Lecture 1, IEOR 4732

Options, Pricing, and CF
期貨, 對其定價, 以及特徵方程

Zongyi Liu

Thu, Jan 23, 2025

Contents

1 總覽 (Overview) 2
1.1 變換技巧 (Transform Techniques) . . . 3
1.2 PDE 的數值解 (Numerical solution of PDEs/PIDEs) . . . 3
1.3 蒙特卡羅方法 (Monte-Carlo Methods) . . . 3
1.4 模型調優 (Model Calibration) . . . 3
1.5 建立模型 (Construction/Cooking) . . . 3
1.6 參數估計 (Parameter Estimation) . . . 4

2 香草期權 (Vanilla Options) 4
2.1 買入權期權 (The Call Option) . . . 4
2.2 賣出權期權 (The Put Option) . . . 4
2.3 一個投機的例子 (A Speculator Case) . . . 4
2.4 對沖者 (Hedgers) . . . 5
2.5 買入權期權 (Call) . . . 6
2.6 賣出權期權 (Put) . . . 6

3 簡單的定價公式 (Simple Pricing) 7
3.1 如何給一個期權定價? (How to Price an Option?) . . . 7
3.2 以數學來給期權定價 (Price the Options Mathematically) . . . 7
3.3 積分求值 (Evaluation of the Integral) . . . 8
3.4 近似的買入/賣出權期權 (Approximated Call/Put Option) . . . 9

4 案例: 對數正態分佈 (Example: Lognormal Distribution) 9
4.1 設置 (Settings) . . . 9
4.2 此方法的評估 (Assessment of this Approach) . . . 11

5 特徵函數 (Characteristic Function) 11
5.1 傅立葉和反傅立葉變換 (Fourier and Inverse Fourier Transform) . . . 11
5.2 特徵函數 (Characteristic Function) . . . 11
5.3 案例: 布萊克-莫頓-休斯模型 (Example: Black-Merton-Scholes) . . . 11

6 定價繼續 (Continuation of Pricing) 12
6.1 設置 (Set-Up) . . . 12
6.2 公式化 (Formulation) . . . 12
6.3 兩個 PDF ($f(S_T \mid S_0)$ and $q(s_T \mid s_0)$) . . . 12
6.4 修正買入權期權及其傅立葉變換 (Modified Call and its Fourier Transform) . . . 12
6.5 通過調整積分順序進行運算 (Evaluation by Switching Order of Integration) . . . 13
6.6 內積分運算 (Evaluation of Inner Integral) . . . 13
6.7 關於 $\Phi(\nu)$ 的 $\Psi_T(\nu)$ ($\Psi_T(\nu)$ with Respect to $\Phi(\nu)$) . . . 13
6.8 通過逆向傅立葉變換得到的買入權期權 (Call Option via Inverse Fourier Transform) . . . 13
6.9 計算積分 (Integral Evaluation) . . . 14
6.10 特定執行的買入權價格 (Call Price for a Specific Strike) . . . 14
6.10.1 比較 (Comparison) . . . 14
6.11 不同執行權的買入權價格 (Calls with Various Strikes) . . . 15
6.12 不同執行權的買入權價格 (Calls with Various Strikes) . . . 15
6.13 快速傅立葉變換 (Fast Fourier Transform) . . . 15
6.14 應用 (Implementation) . . . 15
6.15 β 的選擇 (Choice of β) . . . 16

7 案例 (Examples) 16
7.1 參數 (Parameters) . . . 16
7.2 案例一: BMS 模型 (Example 1: Black-Merton-Scholes) . . . 17
7.3 案例二: 海森模型 (Example 2: Heston Stochastic Volatility Model) . . . 17
7.4 案例三: 方差伽馬模型 (Example 3: Variance Gamma Model) . . . 18
7.5 總結 (Findings and Observations) . . . 19

1 總覽 (Overview)

整本書, 以及整門課分成兩部分:
Part I - 定價和估值

- 變換技巧 (Transform Techniques)
- PDE 和 PIDE 的數值解 (Numerical solution of PDEs/PIDEs)
- Simulation
- 深度神經網路 (Deep Neural Networks (DNNs))

Part II- 調優和估計

- 模型調優 (Model Calibration)
- 建立模型 (Construction/Cooking)
- 估計參數 (Parameter Estimation)

概述來講, 這本書分成兩個部分, 一個是定價和估值, 就是進行轉換, 對 PDE 等進行數值求解. 另一個就是校準, 完善模型.

1.1 變換技巧 (Transform Techniques)

變換技巧主要用於期權定價以及時間的降噪, 例如

- 快速傅立葉變換 (Fast Fourier transform (FFT))
- 分部快速傅立葉變換 (Fractional fast Fourier trânsform (FrFFT))
- COS 方法 (COS method)
- 鞍點方法 (Saddle-point method)

1.2 PDE 的數值解 (Numerical solution of PDEs/PIDEs)

- 通常來說, 變換的技巧無法用來解決路徑依賴型 (path dependent) 的期權.
- 對於馬爾可夫過程, 存在一個 PDE/PIDE (FeynmanKac formula) 可以給出期權價格.
- 需要解一個偏微分方程來對期權定價.
- 但是通常都需要使用數值方法 (numerically) 來求解.

