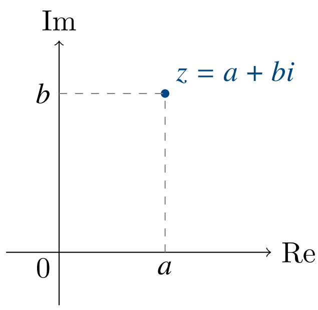
目录

S.S.LI

1. 复数

1.1 复数的定义

数学家定义 $i := \sqrt{-1}$，这与实数完全不同，因此 i 在实数轴 $\mathbb{R}$ 的基础上增加了一个维度。需要注意的是，复数集 $\mathbb{C}$ 定义为 $\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$，并且实数集 $\mathbb{R}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集，即 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$。因为 a 和 i 之间相互独立，我们可以将 $a + bi$ 视为 $\mathbb{R}^2$ 平面中的一个坐标 (a, b)。此外，即便假设我们将 i 替换为实数变量 $y \in \mathbb{R}$，仍然可以将 $a + by$ 视为 $\mathbb{R}^2$ 平面中的一个坐标。有时变量本身并不那么重要，而表示坐标的对应系数更为重要。然而，i 的定义使我们能够进行直观的乘法运算。



定义 1.1.1 — 复数的加法和乘法. 对于某些 $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v_j} \in \mathbb{C}$ 并且 $\mathbf{v_j} = a_j + b_j i$，复数的加法定义如下：

$$\mathbf{v_n} + \mathbf{v_m} := (a_n + a_m) + (b_n + b_m)i$$

乘法定义如下：

$$\mathbf{v_n} \cdot \mathbf{v_m} := a_n a_m + b_n b_m + (a_n b_m + b_n b_m)i$$

乘法单位元，即如 $z \oplus e = z$, $\forall z, e \in E$, e 是 E 里的 $\oplus$ 单位元，定义为：

$$\frac{z}{z} = 1 \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^{\times}$$

R 注意虚部是一个实数并且复数对于加法和乘法的封闭，例如 $\sum_j \mathbf{v_j} = \overbrace{\sum_j a_j}^{\text{实部}} + \overbrace{(\sum_j b_j)}^{\text{虚部}} i \in \mathbb{C}$

■ **例子 1.1 — 对加法封闭的集合.** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. ■

■ **例子 1.2 — 对加法不封闭的集合.** $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ■

练习 1.1 验证 $\mathbb{Q}$ 对加法和乘法封闭，但 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 不对加法和乘法封闭。

1.2 复数的基本工具

在 DSE 中，我们需要表现出解决一些算术问题的能力，而不是表现出对复数的理解，所以，对于 DSE 类型的问题，只要知道下面的运算就足够了。

定理 1.2.1 — 算术. 对于任意 $a \neq 0$ or $b \neq 0$，我们有以下：

平方差：$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

有理化（将分数表示为 $x + yi$ 的形式）：$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi}\frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \in \mathbb{C}$

定理 1.2.2 — 周期性. $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i \ldots$

练习 1.2 解决以下问题：

(a) 123 能被 4 整除吗？如果不能，余数是多少？

(b) 使用 (a)，计算 i^{123}。

1.3 历年试题区域

练习 1.3 设 α 为实数。定义 $u = w + \frac{1}{w}, v = w - \frac{1}{w}$，其中 $w = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}$. 以下哪项必须为真?

I u 是实数。

II v 的实部等于 0。

III w 的虚部等于 $2w$ 的虚部。

练习 1.4 定义 $z_1 = \dfrac{2+ki}{1+i}$ 和 $z_2 = \dfrac{k+5i}{2-i}$，其中 $k \in \mathbb{R}$。如果 z_1 的虚部等于 z_2 的虚部，证明 $z_1 - z_2 = 3$。

