

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

Zorandir Soares Junior

Aperfeiçoamento da Representação de Autômatos Celulares Por
Meio de *Templates*

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

São Paulo
2016

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

Zorandir Soares Junior

Aperfeiçoamento da Representação de Autômatos Celulares Por
Meio de *Templates*

Texto de dissertação apresentado ao
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Elétrica e Computação da Universidade
Presbiteriana Mackenzie como requisito das
exigências para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica e Computação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

São Paulo
2016

AGRADECIMENTOS

Aqui, se tudo der certo, agradecerei um monte de gente.

RESUMO

Templates são representações formais para conjuntos de autômatos celulares (ACs) feitas por meio da generalização das tabelas de transição clássicas. Já existem algoritmos que geram templates para propriedades estáticas e algoritmos que realizam operações como intersecção entre templates e expansão de template. Este projeto de pesquisa apresenta a operação de templates de exceção, assim como introduz a operação de diferença entre templates e o funcionamento do algoritmo dessa operação implementada na biblioteca *CATemplates*. Também são apresentados exemplos das possibilidades de uso de templates de ACs no problema de paridade, com o apoio das operações de diferença entre templates e das operações geradoras de templates de ACs conservativos de paridade e ACs conservativos de estado.

Palavras-chave: *Autômatos celulares, templates, diferença entre templates, conservabilidade, problema de paridade.*

ABSTRACT

Templates are formal representation for cellular automata sets (CAs) made through the generalization of the classical transitions table. There are algorithms that generate templates for static properties and algorithms that perform operations such as intersection between templates and template expansion. It is present in this research project exception template operating, as well it is introduced the operating of difference between templates and explained the functioning of the algorithm of this operation implemented in the *CATemplates* package. Also show examples of possibilities of using templates in the parity problem, with the support of difference between templates operating and generating operations of CAs conservative parity and ACs state conservative.

Keywords: *Cellular automata, templates, difference between templates, conservation, parity problem.*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Organização do Documento	2
2	AUTÔMATOS CELULARES	3
3	TEMPLATES	8
3.1	Expansão de Templates	13
3.2	Intersecção de Templates	15
4	REPRESENTAÇÃO DE PROPRIEDADES ESTÁTICAS POR MEIO DE TEMPLATES	18
4.1	Conservabilidade de Estados e Conservabilidade de Paridade	18
4.2	Confinamento	21
4.3	Simetria Interna	22
4.4	Totalidade e Semi-totalidade	27
5	RESULTADOS	30
5.1	Templates de Exceção	30
5.2	Diferença entre Templates binários	31
5.3	Aplicação da diferença entre Templates no problema de pa- ridade	34
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
7	PLANO DE TRABALHO	38
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	40

1 INTRODUÇÃO

Autômatos celulares (ACs) são sistemas dinâmicos discretos em tempo e espaço cuja dinâmica tem sido extensivamente estudada e aplicada em diversas áreas. ACs têm a capacidade de, por meio de regras de comportamentos locais simples, gerar comportamentos globais complexos. ACs são também considerados uma idealização discreta de equações diferenciais parciais, utilizadas para descrever sistemas naturais (WOLFRAM, 1994).

Existem diversas famílias de autômatos celulares estudadas. Devido ao rápido crescimento das famílias de ACs, de acordo com a variação dos parâmetros de raio e estado, uma das famílias mais estudadas é a do espaço elementar por possuir apenas 256 regras.

Há casos em que os estudos de ACs concentram-se em algum comportamento obtido através de restrições aplicadas às tabelas de transição. Os ACs confinados, criados por Theyssier (2004), são um exemplo do uso da técnica. Esses comportamentos e propriedades obtidos através de restrições aplicadas à tabela de transições podem ser denominados como propriedades estáticas.

Propriedades estáticas permitem prever determinados comportamentos de um AC sem consultar sua evolução espaço-temporal, ou seja, dispensando a simulação do sistema. Propriedades estáticas também podem ser descritas como indicadores de comportamento de uma determinada família de ACs. Um exemplo de propriedade estática, descrita posteriormente em mais detalhes, é a conservabilidade de paridade. A conservabilidade de paridade define um tipo de AC binário que mantém o número de estados com valor 1 sempre com a mesma paridade.

Existem algumas formas de representar propriedades estáticas, e essa representação é crucial pois culmina na eliminação da necessidade de se buscar uma propriedade analisando todo o espaço de um AC. Li e Packard (1990) introduziram variáveis na representação de conjuntos de tabelas de transição. Por meio de grafos de De Bruijn (BRUIJN, 1946), Betel, De Oliveira e Flocchini (2013) representam um conjunto de ACs na busca pela solução do problema de paridade. Mais recentemente foi estabelecida uma representação formal para conjuntos de ACs denominada *Templates* (DE OLIVEIRA; VERARDO, 2014a; DE OLIVEIRA; VERARDO, 2014b). Para se trabalhar com *Templates* foi criada a biblioteca *CATemplates* (VERARDO; DE OLIVEIRA, 2015), desenvolvida na linguagem do software *Wolfram Mathematica* (WOLFRAM RESEARCH, 2015).

Templates têm a capacidade de representar conjuntos de ACs sem a necessidade de

se operar uma busca em todo espaço original do AC. Essa capacidade dos templates é o principal motivador deste trabalho, visto que essa habilidade é muito importante para a resolução de diversos problemas que buscam por regras com algum comportamento específico.

1.1 Objetivos

Este projeto de pesquisa tem como objetivo principal o aperfeiçoar a representação de autômatos celulares por meio de templates apresentando a operação de diferença entre templates e a operação geradora de templates de exceção. Ademais esse projeto propõe-se a apresentar exemplos da utilidade de templates em problemas típicos de autômatos celulares, como o problema da paridade e o problema da densidade.

1.2 Organização do Documento

Este documento está organizado da seguinte forma: na Seção 2 são detalhados os ACs, assim como alguma de suas propriedades. A Seção 3 apresenta em mais detalhes o funcionamento dos templates, assim como descreve os funcionamentos de duas de suas principais operações. A Seção 4 apresenta algumas propriedades estáticas e explica o funcionamento de suas respectivas operações de geração de template. A Seção 5 apresenta os resultados desse projeto de pesquisa. A Seção 6 apresenta as considerações finais do presente trabalho. Por fim, a Seção 7 apresenta o cronograma do projeto.

2 AUTÔMATOS CELULARES

Autômatos celulares são idealizações matemáticas simples dos sistemas naturais. Eles consistem em um reticulado de campos discretos usualmente idênticos, onde cada campo pode assumir um conjunto finito de, geralmente, valores inteiros. Os valores dos campos evoluem em tempo discreto de acordo com regras usualmente determinísticas que especificam o valor de cada campo de acordo com os campos das vizinhanças (WOLFRAM, 1994).

Autômatos celulares podem operar com reticulados em qualquer número de dimensões. Os primeiros ACs eram bidimensionais e foram criados por Neumann e Burks (1966) para serem usados como um modelo formal de auto reprodução de sistemas biológicos. Outro conhecido AC bidimensional é o “Jogo da Vida” (ou “Game of Life”), criado por John Conway, que fez sua primeira aparição em uma coluna de jogos matemáticos (GARDNER, 1970). Entre os AC unidimensionais, os mais conhecidos são os do espaço elementar, que foram sistematicamente estudados por Wolfram (1983).

Independente da dimensionalidade do reticulado, é necessário definir como o AC se comportará nas bordas. Um tratamento típico é a aplicação da condição de contorno periódica nas extremidades. Esse tratamento considera reticulados unidimensionais como um anel, como pode ser visualizado na Figura 1, e considera reticulados bidimensionais como um toro (ou toroide), que pode ser visualizado na Figura 2.

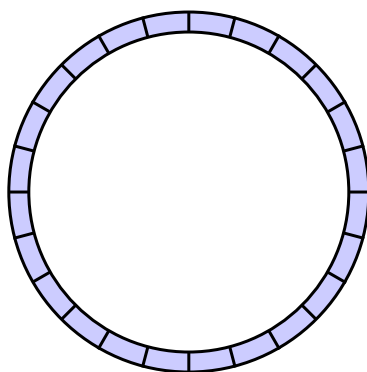


Figura 1: Condição de contorno periódica em um reticulado unidimensional formando um anel.

As células de um autômato celular podem apresentar k estados. O valor desses estados é representado ou por cores ou por valores inteiros no intervalo $[0, k - 1]$. O estado de uma célula pode ser modificado pelas funções locais, que são o conjunto de regras que determinam o novo valor de uma célula baseado em seu estado atual e nos estados

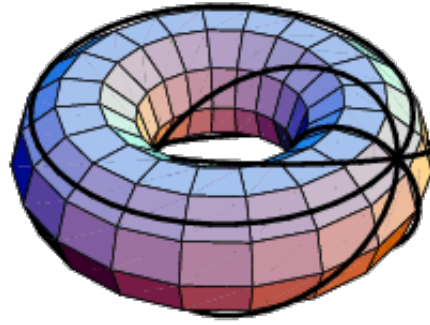


Figura 2: Condição de contorno periódica em um reticulado bidimensional formando um toroide.

das células adjacentes. Para que as funções locais atualizem os valores de uma célula, é necessário que um raio r seja definido. Esse raio r representa o número de células adjacentes que serão analisadas em cada direção pelas funções locais.

Além do raio, é preciso determinar o formato de vizinhança que será utilizada nos parâmetros da função local. Duas vizinhanças bem comuns em ACs bidimensionais são as vizinhanças de von Neumann (WEISSTEIN, 2015c) e Moore (WEISSTEIN, 2015b). Na Figura 3 e na Figura 4 são apresentadas, para raios de 0 a 3, as vizinhanças de von Neumann e Moore, respectivamente. No caso dos ACs unidimensionais, as vizinhanças são definidas apenas pelo raio r e ele descreve quantas células a esquerda e direita da célula atual serão consideradas pela função local.

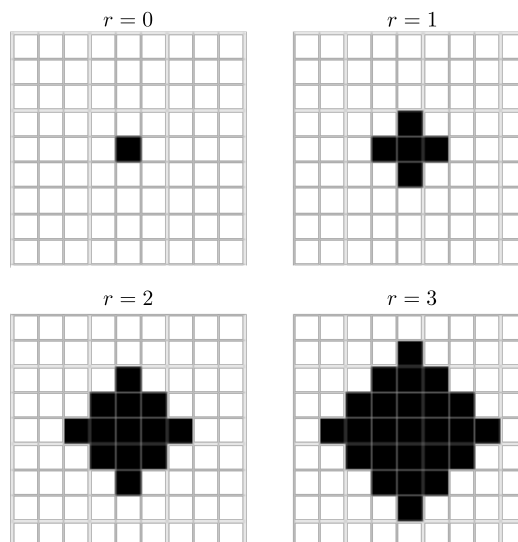


Figura 3: Vizinhança de von Neumann com raio r igual a 0, 1, 2 e 3. Essa foi a vizinhança utilizada nos primeiros trabalhos de von Neumann (WEISSTEIN, 2015c).

