Diferença entre Templates de Autômatos Celulares Unidimensionais Binários

Zorandir Soares Jr.
zorandir@gmail.com

Universidade Presbiteriana Mackenzie
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

16 de agosto de 2016

Sumário

Objetivos

- Apresentar a operação de diferença entre templates
- Apresentar a operação geradora de templates de exceção
- Apresentar exemplos da utilização dos templates no problema de paridade

Autômatos Celulares

Figura 1 : Tapetes expostos em uma exposição de arte realizada na "Maison Salvan", em Carjac, França, em junho de 2008. Eles foram criados com o simulador FiatLux CA.

Famílias de autômatos celulares

Uma família (ou espaço) de autômatos celulares é definida pelo raio r e pelo número de estados k.

O tamanho de uma família é definido pela expressão abaixo:

$$k^{k^{2r+1}} \tag{1}$$

Propriedades Estáticas

- Confinamento
- Simetria Interna Máxima
- Simetria Interna Arbitrária
- Totalidade e Semi-totalidade
- Conservabilidade da soma de estados
- Conservabilidade da soma modular de estados

Templates

Template é uma generalização de tabelas de transições de ACs.

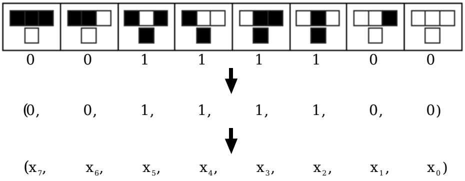


Figura 2 : Exemplo de tabelas de transições

Expansão

Expansão é o processo no qual se obtêm todas as tabelas de transição R_k associadas a um template T.

$$E(T) = R_k \tag{2}$$

Exemplo - Expansão

Tabela 1 : Processo de expansão do template $(1, 1, 1, 1, 1, x_0 + x_1, x_1, x_0)$

i	x_1	x_0	tabela k-ária resultante
0	0	0	(1,1,1,1,1,0,0,0)
1	0	1	(1,1,1,1,1,1,0,1)
2	1	0	(1,1,1,1,1,1,1,0)
3	1	1	(1,1,1,1,1,2,1,1)

Intersecção

$$I(T_1, T_2) = T_3 \Leftrightarrow E(T_3) = E(T_1) \cap E(T_2) \quad (3)$$

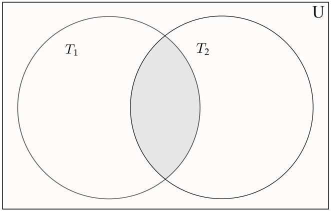


Figura 3 : Os círculos T_1 e T_2 são templates que representam dois conjuntos de regras. Em cinza, T_3 é o template que representa o conjunto de regras de intersecção entre T_1 e T_2.

Geradoras de Templates e Número de Estados

Tabela 2 : Compatibilidade entre algoritmos geradores de templates e número de estados

	Número de Estados	
Algoritmos Geradores de Templates	$k = 2$	$k>2$
Totalidade e Semi-Totalidade	•	•
Confinamento	•	•
Color Blind	•	•[1]
Simetria Máxima	•	•
Simetria Arbitrária	•	
Conservabilidade da soma de estados	•	•
Conservabilidade da soma modular de estados	•[1]	

[1] Template Modular

Geradoras de Templates e Pós-processamento

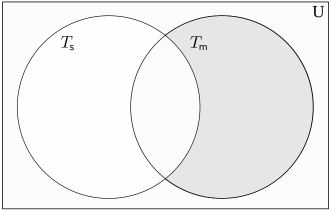
Tabela 3 : Pós-processamento necessário por templates

Template	Pós-processamento
Template de regras confinadas	Filtrar regras com restrições inválidas
Template de conservabilidade de estados	Filtrar regras inválidas
Template de conservabilidade de paridade	Aplicar $mod\ 2$ e filtrar regras inválidas
Template de totalidade e semi-totalidade	Nenhum pós-processamento necessário
Templates de simetria	Nenhum pós-processamento necessário

Diferença entre Templates

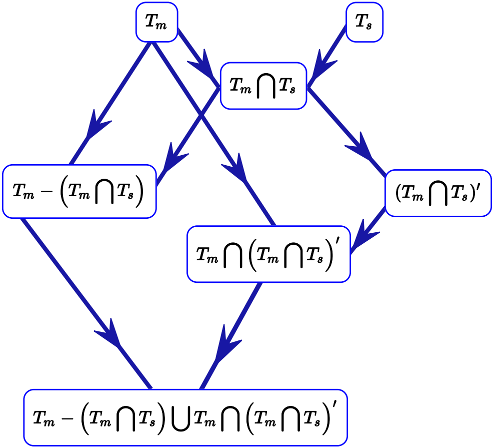
- Diferença entre Templates
- Templates de exceção

