

# Lecture 4, MATH 5261

Portfolio Selection (II)

投資組合選擇 (二)

Zongyi Liu

Fri, Sept 26, 2025

## Contents

1	尋找切線投資組合	1
2	$\rho_{12}$ 的作用	3
3	N 個風險資產的效率投資組合	4
4	最小方差投資組合	5
5	有效風險資產投資組合	6
6	風險資產與無風險資產的效率投資組合	11

## 1 尋找切線投資組合

令

$$V_1 = \mu_1 - \mu_f, \quad V_2 = \mu_2 - \mu_f$$

表示超額報酬 (excess returns). 令

$$w_T = \frac{V_1 \sigma_2^2 - V_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{V_1 \sigma_2^2 + V_2 \sigma_1^2 - (V_1 + V_2) \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}$$

切線投資組合 (tangency portfolio) 的資金配置如下:

- 將  $w_T$  的比例投資於第一種風險資產;
- 將  $1 - w_T$  的比例投資於第二種風險資產.

設  $R_T$ ,  $\mu_T$  與  $\sigma_T$  分別表示切點投資組合 (tangency portfolio) 的報酬率, 期望報酬率與標準差.

例子: 假設  $\mu_1 = 0.14$ ,  $\mu_2 = 0.08$ ,  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ , 且  $\rho_{12} = 0$ . 又假設無風險利率  $\mu_f = 0.06$ . 則:

$$V_1 = 0.14 - 0.06 = 0.08, V_2 = 0.08 - 0.06 = 0.02$$

以及:

$$w_T = \frac{0.08(0.15)^2 - 0}{0.08(0.15)^2 + 0.02(0.20)^2 - 0} = 0.693$$

因而有:

$$\mu_T = 0.693(0.14) + (1 - 0.693)(0.08) = 0.122$$

以及:

$$\sigma_T = \sqrt{(0.693)^2(0.2)^2 + (1 - 0.693)^2(0.15)^2} = 0.146$$

$R_P$  是一個投資組合的報酬率, 此投資組合將  $w$  的比例配置於切點投資組合, 而將  $1 - w$  的比例配置於無風險資產. 則:

$$R_P = wR_T + (1 - w)\mu_f$$

以及:

$$\mu_{R_P} = w\mu_T + (1 - w)\mu_f, \quad \sigma_{R_P} = w\sigma_T.$$

最適投資為何, 當  $\sigma_{R_P} = 0.05$  時?

答: 由於  $\sigma_{R_P} = w\sigma_T$ , 且有:

$$w = \frac{\sigma_{R_P}}{\sigma_T} = \frac{0.05}{0.146} = 0.343$$

因此應將 34.3% 投資於切點投資組合, 而其餘的 65.7% 則投資於無風險資產. 這 34% 應在兩種風險資產之間作如下配置:

- $0.693(0.343) = 23.7\%$  應投資於第一種風險資產;
- $(1 - 0.693)(0.343) = 10.5\%$  應投資於第二種風險資產.

因此資產配置如下:

- 65.7% 無風險資產;
- 23.7% 第一種風險資產;
- 10.5% 第二種風險資產.

現在假設你希望得到 10% 的期望報酬. 請比較

1. 僅由風險資產組成的最佳投資組合
2. 由風險資產與無風險資產組成的最佳投資組合

解答: 1. 僅含風險資產的最佳投資組合, 我們有:

$$0.10 = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2 = w(0.14) + (1 - w)(0.08) = 0.08 + (0.14 - 0.08)w$$

因此:

$$w = (0.10 - 0.08) / (0.14 - 0.08) = 0.02 / 0.06 = 1/3$$

由於這是唯一一個期望報酬率為  $\mu_R = 0.10$  的風險資產投資組合，因此它自動是最佳的。直接計算  $\sigma_R$  可得

$$\sigma_R = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2} = \sqrt{(1/9)(.2)^2 + 4/9(.15)^2} = .120$$

2. 兩種風險資產與無風險資產的最優投資組合。我們有：

$$\begin{aligned} 0.10 &= E(R) = w\mu_T + (1-w)\mu_f \\ &= \frac{\sigma_R}{\sigma_T}\mu_T + \left(1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_T}\right)\mu_f \\ &= \sigma_R \frac{0.122}{0.146} + \left(1 - \frac{\sigma_R}{0.146}\right)(0.06) \\ &= 0.06 + 0.425\sigma_R \end{aligned}$$