Uma família de autômatos celulares é definida pelo raio, número de estados, tipo de vizinhança e a dimensionalidade das configurações. Autômatos celulares unidimensionais

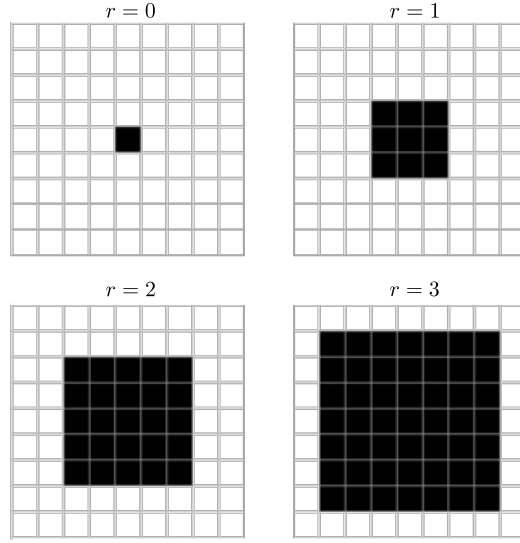


Figura 4: Vizinhança de Moore com raio r igual a 0, 1, 2 e 3. Essa foi a vizinhança utilizada no jogo da vida (WEISSTEIN, 2015b).

de raio $r = 1$ e $k = 2$ são conhecidos como a família dos autômatos celulares elementares.

Todo AC é regido por um conjunto de regras locais que determinam como ficarão as configurações no próximo passo de tempo de acordo com as configurações de vizinhança recebidas. Existem diversas maneiras de representar essas regras locais, a mais comum são as tabelas de transições. A tabela de transições é uma n -upla em que os elementos são todos os possíveis estados de vizinhanças de uma célula acrescentados de um estado que representa a transição que ocorrerá. A Eq. (1) representa a n -upla da regra 30.

$$\begin{aligned} &(((1, 1, 1), 0), ((1, 1, 0), 0), ((1, 0, 1), 0), ((1, 0, 0), 1), \\ &((0, 1, 1), 1), ((0, 1, 0), 1), ((0, 0, 1), 1), ((0, 0, 0), 0)) \end{aligned} \quad (1)$$

Uma outra forma de representar uma tabela de transições é a forma icônica. Na forma icônica o bit 1 é representado por um ícone na cor preta, e o bit 0 por um ícone na cor branca. Cada uma das transições de estados é representada por um conjunto de ícones que representa a vizinhança na parte superior, e um ícone para representar o estado resultante após a transição na parte inferior. A Figura 5 mostra a representação icônica da regra 30.

Além dessas formas de representação, ainda existe a forma k -ária em que, sabendo-se o valor atribuído para k e r , elimina-se a representação das vizinhanças e deixa-se apenas as representações resultantes. Na Eq. (2) é possível ver a representação k -ária da regra 30. O número da regra é obtido ao se converter a representação k -ária para decimal. Esse número é um identificador único em família de autômatos celulares, ou seja, sempre



Figura 5: Representação icônica da regra 30.

representa apenas uma tabela de transições de estado.

$$(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \quad (2)$$

O número de regras de um espaço é dado pela Eq. (3):

$$k^{k^{2r+1}} \quad (3)$$

No espaço elementar há $2^{2^3} = 256$ regras. Aumentando o raio $r = 2$, obtemos uma família de $2^{2^5} = 4.294.967.296$ regras. Para $k = 3$ e $r = 1$, obtém-se um espaço de ACs com $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ regras. Logo, é fácil perceber que qualquer modificação nas variáveis k e r geram famílias com número de regras muito grande. Famílias grandes de ACs representam um desafio na hora de encontrar ACs com propriedades específicas, já que procurar regras através de força bruta em um espaço muito grande se torna uma tarefa extremamente improdutiva.

Para contornar esse problema, é comum utilizar algumas propriedades estáticas para restringir as regras do espaço no qual serão feitas as buscas. Alguns exemplos de propriedades estáticas que podem auxiliar nesse “filtro” são o confinamento, conservabilidade de estados e conservabilidade de paridade. Todas essas propriedades são detalhadas na Seção 4.

O problema da paridade é um dos problemas que envolve fazer a ligação entre o comportamento local e o comportamento global de um autômato celular. Para o problema de paridade, nesse projeto, considera-se um AC binário, unidimensional e com condição de contorno periódica. Se uma configuração inicial contiver um número ímpar de estados com valor 1, o AC deve convergir para uma configuração global onde toda as células estejam preenchidas com 1, caso contrário, ele deve convergir para todos os estados com o valor 0. Há um problema nessa definição para reticulado de tamanho par, pois uma configuração inicial com todos os células apresentando o estado 1 teria que convergir para uma configuração com todos os estados apresentando o valor 0, e o contrario também ocorreria. Desta forma o AC nunca se estabilizaria, como pede o problema. Devido

essa questão, pode-se dizer que as regras que solucionam o problema de paridade em ACs são *perfeitas* se eles resolverem o problema de paridade em qualquer configuração inicial arbitrária para ACs de tamanho ímpar (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013). Ainda em relação ao problema de paridade, Betel, De Oliveira e Flocchini (2013) descrevem duas propriedades básicas: se f é a regra local que resolve o problema de paridade, então $f(0, \dots, 0) = 0$ e $f(1, \dots, 1) = 1$. A segunda propriedade define que para uma regra preservar a configuração de paridade ela deve apresentar número par de transições ativas. Em outras palavras, toda aplicação da regra deve levar a uma nova configuração com a mesma paridade.

Procurar uma regra que resolva o problema de paridade em autômatos celulares unidimensionais de raio 3, por exemplo, por meio de buscas por força bruta acarretaria em testar 2^{128} regras. Uma maneira de facilitar essa busca é restringir as regras através propriedades estáticas, mas é necessário uma forma de representar essas propriedades e até mesmo aplicar operações como intersecção e diferença entre elas. Nesse ponto que os *templates* apresentam-se de uma forma interessante e útil para representar conjuntos de regras com determinada propriedade. Templates de ACs são uma generalização das tabelas de transições que permitem representar espaços inteiros de ACs (VERARDO, 2014).

3 TEMPLATES

Templates de autômatos celulares são uma generalização de tabelas de transições capaz de representar famílias de autômatos celulares. Os templates foram criados por De Oliveira e Verardo (2014a) e implementada como um algoritmo na linguagem do software *Wolfram Mathematica* (WOLFRAM RESEARCH, 2015), atualmente disponíveis na biblioteca *open source CATemplates* (VERARDO; DE OLIVEIRA, 2015) no GitHub.

Formalmente, um *template* é uma n -upla formada por k^{2r+1} itens, e cada item i representa uma função $g_i(x_0, x_1, \dots, x_{k^{2r+1}-1})$. As variáveis x_i podem assumir qualquer estado entre 0 e $k - 1$, logo no caso binário x_i pode assumir os valores 0 e 1. É possível limitar os valores possíveis de x_i através da notação $x_i \in C$, onde C é um conjunto representando os possíveis valores de x_i . Entretanto vale frisar que no caso binário não tem lógica implementar uma notação como $x_i \in 1$ ou $x_i \in 0$ pois os templates também aceitam constante, sendo essas notações equivalente à apenas as constantes 1 e 0, respectivamente.

Exemplificando, dado um template $T_1 = (1, 1, 1, 1, 1 - x_1, x_2, x_1, 0)$, ele representará todas as regras que tenham na posição 0 (sempre da direita pra esquerda) o estado 0, nas posições 4, 5, 6 e 7 o estado 1, nas posições 1 e 2 qualquer estado no intervalo $[0, k - 1]$ e na posição 3 o estado complementar ao valor da posição 1. Perceba que o tamanho da n -tupla é determinado pela função k^{2r+1} , logo no template T_1 os únicos valores inteiros possíveis para k e r são 2 e 1 respectivamente. Portanto T_1 representará um subespaço dos ACs elementares.

Deste modo o template T_1 representa o conjunto de autômatos celulares elementares $\{(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)\}$, ou em sua forma decimal $\{248, 242, 252, 246\}$.

Cada template tem um número de substituições máximo igual a k^m , sendo o m o número de variáveis livres. O maior template possível de uma família de ACs é o *template base*, em que todas as variáveis são livres. O menor é o *template constante*, em que não há variáveis livres, logo representa apenas uma regra. As 8-uplas representada pela Eq. (4) representa um template constante que pode ser associado apenas a regra 30.

$$(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \tag{4}$$

Já a 8-uplas, apresentada na Eq. (5), representa um template base que está associado

a todas as 256 regras do espaço elementar já que, para $m = 8$, temos $2^m = 256$.

$$(x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) \quad (5)$$

É importante enfatizar que nem sempre o número de substituições é igual a k^m . Isto ocorre pois algumas substituições podem originar tabelas de transições inválidas. O template $(1, 1, 1, 1, 1, x_0 + x_1, x_1, x_0)$, por exemplo, não pode apresentar as substituições $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$ ao mesmo tempo, pois isso faz com que $x_0 + x_1 \notin [0, k - 1]$, invalidando assim essa substituição para $k = 2$.

A representação de famílias de autômatos celulares através de templates, possibilita a utilização de templates para problemas já bem conhecidos da área de ACs. Um exemplo de problema que pode se beneficiar dos templates é o problema da paridade.

A Figura 6 ilustra o desenvolvimento espaço-temporal da regra BFO (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013) que resolve o problema de paridade para o raio 4. Nessa imagem o desenvolvimento temporal à esquerda contém, em sua configuração inicial, um número par de estados igual a 1, já na evolução temporal ilustrada à direita há um número ímpar de estados igual a 1.

O estudo do problema da paridade é interessante pois ajuda a compreender o impacto das interações locais nas soluções globais. Especificamente, entender a influência que o tamanho da vizinhança em autômatos celulares apresenta na computabilidade pode apresentar consequências úteis tanto para ACs como para a compreensão de sistemas emergentes complexos em geral.

Estudos feitos sobre o problema de paridade já levaram ao conhecimento de que o problema não tem solução perfeita para ACs elementares e de raio 2, todavia já foi descoberta uma regra perfeita que soluciona o problema de paridade para raio 4. Em relação aos ACs de raio 3, ainda não foi encontrada solução perfeita e há evidências empíricas desfavoráveis a uma solução para esse raio (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013).