练习 1.5 如果 $a \in \mathbb{R}$，求 $\dfrac{4+i^5}{a+i} - i^6$ 的实部。

练习 1.6 求 $\dfrac{2i^{12}+3i^{13}+4i^{14}+5i^{15}+6i^{16}}{1-i}$ 的实部。

练习 1.7 如果 k 和 $\dfrac{5}{2-i}+ki$ 是实数，求 k。

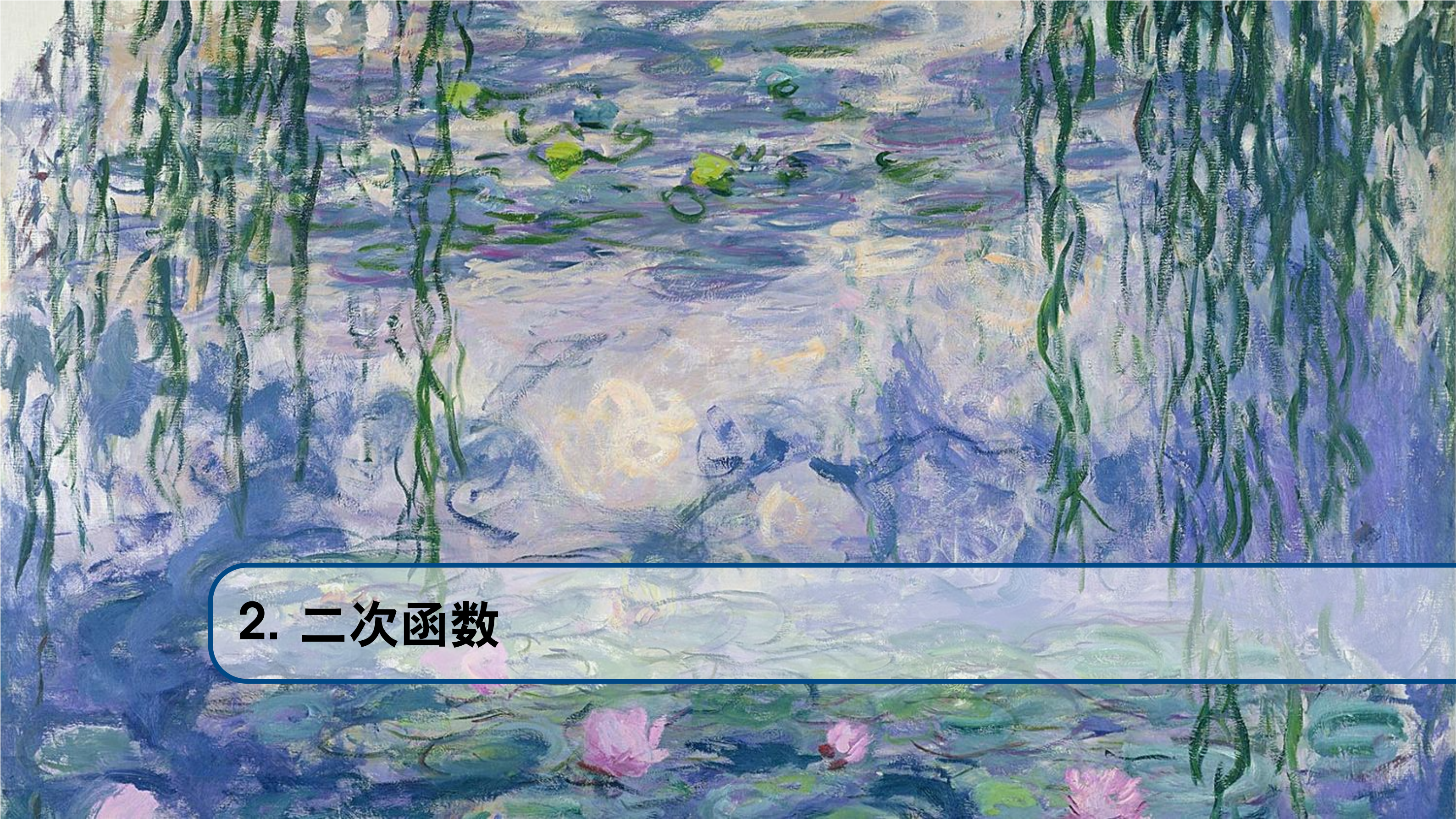
练习 1.8 设 $z=(a+5)i^6+(a-3)i^7$，其中 $a,z\in\mathbb{R}$。求 a。

练习 1.9 设 $u = \frac{7}{a+i}$ 和 $v = \frac{7}{a-i}$，其中 a 是实数。以下哪项必须为真?