這引出了：

$$\sigma_R = 0.04 / 0.425 = 0.094$$

因此有：

$$w = \sigma_R / \sigma_T = 0.094 / 0.146 = 0.644$$

結論：若將無風險資產與兩種風險資產結合，則在維持  $\mu_R = 0.10$  的情況下， $\sigma_R$  由 0.120 降至 0.094。風險的降低幅度為 28%。

## 2 $\rho_{12}$ 的作用

$\rho_{12}$  的作用如下：

- 資產間的相關性只影響風險，而不影響期望報酬。
- 兩種風險資產之間的正相關是不利的。當相關性為正時，兩種資產往往同向波動，這會增加投資組合的波動性。
- 負相關是有利的。若兩種資產呈負相關，則其中一種資產報酬為負時，另一種通常會為正。

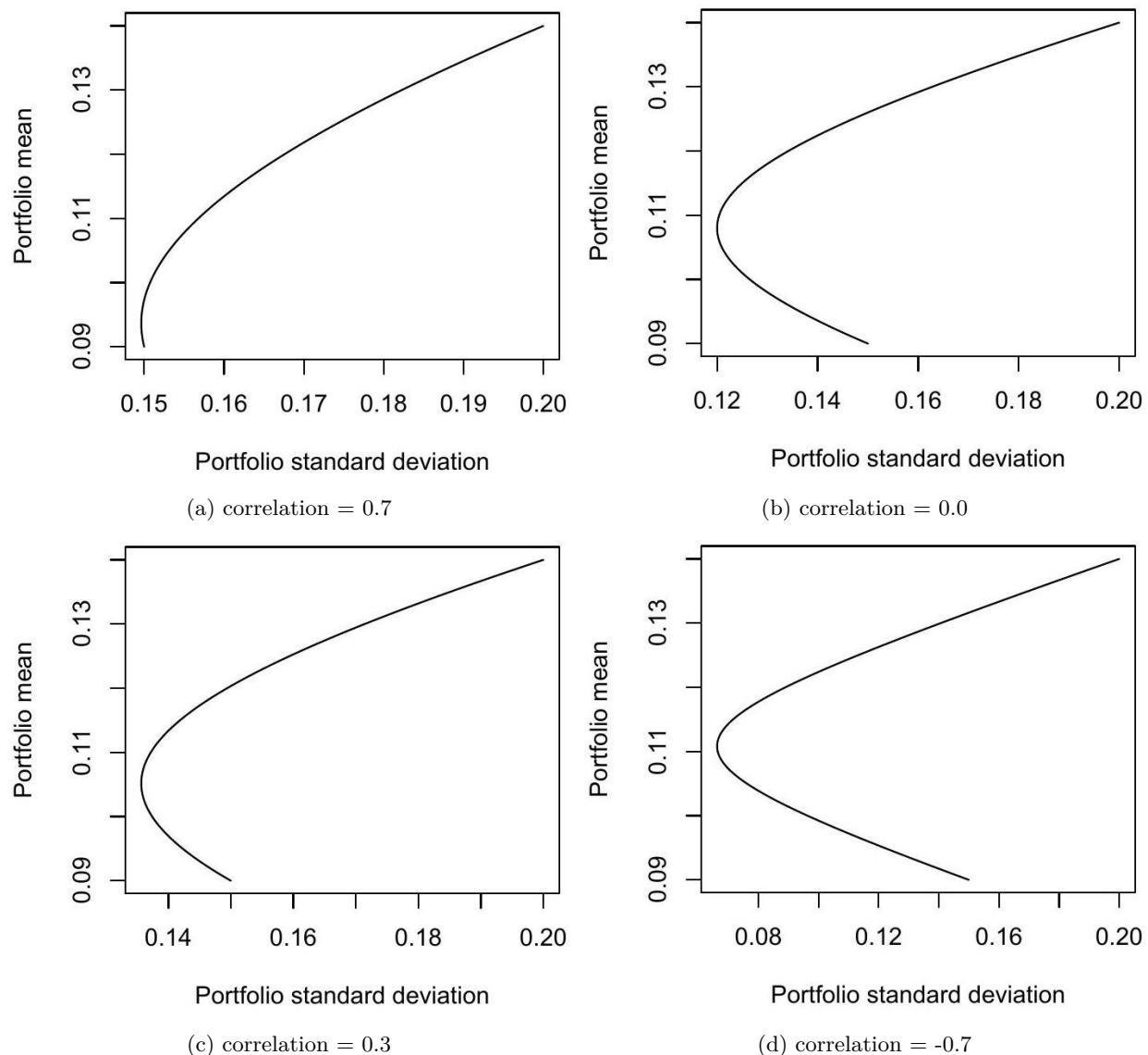


Figure 1: Comparisons under different correlations

### 3 N 個風險資產的效率投資組合

假設我們有  $N$  個風險資產, 第  $i$  個風險資產的報酬率為  $\mu_i$ . 定義如下:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$$

為報酬率的隨機向量. 則有:

$$E(R) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_N) \end{pmatrix}$$

假設投資組合的期望報酬有一個目標值  $\mu_P$ .

- 當  $N = 2$  時, 如先前所示, 目標值  $\mu_P$  僅能由一個投資組合達成, 而其唯一的權重值可由下式求得.
- 當  $N \geq 3$  時, 將會有無限多個投資組合能達成該目標期望報酬  $\mu_P$ .
- 其中變異數最小的投資組合稱為「有效」(efficient) 投資組合.
- 我們接下來的目標是找出這個有效投資組合.
- 設  $\sigma_i = \sqrt{\Omega_{ii}}$  為  $R_i$  的標準差;
- 設  $\Omega_{ij}$  為  $R_i$  與  $R_j$  之間的共變數.

$$\rho_{ij} = \frac{\Omega_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

設其為  $R_i$  與  $R_j$  之間的相關係數.

令

$$\Omega = \text{COV}(\mathbf{R})$$

設其為隨機向量  $\mathbf{R}$  的共變異數矩陣. 令:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$$

設其為投資組合權重的向量, 並令:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

設其為一個  $N \times 1$  的全 1 向量. 我們假設  $\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$ .

## 4 最小方差投資組合

- 為了求得最小方差投資組合 (Minimum Variance Portfolio, MVP), 我們需要解以下問題:

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w}$$

subject to  $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$ .

- 與此情況對應的拉格朗日函數 (Lagrangian) 為:

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} + \lambda (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1})$$

- 為了求得解 (記為  $\mathbf{w}_{mvp}$ )，我們必須解以下方程：

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \delta_1, \delta_2) = \Omega \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} \quad (1)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} \quad (2)$$

此處有：

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} L(\mathbf{w}, \lambda) \\ \frac{\partial}{\partial w_2} L(\mathbf{w}, \lambda) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_N} L(\mathbf{w}, \lambda) \end{pmatrix}$$