Betel, De Oliveira e Flocchini (2013), buscando verificar se o problema da paridade em ACs de raio 2 apresentam alguma regra que solucione o problema para qualquer configuração inicial, encontraram de forma analítica como as transações de estado de supostas regras que resolvessem o problema de paridade deveriam ser.

Para representar como as transações de estado deveriam ser, foi utilizado grafos de *De Bruijn*. Grafos de De Bruijn são grafos, descobertos de forma independentes por De Bruijn (1946) e Good (1946), cujos nós são sequências de símbolos de algum alfabeto e cujas

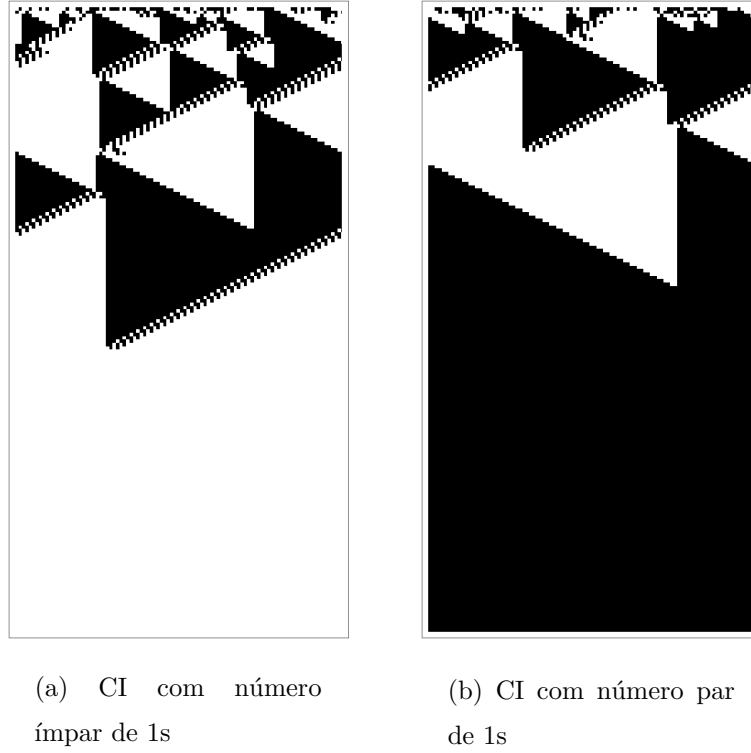


Figura 6: Desenvolvimento espaço-temporal da regra BFO, que resolve o problema de paridade para raio 4. (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013)

arestas indicam as sequências em que se cruzarão (WEISSTEIN, 2015a). Em AC, esse tipo de grafo direcionado representa em cada uma de suas arestas uma vizinhança possível, o valor associado às arestas será o resultado da transição dado a vizinhança representada pela aresta. A Figura 7 ilustra dois grafos de De Bruijn, sendo que o primeiro pode ser utilizado para ilustrar todas as vizinhanças possíveis dos autômatos celulares elementares.

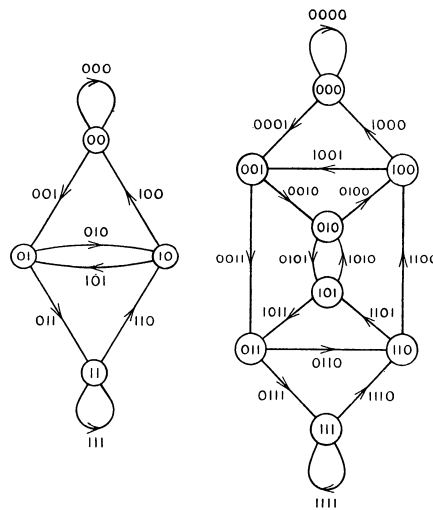


Figura 7: Exemplo de grafo de De Bruijn (GOOD, 1946)

Com isso, utilizando grafos de *De Bruijn* foram definidas quais variáveis deveriam ser estáticas, quais deveriam ser livres e quais deveriam apresentar interdependência. Com essas definições foram definidas duas famílias de ACs. Os grafos ilustrados na Figura 8 e na Figura 9 são os grafos desenvolvidos por Betel, De Oliveira e Flocchini (2013).

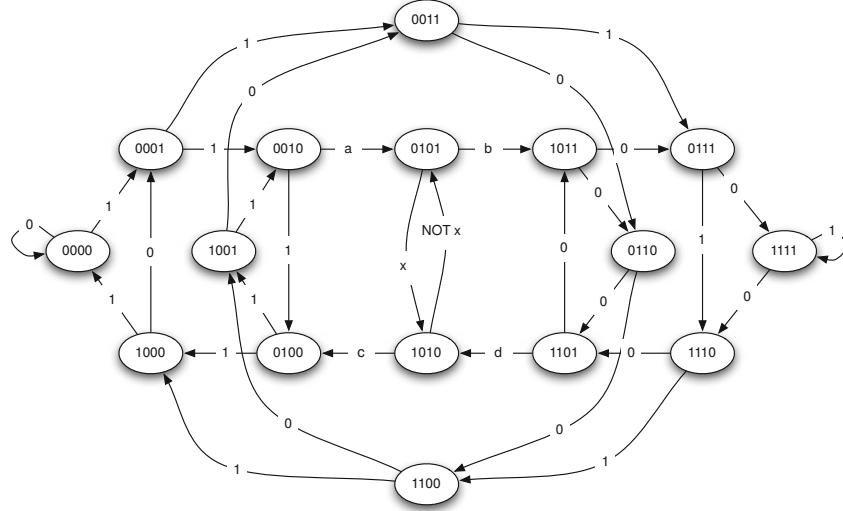


Figura 8: Grafo de De Bruijn representando regras que possivelmente solucionem o problema de paridade. (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013)

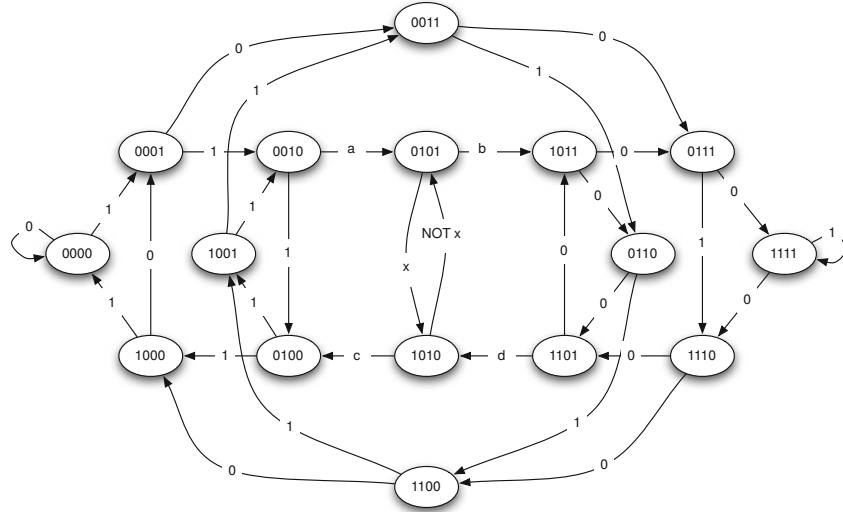


Figura 9: Outro grafo de De Bruijn representando regras que possivelmente solucionem o problema de paridade. (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013)

Ambos os grafos apresentam arestas contendo as variáveis livres a, b, c, d e x e uma interdependência, em que uma transição de estado deve ter o valor oposto à variável x . A única diferença entre os dois grafos está nas arestas contendo variáveis estáticas.

Ao utilizar os grafos de *De Bruijn* fixando algumas transições de estado a família de ACs em que se procurava as regras que solucionavam o problema de paridade foi restringida para apenas 64 regras. Ao se restringir o espaço de busca, antes composto por 2^{32} regras, as regras puderam ser estudadas em mais detalhes até que falhassem. Entretanto, conforme mostrado em (VERARDO, 2014), a representação desse espaço de 64 regras pode ser equivalentemente representado por meio de *templates*. O template da Eq. (6) representa o mesmo espaço que a Figura 8, já o template da Eq. (7) é equivalente a Figura 9. Ambos templates apresentam raio $r = 2$ e apenas dois estados.

$$(0, 1, 1, 1, 1, x_{26}, 0, 1, 1, 1, 1 - x_{10}, x_{20}, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, x_{11}, x_{10}, 0, 0, 1, 0, x_5, 0, 1, 0, 0, 1) \quad (6)$$

$$(0, 1, 1, 0, 1, x_{26}, 1, 0, 1, 1, 1 - x_{10}, x_{20}, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, x_{11}, x_{10}, 0, 0, 1, 0, x_5, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (7)$$

3.1 Expansão de Templates

Expansão é o processo no qual se obtêm todas as tabelas de transição R_k associadas a um template T . A operação de expansão foi apresentada por Verardo (2014) e foi descrita em mais detalhes da seguinte maneira:

$$E(T) = R_k \quad (8)$$

A operação de expansão pode ser dividida em dois passos, em que o primeiro consiste em efetuar todas as i substituições de variáveis, sendo que i pertence ao intervalo discreto $[0, k^m - 1]$. Considere como exemplo o template $T_1 = (1, 1, 1, 1, 1 - x_1, x_2, x_1, 0)$, o primeiro passo do processo de expansão consiste em encontrar as tabelas k -árias resultantes das combinações possíveis das substituições de x_1 e x_2 , conforme pode ser melhor visualizado na Tabela 1.

Tabela 1: Processo de expansão

i	x_2	x_1	tabela k -ária resultante
0	0	0	(1,1,1,1,1,0,0,0)
1	0	1	(1,1,1,1,1,1,0,0)
2	1	0	(1,1,1,1,0,0,1,0)
3	1	1	(1,1,1,1,0,1,1,0)

Fonte: Elaboração Própria.

O segundo passo da operação de expansão é eliminar as tabelas k -ária inválidas. No caso do template T_1 todas as tabelas resultantes eram válidas, mas nem sempre isso ocorre. No template $T_2 = (1, 1, 1, 1, 1, x_0 + x_1, x_1, x_0)$, por exemplo, a substituição $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$ resulta numa tabela k -ária inválida pois posição 2 apresenta um estado com um valor fora do intervalo $[0, k - 1]$, para $k = 2$. A Tabela 2 evidencia melhor essa substituição inválida.