1.3 蒙特卡羅方法 (Monte-Carlo Methods)

有許多地方的應用:

- 從各種分佈中取樣.
- VaR.
- Options pricing.

1.4 模型調優 (Model Calibration)

- 首先, 我們假設模型的參數集 (parameter set) Θ 是已知的.
- 在已知市場價格後, 最優參數集合 Θ^* 是什麼?
- 尋找使得市場價格和模型價格相近的參數的過程被稱為模型調優 (model calibration).
- 應用: marking/extrapolation/risk management/scenario analysis/trading.

1.5 建立模型 (Construction/Cooking)

- 擬合 (Fitting): 尋找一個或一組函數/多項式, 來適應隱含波動率平面 (implied volatility surface).
- 建立 (Construction): 建立一個收益曲線 (yield curve) 一個零利率 (zero-coupon) 債券, 基於 LIBOR 率, Swap 率, 和歐元期貨.

1.6 參數估計 (Parameter Estimation)

- 市場的快照 vs. 跨面板的時間序列.
- 價格的時間序列.
- 更小的參數更好, 為了避免過度擬合.
- 未能很好的定價證明這個東西過高或過低, 是交易的一個信號.
- 應用: 策略和交易.

2 香草期權 (Vanilla Options)

2.1 買入權期權 (The Call Option)

Definition

購買者具有買入這個期權, 在未來某日成熟 (strike price) 情況下的權力. 銷售者有義務去銷售預售期權 (underlying), 如果購買者要求買入 (call). 銷售者賺取了一定的佣金 (premium).

2.2 賣出權期權 (The Put Option)

Definition

購買者擁有賣出這個期權, 在未來某日成熟 (strike price) 情況下的權力. 銷售者有義務去買入預售期權 (underlying), 如果購買者要求拋出 (put). 銷售者賺取了一定的佣金 (premium).

Q&A

Q: Who are buyers/sellers of option contracts?
A: Hedgers & Speculators, they make the market & provide liquidity
Q: What determines the price of an option?
A: Supply & Dermand

2.3 一個投機的例子 (A Speculator Case)

Q: 如果預期蘋果的股票上漲, 會購買 call 還是 put option?
A: 購買買入期權.
Q: 這樣做的益處?
A: 如果買買入權期權的話, 和直接購買股票的差異. 買入期權可以規避損失, 使最大損失減小.

A Speculator Example

Scenario	Today price	Future Price	P & L
1	\$190	\$140	$-\$5,000$
2	\$190	\$170	$-\$2,800$
3	\$190	\$190	$-\$0$
4	\$190	$\$210^{20105}$	$-\$2,000$
5	\$190	\$240	$+\$5,000$

Table 1: Speculator bought 100 Apple stocks at \$190

Scenario	Today price	Future Price	Payoff	P&L
1	\$190	\$140	\$0	$-\$500$
2 ducal	\$190	\$170	\$0	$-\$500$
For	\$190	\$190	\$0	$-\$500$
4	\$190	\$210	$\$1,000$	$+\$500$
5	\$190	\$240	$\$4,000$	$+\$3,500$

Table 2: Table: Speculator bought a 3-month maturity call option at strike of \$200 and paid \$5

Observations

Q: 權衡是什麼?

A: 通過購買期權, 投機者得以控制他的下行風險, 但是同時減少了他的上行的收益

Q: 投機者是否必須保有 contract, 直到成熟?

A: 不, 他們可以在成熟之前就賣掉.

2.4 對沖者 (Hedgers)

Q: 假設你的投資組合裡面有蘋果的股票, 你是否會對沖?

A: 通過購買一個賣出期權來獲益.

Q: 賣出期權的益處是什麼?

A: 得以保留 portfolio 中的價值, 免於股票價值的大幅跌落.

A Hedger Example

Scenario	Today price	Future Price	Future Portfolio Value
1	\$190	\$130	$\$13,000$
2	\$190	\$160	$\$16,000$
3	\$190	\$190	$\$19,000$
4	\$190	\$220	$\$22,000$
5	\$190	\$250	$\$25,000$

Table 3: Table: Hedger did not buy a put option, her today's portfolio value is $\$19,000$

Scenario	Today price [5]	Future Price	Payoff	Future Portfolio Value
1	\$190	\$130	$\$5,000$	$\$13,000 + \$5,000 - \$800 = \$17,200$
2	\$190	\$160	$\$2,000$	$\$16,000 + \$2,000 - \$800 = \$17,200$
3	\$190	\$190	\$0	$\$19,000 - \$800 = \$18,200$
4	\$190	\$190	\$220	\$0
5	\$190	\$250	\$0	$\$25,000 - \$800 = \$21,200$

Table 4: Table: Speculator bought a 6-month maturity put option at strike of \$180 and paid \$8

Observations

Q: 購買賣出期權的影響是什麼?

