第 3 讲 初等函数运算

3 - 1 多项式运算

3.1.1多项式的基本运算

多项式的基本代数运算有加法、减法、乘法、除法、模运算

```
t1 = x^2 - 2 x - 3; t2 = x - 3;
```

```
t1 + t2
```

```
t1 - t2
```

```
t1 * t2
```

```
t1 / t2
```

给定两个单变量多项式a(x) 和b(x)，存在唯一的多项式q(x) 和r(x) 使得a(x)=b(x)q(x)+r(x)

- PolynomialQuotient 两个多项式相除的商式
- PolynomialRemainder 两个多项式相除的余式
- PolynomialQuotientRemainder
  同时给出两个多项式相除的商式和余式

```
PolynomialQuotient[x^3 + y^3, x - y, x]
```

```
PolynomialRemainder[x^3 + y^3, x - y, x]
```

```
PolynomialQuotientRemainder[x^3 + y^3, x - y, x]
```

3.1.2多项式元素提取

- PolynomialQ[expr,x] 或PolynomialQ[expr,{x,y,...}]
  检验expr是否关于变元x,y,...的多项式

```
PolynomialQ[x^2 - y^2, {x, y}]
```

```
PolynomialQ[x^2 + x + 2 / y, {x, y}]
```

```
PolynomialQ[x^2 + x + 2 / y, x]
```

```
poly1 = (x - 1) ^ (15) ; poly2 = x^4 + 5 x^3 y^2 - 3 x y + 6 y^4;
```

- Variables[poly] 多项式poly的变元列表

```
Variables[poly2]
```

- Coefficient[poly,x,n] 多项式poly中x^n项的系数，n缺省值为1
- CoefficientList[poly,x] 或CoefficientList[poly,{x,y,...}]
  多项式poly关于变元x,y,...的系数列表

poly1=(x-1)^(15)

poly2=x^4+5 x^3 y^2-3 x y+6 y^4;

```
Coefficient[poly1, x, 5]
```

```
CoefficientList[poly2, x]
```

例题：在展开$(x+y+z)^6$后，$x^2 yz^3$项的系数是？

```
Coefficient[(x + y + z)^6, x^2 * y * z^3]
```

3.1.3多项式展开与合并

- Expand[expr]
  展开表达式expr中的乘积和正整数方幂,
  按照幂次由低至高的顺序，将表达式展开成为单项之和
- ExpandAll[expr] 展开表达式expr中的乘积和整数方幂
- PowerExpand[expr,x] 或PowerExpand[expr,{x,y,...}]
  展开表达式expr中与变元x或{x,y,...}有关的乘积的方幂,例如对数，
  开方表达式中的嵌套幂次.
- ExpandNumerator[expr] 展开表达式expr中的分式的分子
- ExpandDenominator[expr] 展开表达式expr中的分式的分母

例题：展开多项式$(x+2y+1)^2$

```
Expand[(x + 2 y + 1)^2]
```

例题：比较 Expand[ ], ExpandAll[ ], PowerExpand[ ]的区别.

```
Expand[(x + y)^-2]
```

```
Expand[Sin[(x + y)^2]]
```

```
ExpandAll[Sin[(x + y)^-2]]
```

```
PowerExpand[Log[(x * y)^z]]
```

例题：分别展开表达式$t=\frac{(1-x)}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{x(1-x)}$中的分子和分母的多项式.

```
t = (1 + x)^2 / (x (1 - x)) + (1 - x) / (1 + x)^2;
```

```
ExpandDenominator[t]
```

$$\frac{(1+x)^2}{x-x^2}+\frac{1-x}{1+2x+x^2}$$

```
ExpandNumerator[t]
```

$$\frac{1-x}{(1+x)^2}+\frac{1+2x+x^2}{(1-x)x}$$

- Collect[expr,x] 或Collect[expr,{x,y,...}]
  合并表达式expr中与变元x或{x,y,...}有关的同类项

- Apart[expr,x]
  把表达式expr写成部分分式之和的形式
- ApartSquareFree[expr]
  把表达式expr写成部分分式之和的形式，
  其中分母是无重根多项式的方幂的形式
- Cancel[expr]
  约分表达式expr中的分式
- Together[expr]
  通分表达式expr中的分式

例题：展开$(x+a+2)^4$, 按x的幂次合并同类项.

```
Collect[(x + a + 2)^4, x]
```

例题：将有理式$t=\dfrac{x^2}{1-2x^2+x^4}$展开成部分分式的和.

```
t = x^2 / (1 - 2 x^2 + x^4);
Apart[t]
ApartSquareFree[t]
```

例题：求 $\dfrac{2x+1}{5x-7}$, $\dfrac{x-2}{3x+2}$, $\dfrac{x^2}{x^2+3}$ 的和，分子分母都是展开形式.

```
Together[(2 x + 1)/(5 x - 7) + (x - 2)/(3 x + 2) + x^2/(x^2 + 3)]
```

例题：约分 $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

```
Cancel[(x^2 - y^2) / (x^3 - y^3)]
```

3.1.4多项式因式分解

- Factor[poly] 在整数环上分解多项式
- FactorSquareFree[poly] 提出多重因式
- FactorTerms[poly,x] 或FactorTerms[poly,{x,y,...}]
  分解poly为常数与本原多项式乘积的形式，x或{x,y,...}缺省为所有变元
- FactorList[poly]
  poly的不可约因子及其方幂列表
- FactorSquareFreeList[poly]
  poly的无重根因子及其方幂列表

例题：对多项式 $16-32x-8x^2+28x^3-3x^4+9x^5$ 作因式分解

```
poly = 16 - 32 x - 8 x^2 + 28 x^3 - 3 x^4 + 9 x^5;

Factor[poly]

FactorSquareFree[poly]

Factor[poly, Extension → Sqrt[-1]] (* 在复数域分解多项式*)

FactorList[poly]

FactorSquareFreeList[poly]
```

3.1.5多项式组公因式与公倍式

- PolynomialGCD[p1,p2,...]
  多项式组{p1,p2,...}的最大公因式
- PolynomialLCM[p1,p2,...]
  多项式组{p1,p2,...}的最小公倍式
- PolynomialExtendedGCD[f,g,x]
  一元多项式f(x)和g(x)的扩展最大公因式
  - 语句PolynomialExtendedGCD[f,g,x]返回一个形如{h,{a,b}}的列表，
    其中a和b都是关于变元x的有理式，h是f和g的最大公因式，并且满足h=af+bg

```
PolynomialLCM[x^2 + x^2 y - y - 1, x^2 y + x^2 z - y - z] (*最小公倍式*)

PolynomialGCD[x^2 + x^2 y - y - 1, x^2 y + x^2 z - y - z] (*最大公因式*)

PolynomialExtendedGCD[x^2 - 2 x * y + y^2 + x - y, x^2 - y^2 - x + y, x]
```