Lecture 3, MATH 5261

Portfolio Selection (I)
投資組合選擇 (一)

Zongyi Liu

Fri, Sept 19, 2025

Contents

1 關鍵詞

- 請手寫:

2 引入

- 資產 (asset) 是一種可以買賣的投資工具. 它的報酬是從買入到賣出期間價值增加的百分比. 所謂報酬率 (return rate) 是指單位時間內的報酬.
- 投資組合 (portfolio) 是一組資產股份的集合, 投資組合中各資產的價值比例稱為權重 (weight).
- 投資組合的報酬是從買入到賣出期間價值增加的百分比.
- 這裡的基本假設是 R_i 是一個隨機變量, 其期望為 μ_i, 標準差為 σ_i.

$$\mu_i = E\left(R_i\right) \quad \sigma_i = \sqrt{\operatorname{Var}\left(R_i\right)}$$

- 我們稱 μ_i 為期望報酬, 在當前語境下稱 σ_i 為資產 i 的風險.

- 我們還用來表示資產 i 和資產 j 報酬之間的協方差與相關係數.

$$\sigma_{ij} = E\left(\left(R_i - \mu_i\right)\left(R_j - \mu_j\right)\right) \quad \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

- 現在我們考慮一個由上述資產組成的投資組合.
- 由於這些資產的單位大小差異很大, 我們不關心具體的單位數量, 而是關注投資組合中各資產價值所佔的百分比.
- 假設投資組合的總價值為 V_0, 其中資產 i 的價值為 V_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. 那麼資產 i 在投資組合中的權重為:

$$w_i = \frac{V_i}{V_0}$$

我們以列向量表示這個投資組合的權重:

$$w = (w_1, w_2, \ldots, v_m)$$

則:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{V_i}{V_0} = 1$$

- 一般而言, 權重是時間的函數, 因為不同資產的報酬率是不同的.
- 在本章中, 我們只考慮兩個時刻: 投資組合被買入的時刻和被賣出的時刻.
- 記 R 為投資組合的報酬:

$$R = \frac{\text{在售出時的 portfolio 價值 -初始 portfolio 價值}}{\text{初始 portfolio 價值}}$$

- 一個簡單的算術推導給出了投資組合報酬, 資產報酬與權重之間的關係:

$$R = \sum_{i=1}^{m} w_i R_i$$

- 通過改變權重, 可以得到不同風險—收益平衡的投資組合.
- 有些人願意承擔高風險以期獲得高回報, 而也有些人追求安全, 因此願意接受帶有小風險的中等回報.
- 在數學上, 我們將尋找在給定期望收益下使風險最小的最優權重, 或者在給定風險下使期望收益最大的最優權重.
- 這兩個問題是對偶的. 由於均值是權重的線性函數, 而方差是權重的二次函數, 如我們將看到的, 這個問題是可以顯式解出的.
- 當權重 w_i 為正時, 表示買入 (做多) 資產 i, 買入數量價值為 $V_0 w_i$. 當 $w_i < 0$ 時, 則表示賣出 (做空) 該資產, 賣出數量價值為 $|V_0 w_i|$, 從而產生現金用以購買其他資產.
- 這樣一來, 就欠下了一定份額的資產 i, 必須在投資組合出售時以相同數量的單位歸還.
- 僅包含少數資產的投資組合可能承受較高程度的風險, 其表現為相對較大的標準差. 一般而言, 透過在投資組合中納入更多資產, 可以降低投資組合收益的變異, 此過程稱為分散化 (diversification).
- 範例: 考慮以下簡單但具有啟發性的情形. 假設共有 m 個資產, 每個資產的收益期望為 μ, 方差為 σ^2. 再假設這些資產彼此互不相關. 若將投資等分配置於這些資產上, 即對所有 $i = 1, 2, \ldots, m$ 取 $w_i = 1/m$, 則整體期望收益率仍為 μ. 然而整體風險將變為:

$$\mathrm{Var}[R] = \sigma^2 / m$$

這個隨著 m 的增加迅速降低.