A: 通過狗嗎一個賣出期權, 她得以對沖她的 position, 因為這個投資組合的價值不會低於某個值, 不論蘋果的股票如何下跌.

Q: 如何給一個期權估值?

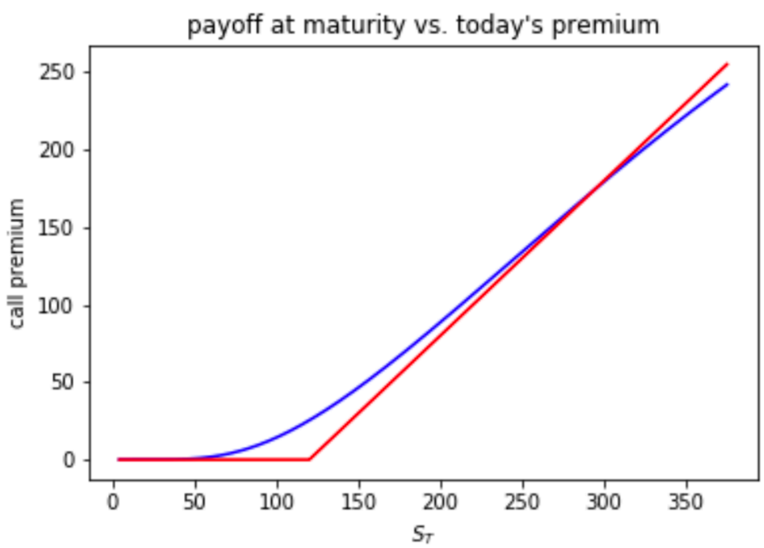
對於期權的合同來講:

- S_0: 今日的價格 (已知)
- K: 執行價格 (strike price, 提前規定)
- T: 成熟度 (maturity, 提前規定)
- $V_0(K,T)$: 今日對於 K 和 T 的權利金 (premium)
- $S_{T:}$: 在時間 T 時的價格 (未知)

2.5 買入權期權 (Call)

對於一個買入權期權 (call option), 有:

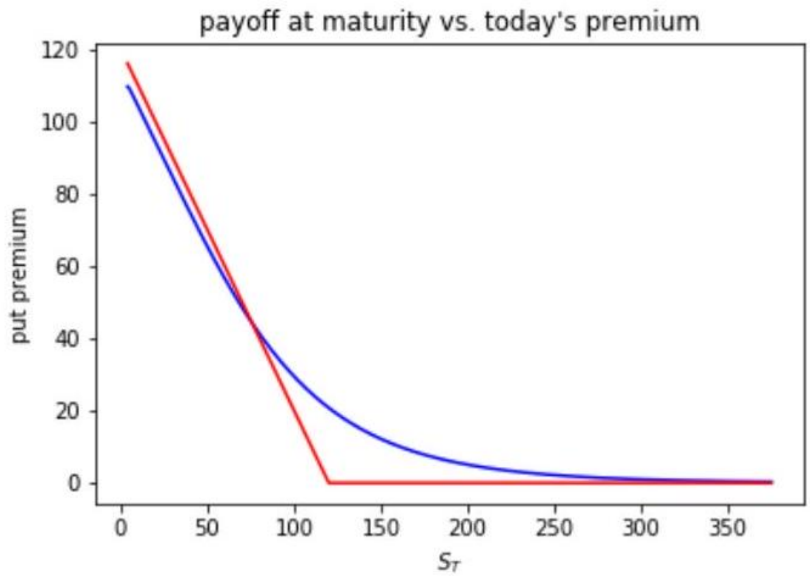
- 今日的權利金: $C_0(K,T)$
- 在成熟時的收益: $(S_T - K)^+$



2.6 賣出權期權 (Put)

對於一個賣出權期權 (put option), 有:

- 今日的權利金: $P_0(K,T)$
- 在成熟時的收益: $(K - S_T)^+$



3 簡單的定價公式 (Simple Pricing)

對於期權定價, 需要什麼?

- 收益函數

$$
\begin{aligned}
\text{call:}\ \ & (S_T - K)^+ \\
\text{put:}\ \ & (K - S_T)^+
\end{aligned}
$$

- 股票價格在時間 T 時候的 (條件) 概率密度函數, 也即 $S_{\bar{c}}$ 給定今日的價格 S_0, 換句話說, $f\left(S_T \mid S_0\right)$.

3.1 如何給一個期權定價? (How to Price an Option?)

對於概率密度函數 $f\left(S_T \mid S_0\right)$ 的 payoff 求積分.

Q: 什麼缺失了?