I $u \cdot v$ 是有理数。

II u 的实部等于 v 的实部。

III $\dfrac{1}{u}$ 的虚部等于 $\dfrac{1}{v}$ 的虚部。



2. 二次函数

2.1 顶点

定义 2.1.1 — 二次函数. 对于某些实数常数 $a \neq 0, b, c$，二次函数 f 定义如下：

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

定理 2.1.1 — 顶点式. 对于任意实数常数 $a \neq 0, b, c$ 的二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$，存在 $h, k \in \mathbb{R}$，使得我们有以下顶点式：

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

其中 a 是 x^2 的系数，(h, k) 是极值点。

证明. 我们可以通过配方法推导出顶点式：

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \end{aligned}$$

因为 $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$，所以我们有 $f(x) \geq -a(\frac{b}{2a})^2 + c$ 或 $f(x) \leq -a(\frac{b}{2a})^2 + c$，这取决于 a 的符号，且当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时，f 取得极值。 ■

你可能会觉得表达式太复杂，所以与其死记硬背这个形式，不如使用核心思想—配方法—来推导它。

练习 2.1 将 $f(x) = 100x^2 + 2x + 1$ 化为顶点式。

练习 2.2 解下列问题：

(a) 解方程 $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$。

(b) 求 $4x^4 + 3x^2 + 1 = y$ 的最小值。

练习 2.3 利用 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$，证明对于任意实数 x，

$$x^2 > (x+1)(x-1) > (x+2)(x-2) > \dots$$

练习 2.4 构造一个以 $x = 1, 2$ 为根，且经过点 $(3, -4)$ 的二次函数。

2.2 二次曲线的函数图像

2.2.1 递增/递减函数

定义 2.2.1 — 递增/递减函数. 对于任意 $x_1, x_2 \in I$,

- 在 I 上递增的函数：若 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1) < f(x_2)$。
- 在 I 上递减的函数：若 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1) > f(x_2)$。

推论 2.2.1 对于 $a > 0$，二次函数在 $[h, \infty)$ 上递增，在 $(-\infty, h]$ 上递减，其中 (h, k) 是其极值点。

证明.
- 将二次函数 f 表示为顶点式，其中 $a > 0$：$f(x) = a(x-h)^2 + k$。
- 若 $x_2 > x_1 > h$，则 $(x_2 - h)^2 > (x_1 - h)^2$。
- 我们有 $f(x_2) - f(x_1) = a\underbrace{\left[(x_2-h)^2 - (x_1-h)^2\right]}_{>0}$，因此 f 的符号取决于 a。

■

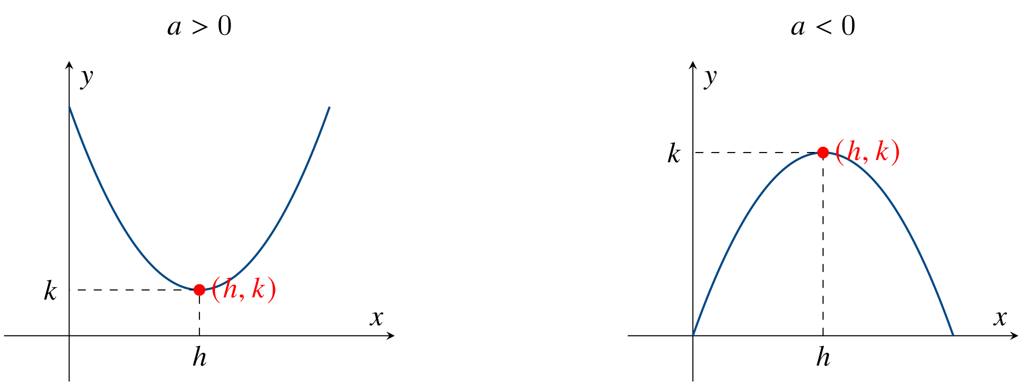
注意，对于 $a < 0$，我们可以得出类似的结论。注意 ax^2 是二次函数 f 中的主导项，f 沿 x 轴递增/递减的速度越来越快。