Ainda há outra maneira em que templates resultam em substituições inválidas, sendo uma delas através da utilização da notação restrição por conjuntos. Considere o templates $T_3 = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, x_0 \in \{0, 1\})$ da família de $k = 3$ e $r = 0,5$. A substituição obtida para $i = 2$ seria inválida pois nesse caso $x_0 = 2$ e $2 \notin \{0, 1\}$. A Tabela 3 evidencia melhor esse processo.

Tabela 2: Processo de expansão

i	x_1	x_0	tabela k -ária resultante
0	0	0	(1,1,1,1,1,0,0,0)
1	0	1	(1,1,1,1,1,1,0,1)
2	1	0	(1,1,1,1,1,1,1,0)
3	1	1	(1,1,1,1,1,2,1,1)

Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 3: Processo de expansão

i	x_0	tabela k -ária resultante
0	0	(2,2,2,2,2,2,2,0)
1	1	(2,2,2,2,2,2,2,1)
2	2	(2,2,2,2,2,2,2,2)

Fonte: Elaboração Própria.

A existência de regras inválidas são os responsáveis por templates que representem um conjunto de regras menores que k^m . Essa possibilidade é bastante útil para os templates de regras conservativas e regras confinadas.

O valor de i sempre representa apenas uma substituição possível para as variáveis livres de um templates. Isso ocorre pois i é a representação decimal da conversão k -ária das concatenações dos valores das variáveis livres em ordem decrescente. Exemplificando, considere o templates $T_4 = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, x_1 \in \{0, 1\}, x_0)$ para $k = 3$. O valor de $i = 5$ será convertido pelo processo de expansão obtendo-se assim o seu equivalente na base ternária (1, 2) e então cada um dos dígitos é atribuído a uma variável, resultando assim no conjunto de substituições $x_0 = 2, x_1 = 1$.

A forma com que o valor de i representa apenas uma expansão permite possibilidade de se obter a i -ésima expansão de um template. Essa propriedade é relevante devido ao fato da expansão ser uma operação potencialmente custosa, e a possibilidade de ser realizar a i -ésima expansão de um template facilita e permite o paralelismo.

3.2 Intersecção de Templates

Intersecção é o processo no qual, dado dois templates T_1 e T_2 , se obtêm um template que represente o conjunto R_k . O conjunto R_k representa todas as regras pertencentes aos dois templates recebidos como parâmetro. É necessário que os dois templates recebidos como parâmetro pertençam ao mesmo espaço. A operação de intersecção foi descrita por Verardo (2014) e mostrada em mais detalhes da seguinte maneira:

$$I(T_1, T_2) = T_3 \Leftrightarrow E(T_3) = E(T_1) \cap E(T_2) \quad (9)$$

A operação de intersecção, assim como a de expansão, também é efetuada em duas etapas. Na primeira etapa iguala-se os dois templates e assim se obtêm um sistema de equações. Esse sistema de equações é então passado como argumento para a função Solve, função essa nativa da *Wolfram Language* (WOLFRAM RESEARCH, 2015). A função Solve retorna então os relacionamentos entre as variáveis, que ao serem aplicados aos templates recebidos, retorna dois template equivalente, bastando escolher um que será o template de intersecção. No caso dos templates não apresentarem intersecção, a função Solve não retornará solução.

Para melhor compreensão, considere os templates $T_1 = (x_7, x_3, 1 - x_4, x_4, x_3, x_2, 2, x_0)$ e $T_2 = (x_7, 1, x_5, 0, x_3, x_2, 2, 2)$, ambos com $r = 0,5$ e $k = 3$. Esse templates serão transformados em um sistema de equações como demonstrado na Eq. (10).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_7 & = & x_7 \\ x_3 & = & 1 \\ 1 - x_4 & = & x_5 \\ x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_2 \\ 2 & = & 2 \\ x_0 & = & 2 \end{array} \right. \quad (10)$$

Esse sistema de equações é passado então como argumento para a função Solve, que por sua vez retorna um conjunto solução S , que nesse exemplo é $S = \{x_0 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1 - x_4, x_6 = 0\}$. O conjunto S é aplicado como um conjunto de substituições sobre os dois templates recebidos como parâmetro, que em caso de templates sem restrição de

variáveis sempre retorna o mesmo template. Neste exemplo, após aplicada as substituições do conjunto de soluções S , obtêm-se como resultado o template $T_3 = (x_7, 1, 1, 0, 1, x_2, 2, 2)$.

A segunda etapa do algoritmo apenas é aplicada para templates com alguma restrição de variável. Essa etapa consiste em extrair as expressões que estabelecem as restrições, e através delas obter um segundo sistema de equações. A solução desse sistema ou pode ser vazia, expressando assim que os templates não tem intersecção, ou pode indicar os valores que as variáveis com restrição podem assumir.

Para exemplificar essa segunda etapa, considere os templates $T_{r1} = (x_7 \in \{0, 1, 2\}, x_3, 1 - x_4, x_4, x_3, x_2 \in \{1, 2\}, 2, x_0)$ e $T_{r2} = (x_7 \in \{0, 1\}, 1, x_5, 0, x_3, x_2 \in \{1\}, 2, 2)$. A primeira etapa ocorre normalmente, entretanto, quando as substituições do conjunto S forem aplicadas nos templates recebidos, não será mais obtido templates iguais. Nesse caso o conjunto de templates obtidos será $\{(x_7 \in \{0, 1, 2\}, 1, 1, 0, 1, x_2 \in \{1, 2\}, 2, 2), (x_7 \in \{0, 1\}, 1, 1, 0, 1, x_2 \in \{1\}, 2, 2)\}$. Na sequencia o algoritmo faz a extração das expressões de restrição de variáveis e obtêm o conjunto $\{x_7 \in \{0, 1\}, x_2 \in \{1, 2\}, x_2 \in \{1\}\}$. Esse conjunto é então convertido para o sistema de equações representadas pela Eq. (11).

$$\begin{cases} x_7 = 0 \quad \vee \quad x_7 = 1 \quad \vee \quad x_7 = 2 \\ x_7 = 0 \quad \vee \quad x_7 = 1 \\ x_2 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (11)$$

Esse sistema de equações é então passado como argumento para a função Solve, que retorna seu conjunto solução. Por fim o algoritmo usa o conjunto solução retornado para remover as restrições da variável x_2 , transformando-a no valor 1, e restringi a variável x_7 apenas ao conjunto $\{0, 1\}$. O template de intersecção gerado por todo esse processo é representado pela Eq. (12).

$$T_{r3} = (x_7 \in \{0, 1\}, x_3, 1 - x_4, x_4, x_3, 1, 2, x_0) \quad (12)$$

Vale frisar que o template T_{r2} também poderia ser representado substituindo a variável x_2 e seu conjunto de restrição $\{1\}$ apenas pelo valor constante 1, como mostrado a seguir: $T_{r2} = (x_7 \in \{0, 1\}, 1, x_5, 0, x_3, 1, 2, 2)$. Esse tipo de mudança é sempre preterido pois variáveis a mais acarretam em mais processamento.

No caso binário, ou seja $k = 2$, a notação de restrição nunca é necessária visto que ou

a restrição terá apenas um valor factível, sendo preferível que essa variável e sua restrição sejam substituídas por um valor constante, ou a variável poderá assumir qualquer estado sendo assim, por definição, uma variável livre.

4 REPRESENTAÇÃO DE PROPRIEDADES ESTÁTICAS POR MEIO DE TEMPLATES

Em ACs, propriedades estáticas são propriedades computadas com base nas tabelas de transição. Essas propriedades permitem prever determinados comportamentos de um ACs sem consultar sua evolução espaço-temporal.

Esta seção descreverá algumas propriedades estáticas e os algoritmos geradores de templates que as representam. Todos algoritmos explicados estão implementados na biblioteca *CATemplates* (VERARDO; DE OLIVEIRA, 2015).

4.1 Conservabilidade de Estados e Conservabilidade de Paridade

Conservabilidade de estados é uma propriedade estática que determina que a soma dos estados de um determinado autômato celular não deve se alterar durante a evolução espaço-temporal, independente da configuração inicial.

De acordo com Boccara e Fukš (2002), um AC é conservativo quando cada uma de suas regras locais f de vizinhança $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ respeita as condições descritas na Eq. (13).

$$f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \alpha_0 + \left(\sum_{i=0}^{n-2} f(0_0, 0_1, \dots, 0_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) - f(0_0, 0_1, \dots, 0_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-i-1}) \right) \quad (13)$$

Para exemplificar, considere a regra 204 do espaço elementar. Por meio da condição mostrada na Eq. (13), será provado que essa regra é conservativa, já que satisfaz a condição. A Eq. (14) representa a tabela de transições da regra 204.

$$\begin{aligned} &(((1, 1, 1), 1), ((1, 1, 0), 1), \\ &((1, 0, 1), 0), ((1, 0, 0), 0), \\ &((0, 1, 1), 1), ((0, 1, 0), 1), \\ &((0, 0, 1), 0), ((0, 0, 0), 0)) \end{aligned} \quad (14)$$

Como demonstra Verardo (2014), a aplicação das condições da Eq. (13) nas tabelas de transições de ACs do espaço elementar, resulta no sistema descrito pela Eq. (15).

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0,0,0) = 0 + (f(0,0,0) - f(0,0,0)) + (f(0,0,0) - f(0,0,0)) \\ f(0,0,1) = 0 + (f(0,0,1) - f(0,0,0)) + (f(0,0,0) - f(0,0,0)) \\ f(0,1,0) = 0 + (f(0,1,0) - f(0,0,1)) + (f(0,0,1) - f(0,0,0)) \\ f(0,1,1) = 0 + (f(0,1,1) - f(0,0,1)) + (f(0,0,1) - f(0,0,0)) \\ f(1,0,0) = 1 + (f(0,0,0) - f(0,1,0)) + (f(0,0,0) - f(0,0,1)) \\ f(1,0,1) = 1 + (f(0,0,1) - f(0,1,0)) + (f(0,0,0) - f(0,0,1)) \\ f(1,1,0) = 1 + (f(0,1,0) - f(0,1,1)) + (f(0,0,1) - f(0,0,1)) \\ f(1,1,1) = 1 + (f(0,1,1) - f(0,1,1)) + (f(0,0,1) - f(0,0,1)) \end{array} \right. \quad (15)$$

A Eq. (15) simplificada é representada pela Eq. (16).