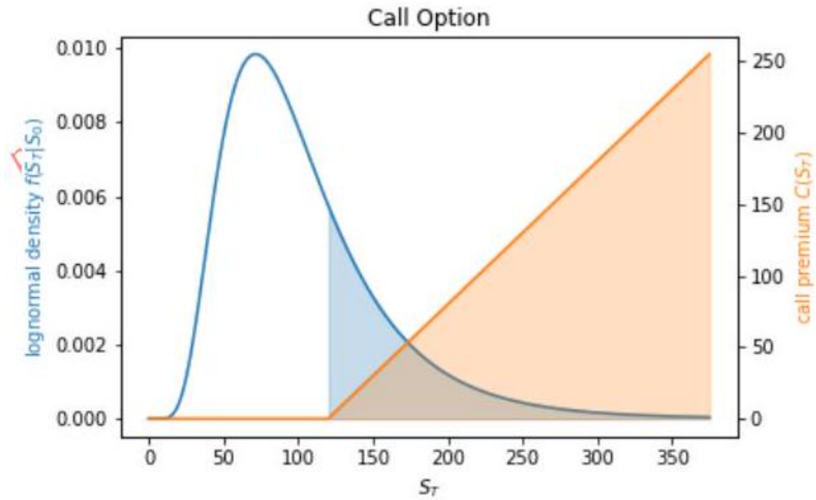
A: 貼現 (discount), 我們目前討論了在過期時的期權價值, 我們需要考慮對於今天價值的貼現.

3.2 以數學來給期權定價 (Price the Options Mathematically)

對於一個買入權期權

一個歐式買入權期權的價格 $C_0(K,T)$ 可以被描述為:

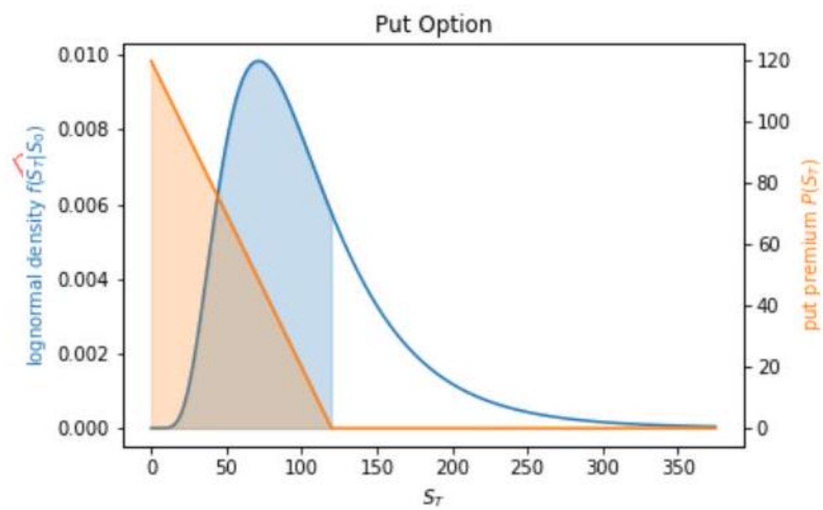
$$
\begin{aligned}
C_0(K,T) &= e^{-rT}\mathbb{E}_0\left[(S_T - K)^+\right] \\
&= e^{-rT}\int_0^\infty (S_T - K)^+ f\left(S_T \mid S_0^2\right) dS_T \\
&= e^{-rT}\int_K^\infty \left(S_{T\in T}0^2 K\right) f\left(S_T \mid S_0\right) dS_T
\end{aligned}
$$



對於一個賣出權期權

一個歐式賣出權期權的價格 $P_0(K,T)$ 可以被描述為:

$$
\begin{aligned}
P_0(K,T) &= e^{-rT}\mathbb{E}_0\left[(K-S_T)^+\right] \\
&= e^{-rT}\int_0^{\infty}(K-S_T)^+ f\left(S_T Y S_0^{2ce^2}\right) dS_T \\
&= e^{-rT}\int_0^{K}(K_1+S_T)\, f\left(S_T \mid S_0\right) dS_T
\end{aligned}
$$



3.3 積分求值 (Evaluation of the Integral)

如何完成 → 首先使其成為一個有限積分 (call options), 然後設定 N 等於長度為 η 的子區間, 然後依次求各個子區間的值, 再加起來.

$$
\begin{aligned}
C_0(K,T) &= e^{-rT}\int_K^{\infty}(S_T-K)\, f\left(S_T\right) dS_T \\
&\approx e^{-rT}\int_K^{B}(S-K)f(S)dS
\end{aligned}
$$

- 買入權期權: 依次選擇獨立的 η 和 N, 然後設置網格點為:

$$s_j = K + (j-1)\eta \text{ for } j = 1, \ldots, N+1$$

此處的上界 (upper bound) 為 $B = s_{N+1} = K + N\eta$

- 賣出權期權: 上界已知 (i.e. K), 選擇 N 然後定義 $\eta = \frac{K}{N}$:

$$s_j = (j-1)\eta \text{ 對於} j = 1, \ldots, N+1$$

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^{N} \int_{s_j}^{s_{j+1}} (S-K) f(S) dS^2$$

使用三角規則 (trapezoidal rule) 我們可以求每一個子積分的近似值:

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} (S-K) f(S) dS \approx \frac{\eta}{2} \left(\left(s_j - K \right) f\left(s_j \right) + \left(s_{j+1} - K \right) f\left(s_{j+1} \right) \right)$$