2.2.2 对称轴

当你画一个二次函数 f 的图像时，直观上，当 $x = h$（对称轴）时，f 取得极值。为了严格证明这一点，我们证明以下推论：

推论 2.2.2 如果 (h, k) 是二次函数 $f(x)$ 的极值点，那么对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有 $f(h+x) = f(h-x)$。

证明. 考虑 $f(x) = a(x-h)^2 + k$，对于任意 $x \in \mathbb{R}$，$f(h+x) = ax^2 + k = f(h-x)$。 ■



2.3 根

2.3.1 判别式 Δ 与根

定义 2.3.1 — 根. 若 $f(p)=0$，则 p 是函数 $f(x)=y$ 的一个根/零点。

利用顶点式，当 $f(x)=0$ 时，我们可以找到判别式 Δ 和 f 的根（这留作练习）。有些题目可能会要求你求函数

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

的根，或者解二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

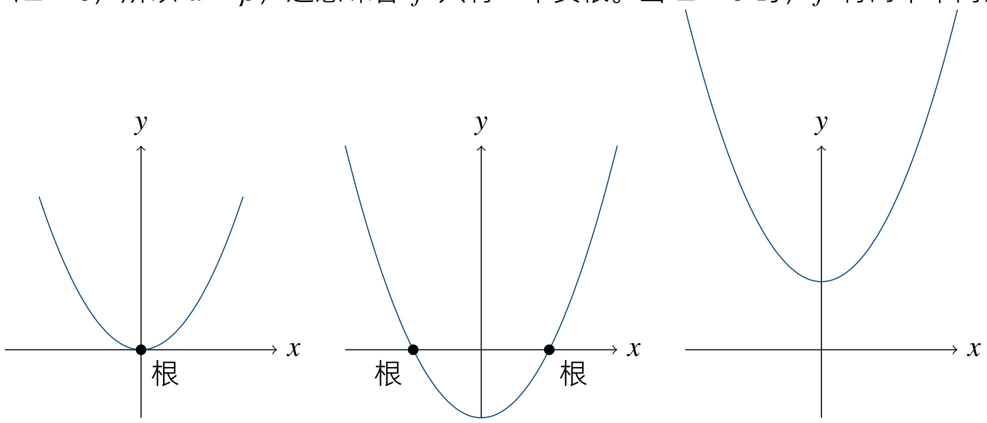
。这两个问题本质上是等价的。

定理 2.3.1 对于实数常数 a,b,c 的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，假设 α,β 是 f 的根，则有

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

其中 $\Delta=b^2-4ac$。

当 $\Delta<0$ 时，$\sqrt{\Delta}$ 会产生两个复数，从而给 f 带来两个复根（与实 x 轴无交点）。当 $\Delta=0$ 时，$\sqrt{\Delta}=0$，所以 $\alpha=\beta$，这意味着 f 只有一个实根。当 $\Delta>0$ 时，f 有两个不同的实根。



情况 1: $\Delta=0$
一个实根（重根）

情况 2: $\Delta>0$
两个不同的实根

情况 3: $\Delta<0$
无实根（复数根）

练习 2.5 证明上述一般二次函数根的表达式。

2.3.2 二次函数与常数函数的交点

$ax^2 + bx + c = k$ 的意义可以写成如下形式：

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ k = y \end{cases}$$

因此，它基本上是一个二次函数与任意实数常数 k 的交点。要实际找到交点，你需要在脑海中有一个 曲线草图，也就是说，这两个函数应该画在 $\mathbb{R}^2$ 平面（即 xy 平面）上。

练习 2.6 画出 $3x^2 + 5x + 2 = y$ 和 $y = 0$ 的曲线草图，并找出它们的交点。

练习 2.7 画出函数

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x + 2 = y \\ 17 = y \end{cases}$$