- 其解為：

$$\mathbf{w}_{mvp} = \frac{\Omega^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}}$$

它的收益為：

$$R = \mathbf{w}_{mvp}^T \mathbf{R}$$

- 其期望值與變異數為：

$$\mu_{mvp} = \frac{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}} \quad \sigma_{mvp}^2 = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}}$$

## 5 有效風險資產投資組合

- 為了求得期望報酬為  $\mu_p$  的有效投資組合，我們需要解以下問題：

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w}$$

受限於  $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$  和  $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mu_p$ .

- 與此情況對應的拉格朗日函數 (Lagrangian) 為：

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} + \lambda_1 (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}) + \lambda_2 (\mu_p - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu})$$

- 為了求得解 (記為  $\mathbf{w}_{mvp}$ )，我們必須解以下方程：

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \Omega \mathbf{w} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \boldsymbol{\mu} \quad (3)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} \quad (4)$$

$$\mu_p = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (5)$$

此處有：

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) \\ \frac{\partial}{\partial w_2} L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_N} L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix}$$

- 解如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* &= \lambda_1 \Omega^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ &= \lambda_1 \mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1} \frac{\Omega^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}} + \lambda_2 \mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu} \frac{\Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}} \\ &= \theta \mathbf{w}_1 + (1 - \theta) \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

此處有  $\theta = \lambda_1 \mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}$ ,  $1 - \theta = \lambda_2 \mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}$  以及：

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\Omega^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}}$$