替換以求得:

$$\begin{aligned} C_0\left(K_s T\right)^2\Big) &\approx e^{-rT} \sum_{j=1}^{N} \int_{s_j}^{s_{j+1}} (S-K) f(S) dS \\ &\approx e^{-rT} \sum_{j=1}^{N} \frac{\eta}{2} \left(\left(s_j - K \right) f\left(s_j \right) + \left(s_{j+1} - K \right) f\left(s_{j+1} \right) \right) \end{aligned}$$

3.4 近似的買入/賣出權期權 (Approximated Call/Put Option)

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^{N} \left(s_j - K \right) f\left(s_j \mid S_0 \right) w_j$$

$$P_0(K,T) \approx e^{-\kappa r} \sum_{j=1}^{N} \left(K - s_j \right) f\left(s_j \mid S_0 \right) w_j$$

此處有:

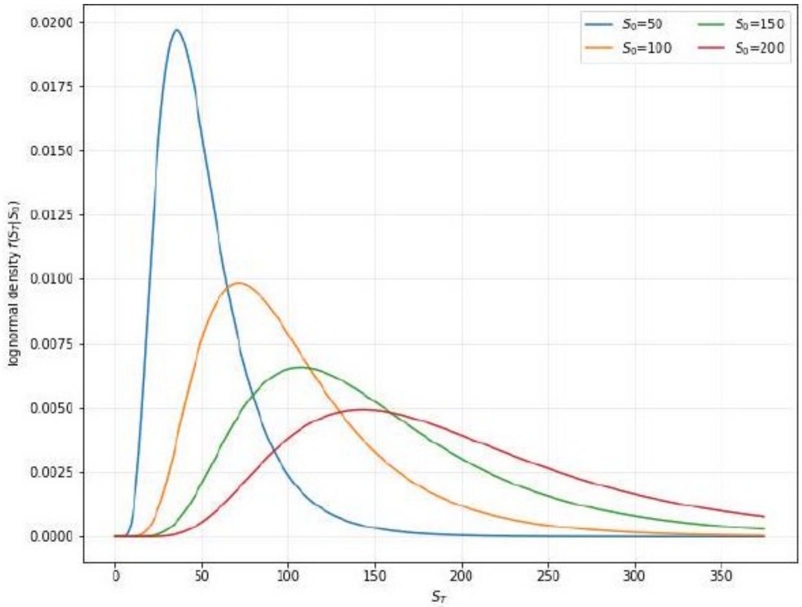
$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta & j = 1 \\ \eta & \text{otherwise} \end{cases}$$

運算成本 (computational cost): $O(N)$

4 案例: 對數正態分佈 (Example: Lognormal Distribution)

4.1 設置 (Settings)

$$f\left(S_T \mid S_0\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \ln S_0 - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}}{\sigma S_T \sqrt{2\pi T}}$$



- 初始價格 S_0 : \$100
- 無息利率 (risk-free rate): 5%
- 分紅利率 (dividend rate): 1%
- 成熟度 T: 一年
- 波動性 (volatility): 0.30%
- 執行價格 (strike) K : \$140

	η		
N	0.25	0.5	150
2^8	2.2247	2.8446	2.9130
2^9	2.8450	2.9133	2,9136
2^{10}	2.9134	2.9139	2.9136
2^{11}	2.9140	2.9139	2.9136
2^{12}	2.9140	2.9139	2.9136
2^{13}	2.9140	2.9139	2.9136

Table 5: Call prices for strike $K = \$140$ (out-the-money) for various values of $\eta \& N$

N	η	**Put Premium**
2^8	0.546	37.0810
2^9	0.273	37.0811
2^{10}	0.136	27.0811
2^{11}	0.068	37.0811
2^{12}	0.034	37.0811
2^{13}	0.017	37.0811

Table 6: Tables Put prices for strike $K = \$140$ (in-the-money) for various values N

4.2 此方法的評估 (Assessment of this Approach)

- 這個方法如何? $\rightarrow$ 對於合適的 N 和 η, 這個近似方法很不錯.
- 這個方法的可行性如何? $\rightarrow$ 如果條件概率密度函數 $f(S_T \mid S0)$ 是已知的而且在閉形式 (closed-form) 中可用, 任何數值的積分都可以使用以求這個期權的近似值; 但是總的來說 $f(S_T \mid S_0)$ 不一定能夠可用 (available).
- 是否有替代或者更好的方法? $\rightarrow$ 是的

5 特徵函數 (Characteristic Function)

5.1 傅立葉和反傅立葉變換 (Fourier and Inverse Fourier Transform)

定義
對於一個函數 $f(x)$, 它的傅立葉變換為:

$$\Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} f(x)dx$$

定義
有 $\Phi(\nu)$, 函數 $f(x)$ 可以通過反向 (inverse) 傅立葉變換被恢復.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x}\Phi(\nu)d\nu$$

5.2 特徵函數 (Characteristic Function)

定義
若 $f(x)$ 是一個變量 x 的 PDF, 則它的傅立葉變換被稱為特徵函數:

$$\begin{aligned}\Phi(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} f(x)dx \\ &= \mathbb{E}\left(e^{i\nu x}\right)\end{aligned}$$

$f(x)$ 可以通過它的特徵函數, 借助反向傅立葉變換恢復.