的曲线草图。

2.3.3 两个函数的交点

在求两个函数的交点时，我们很大程度上依赖于曲线草图。考虑任意函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及下式：

$$\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$$

用这个方程组很难找到所需的交点。然而，通过考虑 $f(x) = g(x)$，我们有 $f(x) - g(x) = 0$，

我们写成：

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = y \\ 0 = y \end{cases}$$

其中 $f(x) - g(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 垂直差。（同样，通过画图，你可以得到垂直差的几何意义）

练习 2.8 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的垂直差为零时，我们得到什么样的点？

练习 2.9 解下列问题：

(a) 求两个函数 $f(x) = 5x^2 + 3x + 3$, $l(x) = 3x + 10$ 的交点。

(b) 求两个函数 $f(x) = kx^2 + 3x + 3$, $l(x) = 3x + 10$ 的交点。

2.3.4 利用集合理解两个函数的方程组

在小学阶段，我们知道任何曲线或直线都是由无穷多个点组成的集合。对于 $\mathbb{R}$ 轴上的任何函数 f，f 是 所有可能点 $(x, f(x))$ 的集合，其中 $(x, f(x)) \neq (f(x), x)$。所以我们可以考虑：

$$\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases} \sim \begin{cases} (x, f(x)) \\ (x, g(x)) \end{cases}$$
$$\sim \{(x, f(x))\} \bigcap \{(x, g(x))\}$$

练习 2.10 对于任意 $x \in \mathbb{R}$，$\sin x = y$ 和 $1 = y$ 的交点集合是有限的吗？

2.4 韦达定理

利用求根公式，我们可以轻松证明韦达定理。

定义 2.4.1 — 韦达定理. 设 α, β 是二次函数 f 的两个根（f 与 x 轴的交点），

$$f(x) = a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$$

其中 a 是 x^2 的系数。

练习 2.11 证明韦达定理。

练习 2.12 设 α, β 是 f 的两个根。求 $f(x) = 7x^2 + 5x + 3$ 的 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha\beta$。

练习 2.13 设 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$。定义 $\alpha := m + bi, \beta := p + qi$。当 $f(x)$ 在实轴上有零点时，求 b 和 q。

练习 2.14 抛物线 Γ 的方程为 $y = 2x^2 - 2kx + 2x - 3k + 8$，其中 k 为实常数。记直线 $y = 19$ 为 L。

(a) 证明 L 与 Γ 相交于两个不同的点。

(b) L 与 Γ 的交点为 A 和 B。

(i) 设 a 和 b 分别为 A 和 B 的 x 坐标。证明

$$(a-b)^2 = k^2 + 4k + 23$$

(ii) A 与 B 之间的距离是否可能小于 4？解释原因。

练习 2.15 设 $g(x) = 3x^2 + 12kx + 16k^2 + 8$，其中 k 为非零实常数。

(a) 使用配方法，用 k 表示 $y = g(x)$ 图像顶点的坐标。

(b) 在同一直角坐标系中，记 $y = g(x)$ 图像的顶点和 $y = 2g(-x)$ 图像的顶点分别为 A 和 B。设 M 为 AB 上的一点，使得 ΔOBM 的面积是 ΔOAM 面积的三倍，其中 O 为原点。用 k 表示 M 的坐标。

练习 2.16 定义

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

解方程 $x^2 + |x| + 3 = 0$。

3. 多项式

DSE 的大纲最近强调了处理抽象多项式的重要性。然而，大多数教科书并未提供多项式的原始定义及相关练习。本章将为读者提供更清晰的多项式处理流程。

3.1 整数

我们经常讨论多项式中的 可除性，这引出了 除数 和 余数 的概念。回想在小学时，我们在整数除法中也使用这些术语。许多整数和多项式的定理和算法的证明实际上是相同的。例如，余数定理、长除法（短除法）和欧几里得算法（这超出了教学大纲）。

