第5讲　线性代数

5-3 矩阵的高级运算

5.3.1线性方程组的求解(1)

- 求解线性方程组 AX=B
  - 当方阵A的行列式不为零时，线性方程组AX=B有唯一解X=A^{-1}B
  - 当A的行列式为零或者A不是方阵的时候，线性方程组可能无解或有无穷多解。
  - 线性方程组有无穷多解的时候，由基础解系向量的线性组合加上一个特解组成线性方程组的全部解

LinearSolve[A, B]	求方程组AX = B的一个特解X
NullSpace[A]	求齐次方程组AX = 0 的一个基础解系

例题1： 求解线性方程组$\begin{cases} x+3y+2z=9 \\ 2x-y+3z=3 \\ 3x+2y-z=6 \end{cases}$

```
A = {{1, 3, 2}, {2, -1, 3}, {3, 2, -1}};
B = {9, 3, 6};
Det[A]

LinearSolve[A, B]
```

求解线性方程组 $\begin{cases} x+3y+2z=9 \\ 2x-y+3z=3 \\ 3x+2y+5z=6 \end{cases}$

```
u = {{1, 3, 2}, {2, -1, 3}, {3, 2, 5}};

LinearSolve[u, B]
```

例题2： 求解线性方程组$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+3z=4 \\ x-4y+2z=3 \end{cases}$

```
Clear[A, B]; A = {{1, 3, 1}, {2, -1, 3}, {1, -4, 2}};
B = {1, 4, 3};
Det[A]

particular = LinearSolve[A, B]

basis = NullSpace[A]

sol = basis[[1]] * t + particular

Print["线性方程组的通解为   x=", sol[[1]], ",    y=", sol[[2]], ",    z=", sol[[3]]]
```

检验结果是否正确

```
A.sol // Expand
```

5.3.1线性方程组的求解（2）

在线性代数课程中，我们求解线性方程组 AX=B的方法是 Gauss—Jordan方法
将增广矩阵(A|B)化为行阶梯型，从而可以看出方程组的通解。

- RowReduce[A]　将矩阵A化为行最简形

例题3：求解线性方程组$\begin{cases} x+y+z-u-v=5 \\ 3x-2y+z+2u-v=3 \\ 2x-3y+3u=-2 \end{cases}$

```
Clear[A, sol];
A = {{1, 1, 1, -1, -1, 5}, {3, -2, 1, 2, -1, 3}, {2, -3, 0, 3, 0, -2}};
MatrixForm[A]
r = RowReduce[A] // MatrixForm
```

从系数矩阵中可以看出方程组的解.

5.3.2线性空间相关运算(1)

- 考虑由一组向量生成的线性空间，我们需要了解一下问题：
  - 线性空间的维数
  - 线性空间的一组标准正交基
  - 生成线性空间的向量的极大无关组

这些问题可以用一下命令给出解答

- 维数 = Rank[{α_1, α_2, ... α_n}], n个向量组成的矩阵的秩
- Orthogonalize[{α_1, α_2, ... α_n}] ,对n个行向量作标准正交化
- 从最简行梯形矩阵中可以看出极大无关组

例题4：设A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \\ 2 & -5 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$，求的列向量组的一个极大无关组.

```
Clear[];
A = {{2, -1, -1, 1, 2}, {1, 1, -2, 1, 4},
   {4, -6, 2, -2, 4}, {3, 6, -9, 7, 9}, {2, -5, 3, -3, 2}};
A // MatrixForm
RowReduce[A] // MatrixForm
```

例题5：将向量 a1=(1,1,0,0),a2=(1,0,1,0), a3=(-1,0,0,1),a4=(1,-1,-1,1)转化为标准正交基。

```
Clear[];
A = {{1, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}, {-1, 0, 0, 1}, {1, -1, -1, 1}};
MatrixForm[A]

Orthogonalize[A] // MatrixForm
```

5.3.2线性空间相关运算(2)

- Normalize[v,f]　　将向量单位化
- Projection[u,v,f]　求向量u在v方向上的投影分量

f是线性空间中内积的定义，f 缺省时使用标准复内积和L2范数

```
Normalize[{a, b, c}]
```

```
Projection[{x, y, z}, {a, b, c}, Dot]
```

例题6：在区间[0,1]上定义连续函数的内积

$$(f, g) = \int_0^1 x\, f(x)\, g(x)\, dx\,,$$

求多项式空间$\{a+bx+cx^2 \mid a, b, c$ 是任意实数$\}$的一组标准正交基.

```
F[f_, g_] := Integrate[x * f * g, {x, 0, 1}];
Orthogonalize[{1, x, x^2}, F]
```

```
Projection[f[x], g[x], F]
```

5.3.3矩阵的乘积分解

- JordanDecomposition[A]
  对方阵A返回{P,J}使A=PJP-1，J是Jordan标准形。
- LUDecomposition[A]
  对方阵A返回{lu,p,c}使A=P.L.U。
  L是单位下三角，U是上三角，L和U被压缩到一个矩阵中表示，置换方阵P，表示对A进行行位置的变换，c是矩阵A的L^∞条件数。

例题7：设$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求A的Jordan标准型和过渡矩阵。

```
Clear[]; A = ( -2  4  1   0  2
               -4  6  1  -1  0
                0  0  3   0  0
                0  0  2   3  0
                0  0  1   0  3 );
```

```
MatrixForm /@ JordanDecomposition[A]
```

例题8：设$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 14 \\ 6 & 29 & 43 \end{pmatrix}$，求A的LU分解。

```
Clear[]; A = ( 2   3   4
               4  11  14
               6  29  43 );
```

```
{lu, p, c} = MatrixForm /@ LUDecomposition[A]
```

其中L=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$， U=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$， p=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$表示没有进行行交换.

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \ \mathbf{l.u}$$

$$\mathbf{Clear[];\ A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 12 & 11 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

```
{lu, p, c} = MatrixForm /@ LUDecomposition[A]
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{l.u\ //\ MatrixForm}$$