5.3 案例: 布萊克-莫頓-休斯模型 (Example: Black-Merton-Scholes)

S_t 有 B-M-S SDE:

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

股票價格的對數的特徵函數為:

$$\Phi(\nu) = \exp\left(i\left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\nu - \frac{\sigma^2\nu^2}{2}T\right)$$

6 定價繼續 (Continuation of Pricing)

6.1 設置 (Set-Up)

- S_T : T 時刻的價格.
- $f(S_T \mid S_0)$: S_T 的密度.
- $q(s_T \mid s_0)$: $s_T = \ln(S_T)$ 的密度.
- $k = \ln(K)$: 執行價格的對數.
- $\Phi(\nu)$: 股票價格的對數的特徵函數.
- $\mathcal{C}_T(k)$: T-成熟度的買入權期權 $K = e^k$ 的價格.

6.2 公式化 (Formulation)

一個歐式買入權期權價格 $C_T(k)$ 可以被描述為:

$$
\begin{aligned}
e^{-rT}\mathbb{E}_0\left[(S_T - K)^+\right] &= e^{-rT}\int_K^\infty (S_T - K)\, f(S_T \mid S_0)\, dS_T \\
&= C_T(k)
\end{aligned}
$$

6.3 兩個 PDF ($f(S_T \mid S_0)$ and $q(s_T \mid s_0)$)

資產價格的 PDF:

$$
f(S_T \mid S_0) = \frac{1}{\sigma S_T \sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \ln S_0 - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}
$$

對數資產價格的 PDF:

$$
q(s_T \mid s_0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{s_T - s_0 - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}
$$

6.4 修正買入權期權及其傅立葉變換 (Modified Call and its Fourier Transform)

定義 $\mathrm{c}_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k)$. 令 $\Psi_T(\nu)$ 成為其傅立葉變換:

$$
\begin{aligned}
\Psi_T(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} c_T(k) dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} e^{\alpha k} C_T(k) dk
\end{aligned}
$$

可以使用反向傅立葉轉換以得到:

$$
C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu k} \Psi_T(\nu) d\nu
$$

6.5 通過調整積分順序進行運算 (Evaluation by Switching Order of Integration)

通過調整積分的順序, 展現了傅立葉轉換下的提修正買入權期權 (Modified Call Price) 的推導:

$$
\begin{aligned}
\Psi_T(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} c_T(k)\, dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} e^{\alpha k} \left(e^{-rT} \int_{k}^{\infty} (e^s - e^k) q(s)\, ds \right) dk \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s} e^{(\alpha+i\nu)k} (e^s - e^k) q(s)\, dk\, ds \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q(s) \left(\int_{-\infty}^{s} e^{(\alpha+i\nu)k} (e^s - e^k)\, dk \right) ds
\end{aligned}
$$

6.6 內積分運算 (Evaluation of Inner Integral)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{s} e^{(\alpha+i\nu)k} (e^s - e^k)\, dk &= e^s \left. \frac{e^{(\alpha+i\nu)k}}{\alpha+i\nu} \right|_{-\infty}^{s} - \left. \frac{e^{(\alpha+i\nu+1)k}}{\alpha+i\nu+1} \right|_{-\infty}^{s} \\
&= e^s \cdot \frac{e^{(\alpha+i\nu)s}}{\alpha+i\nu} - \frac{e^{(\alpha+i\nu+1)s}}{\alpha+i\nu+1} \\
&= \frac{e^{(\alpha+i\nu+1)s}}{(\alpha+i\nu)(\alpha+i\nu+1)}
\end{aligned}
$$

6.7 關於 $\Phi(\nu)$ 的 $\Psi_T(\nu)$ ($\Psi_T(\nu)$ with Respect to $\Phi(\nu)$)

$$
\begin{aligned}
\Psi_T(\nu) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q(s) \cdot \frac{e^{(\alpha+i\nu+1)s}}{(\alpha+i\nu)(\alpha+i\nu+1)}\, ds \\
&= \frac{e^{-rT}}{(\alpha+i\nu)(\alpha+i\nu+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+i\nu+1)s} q(s)\, ds \\
&= \frac{e^{-rT}}{(\alpha+i\nu)(\alpha+i\nu+1)} \cdot \Phi(\nu - (\alpha+1)i)
\end{aligned}
$$

6.8 通過逆向傅立葉變換得到的買入權期權 (Call Option via Inverse Fourier Transform)

回顧:

$$
C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu k} \boxed{\Psi_T(\nu)}\, d\nu
$$

此處有:

$$
\Psi_T(\nu) = \frac{e^{-rT}}{(\alpha+i\nu)(\alpha+i\nu+1)} \cdot \Phi(\nu - (\alpha+1)i)
$$

6.9 計算積分 (Integral Evaluation)

$$\begin{aligned} C_T(k) &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\nu k} \Psi_T(\nu) d\nu \\ &\approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{B} e^{-i\nu k} \Psi_T(\nu) d\nu \end{aligned}$$

令 N 等於長度為 η 的子區間, 且有:

$$\eta = \frac{B}{N}$$

$\nu_j = (j-1)^2$ for $j = 1, \ldots, N+1$.