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(0,0,0) & = 0 \\ f(0,0,1) & = f(0,0,1) \\ f(0,1,0) & = f(0,1,0) \\ f(0,1,1) & = f(0,1,1) \\ f(1,0,0) & = 1 - f(0,0,1) - f(0,1,0) \\ f(1,0,1) & = 1 - f(0,1,0) \\ f(1,1,0) & = 1 + (f(0,1,0) - f(0,1,1)) \\ f(1,1,1) & = 1 \end{array} \right. \quad (16)$$

Excluindo-se as condições tautológicas do sistema e atribuindo os valores das funções locais f conforme a tabela de transições da regra 204, é obtido o sistema descrito pela Eq. (17). Esse sistema, ao não apresentar condições contraditórias ou falsas, prova que a regra 204 é conservativa.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & = 0 \\ 0 & = 1 - 0 - 1 \\ 0 & = 1 - 1 \\ 1 & = 1 + (1 - 1) \\ 1 & = 1 \end{array} \right. \quad (17)$$

O algoritmo que gera templates que representam regras conservativas, criado por De Oliveira e Verardo (2014a), primeiramente recebe as variáveis k e r definindo assim a

família das regras que serão geradas. Em seguida, cria todas as vizinhanças do espaço com exceção das vizinhanças que geram tautologias. E após esses passos, aplica as condições de Boccara e Fukš (2002). Para se excluir as vizinhanças que geram tautologias, basta excluir as vizinhanças que começam com 0 mas não sejam compostas apenas por 0 (SCHRANKO; DE OLIVEIRA, 2010).

Para exemplificar o funcionamento do algoritmo, considere um espaço com $k = 2$ e $r = 1$. Primeiramente o algoritmo obterá o conjunto das vizinhanças que não geram regras tautológicas, portanto será obtido o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 0)\}$. Então é criado o sistema de equações (18), baseado nas condições de Boccara e Fukš (2002).

$$\begin{cases} x_0 = & 0 \\ x_4 = & 1 + 2x_0 - x_1 - x_2 \\ x_5 = & 1 + x_0 - x_2 \\ x_6 = & 1 + x_2 - x_3 \\ x_7 = & 1 \end{cases} \quad (18)$$

Por fim o algoritmo utiliza a função Solve do *Wolfram Mathematica* para simplificar o sistema e utiliza o conjunto solução retornado pela função Solve como regras de substituições. Essas regras de substituições são aplicadas no template base, gerando assim o template das regras conservativas. O template gerado pode ser observado na Eq. (19), e sua expansão gera as cinco regras conservativas do espaço elementar, após eliminadas as regras inválidas.

$$(1, x_2 - x_3 + 1, 1 - x_2, -x_1 - x_2 + 1, x_3, x_2, x_1, 0) \quad (19)$$

O processo de gerar regras conservativas de paridade é bem parecido. Porém as condições estabelecidas por Boccara e Fukš (2002) são ligeiramente modificadas em relação a Eq. (13), de forma que cada uma das funções locais deve respeitar agora as condições da Eq. (20).

$$\begin{aligned} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \equiv & \alpha_0 + \left(\sum_{i=0}^{n-2} f(0_0, 0_1, \dots, 0_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \right. \\ & \left. - f(0_0, 0_1, \dots, 0_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-i-1}) \right) \mod 2 \end{aligned} \quad (20)$$

A biblioteca *CATemplates* já tem implementado o algoritmo gerador de templates de regras conservativas de paridade, e conforme será mostrado posteriormente, esse algoritmo pode ser de suma importância na busca de uma solução para o problema de paridade.

4.2 Confinamento

Os autômatos celulares confinados, ou *captive* em inglês, são uma classe de AC que se baseiam em uma caracterização de suas funções locais que não adotem estados definidos em qualquer estrutura externa à vizinhança (THEYSSIER, 2004).

Theyssier (2004) formalmente define que dado a função local f de um AC para a vizinhança $(\alpha_0, \dots, \alpha_{2r})$, sendo o r o raio, um AC é considerado confinado se respeitar a condição descrita na Eq. (21).

$$f((\alpha_0, \dots, \alpha_{2r})) = \beta, \beta \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{2r}\} \quad (21)$$

Essa propriedade pode ser facilmente representada através de templates. Para isto, basta restringir as variáveis a um conjunto de valores presentes na vizinhança correspondente. A biblioteca *open source CATemplates* já apresenta um algoritmo que gera as regras confinadas. Esse algoritmo recebe como parâmetro os argumentos k e r . Após isso, gera as vizinhanças do espaço e verifica em cada uma das vizinhanças os estados que elas têm. Caso a vizinhança tenha todos os estados do intervalo $[0, k - 1]$ essa posição terá uma variável livre no template. Caso a vizinhança tenha apenas um estado a posição correspondente no template assume um valor fixo. Por fim, caso a vizinhança apresente mais de um estado, mas não todos, a posição correspondente do template apresentará uma variável restritas mediante expressões $x_i \in C$.

É trivial perceber que qualquer AC binário que tenha as funções locais $f((0_0, 0_1, \dots, 0_{2r})) = 0$ e $f((1_0, 1_1, \dots, 1_{2r})) = 1$ é caracterizado como um AC confinado. A Eq. (22) representa o template de todas as regras confinadas do espaço elementar e a Eq. (23) representa a família de $k = 2$ e $r = 0, 5$.

$$(1, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, 0) \quad (22)$$

$$(1, x_2, x_1, 0) \quad (23)$$

Por fim, a Eq. (24) representa a família dos autômatos celulares confinados de $r = 1$ e três estados.

$$\begin{aligned}
(2, x_{25} \in \{1, 2\}, x_{24} \in \{0, 2\}, x_{23} \in \{1, 2\}, x_{22} \in \{1, 2\}, x_{21}, x_{20} \in \{0, 2\}, x_{19}, x_{18} \in \{0, 2\}, \\
x_{17} \in \{1, 2\}, x_{16} \in \{1, 2\}, x_{15}, x_{14} \in \{1, 2\}, 1, x_{12} \in \{0, 1\}, x_{11}, x_{10} \in \{0, 1\}, x_9 \in \{0, 1\}, \\
x_8 \in \{0, 2\}, x_7, x_6 \in \{0, 2\}, x_5, x_4 \in \{0, 1\}, x_3 \in \{0, 1\}, x_2 \in \{0, 2\}, x_1 \in \{0, 1\}, 0)
\end{aligned} \tag{24}$$

4.3 Simetria Interna

Para entender a propriedade de simetria interna faz-se necessário compreender o funcionamento das transformações de regras e classes de equivalência dinâmica. As explicações a seguir são válidas para regras binárias pois o algoritmo hoje implementado no CATemplates é para regras binárias, apesar de ser possível sua generalização para k estados.

Dado uma tabela de transições de um AC, existem três transformações que podem ser empregadas e que resultam em ACs com comportamentos dinâmicos equivalentes: *reflexão*, *conjugação* e *composição*. A reflexão é a transformação obtida ao refletir os bits das vizinhanças da tabela. A conjugação é obtida ao inverter todos os estados das células da tabela de transições. Já a composição é a transformação obtida ao se efetuar a reflexão e a conjugação, independente da ordem.

Essas transformações podem ser aplicadas tanto a vizinhança, como também podem ser aplicadas a toda a tabela de transições. Para aplicar uma transformação a toda uma tabela, basta aplicá-la a cada uma das vizinhanças da tabela. Uma tabela, transição ou vizinhança é chamada de invariante a uma transformação caso essa transformação, quando aplicada a ela, não promova nenhum efeito. Um exemplo de vizinhança invariante por reflexão é a vizinhança $(1, 0, 1)$. A vizinhança $(1, 0, 1)$ após aplicada a transformação por reflexão, continua sendo a mesma vizinhança.

Para exemplificar essas transformações e as equivalências dinâmicas considere a tabela de transição da regra 60, ilustrada pela Figura 10. Ao se aplicar a transformação por reflexão na regra 60 obtemos a regra 102 do espaço elementar, ilustrada pela Figura 11.

Ao se aplicar a transformação por conjugação na regra 60 obtemos a regra 195 do espaço elementar, conforme ilustrado na Figura 12. E por fim, ao se aplicar a transformação por composição de reflexão e conjugação na regra 60 obtemos a regra 153 do

--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 10: Tabela de transições da regra 60 do espaço elementar.

--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 11: Tabela de transições da regra 102 do espaço elementar, obtida através da transformação de reflexão aplicada na tabela de transições da regra 60.

espaço elementar, conforme ilustrado na Figura 13.

--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 12: Tabela de transições da regra 195 do espaço elementar, obtida através da transformação de conjugação aplicada na tabela de transições da regra 60.

--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 13: Tabela de transições da regra 153 do espaço elementar, obtida através da transformação de composição aplicada na tabela de transições da regra 60.

Tanto a regra 60, como as regras 102, 153 e 195 pertencem a mesma classe de equivalência dinâmica. Uma forma interessante de entender o porquê é analisando a evolução espaço-temporal dessas regras, ilustrada pela Figura 14.

Tendo em vista as tabelas de transições obtidas por meio das transformações, é possível saber quão simétrica é uma regra, ou em outras palavras, qual a simetria interna de uma regra em relação a uma determinada transformação. A simetria interna pode ser representada pelo número de vizinhanças que permanecem iguais após aplicada uma determinada transformação. Exemplificando, a regra 60 dos ACs elementares tem um valor de simetria interna por reflexão igual a 4, pois compartilha as transições de estado $((1, 1, 1), 0)$, $((1, 0, 1), 1)$, $((0, 1, 0), 1)$ e $((0, 0, 0), 0)$ com a regra resultante de sua transformação por reflexão, a regra 102. Vale notar que as vizinhanças compartilhadas são todas as vizinhanças invariantes do espaço elementar, logo pode-se dizer que a regra 60 tem a menor simetria interna possível para o espaço elementar.