定理 3.1.1 — 整数的余数定理. 设 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0$。则存在唯一的整数 q 和 r，使得

$$a = bq + r \qquad 0 \leq r < |b|$$

证明. 对于唯一性，假设存在 $q', r' \in \mathbb{Z}$ 使得 $qb + r = q'b + r'$，我们有 $(q' - q)b = r' - r$，这意味着 $|q' - q||b| = |r' - r|$。假设 $q' \neq q$，我们有 $|q' - q| \geq 1$，因此

$$\max\{|r|, |r'|\} \leq |b| < |r - r|$$

这导致矛盾。因此，我们有 $q = q'$，从而 $r = r'$。

对于存在性，如果 $b > 0$，存在 $q \in \mathbb{Z}$ 使得 $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$，这意味着 $qb \leq a < qb + b$。设 $r = a - qb$，我们有 $a = qb + r$，且 $0 \leq r < |b|$，因为 $a - qb < a < b$。如果 $b < 0$，我们考虑一个整数 q 使得 $q - 1 \leq \frac{a}{b} < q$，这意味着 $qb \leq a < qb - b$。取 $r = a - qb$，我们有 $a = r + qb$，且 $0 < r = a - qb < -b = |b|$。 ■

证明可能听起来很抽象，但定理的关键思想是直观的。考虑一个经典的时钟，时针指向小时 $\{1,2,...,12\}$，当时间超过"12" 时，它结束一个周期并重置到开始。这解释了为什么 $0 \le r < |b|$（重置操作）以及存在余数 r（小时）。

3.2 多项式的基础

定义 3.2.1 — 多项式. 对于某些复常数 a_n 和任何 x 在 $\mathbb{C}$ 中，我们说

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

是一个次数为 n 的多项式，其中 a_k 是 x^k 的系数，且 $a_n \neq 0$。

注意，我们在这里考虑复多项式是为了引入下面的定理，在大多数情况下，你只需要考虑实多项式。

定理 3.2.1 — 代数基本定理. 任何次数为 n 的复多项式恰好有 n 个复根。这意味着对于 $\deg P \ge 1$, 我们可以将多项式表示为

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_n(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$$

其中 $a_i \in \mathbb{C}$ 是 x^i 的系数，且 $P(b_1) = P(b_2) = \ldots = P(b_n) = 0$。

注意，当 $b_m = b_p$ 时，其中 m, p 是某些自然数，我们称它们为 重根，但仍然将它们计为两个根。

练习 3.1 — 零点. 在上述命题中，我们称点 $(b_1, P(b_1)), (b_2, P(b_2)), \ldots, (b_n, P(b_n))$ 为什么？

(R) 在一个次数为 n 的多项式 f 上，如果我们得到 n 个根和一个不同于这些根的点，那么我们不用分别寻找 x_i 的系数，就可以构造 f 的多项式表达式。

练习 3.2 — 构造多项式. 解答以下问题：

(a) 对于实数常数 a,b,c,d,e,f，假设 $a+bi$ 和 $c+di$ 是二次函数 p 的零点，且 (e,f) 是 p 的一个不同的经过点，写出 p 的解析表达式。

(b) 对于任意 $j\in\{1,\ldots,n\}$ 和实数常数 a_j,b_j,e,f，假设 a_j+b_ji 是多项式 p 的零点，且 (e,f) 是 p 的一个不同的经过点，其中 $\deg p=n$，写出 p 的解析表达式。

3.3 普遍化的余数定理

定理 3.3.1 — 多项式的除法算法. 对于任何多项式 p，$d\neq 0$，存在两个唯一的多项式 p 和 q，使得

$$p=qd+r \quad 其中 \quad \deg r<\deg d$$

证明. 对于唯一性，假设存在多项式 q,r,q',r'，使得 $(q-q')d=r'-r$。如果 $q-q'\neq 0$，则 $\deg(q-q')\geq 0$，因此

$$\deg d\leq \deg d+\deg(q-q')=\deg d(q-q')=\deg(r'-r)\leq \max\{\deg r',\deg r\}$$