以及：

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}}$$

注意到  $\mathbf{w}^{*T} \mathbf{1} = 1$  意味著：

$$\lambda_1 \mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu} = 1$$

- 另注意  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_{mvp}$ , 且  $\mathbf{w}_2^T \mathbf{1} = 1$ .
- 假設拉格朗日乘數法 (Lagrange multiplier approach) 細出了正確的結果, 若要有效投資並達到期望報酬  $\mu_p$ , 則應將資金的比例  $\theta$  投資於最小變異投資組合 (MVP), 而比例  $(1 - \theta)$  投資於權重為  $\mathbf{w}_2$  的投資組合.
- 比例  $\theta$  可由下列方程決定：

$$\mu_p = \theta \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu} + (1 - \theta) \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}$$

- 這給出了：

$$\theta = \frac{\mu_p - \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}}$$

- 接下來我們將證明此解即為期望報酬為  $\mu_p$  的有效投資組合.

利用上述的  $\theta$  值, 我們得到:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^* &= \theta \mathbf{w}_1 + (1 - \theta) \mathbf{w}_2 \\ &= \mathbf{w}_2 + \theta (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \\ &= \mathbf{w}_2 + \frac{\mu_p - \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \\ &= \frac{(\mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu}) \mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}) \mathbf{w}_1}{\boldsymbol{\mu}^T \Delta \mathbf{w}} + \mu_p \frac{\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2}{\boldsymbol{\mu}^T \Delta \mathbf{w}} \\ &= \mathbf{e}_1 + \mu_p \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

有:

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$$

以及:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(\mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu}) \mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu}) \mathbf{w}_1}{\boldsymbol{\mu}^T \Delta \mathbf{w}} \quad \text{以及} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2}{\boldsymbol{\mu}^T \Delta \mathbf{w}}$$

- 注意到有:

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\mu} = 0, \quad \mathbf{e}_2^T \mathbf{1} = 0, \quad \mathbf{e}_2^T \boldsymbol{\mu} = 1$$

- 接下來我們將說明, 若  $\mathbf{w}$  滿足以下條件:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \quad \text{以及} \quad E(\mathbf{w}^T \mathbf{R}) = \mu_p$$

則

$$\text{Var}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R}) \leq \text{Var}(\mathbf{w}^T \mathbf{R})$$

也就是說, 我們利用拉格朗日乘數法所得到的解, 正是期望報酬為  $\mu_p$  的有效投資組合.

- Let  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^*$ . 則有:

1.  $\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{1} = (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T \mathbf{1} = \mathbf{w}^T \mathbf{1} - \mathbf{w}^{*T} \mathbf{1} = 0$
2.  $\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\mu} = \mu_p - \mu_p = 0$

這意味著:

1.  $\tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \mathbf{w}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}} = 0$
2.  $\tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \mathbf{w}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}} = 0$

- 由於  $\mathbf{w}^* = \theta\mathbf{w}_1 + (1 - \theta)\mathbf{w}_2$ , 因此我們有:

$$\tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \mathbf{w}^{*T} = 0.$$

- 注意到:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^* + \tilde{\mathbf{w}}$$

因此有:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R} = \mathbf{w}^{*T} \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}$$

因而有:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{w}^T \mathbf{R}) &= \text{Var}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}) \\ &= \text{Var}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R}) + \text{Var}(\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}) + 2 \text{Cov}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R}, \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}) \\ &= \mathbf{w}^{*T} \Omega \mathbf{w}^* + \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} + 2 \text{Cov}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R}, \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}) \\ &= \mathbf{w}^{*T} \Omega \mathbf{w}^* + \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w}\end{aligned}$$

由於:

$$\text{Cov}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R}, \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}) = \mathbf{w}^{*T} \Omega \mathbf{w} = 0.$$

由於  $\Omega$  是正定的, 我們有:

$$\mathbf{w}^{*T} \Omega \mathbf{w}^* \geq 0.$$

因此:

$$\text{Var}(\mathbf{w}^T \mathbf{R}) \geq \text{Var}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R})$$

另注意到, 由於  $\mathbf{w}^* = \mathbf{e}_1 + \mu_p \mathbf{e}_2$ , 因此我們有:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{w}^{*T} \mathbf{R}) &= \text{Var}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{R} + \mu_p \mathbf{e}_2^T \mathbf{R}) \\ &= \mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_1 + \mu_p^2 \mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2 + 2\mu_p \mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2 \left( \mu_p^2 + 2\mu_p \frac{\mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2} \right) \\ &= \mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_2)^2}{\mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2} + \mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2 \left( \mu_p^2 + \frac{\mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2} \right)^2\end{aligned}$$