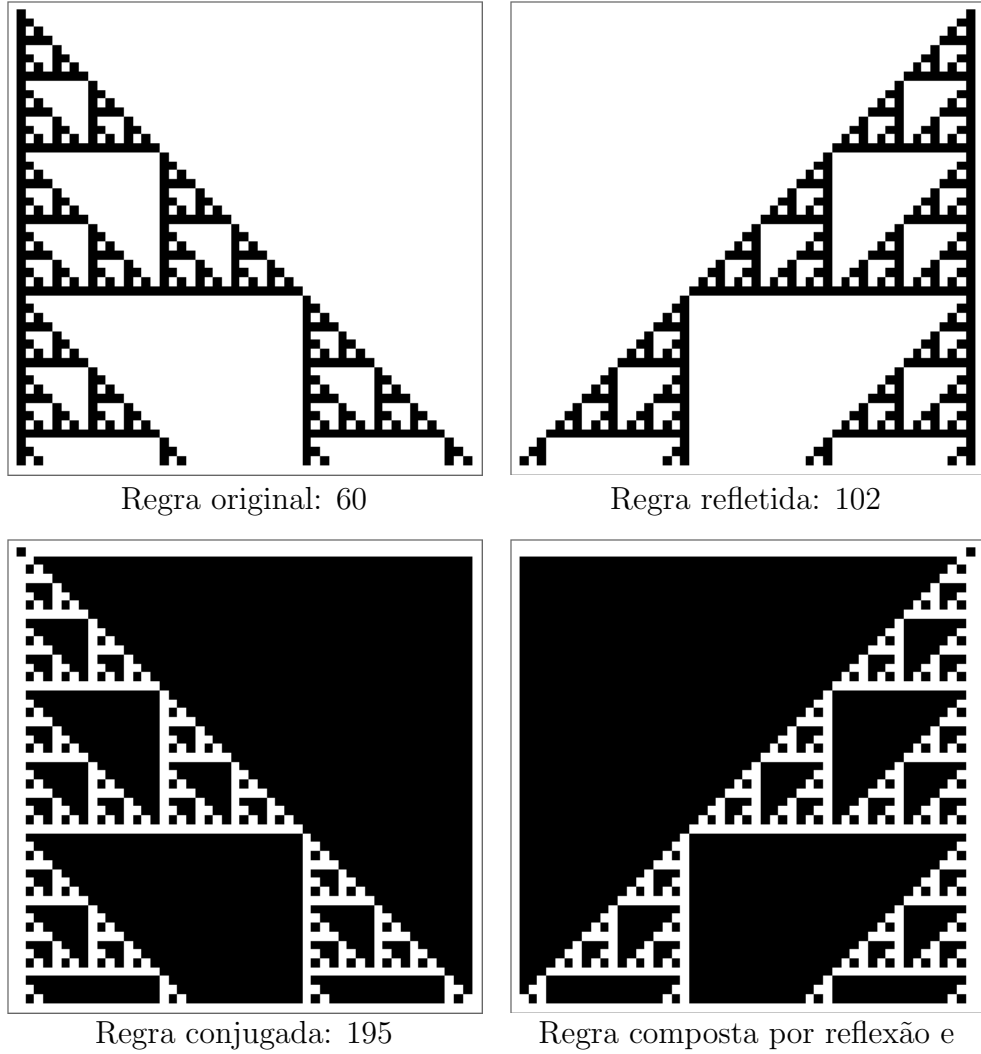


Figura 14: Evolução espaço-temporal das regras pertencente a mesma classe dinâmica da regra 60.

Um resultado bem diferente pode ser visto ao se repetir esse mesmo processo para a regra 204, que tem o valor 8 de simetria interna para transformação por reflexão. Esse valor é máximo possível para o espaço elementar e evidencia que ao se aplicar a transformação por reflexão na regra 204 será obtida a mesma regra como resultado. Uma regra contiver máxima simetria para uma transformação é uma regra invariante.

Vale frisar que apenas transformações por reflexão apresentam vizinhanças invariantes. No caso das reflexões por conjugação e por composição isso não ocorre.

Já há implementado no CATemplates um algoritmo gerador de templates que representam regras do espaço binário com um determinado valor de simetria para uma transformação.

O algoritmo recebe como parâmetro um raio r , definindo assim a família de ACs

que será representada, o valor de simetria interna desejado, e uma das transformações de simetria.

Para melhor representar o funcionamento do algoritmo, considere que foi passado como parâmetro um raio $r = 1$, a transformação de reflexão e a simetria interna desejada igual a 8. O primeiro passo do algoritmo será gerar todas as vizinhanças do espaço, que no nosso exemplo pode ser representado pela conjunto descrito pela Eq. (25)

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\} \quad (25)$$

Após isso, a transformação escolhida, no caso reflexão, é aplicada a cada uma das vizinhanças, gerando assim o conjunto representado pela Eq. (26).

$$\begin{aligned} &\{((1, 1, 1), (1, 1, 1)), ((1, 1, 0), (0, 1, 1)), ((1, 0, 1), (1, 0, 1)), ((1, 0, 0), (0, 0, 1)), \\ &((0, 1, 1), (1, 1, 0)), ((0, 1, 0), (0, 1, 0)), ((0, 0, 1), (1, 0, 0)), ((0, 0, 0), (0, 0, 0))\} \end{aligned} \quad (26)$$

Então, dos pares de vizinhanças encontrados, salva-se em uma variável o número de vizinhanças invariantes à transformação escolhida e remove-se os pares de vizinhanças idênticos. Após essa operação o conjunto resultante estará de acordo com a Eq. (27).

$$\{(((1, 1, 0), (0, 1, 1)), ((1, 0, 0), (0, 0, 1))), ((0, 1, 1), (1, 1, 0)), ((0, 0, 1), (1, 0, 0))\} \quad (27)$$

Nesse momento, caso o valor de simetria interna passado como parâmetro seja menor que as vizinhanças invariantes, o algoritmo retorna como resultado um conjunto vazio, tendo em vista que o valor mínimo de simetria interna é igual ao total de vizinhanças invariantes. Caso contrário o algoritmo agora removerá todas as repetições de pares de vizinhanças, considerando que pares de vizinhanças em ordem diferentes repetições. A Eq. (28) representa como ficara o conjunto após as remoções.

$$\{(((1, 1, 0), (0, 1, 1)), ((1, 0, 0), (0, 0, 1)))\} \quad (28)$$

Cada vizinhança é então substituída pela variável de template correspondente a sua posição, gerando assim um conjunto que representa as equivalências entre variáveis de um template. Esse conjunto de equivalências podem ser melhor visualizados pela Eq. (29) e pelo sistema de equação equivalente representado pela Eq. (30).

$$\{(x_6, x_3), (x_4, x_1)\} \quad (29)$$

$$\begin{cases} x_4 &= x_1 \\ x_6 &= x_3 \end{cases} \quad (30)$$

Entretanto, apesar de igualar todas o sistema de equações ser útil para encontrar a máxima simetria interna de uma determinada transformação, para outros valores de simetria entre o mínimo e o máximo, é necessário que o sistema de equações apresentem algumas inequações, como pode ser visualizado na Eq. (31) e na Eq. (32).

$$\begin{cases} x_4 \neq x_1 \\ x_6 = x_3 \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} x_4 = x_1 \\ x_6 \neq x_3 \end{cases} \quad (32)$$

A relação de desigualdade é representada nos templates por meio de uma função que sempre dê um resultado diferente. No caso binário essa função é $1 - x_i$. Logo os sistemas representados pela Eq. (31) e pela Eq. (32) são respectivamente equivalentes a Eq. (33) e a Eq. (34)

$$\begin{cases} x_4 = 1 - x_1 \\ x_6 = x_3 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} x_4 = x_1 \\ x_6 = 1 - x_3 \end{cases} \quad (34)$$

Para montar essas equivalências, o algoritmo particiona o conjunto de equivalência em $(s - v)/2$ partes, sendo que s é o número de simetria interna passado como argumento e v é o número de vizinhanças invariantes à transformação determinada. Após o particionamento, o algoritmo une as partições com os complementos do conjunto, adicionando assim as desigualdades nos pares do complemento. Para os exemplos dados, o conjunto resultante é representado pela Eq. (35).

$$C_{reflex6} = \{((x_4, x_1), (x_6, 1 - x_3)), ((x_4, 1 - x_1), (x_6, x_3))\} \quad (35)$$

O conjunto $C_{reflex6}$ representa as equivalências entre variáveis, que quando aplicadas ao template base, originam os templates que representam as regras com simetria interna 6. Ao realizar essas substituições obtemos o conjunto de templates representado pela Eq. (36).

$$\{(x_7, 1 - x_3, x_5, x_1, x_3, x_2, x_1, x_0), (x_7, x_3, x_5, 1 - x_1, x_3, x_2, x_1, x_0)\} \quad (36)$$

Esse conjunto de templates representam todas as regras com valor de simetria por reflexão igual a 6 do espaço elementar.

Esse algoritmo teve sua primeira implementação apresentada por De Oliveira e Verardo (2014a; 2014b). Posteriormente uma nova versão foi apresentada em (VERARDO, 2014).

4.4 Totalidade e Semi-totalidade

Os ACs totalísticos são autômatos celulares cujo valor de uma célula depende apenas da soma dos valores dos seus vizinhos no passo de tempo anterior (WOLFRAM, 1983).

De forma análoga é possível dizer que as transições dependem da média das células que compõem a vizinhança ao invés da soma. A Figura 15 ilustra a tabela de transição do AC totalístico 777 com $k = 3$ e $r = 1$.

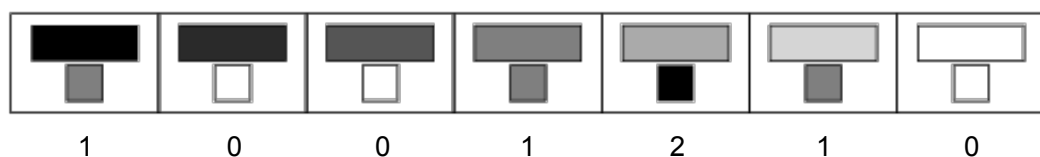


Figura 15: Tabela de transição do AC totalístico 777. As transições dependem da média dos estados das células da vizinhança. Cada média possível é representada por tons de cinza entre o branco (estado 0) e o preto (estado 2).

Já os ACs semi-totalísticos (*outer-totalistic CA*) são generalizações de ACs totalísticos (PHILLIPS; WEISSTEIN, 2015). Um AC pode ser considerado semi-totalístico caso suas transições sejam definidas pela soma (ou média) das células da vizinhança sem levar em consideração a célula central.

O Jogo da Vida (GARDNER, 1970) é o exemplo mais conhecido de autômatos celulares semi-totalísticos, tendo em vista que as células centrais no Jogo da Vida são definidas em termos de “viva” (estado 1) ou “morta” (estado 0).

Os ACs semi-totalísticos podem ser interpretados como ACs clássicos que apresentam a propriedade de *semi-totalidade*. A propriedade de semi-totalidade determina que as transições que apresentem a mesma soma dos estados vizinhos externos e que tenham a mesma célula central devem apresentar o mesmo resultado. Da mesma forma os ACs totalísticos também tem sua propriedade correspondente nos ACs clássicos: a *totalidade*. A totalidade determina que todas as transições que apresentem a mesma soma dos estados

das vizinhanças devem levar a um mesmo resultado.

A partir das definições de como devem ser as transições de estados dos ACs totalísticos e dos ACs semi-totalísticos foi possível representá-los por meio de templates. A biblioteca *CATemplates* já apresenta os algoritmos que geram essas propriedades e seu funcionamento é bem simples.