Operação de Diferença entre Templates Binários

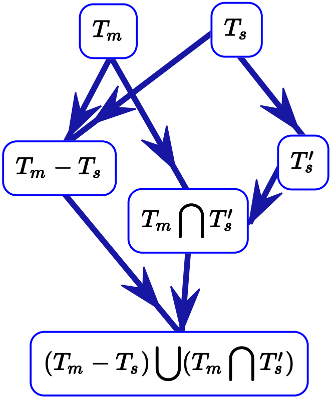


$$\begin{aligned} D_i(T_m, T_s) = C_{di} \Leftrightarrow E(C_{di}) &= E(T_m) \setminus E(T_i) \\ T_i &= I(T_m, T_s) \\ C_{di} &= \{T_1, T_2, \ldots, T_n\} \end{aligned} \tag{4}$$

Operação de Diferença entre Templates Binários



Operação de Diferença entre Templates Binários



Exemplo - Operação de Diferença entre Templates

Considere:

$$T_m = (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0)$$
$$T_s = (x_7, x_6, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, 0)$$

$$\begin{cases} x_7 & = & x_7 \\ x_6 & = & 0 \\ x_5 & = & x_3 + x_1 \\ x_4 & = & 1 - x_1 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_1 & = & x_1 \\ x_1 & = & x_1 \\ x_0 & = & x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Exemplo - Operação de Diferença entre Templates

Considere:

$$\begin{aligned} T_m &= (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0) \\ T_s &= (x_7, x_6, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_7 & = & x_7 & \wedge \\ x_6 & = & 0 & \wedge \\ x_5 & = & x_3 + x_1 & \wedge \\ x_4 & = & 1 - x_1 & \wedge \\ x_3 & = & x_3 & \wedge \\ x_1 & = & x_1 & \wedge \\ x_1 & = & x_1 & \wedge \\ x_0 & = & x_0 & \end{array} \tag{6}$$

Exemplo - Operação de Diferença entre Templates

Considere:

$$T_m = (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0)$$
$$T_s = (x_7, x_6, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, 0)$$

$$\begin{aligned} x_6 &= 0 \quad \wedge \\ x_5 &= x_3 + x_1 \quad \wedge \\ x_4 &= 1 - x_1 \end{aligned} \tag{7}$$

Exemplo - Operação de Diferença entre Templates

Considere:

$$T_m = (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0)$$
$$T_s = (x_7, x_6, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, 0)$$

$$\begin{aligned} x_6 &= 1 - 0 \quad \vee \\ x_5 &= 1 - (x_3 + x_1) \quad \vee \\ x_4 &= 1 - (1 - x_1) \end{aligned} \tag{8}$$

Exemplo - Operação de Diferença entre Templates

Considere:

$$T_m = (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0)$$
$$T_s = (x_7, 0, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, x_0)$$

$$S = \{\{x_6 \to 1\}, \{x_4 \to x_1\}, \{x_5 \to 1 - x_1 - x_3\}\} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} C_{d1} = \{ \\ (x_7, 1, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0), \\ (x_7, x_6, x_5, x_1, x_3, x_1, x_1, x_0), \\ (x_7, x_6, 1 - x_1 - x_3, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0)\} \end{aligned} \tag{10}$$

Templates de exceção

$$
\begin{aligned}
X(T_o) &= C_e \\
C_e &= \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Exemplo - Templates de exceção

Considere:

$$T_s = (x_7, 0, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, x_0)$$

O primeiro passo do algoritmo é encontrar um conjunto com as posições que não apresentem apenas constantes ou variáveis livres, obtendo-se assim $\{\{x_3 + x_1\}, \{1 - x_1\}\}$.

Templates de exceção

Considere:

$$T_s = (x_7, 0, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, x_0)$$

Tabela 4 : Expansão do campo $x_3 + x_1$.

x_3	x_1	Expansão do campo
0	0	$x_3 + x_1 = 0$
0	1	$x_3 + x_1 = 1$
1	0	$x_3 + x_1 = 1$
1	1	$x_3 + x_1 = 2$

Tabela 5 : Expansão do campo 1 - x_1.

x_1	Expansão do campo
0	1 - $x_1 = 1$
1	1 - $x_1 = 0$

Templates de exceção

Para finalizar a operação, o algoritmo seleciona as substituições que geram valores inválidos, e aplicam ela ao template base, gerando assim o conjunto de templates C_e, mostrado na Eq. 26.

