)位置上的元素是A关于(n-i+1,n-j+1)位置的余子式
- Minors[A,k]方阵A的所有k阶子矩阵的行列式
  - Minors[A,k]生成一个矩阵，其元素是矩阵所有k阶子方阵的行列式.

例题 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

```
A = {{a, b, c, d}, {a, a + b, a + b + c, a + b + c + d}, {a, 2 a + b,
    3 a + 2 b + c, 4 a + 3 b + 2 c + d}, {a, 3 a + b, 6 a + 3 b + c, 10 a + 6 b + 3 c + d}};
A // MatrixForm
Det[A]
```

例题 计算范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix}$

```
van = Table[x[i]^j, {j, 0, 4}, {i, 1, 5}]
% // MatrixForm
Det[van]
```

```
Det[van] // Simplify
```

例题： 设A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ，求其逆矩阵, 余子式.

```
A = {{1, 2, 2}, {2, 3, 3}, {3, 4, 5}}
```

```
Inverse[A] // MatrixForm
```

```
Minors[A]
```

```
{{-1, -1, 0}, {-2, -1, 2}, {-1, 1, 3}}
```

```
Minors[A, 1]
Minors[A, 2]
Minors[A, 3]
```

5-2-3 方阵的特征值和特征向量

- CharacteristicPolynomial[A,x]　方阵A的特征多项式
- Eigenvalues[A]　计算出方阵A的所有特征值；
- Eigenvectors[A]　计算出方阵A的所有特征向量
- Eigensystem[A]　同时计算出方阵A的所有特征值和特征向量

例题： 计算方阵的特征多项式，特征值，与特征向量，验证矩阵满足特征方程

```
A = {{-2, 4, 1, 0, 2}, {-4, 6, 1, -1, 0},
   {0, 0, 3, 0, 0}, {0, 0, 2, 3, 0}, {0, 0, 1, 0, 3}};
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
CharacteristicPolynomial[A, x]
```

```
108 IdentityMatrix[5] - 216 A + 171 MatrixPower[A, 2] -
  67 MatrixPower[A, 3] + 13 MatrixPower[A, 4] - MatrixPower[A, 5] // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
```

```
Eigensystem[A]
```

5-2-4 矩阵的秩、迹、范数

- MatrixRank[A]　矩阵A的秩
- Norm[A,p]　矩阵A的范数，p=1,2,Infinity，缺省值2
- Norm[v,p]　向量v的范数，p>=1或p=Infinity，缺省值2
- Total[v]　向量v的元素和v1+...+vn
- Tr[A]矩阵A的迹（对角元素和）a11+...+ann
- Tr[A,f]矩阵A的广义迹f[a11,...,ann]

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

```
{MatrixRank[A], Tr[A], Total[A]}
```

```
{5, 13, {-6, 10, 8, 2, 5}}
```

例题：计算矩阵， 向量的范数.

```
matrix = {{a + 1, b + 2, c + 3}, {a + 2, b + 3, c + 4}};
Norm[matrix, 1]
Norm[matrix, Infinity]
```