

第4讲 微积分

4 - 3 不定积分和定积分

4-3-1 不定积分

- 计算不定积分的命令是`Integrate[f, x]`
输出结果中省略积分常数。
- 计算二重积分的命令是`Integrate[f, x, y]`
积分的顺序是从右自左，先对变量y做积分计算，再对变量x做积分计算
- `Integrate`主要计算只含有 "简单函数" 的被积函数。"简单函数" 包括有理函数、指数函数、对数函数、三角和反三角函数。

例1：计算下列不定积分

$$(1) \int 3ax^2 dx \quad (2) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$
$$(3) \int \sqrt{\cos x} dx \quad (4) \int \frac{1}{1+x^4} dx$$

```
Integrate[3 a x^2, x]
```

```
Integrate[Sqrt[x^2 - a^2], x]
```

```
Integrate[Sqrt[Cos[x]], x]
```

```
Integrate[1 / (1 + x^4), x]
```

```
TraditionalForm[%]
```

- `Integrate`可以计算形式上的积分

例2： $\int e^x (f(x) + f'(x)) dx$

```
Integrate[E^x * (f[x] +  
Derivative[1][f][x]), x]
```

- `Integrate`可以计算分段函数积分

例3： $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ ，求 $\int f(x) dx$ 。

```
Integrate[Piecewise[{{1, x < 1}, {x, x >= 1}}], x]
```

- `Mathematica`可以对向量值函数积分

```
Integrate[{x, E^x, Sin[x]}, x]
```

- `Mathematica`提供如Bessel函数、Gamma函数 和Beta函数等二三十个数学物理特殊函数可以用来表示积分结果。

例4 : $\int e^{-x^2} dx$

```
Integrate[E^(-x^2), x]
```

■ Mathematica算不出结果的积分对被积函数做些化简外仍按Integrate形式输出.

```
Integrate[Sin[Sin[x]], x]
```

4-3-2 定积分

■ 计算定积分的函数形式是:

```
Integrate[f[x], {x, a, b}]
```

计算 $\int_a^b f(x) dx$ 的准确解

■ NIntegrate[f[x], {x, a, b}] 计算 $\int_a^b f(x) dx$ 的数值解

```
Integrate[Max[x, x^2 - 2], {x, -2, 3}]
```

```
{Integrate[x / (1 + Cos[x]), {x, 0, Pi/2}], NIntegrate[x / (1 + Cos[x]), {x, 0, Pi/2}]}
```

```
Integrate[Cos[x]^n, {x, 0, Pi/2}, Assumptions -> n > 1]
```

```
Integrate[Exp[-x^2], {x, 0, Infinity}]
```

4-3-3 多重积分

■ Integrate[f, {x, a, b}, {y, c, d}]

计算累次积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ 的准确解

■ NIntegrate[f, {x, a, b}, {y, c, d}]

计算定积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ 的数值解

例5 : 计算区域D上的二重积分, D由 $y = x$ 以及x轴, $x = 1$ 围成.

$$\iint_D \sin[x + 2y] dx dy$$

```
ParametricPlot[{ {x, x}, {1, x}}, {x, 0, 1}]
```

```
Integrate[x^2 + y^2, {x, 0, 1}, {y, 0, x}]
```

```
Integrate[(x^2 + y^2) Boole[y <= x], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```

例6 : 计算 $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$

其中V是由曲面 $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$ 围成。

```
Clear[x, y, z]
```

```
Integrate[x * (y^2) * (z^3), {x, 0, 1}, {y, 0, x}, {z, 0, (x * y)}]
```

例7 计算两个圆柱体 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$ 相交部分的体积

```
ineqa = x^2 + y^2 ≤ 1 && x^2 + z^2 ≤ 1;
Integrate[Boole[ineqa], {x, -Infinity, +Infinity},
  {y, -Infinity, +Infinity}, {z, -Infinity, +Infinity}]
```

例8：计算曲线积分 $\int_L (x^2 + x \cos x) \, ds$

```
Integrate[x^2 + x Cos[x], {x, y} ∈ Circle[]]
```

例9：计算单位球面面积

```
Integrate[1, {x, y, z} ∈ Sphere[]]
```