O algoritmo que gera regras totalísticas recebe como argumento os valores de r e k , definindo assim uma família de ACs. Em seguida enumera as vizinhanças do espaço e calcula a soma dos estados de cada uma delas. O resultado da soma é o que define quais transições devem ser iguais para que o template represente apenas regras totalísticas.

Para determinar qual será a variável associada, dada uma vizinhança qualquer, o algoritmo verifica se a vizinhança foi a única até então que obteve um determinado valor de soma. Em caso positivo o algoritmo criará e associará uma variável x_i para esta transição, sendo i o valor decimal da vizinhança. Caso contrário, a transição será associada uma variável x_i em que i é o valor decimal da primeira e menor vizinhança encontrada com o mesmo valor de soma das vizinhanças.

A Eq. (37) representa o template para o espaço elementar gerado pelo processo descrito acima. Esse template, quando expandido, gera $k^m = 2^4 = 16$ regras.

$$(x_7, x_3, x_3, x_1, x_3, x_1, x_1, x_0) \quad (37)$$

Já para a família de ACs de $k = 3$ e $r = 1$, o algoritmo gera o template demonstrado pela Eq. (38), sendo que esse template representa as $k^m = 3^7 = 2.187$ regras totalísticas do espaço.

$$\begin{aligned} &(x_{26}, x_{17}, x_8, x_{17}, x_8, x_5, x_8, x_5, x_2, x_{17}, x_8, x_5, x_8, \\ &x_5, x_2, x_5, x_2, x_1, x_8, x_5, x_2, x_5, x_2, x_1, x_2, x_1, x_0) \end{aligned} \quad (38)$$

Para as regras semi-totalísticas, o algoritmo segue o mesmo processo básico, porém com uma pequena modificação: as vizinhanças são somadas, mas a célula central é desconsiderada na soma e posteriormente concatenada ao final do resultado. Neste processo as vizinhanças que contenham o mesmo estado na célula central e a mesma soma de valores dos estados das células externas, como por exemplo $(2, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$, geram a mesma cadeias de caracteres ao final. A partir desse ponto o algoritmo segue a mesmo processo aplicado as regras totalísticas: para determinar qual será a variável associada a uma vizinhança o algoritmo verifica se a vizinhança foi a única até então que obteve

um determinado valor. Em caso positivo o algoritmo criará e associará uma variável x_i para esta transição, sendo i o valor decimal da vizinhança. Caso contrário, a transição será associada uma variável x_i em que i é o valor decimal da primeira e menor vizinhança encontrada com o mesmo valor de soma das vizinhanças.

Aplicando esse algoritmo gerador de templates de regras semi-totalísticas como os argumentos $k = 2$ e $r = 1$ é obtido o template representado pela Eq. (39).

$$(x_7, x_3, x_5, x_1, x_3, x_2, x_1, x_0) \quad (39)$$

O template representado pela Eq. (39) quando expandido gera as $k^m = 2^6 = 64$ regras semi-totalísticas do espaço elementar.

Para a família de ACs com $k = 3$ e $r = 1$, o algoritmo gera o template representado pela Eq. (40), que quando expandida gera as $k^m = 3^{15} = 14.348.907$ regras semi-totalísticas do espaço.

$$\begin{aligned} &(x_{26}, x_{17}, x_8, x_{23}, x_{14}, x_5, x_{20}, x_{11}, x_2, x_{17}, x_8, x_7, x_{14}, \\ &x_5, x_4, x_{11}, x_2, x_1, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) \end{aligned} \quad (40)$$

5 RESULTADOS

O presente projeto de pesquisa apresenta como resultado o desenvolvimento da operação de diferença entre templates com $k = 2$, introduz a operação de templates de exceção e demonstra uma série de passos que, utilizando a operação de diferença, conseguem restringir o espaço busca de ACs de raio 3 que tem a possibilidade de solucionar o problema de paridade. E essa seção descreverá esses resultados encontrados.

5.1 Templates de Exceção

Templates de exceção são um conjunto C_e com n templates em que cada um desses n templates que apresentam um conjunto de substituições que levem o template passado com parâmetro T_o a apresentar substituições fora do intervalo inteiro $[0, k - 1]$. A operação que gera os templates de exceção pode ser descrita em mais detalhes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X(T_o) &= C_e \\ C_e &= \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \end{aligned} \tag{41}$$

Para exemplificar essa operação, considere o template $T_o = (x_7, x_6, x_5, 1 - x_1 - x_2, 2 - x_1 - x_2, x_2, x_1, 0)$ para $k = 2$. É trivial perceber que qualquer expansão do template T_o que tenha o conjunto de substituições $\{x_1 = 1, x_2 = 1\}$ fará com que a posição 4 do template apresente o valor 2, que não pertence ao intervalo $[0, k - 1]$. Da mesma maneira, qualquer expansão do template T_o que tenha o conjunto de substituições $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ fará com que a posição 3 do template também apresente um valor que não pertence ao intervalo $[0, k - 1]$. O que a operação geradora de templates de exceção faz é primeiramente encontrar todos os conjunto de substituições que levam o template passado como parâmetro a apresentar regra inválidas, que no caso de T_o é o conjunto $R_{ex} = \{\{x_1 = 1, x_2 = 1\}, \{x_1 = 0, x_2 = 0\}\}$. Posteriormente, a operação geradora de templates aplica as substituições R_{ex} ao template base, gerando assim o conjunto de templates C_e , que para o exemplo utilizado pode ser representado pela Eq. 42.

$$C_e = \{(x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, 1, 1, x_0), (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, 0, 0, x_0)\} \tag{42}$$

A operação que gera os templates de exceção foi apresentada por Soares, Verardo e de Oliveira (2016) e é importante por ser essencial para a operação de diferença entre templates.

5.2 Diferença entre Templates binários

A operação de diferença entre templates binários é responsável por obter um conjunto C_d com n templates, onde esses templates quando expandidos apresentam apenas as regras geradas pela expansão do template T_m que não estejam também presentes na expansão do template T_s . A operação de diferença pode ser descrita em mais detalhes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} D(T_m, T_s) = C_d &\Leftrightarrow E(C_d) = E(T_m) \setminus E(T_s) \\ C_d &= \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \end{aligned} \tag{43}$$

A Figura 16 ilustra essa operação, onde os templates T_m e T_s passados como parâmetro para a operação de diferença estão representado pelos dois círculos, e o conjunto C_d retornado pela função está representado pela área em cinza na imagem.

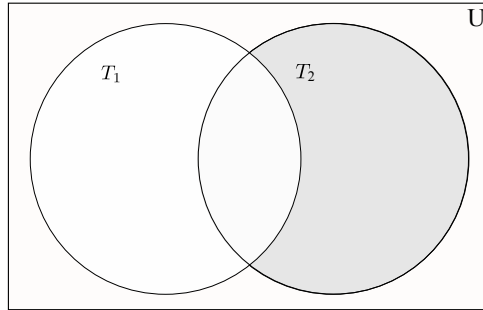


Figura 16: Os círculos T_m e T_s são os templates que representam dois conjuntos de regras. Em cinza, C_d é o conjunto de template que representa o conjunto de regras retornado pela operação de diferença entre T_m e T_s .

O processo que o algoritmo usa para encontrar a diferença entre dois templates é efetuado através de uma sequência de etapas. A primeira etapa consiste em encontrar o template T_i , que é a intersecção entre os templates T_m e T_s , ambos recebidos como parâmetro. Em seguida iguala-se os template T_m e T_i obtendo assim combinações lógicas de equações. Então o algoritmo remove as equações tautológicas, aplica uma operação de negação nas equações e troca o operador lógico \wedge por \vee , no caso binário a operação de negação e a troca dos operadores consiste apenas em efetuar as permutações $\rho =$

$(0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, \wedge \rightarrow \vee)$ ao resultado final das equações. Neste momento esse sistema é solucionado resultando num conjunto com diversos conjuntos de regras de substituições que são aplicados ao template T_i , gerando assim um conjunto de templates que é parte do resultado dessa operação. Um segundo conjunto de templates será a outra parte do resultado. Esse conjunto será gerado apartir da intersecção de cada um dos templates de exceção do template T_i com o template T_m .

Para melhor visualizar essas etapas, considere os template $T_m = (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0)$ e $T_s = (x_7, x_6, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, 0)$, ambos com $k = 2$ e $r = 1$. Esses templates serão primeiramente passados para a operação de intersecção, gerando assim o template $T_i = (x_7, x_6, x_3 + x_1, 1 - x_1, x_3, x_1, x_1, 0)$. Em sequencia, igualá-se os templates T_m e T_i gerando um sistema de equações representado pela Eq. (44).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_7 & = & x_7 \\ x_6 & = & x_6 \\ x_5 & = & x_3 + x_1 \\ x_4 & = & 1 - x_1 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_1 & = & x_1 \\ x_1 & = & x_1 \\ x_0 & = & 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

Esse sistema deve ser representado através de combinações lógicas de equações, como se pode ver na Eq. (45), que é equivalente a Eq. (44).

$$\begin{aligned} x_7 &= x_7 \wedge x_6 = x_6 \wedge x_5 = x_3 + x_1 \wedge x_4 = 1 - x_1 \wedge \\ x_3 &= x_3 \wedge x_1 = x_1 \wedge x_1 = x_1 \wedge x_0 = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Antes de solucionar a Eq. (45), o algoritmo elimina todas as equações tautológicas e troca todo operador lógico \wedge por \vee . Ao se executar essas etapas na Eq. (45), obtêm-se a Eq. (46) ilustrada abaixo:

$$x_5 = x_3 + x_1 \vee x_4 = 1 - x_1 \vee x_0 = 0 \quad (46)$$

Por fim é aplicado a operação de negação nas equações. No caso binário basta efetuar a permutação ρ , que também pode ser feita por meio da função $f(x) = 1 - (x)$. A Eq. (47) representa a combinação lógica de equações resultante dessas operações.

$$x_5 = 1 - (x_3 + x_1) \vee x_4 = 1 - (1 - x_1) \vee x_0 = 1 - 0 \quad (47)$$

Efetuada esses passos, a combinação lógica de equações resultante é solucionada obtendo-se o conjunto solução $S = \{\{x_0 \rightarrow 1\}, \{x_4 \rightarrow x_1\}, \{x_5 \rightarrow 1 - x_1 - x_3\}\}$. Perceba que S apresenta mais de um conjunto de substituições, e cada um dos conjuntos de substituição deve ser utilizado para realizar as substituições no template T_m . Essas substituições faz com que se obtenha o conjunto de templates C_{d1} , representados pela Eq. (48).

$$\begin{aligned}
C_{d1} = \{ \\
& (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, 1), \\
& (x_7, x_6, x_5, x_1, x_3, x_1, x_1, x_0), \\
& (x_7, x_6, 1 - x_1 - x_3, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0) \\
& \}
\end{aligned} \tag{48}$$

Os templates do conjunto C_{d1} farão parte do conjunto C_d resultante da operação de diferença. Entretanto é necessário verificar se o template T_i possui combinações de substituições que o levem a gerar regras inválidas. Isso é feito passando o template T_i para a operação geradora de template de exceção, obtendo-se o conjunto de templates $(x_7, x_6, x_5, x_4, 1, x_2, 1, x_0)$. Os templates desse conjunto são então interseccionados com o template T_m , resultando no conjunto $C_e = (x_7, x_6, x_5, x_4, 1, 1, 1, x_0)$. Por fim, se faz a unificação dos conjuntos C_{d1} e C_e , finalizando a operação e obtendo-se o conjunto de templates C_d , representado pela Eq. 49.

$$\begin{aligned}
C_d = \{ \\
& (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_1, 1), \\
& (x_7, x_6, x_5, x_1, x_3, x_1, x_1, x_0), \\
& (x_7, x_6, 1 - x_1 - x_3, x_4, x_3, x_1, x_1, x_0), \\
& (x_7, x_6, x_5, x_4, 1, 1, 1, x_0) \\
& \}
\end{aligned} \tag{49}$$

É importante dizer que a implementação do algoritmo que executa a operação de diferença entre templates ainda não permite trabalhar com $k \neq 2$, pois a negação das equações são feitas por meio da função $f(x) = 1 - (x)$.

