

第 4 讲 微积分

4 - I 求极限

计算函数极限的形式：Limit [expr, x->x0]

例1：求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$$

```
Limit[Sin[a x] / x, x -> 0]
```

```
Limit[m / (1 - x^m) - n / (1 - x^n),  
x -> 1]
```

不是所有的函数都有确定的极限

例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ，极限不存在，在0附近，函数在 $[-1, 1]$ 之间波动，

Limit运算的结果是一个区间。

```
Limit[Sin[1/x], x -> 0]
```

```
(1 + %)^2 * 5
```

数列的极限，可以用同样的形式进行计算。

例2：计算数列的极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

```
Limit[Sqrt[n + Sqrt[n]]  
- Sqrt[n], n -> Infinity]
```

```
Limit[n! / n^n, n -> Infinity]
```

■ 递归定义的数列的极限

例3： 设 $x_1 = \sqrt{2}$ ， $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

```
f[1] = N[Sqrt[2], 10];
```

```
f[n_] := N[Sqrt[2 + f[n - 1]], 10];
```

```
f[10]
```

```
1.999997647
```

```
xn = Table[f[n], {n, 1, 20}]
```

```
ListPlot[xn, PlotStyle -> {Red, Thick}, Joined -> True]
```

计算函数极限的一般形式是

- `Limit[expr, x -> x0]` 计算 $x \rightarrow x_0$ 时函数 `expr` 的极限
- `Limit[expr, x -> x0, Direction -> 1]` 计算 $x \rightarrow x_0$ 时函数 `expr` 的左极限
- `Limit[expr, x -> x0, Direction -> -1]` 计算 $x \rightarrow x_0$ 时函数 `expr` 的右极限

例4：计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x} \Gamma(x)}$$

```
Limit[Log[x] / x, x -> 0, Direction -> -1]
```

```
Limit[Gamma[x + 1/2] / (Sqrt[x] * Gamma[x]),  
x -> Infinity]
```

- 从 Mathematica 语言的语法上说，
Limit 函数自己不带对多个变量取极限的功能即不能计算重极限，可以计算累次极限。

例5：计算 $\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$

```
Limit[Limit[(x*y) / (x^2 + y^2)]^(x^2),  
x -> Infinity], y -> Infinity]
```

```
Limit[Limit[(x*y) / (x^2 + y^2)]^(x^2),  
y -> Infinity], x -> Infinity]
```

- 还可以计算自变量沿某一固定路径趋向于固定点时，表达式的极限

```
Limit[(x^2 + y^2) / (1 - (1 + x^2 + y^2)^(1/2)) /. {y -> a t, x -> t}, t -> 0]
```

例6：画出函数 $f(x) = \frac{(x-5)^2}{3(x+1)}$ 的斜渐近线。

(* 函数 $f(x)$ 的渐近线是指：当 $x \rightarrow \infty$ 时， $f(x)$ 无限接近某一直线 $y = x + b$ 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ，需要用极限的思想确定参数 a 和 b 的值。*)

```
f[x_] := (x - 5)^2 / (3 * (x + 1));
```

```
a = Limit[f[x] / x, x -> Infinity]
```

```
b = Limit[f[x] - a x, x -> Infinity]
```

```
Plot[{f[x], a x + b}, {x, 0, 30}]
```