$$C_e = \{(x_7, x_6, x_5, x_4, 1, x_2, 1, x_0)\} \tag{12}$$

Finalizando a Operação de diferença

$$C_e = \{(x_7, x_6, x_5, x_4, 1, x_2, 1, x_0)\}$$

$\mathsf{C}_{d2} = C_e \bigcap T_m$
$\mathsf{C}_{di} = C_{d1} \bigcup C_{d2}$

$$\begin{aligned} C_{d1} = \{ \\ (x_7, 1, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0), \\ (x_7, x_6, x_5, x_1, x_3, x_1, x_1, x_0), \\ (x_7, x_6, 1 - x_1 - x_3, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0), \\ (x_7, x_6, x_5, x_4, 1, 1, 1, x_0)\} \end{aligned} \tag{13}$$

Discussões e Testes

- Número de templates gerados
- Aplicação no Problema de Paridade
- Metodologia de testes

Função de Teste

- A função recebe dois templates como parâmetro, um template minuendo e um subtraendo
- Expande as dois templates obtendo dois conjuntos de regras
- Realiza a diferença entre os dois conjuntos de regras
- Verifica se as regras obtidas são equivalentes a expansão dos templates obtidos pela operação de diferença

Testes

Tabela 6 : Propriedades estáticas utilizadas para o teste da operação de diferença em cada raio

Template subtraendo (T_s)	Template minuendo (T_m) totalidade	semi-totalidade	conservabilidade de estados	invariância à troca de cor	confinamento
totalidade	Raio 1, 2 e 3	Raio 1, 2 e 3	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1
semi-totalidade	Raio 1, 2 e 3	Raio 1, 2 e 3	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1
conservabilidade de estados	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1
invariância à troca de cor	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1 e 2	Raio 1
confinamento	Raio 1	Raio 1	Raio 1	Raio 1	Raio 1

Exemplo: template de semi-totalidade - template de totalidade

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{x}_{31}, x_{15}, x_{15}, x_7, x_{27}, x_{11}, x_{11}, x_3, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_7, x_5, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0) - \\
&\qquad (\mathsf{x}_{31}, x_{15}, x_{15}, x_7, x_{27}, x_{11}, x_{11}, x_3, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_7, x_5, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0) = \\
&\{ (\mathsf{x}_{31}, x_{15}, x_{15}, x_7, x_{27}, 1-x_7, 1-x_7, x_3, x_{15}, x_7, x_7, x_5, 1-x_7, x_3, x_3, x_1, x_{15}, x_7, x_7, x_5, 1-x_7, x_3, x_3, x_1, x_7, x_5, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0), \\
&\qquad (\mathsf{x}_{31}, x_{15}, x_{15}, x_7, 1-x_{15}, x_{11}, x_{11}, x_3, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_7, x_5, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0), \\
&\qquad (\mathsf{x}_{31}, x_{15}, x_{15}, x_7, x_{27}, x_{11}, x_{11}, x_3, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_{15}, x_7, x_7, x_5, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_7, x_5, x_5, 1-x_1, x_3, x_1, x_1, x_0), \\
&\qquad (\mathsf{x}_{31}, x_{15}, x_{15}, x_7, x_{27}, x_{11}, x_{11}, x_3, x_{15}, x_7, x_7, 1-x_3, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_{15}, x_7, x_7, 1-x_3, x_{11}, x_3, x_3, x_1, x_7, 1-x_3, 1-x_3, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0) \}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Problema de Paridade

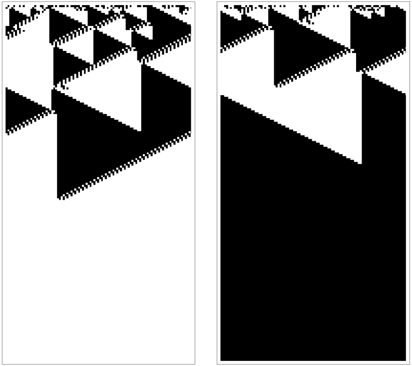


Figura 4 : Exemplo de regra de paridade. A imagem a esquerda contém em sua entrada um número par de 1s. A da direita contém um número ímpar.

Problema de Paridade

$$T_{paridade} = (T_{conservaparidade} \cap T_{confinado}) - T_{conservaestados} \quad (15)$$

A regra que solucione o problema de paridade:

- deve ser **confinada**
- deve **conservar a paridade**
- não deve **number conserving**

Problema de Paridade

Tamanho do espaço:

$$2^{2^{2\times 3+1}} = 3,4 \times 10^{38} \tag{16}$$

Número máximo de regras conservativas de paridade:

$$2^{63} \approx 9.2 \times 10^{18} \tag{17}$$

Problema de Paridade - Pós-processamento

Template Core:

$$\{1, 1 + x2 - x3, 1 - x2, 1 - x1 - x2, x3, x2, x1, 0\} \tag{18}$$

Regra *number-conservative*	Regra conservativa de paridade
FilterOutOfRange	TemplateMod 2

Agradecimentos

À Capes, CNPq, MackPesquisa e ao Laboratório de Computação Natural (LCoN).