5.3 Aplicação da diferença entre Templates no problema de paridade

O desenvolvimento da operação de diferença entre template permite diversas possibilidades de aplicação. Uma possibilidade interessante é no problema de paridade. Ainda não se sabe se existem regras de raio 3 que solucionem o problema de paridade (BETEL; DE OLIVEIRA; FLOCCHINI, 2013). Mas o uso de templates e suas operações podem ser uma forma interessante de restringir o conjunto de regras na busca dessa solução.

As regras dos ACs que solucionam o problema de paridade têm algumas propriedades estáticas que podem ser trivialmente percebidas. Um AC que resolva o problema de paridade sempre será contido, tendo em vista no problema de paridade as vizinhanças homogêneas não devem levar a transições de estado ativas, e está é a única restrição de variável dos templates contidos para AC binários. Vale frisar que o espaço das regras contidas de raio 3 ainda é um espaço muito grande, entretanto essa não é a única propriedade estática que um AC que resolva o problema de paridade contém. Para que um AC resolva problema de paridade também é necessário que ele não seja conservativo, visto que se a soma dos estados do AC não mudar, ele nunca convergirá como propõe o problema. Por fim, espera-se que um AC que resolva o problema de paridade seja conservativo de paridade.

Dado a possibilidade de se obter os templates para todas essas propriedades, é também possível utilizar as operações de diferença e intersecção para restringir o espaço de busca para a solução desse problema. Para efetuar esta restrição, basta efetuar a intersecção do templates de confinamento com o template de conservabilidade de paridade, visto que ambas as propriedades são consideradas interessante. Posteriormente, deve-se efetuar a operação de diferença com o template obtido pela primeira intersecção com template das regras conservativas de estado, visto que essas regras conservativas de estado não podem resolver o problema de paridade.

Formalmente essas operações de conjuntos entre os templates pode ser representado através da Eq. (50), sendo que $T_{confinado}$ representa o templates das regras confinadas, $T_{conservapacidade}$ representa o templates das regras que conservam a paridade e $T_{conservaestados}$ um template de regras conservativas. O resultado dessa operação é $T_{paridade}$, esse resultado representa um conjunto de templates que restringem um pouco mais as regras com

posibilidades de solucionar o problema de paridade.

$$T_{paridade} = (T_{conservaparidade} \cap T_{confinado}) - T_{conservaestados} \quad (50)$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho são descritos os templates de autômatos celulares, proposta introduzida por De Oliveira e Verardo (2014a), que por meio de uma generalização de tabelas de transição k -árias pode representar conjuntos de ACs.

O conceito de templates é importante devido sua capacidade de representar conjuntos de ACs com determinadas propriedades dinâmicas. Essa capacidade faz com que não seja necessário buscar por todo um espaço de ACs, o que devido ao rápido crescimento das famílias dos ACs conforme se mudam seus parâmetros, impossibilitaria a busca através de força bruta.

Por conta dessa capacidade de representação de ACs com determinadas propriedades, foi exposto neste projeto algumas propriedades estáticas e os algoritmos geradores dos templates que as representam. Esses algoritmos já estavam implementados na biblioteca *open source CATemplates* (VERARDO; DE OLIVEIRA, 2015). Além disso foram explicadas as operações de expansão e intersecção do *CATemplates*. Essas operações, desenvolvidas por Verardo (2014), foram mostradas novamente aqui para que fosse possível explicitar sua relevância para a solução de problemas típicos de ACs, como o problema de paridade.

Também foi apresentado nesse trabalho o a operação de diferença entre templates e a operação geradora de templates de exceção, ambas introduzidas por Soares, Verardo e De Oliveira (2016). A operação de diferença entre templates permite que se encontre um conjunto de templates que represente todas as regras que não pertençam ao template passado como argumento. Vale frisar que essa operação atualmente só aceita templates binários. Esta operação, já disponível na biblioteca *CATemplates*, é mais um exemplo de operação que pode ser utilizada para restringir o conjunto de regras a serem avaliadas na busca pela solução do problema de paridade, por exemplo.

Para que fosse possível a implementação da operação de diferença, foi desenvolvida a operação que, dado um template, gera os *templates de exceção* correspondentes. *Templates de exceção* são gerados a partir de templates bases substituindo-se algumas variáveis pelas substituições que geram regras inválidas no template original. O algoritmo que geram templates de exceção são essenciais para a operação de diferença.

Também foi exposto nesse trabalho um conjunto de processos utilizando templates que podem auxiliar na restrição do espaço de busca para a solução do problema de paridade.

Como possíveis trabalhos futuros, pretende-se generalizar a operação de diferença para qualquer valor de k , bem como se pretende implementar novos algoritmos geradores de templates que represente outras propriedades estáticas. Ademais, também se busca a implementação de novas operações de templates baseadas nas operações de conjuntos, como a operação de união.

7 PLANO DE TRABALHO

Este projeto está organizado em sete fases, em um período de dois anos, conforme descrito na tabela 4:

- Fase 0: participação nas disciplinas necessárias ao cumprimento dos créditos para a obtenção do título de mestre;
- Fase 1: pesquisa bibliográfica de autômatos celulares e de templates;
- Fase 2: operações de geração de templates de exceção;
- Fase 3: programação e testes da operação de diferença entre templates;
- Fase 4: escrita e submissão de artigo *The difference operation between templates of binary cellular automata.*;
- Fase 5: escrita da dissertação.

Tabela 4: Cronograma de desenvolvimento do projeto

	2014		2015		2016
Atividades	Jan-Jun	Jul-Dez	Jan-Jun	Jul-Dez	Jan-Jun
Fase 0	•	•			
Fase 1			•		
Fase 2			•	•	
Fase 3				•	•
Fase 4				•	
Fase 5			•	•	•

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BETEL, H.; DE OLIVEIRA, P. P. B.; FLOCCHINI, P. Solving the parity problem in one-dimensional cellular automata. *Natural Computing*, v. 12, n. 3, p. 323–337, 2013.
- BOCCARA, N.; FUKS, H. Number-conserving cellular automaton rules. *Fundamenta Informaticae*, IOS Press, v. 52, n. 1-3, p. 1–13, 2002.
- BRUIJN, N. D. A combinatorial problem. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A*, v. 49, n. 7, p. 758, 1946.
- DE OLIVEIRA, P. P. B.; VERARDO, M. Representing families of cellular automata rules. *The Mathematica Journal*, v. 16, n. 8, 2014. Disponível em: <[dx.doi.org/doi:10-3888/tmj.16-8](https://doi.org/10.3888/tmj.16-8)>.
- DE OLIVEIRA, P. P. B.; VERARDO, M. Template based representation of cellular automata rules. In: ISOKAWA, T.; IMAI, K.; MATSIU, N.; PEPPER, F.; UMEMOTO, H. (Ed.). *20th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. Himeji, Japão, Julho 7-9: [s.n.], 2014. p. 199–204.
- GARDNER, M. Mathematical games: The fantastic combinations of john conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, vol. 223, n. 4, p. 120–123, 1970.
- GOOD, I. J. Normal recurring decimals. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 1, n. 3, p. 167–169, 1946.
- LI, W.; PACKARD, N. The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex Systems*, v. 4, n. 3, p. 281–297, 1990.
- NEUMANN, J. v.; BURKS, A. W. Theory of self-reproducing automata. University of Illinois Press, 1966.
- PHILLIPS, R.; WEISSTEIN, E. W. Outer-totalistic cellular automaton. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2015. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Outer-TotalisticCellularAutomaton.html>>. Acesso em: 26 jun. 2015.
- SCHRANKO, A.; DE OLIVEIRA, P. P. B. Towards the definition of conservation degree for one-dimensional cellular automata rules. *J. Cellular Automata*, v. 5, p. 383–401, 2010.

- SOARES, Z.; VERARDO, M.; OLIVEIRA, P. P. de. The difference operation between templates of binary cellular automata. In: *New Advances in Information Systems and Technologies*. [S.l.]: Springer, 2016. p. 707–715.
- THEYSSIER, G. Captive cellular automata. In: *Mathematical Foundations of Computer Science 2004*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 427–438.
- VERARDO, M. *Representando famílias de autômatos celulares por meio de templates*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2014.
- VERARDO, M.; DE OLIVEIRA, P. P. B. *CATemplates*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<https://github.com/mverardo/CATemplates>>.
- WEISSTEIN, E. W. de bruijn graph. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2015. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/deBruijnGraph.html>>. Acesso em: 01 set. 2015.
- WEISSTEIN, E. W. Moore neighborhood. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2015. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/MooreNeighborhood.html>>. Acesso em: 19 mai. 2015.
- WEISSTEIN, E. W. von neumann neighborhood. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2015. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/vonNeumannNeighborhood.html>>. Acesso em: 19 mai. 2015.
- WOLFRAM RESEARCH. *Wolfram Mathematica*. 2015. Disponível em: <<http://www.wolfram.com/mathematica/>>.
- WOLFRAM, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of modern physics*, APS, v. 55, n. 3, p. 601, 1983.
- WOLFRAM, S. *Cellular automata and complexity: collected papers*. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 1994.