3 在預期收益和風險之間的權衡

投資者常問的一個關鍵問題是: 「我們應該如何投資我們的財富?」投資組合理論基於以下兩個原則對這個問題給出了回答:

1. 最大化期望收益.
2. 最小化風險, 這裡的風險被定義為收益的標準差.

然而這些目標在某種程度上是相互衝突的, 因為:

- 一般而言, 風險更高的資產具有更高的期望收益.
- 投資者要求為承擔風險獲得補償. 風險資產的期望收益與無風險收益率之間的差額被稱為風險溢酬 (risk premium).
- 在期望收益與風險之間存在最優的權衡方案.

在本節中我們尋求:

- 在風險的上界尋求最大化收益.
- 或者在預期收益的下界最小化風險.

這裡的一個關鍵概念是透過分散化來降低風險, 我們先從一個簡單的例子開始: 一個有風險資產與一個無風險資產.

- 假設我們有一個有風險資產 (它可以是一個投資組合, 例如共同基金), 其中:
  ◇ 期望收益為 0.15
  ◇ 收益的標準差為 0.25
- 一個無風險資產 (例如 30 天期國庫券), 其中:
  ◇ 期望收益為 0.06
  ◇ 收益的標準差依無風險的定義為 0

3.1 案例

問題: 構造一個投資組合.

- 假設我們將財富的一部分 w 投資於有風險資產.
- 並將剩餘的部分 $1-w$ 投資於無風險資產.
- 那麼, 我們投資的期望收益可以表示為:

$$\mu_R = E(R) = 0.15w + 0.06(1-w) = .06 + .09w$$

它的方差是:

$$\sigma_R^2 = \mathrm{Var}(R) = w^2(.25)^2 + (1-w)^2(0)^2 = w^2(.25)^2.$$

所以它的標準差是:

$$\sigma_R = .25w$$

我們需要選擇 w.

- 為此我們可以選擇期望報酬 $E(R)$ 或想要的風險程度 σ_R.
- 一旦選定了 E(R) 或 σ_R, 就可以確定 w.
- 問題: 假設你想要期望報酬為 0.10, 那麼 w 應該是多少?

答案: $.10 = 0.06w + 0.09(1-w) = 4/9$

- 問題, 假設想要 $\sigma_R = .05$, 那麼 w 應該是多少?

  答案: $.05 = w(.25) \Longrightarrow w = 0.2$
  總體而言, 如果:

- 風險資產與無風險資產的期望報酬分別為 μ_1 和 μ_f.

- 若風險資產的標準差為 σ_1, 則:
  ◇ 投資組合的期望報酬為 $w\mu_1 + (1-w)\mu_f$
  ◇ 投資組合報酬的標準差為 $w\sigma_1$.

雖然 σ 是風險的一種衡量方式, 但更直接的風險衡量是實際的金錢損失. 接下來我們選擇 w 來控制最大損失的規模. 假設:

$$R \sim N\left(\mu_R = w\mu_1 + (1-w)\mu_f,\ \sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2\right),$$

並且我們希望選擇 w 使得:

$$P\left(R < r_0\right) = \alpha$$

對某個給定的 r_0 成立 (也就是說, 損失超過 $-r_0\times$ 投資金額的概率為 α). 由於:

$$P\left(R < r_0\right) = \Phi\left(\frac{r_0 - (w\mu_1 + (1-w)\mu_f)}{w\sigma_1}\right)$$

所以我們有:

$$\frac{r_0 - (w\mu_1 + (1-w)\mu_f)}{w\sigma_1} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

因而:

$$w = \frac{r_0 - \mu_f}{\sigma_1\Phi^{-1}(\alpha) + (\mu_1 - \mu_f)}$$

3.2 案例

假設 $r_0 = -0.15, \mu_1 = 0.06, \mu_2 = 0.15, \sigma_1 = 0.25$ 以及 $\alpha = 0.01$, 則:

$$w = \frac{-0.15 - 0.06}{0.25\Phi^{-1}(0.01) + (0.15 - 0.06)} = 0.4264$$

- 假設某公司計畫投資 $\$1,000,000$, 並且有資本準備金可承擔 $\$150,000$ 的損失, 但不能承擔更多.
  - 因此公司希望能確保若發生損失, 其幅度不超過 15% ($\$150,000$ 為 $\$1,000,000$ 的 15%). 也就是說, R 大於 -15%.
  - 唯一能保證的方法是不投資於有風險資產 (或者投資於有風險資產不超過 $\$150,000$).
  - 公司選擇 w 使得 $P(R < -0.15)$ 很小. 例如 $P(R < -0.15) = 0.01$.
  - 數值 $\$150,000$ 被稱為風險值 (value at risk, = VaR), 而 $1-0.01 = 0.99$ 被稱為信賴係數 (confidence coefficient).
  - 我們說該投資組合在 0.99 的置信水準下, 其 VaR 為 $\$150,000$.

3.3 賣空

賣空是在股票價格下跌時獲利的一種方式.

- 要賣空一支股票, 就是在並未持有該股票的情況下賣出它.

- 假設某支股票的價格為 \$25 每股, 並且你做空 100 股.

- 這會使你獲得 $\$2,500$.

- 如果股價下跌至每股 \$17, 你可以以 $\$1,700$ 買回這 100 股並了結 (平掉) 你的空頭頭寸. 你賺了 \$800 (扣除交易成本後). 如果股價上漲, 你將會虧損.

- 假設你有 \$100, 並且有兩種風險資產.
  ◇ 用你的資金, 你可以買入價值 \$150 的風險資產 1, 並做空價值 \$50 的風險資產 2.
  ◇ 淨成本將恰好是 \$100.
  ◇ 你的投資組合的回報將是

$$\frac{3}{2}R_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)R_2$$

◇ 你的投資 $w_1 = 3/2$ and $w_2 = -1/2$.

3.4 總結

- 由一個無風險資產與一個有風險資產組成的模型雖然非常簡單, 但並非毫無用處.
- 一般而言, 尋找最優投資組合可以分為兩個步驟完成.

1. 找出僅包含有風險資產的投資組合. 這個投資組合稱為「切點投資組合」(tangency portfolio).
2. 找出無風險資產與第一步中確定的切點投資組合的適當配比 (第二步我們現在已經知道如何操作, 見上文).

- 我們需要學習的是如何對多個有風險資產進行最優配置. 當只有兩個有風險資產時, 這一點更容易理解. 因此, 我們從兩個有風險資產的情況開始.

4 兩個含風險資產

假設

- 我們有兩個有風險資產, 其收益分別為 R_1 和 R_2;
- 我們將它們按比例 w 和 $1-w$ 配置, 則投資組合的收益為 $R_P = wR_1 + (1-w)R_2$;
- 投資組合的期望收益為:

$$E\left(R_P\right) = \mu_{R_P} = w\mu_1 + (1-w)\mu_2$$

- 若 ρ_{12} 為相關係數, 使得 $\sigma_{R_1,R_2} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$, 則投資組合收益的方差為

$$\sigma_{R_P}^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

4.1 將兩個風險資產結合

- 我們將兩個資產分別繪製在座標點 (σ_1, R_1) 和 (σ_2, R_2).
- 這條曲線是點集 $(\sigma_P, 0.08 + 0.06w)$, 其中 $0 \le w \le 1$.
- 投資組合 MV 的波動率小於任一單一資產.

4.2 案例

範例: 若 $\mu_1 = 0.14, \mu_2 = 0.08, \sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = 0.15$ 且 $\rho_{12} = 0$, 則

$$\mu_{R_P} = 0.14w + 0.08(1-w)$$

以及

$$\sigma_{R_P}^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 = (0.2)^2w^2 + (0.15)^2(1-w)^2,$$

因為 $\rho_{12} = 0$. 利用微積分可以證明, 使投資組合風險最小化時的權重為

$$w = 0.025/0.125 = 0.36.$$

對於該投資組合, 有 $\mu_{R_P} = 0.1016$, 而 $\sigma_{R_P} = 0.12$.
說明: 為了找到最小方差 (MVP) 投資組合, 我們需要尋找使 $\sigma_{R_P}^2$ 最小的 w. 為此, 我們運用微積分:

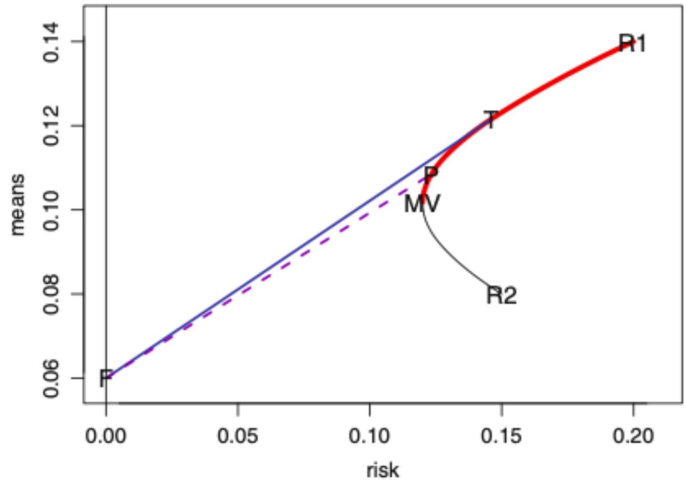


Figure 1: Fig. 16.1. 期望收益與風險關係圖. F = 無風險資產; T = 切點投資組合; R_1 = 第一個有風險資產; R_2 = 第二個有風險資產; MV = 最小方差投資組合. 有效前緣 (efficient frontier) 是紅色曲線. 所有連接 R_2 與 R_1 的曲線上的點在 $0 \le w \le 1$ 的情況下都是可行的, 但黑色曲線上的那些點是次優的. P 表示有效前緣上一個典型的投資組合

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{R_P}^2}{dw} &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 \\ &= 2w\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right) - 2\sigma_2^2 = 0\end{aligned}$$

由此得到:

$$w = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,.$$

更一般地, 對於 n 個互不相關的資產收益 $R_1, \ldots, R_n$, 其 MVP 權重為

$$\left(\frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2+\ldots+1/\sigma_n^2},\ \ldots,\ \frac{1/\sigma_n^2}{1/\sigma_1^2+\ldots+1/\sigma_n^2}\right).$$

兩個有風險資產　對於若干 w 值所對應的 μ_{R_P} 與 σ_{R_P}.

w	μ_{R_P}	σ_{R_P}
0.00	0.080	0.150
0.25	0.095	0.123
0.50	0.110	0.125
0.75	0.125	0.155
1.00	0.140	0.200

5 馬爾科維茨最優投資組合問題

- 目標: 在收益達到固定值的同時最小化風險.

考慮如下最優化問題:

$$\min_w \left\{\sigma_{R_P}^2\right\}$$

受限於以下兩個條件:

$$\sum_i \mu_i w_i = \mu$$

$$\sum_i w_i = 1$$

在這裡, μ 是一個預先設定的值. 因此, Markowitz 問題的解是 μ 的函數. 注意, 當 $\mu = \mu_{MVP}$ 時, 最小方差投資組合 (MVP) 就是 Markowitz 問題的解. 若允許賣空, 則可以利用拉格朗日乘子法來求解 Markowitz 問題.

5.1 對於三個獨立有風險資產

令 $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, ; \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$, 並且 $\mu_1 = 1, ; \mu_2 = 2, ; \mu_3 = 3$. 對於這個例子, 馬爾科維茨問題變為:

$$\min_w \left\{ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \right\}, \quad \text{s.t.}$$
$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \mu, \quad w_1 + w_2 + w_3 = 1.$$

通過拉格朗日乘子法, 我們得到如下的線性系統:

$$\begin{gathered} w_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ w_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ w_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \mu, \quad \text{以及} w_1 + w_2 + w_3 = 1. \end{gathered}$$

最後的五個等式引出如下的最優化解:

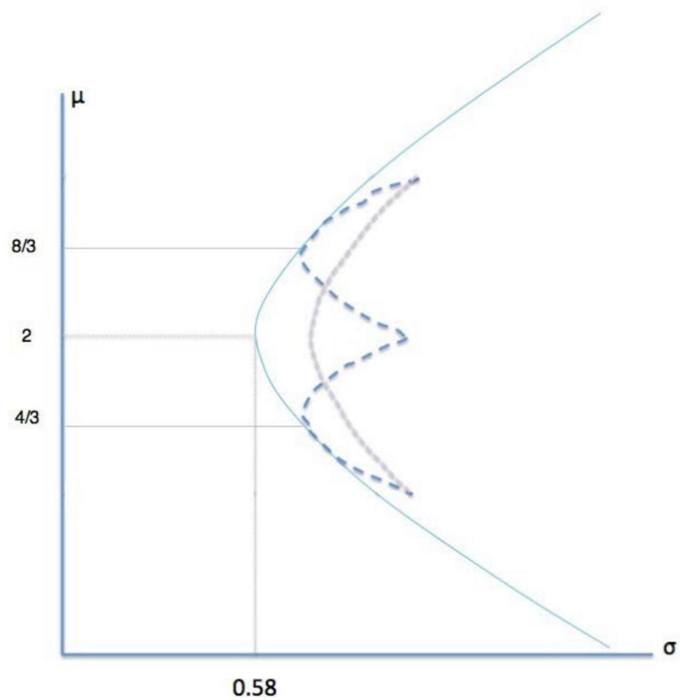
$$w_1 = \frac{4}{3} - \frac{\mu}{2}, \quad w_2 = \frac{1}{3}, \quad w_3 = \frac{\mu}{2} - \frac{2}{3}$$

則這個有效投資組合的標準差變為了:

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{7}{3} - 2\mu + \frac{\mu^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\mu - 2)^2}$$

這是 μ 的函數, 此處有 $\mu = 2$, 它給出了 MVP.

$(\sigma_{\min}, \mu)$ 的轨迹称为有效前沿 (efficient frontier), 其绘制如下. 若允许卖空, 所有可能的 σ 与 μ 的组合位于实心蓝色曲线的右侧. $(\sigma_{MVP}, \mu_{MVP})$ 是有效前沿的左端点. 当不允许卖空时, 前沿由 $4/3 \le \mu \le 8/3$ 所分割.



5.2 估計均值, 標準差和協方差

- 對於 μ_1 和 σ_1 值可以通過過去在第一個風險資產上的收益率得到.
- 若 $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n},\ i = 1, 2$ 表示兩個資產的收益時間序列, 則 $\bar{R}_i,\ i = 1, 2$ (樣本均值) 以及 $s_i,\ i = 1, 2$ (樣本標準差) 是對 $\mu_i,\ i = 1, 2$ 與 $\sigma_i,\ i = 1, 2$ 的估計.

- 協方差 σ_{12} 可以用樣本協方差來估計.

$$s_{12} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(R_{1t} - \bar{R}_1\right) \left(R_{2t} - \bar{R}_2\right)$$

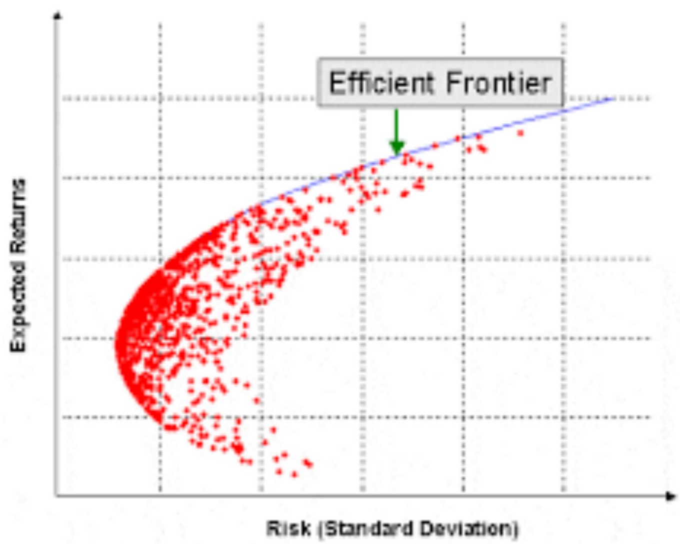
- 相關係數 ρ_{12} 可以用樣本相關係數來估計.