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} e^{-i\nu k} \Psi_T(\nu) d\nu$$

使用三角規則我們可以得到每一個子區間的近似值:

$$\int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} e^{-i\nu k} \Psi_T(\nu) d\nu \approx \frac{\eta}{2} \left(e^{-i\nu_j k} \Psi_T\left(\nu_j\right) + e^{-i\nu_{j+1} k} \Psi_T\left(\nu_{j+1}\right) \right)$$

替代可得:

$$\begin{aligned} C_T(k) &\approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} e^{-i\nu k} \Psi_T(\nu)\, d\nu \\ &\approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \frac{\eta}{2} \left(e^{-i\nu_j k} \Psi_T(\nu_j) + e^{-i\nu_{j+1} k} \Psi_T(\nu_{j+1}) \right) \end{aligned}$$

6.10 特定執行的買入權價格 (Call Price for a Specific Strike)

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\nu_j k} \psi_T\left(\nu_j\right) w_j$$

有:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta & j = 1 \\ \eta & \text{otherwise} \end{cases}$$

運算成本: $O(N)$

6.10.1 比較 (Comparison)

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\nu_j k} \Psi_T\left(\nu_j\right) w_j$$

對比:

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^{N} \left(s_j - K\right) f\left(s_j | S_0\right) w_j$$

有:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta & j = 1 \\ \eta & \text{otherwise} \end{cases}$$

6.11 不同執行權的買入權價格 (Calls with Various Strikes)

- 如果我們只關心一個特定的執行期權, 那不需要其他步驟.
- 對於計算一個期權的權利金, 在成熟時的不同執行價格, 假設 m 次執行, 重複 m 次, 運算成本則為 $O(m \times N)$.
- 我們可以使用 FFT 得到 N 次不同執行權的權利金價格, 此處的運算成本為 $O(N \ln N)$ 而不是 $O\left(N^2\right)$.

6.12 不同執行權的買入權價格 (Calls with Various Strikes)

對於 $m = 1, \ldots, N$, 有

$$\begin{aligned} C_T(k_m) &\approx \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\nu_j k_m} \Psi_T(\nu_j) w_j \\ &= \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i(j-1)\eta(m-1)\Delta k} e^{-i\beta\nu_j} \Psi_T(\nu_j) w_j \\ &= \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\lambda\eta(j-1)(m-1)} \boxed{e^{-i\beta\nu_j} \Psi_T(\nu_j) w_j} \\ C_T(k_m) &\approx \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\lambda\eta(j-1)(m-1)} \boxed{x(j)} \end{aligned}$$

6.13 快速傅立葉變換 (Fast Fourier Transform)

快速傅立葉提供了一個有效的算法, 如下:

$$\omega(m) = \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(m-1)} x(j)$$

對於 $m = 1, \ldots, N$

Q: 它的有效性如何?

A: 運算成本變成了 $-O(N \ln N)$ 而不是 $O\left(N^2\right)$

Q: 如何使用 FFT?

A: 通過設置 $\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}$, 我們可以使用 FFT 來計算總和.

6.14 應用 (Implementation)

有 $\Phi(\nu)$, 選擇 $\eta, N = 2^n$ 和 β, 來計算 $\lambda = \frac{2\pi}{N\eta}$, $\nu_j = (j-1)\eta$, 然後設置 $\alpha > 0$. 建立向量 $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2} \cdot \frac{e^{-rT}}{(\alpha + i\nu_1)(\alpha + i\nu_1 + 1)} e^{-i\beta\nu_1} \Phi\left(\nu_1 - (\alpha+1)i\right) \\ \frac{\eta}{(\alpha + i\nu_2)(\alpha + i\nu_2 + 1)} \cdot e^{-rT} e^{-i\beta\nu_2} \Phi\left(\nu_2 - (\alpha+1)i\right) \\ \vdots \\ \frac{\eta}{(\alpha + i\nu_N)(\alpha + i\nu_N + 1)} \cdot e^{-rT} e^{-i\beta\nu_N} \Phi\left(\nu_N - (\alpha+1)i\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathrm{fft}(\mathbf{x})$$

在執行時的買入權價格為 k_m 對於 $m = 1, \ldots, N$

$$\begin{pmatrix} C_T(k_1) \\ C_T(k_2) \\ \vdots \\ C_T(k_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\alpha k_1}}{\pi} \mathrm{Re}(y_1) \\ \frac{e^{-\alpha k_2}}{\pi} \mathrm{Re}(y_2) \\ \vdots \\ \frac{e^{-\alpha k_N}}{\pi} \mathrm{Re}(y_N) \end{pmatrix}$$

where $k_m = \beta + (m-1)\lambda$

6.15 β 的選擇 (Choice of β)

$$k_m = \beta + (m-1)\lambda \text{ 對於} m = 1, \ldots, N$$

有兩個常見的選擇:

- 範圍的中部對應平價狀態, 設定 $\beta = \ln(S_0) - \frac{N}{2}\lambda$.
- 第一個買入權對應特定的執行價格 K, 設定 $\beta = \ln(K)$.

