

第5讲 线性代数

5-1 矩阵的定义

5-1-1 矩阵的输入 (1)

- 在Mathematica中，向量与矩阵是用列表表示的，向量是简单的列表，矩阵是列表的列表。
- 向量：
 - `Table[expr,{i,a,b,d}]` 生成列表 $\{expr(a), expr(a+d), expr(a+2d), \dots, expr(b)\}$
a, d的缺省值为1
 - `Array[f,n]` 生成列表 $\{f[1], f[2], \dots, f[n]\}$
f是一元函数。
- 矩阵：
 - `Table[expr, {i,ai,bi,di}, {j,aj,bj,dj}]`
expr为矩阵元素的通项公式，是循环变量i,j的表达式，
a为循环初值，b为循环终值上界，d为循环步长。
当a或d缺省时，其值为1。
 - `Array[f, {m,n}]`
定义m行n列的矩阵，矩阵元素 $f[i,j]$, f是二元函数。
`Array[f, m,n]`
定义m维向量， $\{f[n], f[n+1], \dots, f[n+m-1]\}$ 。

例题：Table, Array函数的用法与区别

```
a[i_, j_] := 1 / (i + j - 1);
```

```
A1 = Table[a, {2}, {2}]
```

```
A2 = Array[a, {2, 2}]
```

- `MatrixForm[列表]` 将列表用矩阵形式表示。

```
A2 // MatrixForm
```

```
MatrixForm[A2]
```

例题：构造一个由0-9随机数字构成的5阶方阵

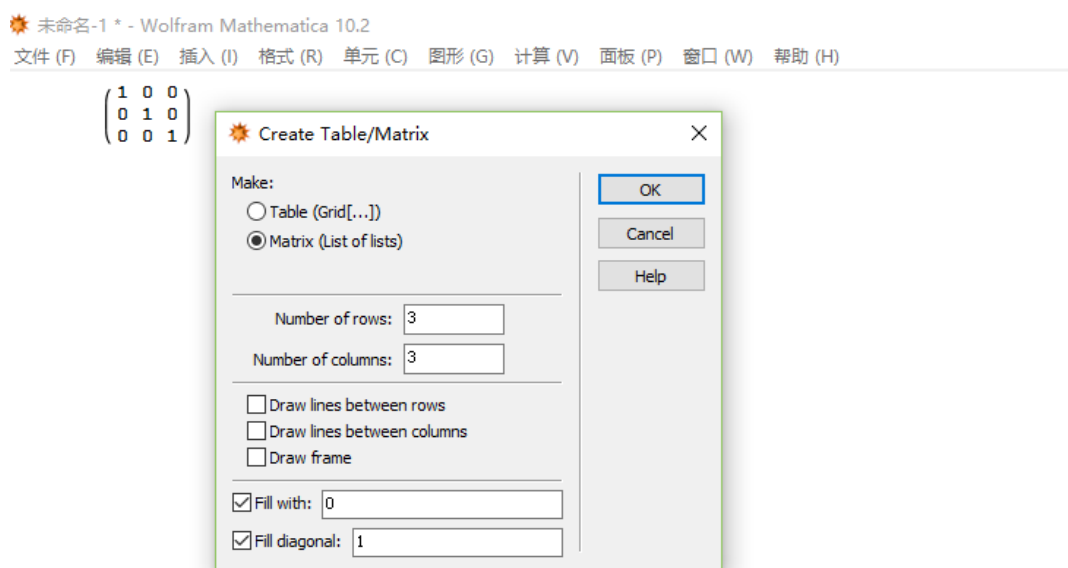
```
Table[RandomInteger[{0, 9}, 5], {i, 1, 5, 1}] // MatrixForm
```

例题：构造一个5阶上三角方阵，上三角元素为行号与列号之和。

```
Table[If[i ≤ j, i + j, 0], {i, 5}, {j, 5}] // MatrixForm
```

5-1-1 矩阵的输入 (2)

- 可以通过Mathematica的菜单项 `Insert->Table/Matrix->New...` 来插入一个矩阵
然后直接修改矩阵的元素



- 矩阵元素不多时，可直接列表输入

```
A = {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}} // MatrixForm
```

5-1-2 定义特殊矩阵

- 定义对角阵 DiagonalMatrix[对角线元素列表]

```
DiagonalMatrix[{a, b, c}] // MatrixForm
```

- 定义n阶单位矩阵 IdentityMatrix[n]

```
IdentityMatrix[5] // MatrixForm
```

- 定义稀疏矩阵
 - SparseArray[rules,dims,val]
由rules定义的具有维数dims的稀疏矩阵，
未指明的矩阵元素取值val。
 - SparseArray[{{i1,j1}->v1,{i2,j2}->v2,...},{m,n}]
按下标位置定义稀疏矩阵元素

例题：定义7阶准对角阵，主对角线元素均为2，与主对角线元素相邻的元素为1，其余元素为0

```
SparseArray[{{i_, i_} -> 2, {i_, j_} /; j == i + 1 -> 1, {i_, j_} /; j == i - 1 -> 1},  
{7, 7}] // MatrixForm
```

例题：定义4×5阶稀疏矩阵M，其中M[2,3]=1，M[4,2]=5.

```
M = SparseArray[{{2, 3} -> 1, {4, 2} -> 5}, {4, 5}] // MatrixForm
```

```
HilbertMatrix[{3, 4}] // MatrixForm
```

```
HankelMatrix[4] // MatrixForm
```

```
HankelMatrix[{a, b, c, d}] // MatrixForm
```

```
RotationMatrix[θ] // MatrixForm
```

```
RotationMatrix[θ, {1, 1, 1}] // MatrixForm
```

5-1-3 矩阵分量的操作

- 由于矩阵是一个特殊的表，对矩阵分量的操作可以通过对表的操作进行,表的操作函数都同样适用于矩阵.
- A[[i,j]], Part[A,i,j]
A的i行j列元素或子矩阵，i、j为指标或指标集
 - 语句中的i,j可以是一个整数（正数i表示第i个位置，负数-i表示倒数第i个位置），也可以是一个指标集{i1,...,ik}或All
- Take[A,i,j] A的子矩阵，i、j代表指标集
 - 语句中的i,j可以是一个整数（正数i表示取前i个位置，负数-i表示取后i个位置），或有形式{m,n,s}（表示以步长s取从m到n的位置）

例题：对题中的5阶方阵完成指定的操作。

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

1. 提取第2行第3列元素
2. 提取第4行全部元素
3. 提取第5列全部元素
4. 提取第2,4行，1，3，5列的子矩阵
5. 将第一行元素乘以-2，加到第三行上。

```
matrix = Table[10 i + j, {i, 1, 5}, {j, 1, 5}]  
  
matrix[[2, 3]]  
  
matrix[[4]]  
  
matrix[[All, 5]]  
  
Part[matrix, {2, 4}, {1, 3, 5}]  
  
Take[matrix, {2, 4, 2}, {1, 5, 2}]  
  
matrix[[3]] -= 2 matrix[[1]];  
matrix // MatrixForm
```