得出 (1) :

$$\mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_2)^2}{\mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2} = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}} = \sigma_{mvp}^2$$

以及 (2) :

$$\frac{\mathbf{e}_1^T \Omega \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2} = -\frac{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} \mathbf{1}} = \mu_{mvp}$$

因此有

$$\text{Var}(\mathbf{w}^{*T}\mathbf{R}) = \sigma_{mvp}^2 + k^2 (\mu_p - \mu_{mvp})^2$$

此處:

$$k^2 = \mathbf{e}_2^T \Omega \mathbf{e}_2$$

- 當我們改變  $\mu_p$  的值時，有效投資組合的變異數也隨之改變。其曲線：

$$\text{Var}(\mathbf{w}^{*T}\mathbf{R}) = \sigma_{mvp}^2 + k^2 (\mu_p - \mu_{mvp})^2$$

或：

$$\mu_p = \mu_{mvp} \pm \frac{1}{k} \sqrt{\text{Var}(\mathbf{w}^{*T}\mathbf{R}) - \sigma_{mvp}^2}$$

是一條頂點位於以下位置  $\sigma_{mvp}, \mu_p$  的雙曲線：

- 該雙曲線稱為「馬爾科維茨曲線」(Markowitz curve).
- 當且僅當投資組合的期望報酬與標準差位於馬爾科維茨曲線上時，該投資組合才是有效的.
- 雙曲線右側的無界區域稱為「馬爾科維茨子彈」(Markowitz bullet) 或「可達區域」(attainable region).
- 雙曲線的上半部分稱為「馬爾科維茨有效前緣」(Markowitz efficient frontier).

舉例，假設  $N = 3$ ，以及

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.08 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.01 & -0.02 \\ -0.01 & 0.04 & 0.01 \\ -0.02 & 0.01 & 0.09 \end{pmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 71.4 & 14.3 & 14.3 \\ 14.3 & 28.6 & 0 \\ 14.3 & 0 & 14.3 \end{pmatrix}$$

Now

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\Omega^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\Omega^{-1}\mathbf{1}} = (0.583, 0.250, 0.167)^T$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\Omega^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T\Omega^{-1}\boldsymbol{\mu}} = (0.577, 0.231, 0.192)^T$$

若將其中一部分比例  $\theta$  投資於權重為  $\mathbf{w}_1$  的投資組合，另一部分比例  $1 - \theta$  投資於權重為  $\mathbf{w}_2$  的投資組合，則其平均值為：

$$\mu_p = \theta \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\mu} + (1 - \theta) \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\mu} = 0.0877 - 0.00106\theta$$

以及

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \theta^2 \mathbf{w}_1^T \Omega \mathbf{w}_1 + 2\theta(1-\theta) \mathbf{w}_1^T \Omega \mathbf{w}_2 + (1-\theta)^2 \mathbf{w}_2^T \Omega \mathbf{w}_2 \\ &= 0.076^2 + 65.62 (\mu_P - 0.087)^2\end{aligned}$$

則馬爾科維茨曲線為：

$$\sigma = \sqrt{0.076^2 + 65.62 (\mu_P - 0.087)^2}$$

最小變異投資組合的平均報酬率與變異數分別為 0.087 與 0.076。接下來，我們將如同先前在兩種風險資產與無風險資產的情況中所做的那樣，把這  $N$  個資產與一個無風險資產結合起來。

## 6 風險資產與無風險資產的效率投資組合

- 在此中，投資組合的收益為：

$$\begin{aligned}R_p &= w_0 \mu_f + \sum_{i=1}^N w_i R_i \\ &= w_0 \mu_f + \sum_{j=1}^N w_j \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j} R_i \\ &= (1-\theta) \mu_f + \theta \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i R_i\end{aligned}$$

此處有：

$$\theta = \sum_{j=1}^N w_j \quad \text{and} \quad \tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j}, j = 1, 2, \dots, N.$$

- 注意到：

$$\sum_{i=1}^N \tilde{w}_i = 1 \quad \text{and} \quad \text{Var}(R_p) = \theta^2 \tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \tilde{\mathbf{w}}$$