7 案例 (Examples)

7.1 參數 (Parameters)

- 初始價格 S_0: \$100
- 執行價格 K: \$80
- 無息利率: 5%
- 分紅率: 1%
- 成熟度 T:: 一年

7.2 案例一: BMS 模型 (Example 1: Black-Merton-Scholes)

S_t 有如下的 BMS SDE:

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

股票價格的對數的特徵函數為:

$$\Phi(\nu) = e^{i\left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\nu - \frac{\sigma^2\nu^2}{2}T}$$

在此案例中, 我們假設 $\Theta = \{\sigma\} = \{0.3\}$.

	$\eta = 0.10$		$\eta = 0.25$	
α	$N = 2^6$	2^{10}	2^6	2^{10}
0.01	138.7372	138.8336	372.1118	372.1118
0.5	25.4710	25.6146	25.6150	25.6150
1.0	25.4432	25.6146	25.6146	25.6146
1.5	25.4497	25.6146	25.6146	25.6146
2.0	25.5024	25.6146	25.6146	25.6146
5.0	26.4853	25.6146	25.6146	25.6146
10.0	9.0641	25.6146	25.6141	25.6146

Table 7: B-M-S premiums for various values of α, N, and η

7.3 案例二: 海森模型 (Example 2: Heston Stochastic Volatility Model)

S_t 在此情況下有 SDE:

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \lambda\sqrt{v_v} dW_t^{(2)}$$

股票價格的對數的特徵函數為:

$$\Phi(u) = \frac{\exp\left\{iu\ln S_0 + iu(r-q)T + \frac{\kappa\theta T(\kappa - i\rho\sigma u)}{\sigma^2}\right\}}{\left(\cosh\frac{\gamma T}{2} + \frac{\kappa - i\rho\sigma u}{\gamma}\sinh\frac{\gamma T}{2}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}} \times \exp\left\{\frac{-\left(u^2 + iu\right)v_0}{\gamma\coth\frac{\gamma T}{2} + \kappa - i\rho\sigma u}\right\}$$

有:

$$\gamma = \sqrt{\sigma^2\left(u^2 + iu\right) + \left(\kappa - i\rho\sigma u\right)^2}$$

對於此例子, 我們假設:

$$\Theta = \{\{k, \theta, \lambda, \rho, v_0\} = \{2, 0.05, 0.3, -0.7, 0.04\}$$

	$\eta = 0.10$		$\eta = 0.25$	
α	$N = 2^6$	2^{10}	$2^{66} + 0^0$	2^{10}
0.01	139.0174	139.5996	375.2260	375.2224
0.5	24.5194	25.2428	25.2457	25.2432
1.0	24.3968	25.2428	25.2431	25.2428
1.5	24.3160	25.2428	25.2393	25.2428
2.0	24.2985	25.2428	25.2335	25.2428
5.0	26.6605	25.2428	25.1255	25.2428
20.0	48.7592	25.2428	25.3538	25.2428

Table 8: Premiums for various values of α, N, and η

7.4 案例三: 方差伽馬模型 (Example 3: Variance Gamma Model)

S_t 被給定為:

$$S_t = S_0 e^{(r-q+\omega)t + X(t;\partial,\nu,\theta)}$$

有 (這裡是隨時間變動的布朗運動):

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) = \theta\gamma(t; 1, \nu) + \sigma W(\gamma(t; 1, \nu))$$

股票價格的對數的特徵函數為:

$$\Phi(u) = \exp\left(iu\left(\ln S_0 + (r-q)T\right)\right)\left(\frac{1}{1 - iu\theta\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \nu}\right)^{\frac{T}{\nu}}$$

在此案例中, 我們假設:

$$\Theta = \{\sigma, \nu, \theta\} = \{0.3, 0.5, -0.4\}$$

可以發現這些權利金的差別都不大.

	$\eta = 0.10$		$\eta = 0.25$	
α	$N = 2^6$	2^{10}	2^6	2^{10}
0.01	141.2533	141.4392	374.7132	374.7175
0.5	28.0383	28.2203	28.2153	28.2206
1.0	28.0855	28.2203	28.2139	28.2203
1.5	28.1944	28.2203	28.2129	28.2203
2.0	28.3824	28.2203	28.2124	28.2203
5.0	31.5220	28.2203	28.2570	28.2203
20.0	9.2062	28.2203	29.4317	28.2203

Table 9: Premiums for various values of α, N, and η

7.5 總結 (Findings and Observations)

Pros

- Model-free setup
- Fast $O(N \ln(N))$

Cons

- Constraint on
- Choice of η, N and α