$$\hat{\rho}_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2}$$

6 有效邊界

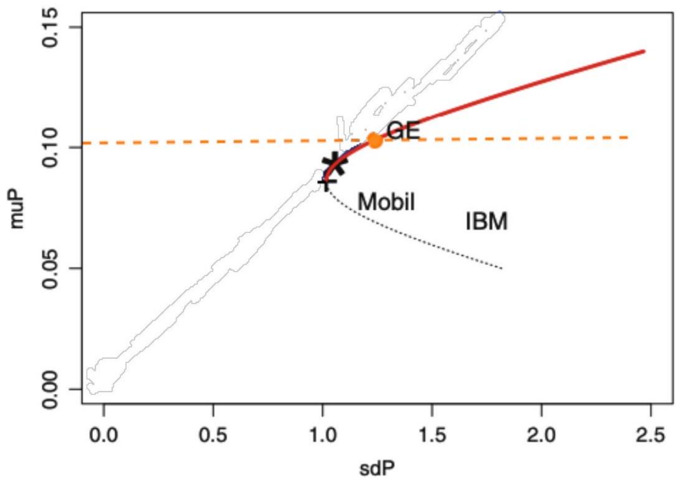
我們可以將這個概念推廣到多資產的投資組合:

- 將各資產以所有可能的權重 (總和為 1) 進行組合
- 將期望收益與標準差繪製出來, 標準差作為橫軸
- 所有可能的組合構成一團點雲, 看起來像一條拋物線
- 只有這團點雲的上邊界才是有效邊界 (efficient frontier)



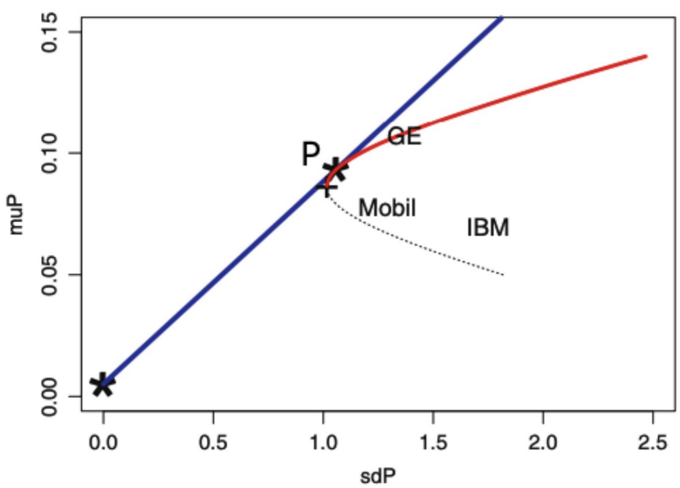
6.1 性質

- 對於給定的波動率, 至多存在一個具有最高收益的投資組合 (綠色).
- 對於給定的收益, 至多存在一個具有最低波動率的投資組合 (橙色).
- 這些就是有效投資組合 (efficient portfolios).



6.2 切點投資組合

- 加入無風險資產.
- 繪製一條通過無風險資產並且與有效前緣相切的直線.
- 我們將該切點組合記為 P.



7 將兩個風險資產和一個無風險資產結合

兩種有風險資產下的切點投資組合:

- 有效前緣上的每一個點 (σ_R, μ_R) 對應某個 w 的取值.
- 若固定 w, 則得到一個由兩種有風險資產組成的固定投資組合.
- 接下來將該有風險資產組合與無風險資產混合.
- 連接無風險資產與某個有風險資產組合的直線斜率稱為夏普比率 (Sharpe ratio):

$$\frac{E\left(R_P\right) - \mu_f}{\sigma_{R_P}}$$

- 夏普比率 (Sharpe ratio)= 「報酬風險比」= 「超額期望報酬」與標準差的比值. 夏普比率越大越好.
- 點 T 具有最高的夏普比率, 稱為切點投資組合 (tangency portfolio)
- 有效投資組合由切點投資組合與無風險資產組成
- 所有有效投資組合對兩種風險資產的配置比例相同, 即切點投資組合