- 假設我們希望得到平均報酬率為  $\mu_p$  的效率投資組合。也就是說，我們希望找到能滿足下列條件的  $\tilde{\mathbf{w}}^*$ ：

$$\min \frac{1}{2} \theta^2 \tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \tilde{\mathbf{w}}$$

受約束於：

$$\sum_{i=1}^N \tilde{w}_i = 1 \quad \text{and} \quad (1-\theta) \mu_f + \theta \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i \mu_i = \mu_p$$

- 我們會展示：

$$\tilde{\mathbf{w}}^* = \frac{\Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mu_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mu_f \mathbf{1})}$$

這就是我們所稱的「切點投資組合 (Tangency Portfolio)」。

- 例子: 假設  $N = 2$ , 則有

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

以及:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12} \sigma_{21}} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

令  $V_1 = \mu_1 - \mu_f$ ,  $V_2 = \mu_2 - \mu_f$ . 則有:

$$\Omega^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mu_f \mathbf{1}) = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12} \sigma_{21}} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 V_1 - \sigma_{12} V_2 \\ -\sigma_{21} V_1 + \sigma_2^2 V_2 \end{pmatrix}$$

以及:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T \Omega^{-1}((\boldsymbol{\mu} - \mu_f \mathbf{1})) &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12} \sigma_{21}} \mathbf{1}^T \begin{pmatrix} \sigma_2^2 V_1 - \sigma_{12} V_2 \\ -\sigma_{21} V_1 + \sigma_2^2 V_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12} \sigma_{21}} (\sigma_1^2 V_2 + \sigma_2^2 V_1 - \sigma_{12} (V_1 + V_2)) \end{aligned}$$

這給出了:

$$\tilde{w}_1^* = \frac{\sigma_2^2 V_1 - \sigma_{12} V_2}{\sigma_1^2 V_2 + \sigma_2^2 V_1 - \sigma_{12} (V_1 + V_2)}$$

以及:

$$\tilde{w}_2^* = 1 - \tilde{w}_1^*$$

這就是我們先前所稱的  $w_T$  與  $1 - w_T$ .

證明如下: 對應於此最適化問題的拉格朗日函數為:

$$L(\tilde{\mathbf{w}}, \theta, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \theta^2 \tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{w}} + \lambda_1 (1 - \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{1}) + \lambda_2 (\mu_p - (1 - \theta) \mu_f - \theta \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\mu})$$

對  $\theta, \tilde{\mathbf{w}}, \lambda_1$  及  $\lambda_2$  分別取偏導後, 可得:

$$\begin{cases} \theta \tilde{\mathbf{w}}^T \Omega \tilde{\mathbf{w}} - \lambda_2 (-\mu_f + \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\mu}) = 0 \\ \theta^2 \Omega \tilde{\mathbf{w}} - \lambda_1 \theta \boldsymbol{\mu} - \lambda_2 \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ 1 - \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{1} = 0 \\ \mu_p - (1 - \theta) \mu_f - \theta \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\mu} = 0 \end{cases}$$

第二個等式有:

$$\tilde{w} = \frac{1}{\theta^2} \Omega^{-1} (\lambda_1 \theta \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \mathbf{1})$$

現在將第二個方程式乘以  $\tilde{w}^T$ , 第一個方程式乘以  $\theta$ , 然後取其差, 可得:

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \theta$$

這給出了:

$$\tilde{w} = \frac{\lambda_1}{\theta} \Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_f \mathbf{1})$$

利用  $\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{1} = 1$  這一事實, 可得:

$$\tilde{w} = \frac{\Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_f \mathbf{1})}$$

這就是所求的結果. 其解為:

$$\tilde{w}^* = \frac{\Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_f \mathbf{1})}$$

這個投資組合即是我們所稱的「切點投資組合 (Tangency Portfolio)」或「市場投資組合 (Market Portfolio)」

- 切點投資組合包含所有資產. 這是合理的, 因為若資產  $i$  未包含於此投資組合中, 則無人會購買它, 該資產將逐漸凋零並最終退出市場.
- 若所有投資者都購買相同的風險資產組合, 則該投資組合中的權重必須與市場資本權重相符, 也就是每個資產的總市值占整體市場總市值的比例. 即:

$$\tilde{w}_i^* = \frac{V_i}{V}$$

對所有的  $i$ , 其中  $V_i$  與  $V$  的定義同前.