这导致矛盾，因此 $q-q'=r-r'=0$。

对于存在性，如果 $p=0$，我们只需取 $q=r=0$。如果 $\deg p\geq 0$，根据整数的余数定理，它仍然成立。然后，假设对于某个 $n\in\mathbb{N}$，命题成立，设 $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^{n+1}$，$d(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$，其中 $b_m,a_m\neq 0$ 且 $n+1\geq m$（如果 $n+1<m$，我们只需取 $q=0,r=p$）。然后，令 $h(x)=p(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n+1-m}d(x)$，这允许我们消去 p 中的首项，根据我们的假设，存在多项式 q_1,r_1，使得

$$p(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n+1-m}d(x)=h(x)=q_1(x)d(x)+r_1(x)$$

重新排列得

$$p(x)=q_1(x)d(x)+r_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n+1-m}d(x)$$

根据我们对 $\frac{a_n}{b_m}x^{n+1-m}d(x)$ 的假设，存在多项式 q_2, r_2，使得

$$p = q_1 d + r + q_2 d + r_2 = (q_1 + q_2)d + (r_1 + r_2)$$

通过归纳法，命题对于任何 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。 ■

在这里，回想整数部分的比喻，你可以将多项式 d 视为一个周期，当 $\deg r$ 试图超过 $\deg d$ 时，r 将被写为 $r = q_2 d + r_2$（重置到开始）。并且，定理 3.1.1 实际上就是定理 3.3.1 在多项式的次数为零时的特例。

推论 3.3.2 — 余数定理. 对于多项式 p, q, d, r，假设我们有

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x) \quad \text{其中 } \deg r < \deg d$$

如果 $x = a$ 是 $d(x)$ 的零点，则 $p(a) = r(a)$。

练习 3.3 — 概念. 对于某个多项式 $p(x)$，如果 $p(x)$ 能被 $x^2 - 3x + 2$ 整除，求 $p(x)$ 的两个根。

练习 3.4 — 拉格朗日插值. 有一个典型的幼儿园问题：$a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=?$。显然 $a_4=100$，因为

$$P(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$
$$+3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+100\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

对于 $k=1,2,3,4$，有 $a_k=P(k)$。

(a) 验证对于 $k=1,2,3,4$，$a_k=P(k)$。

(b) $P(x)$ 是多项式吗?

(c) $P(x)$ 有多少个根?

R 根据拉格朗日插值法，如果我们有一组点 (a_i,b_i)，其中 $i\in\{1,\dots,n\}$，那么我们可以构造一个通过所有这些点 (a_i,b_i) 的多项式。

3.4 历年试题区域

定理 3.4.1 — 多项式的恒等性. 考虑 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ 和 $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n$，对于 $x\in\mathbb{R}$，我们有

$$a_k=b_k \quad 对于 \quad k=0,1,\dots,n \iff P(x)=Q(x)$$

在比较系数时有一个技巧:你可以通过求和找到对应系数。例如,对于求 $(x+3)^4+(x+3)^2$,我们首先分别找到 $x^4,x^3,\dots$ 的系数。

练习 3.5 设 $P(x)=(3x+3)^{100}+(x+3)^{50}+x^{30}$。

(a) $P(x)$ 的次数是多少?

(b) 找到最高次项的系数。

(c) 假设 $Q(x)=k_{100}x^{100}+k_{99}x^{99}+\dots+k_0$，且对于所有 $x\in\mathbb{R}$，$Q(x)=P(x)$。求 k_{100} 和 k_0。

练习 3.6 — 比较系数. 设 $P(x)=6x^4+7x^3+ax^2+bx+c$，其中 a,b,c 是常数。当 $P(x)$ 被 $x+2$ 和 $x-2$ 除时，余数相等。已知 $P(x)=(lx^2+5x+8)(2x^2+mx+n)$，其中 l,m,n 是常数。

(a) 求 l,m,n。

(b) $P(x)=0$ 有多少个实根？

练习 3.7 — 抽象多项式. 多项式 $p(x)$ 能被 $x-5$ 整除。当 $p(x)$ 被 x^2+x+1 除时，商和余数分别为 $2x^2-37$ 和 $cx+c-1$，其中 c 是常数。

(a) 求 c。

(b) 证明 $x+3$ 是 $p(x)$ 的因子。

(c) 有人声称方程 $p(x)=0$ 的所有根都是实数。这个说法正确吗？解释你的答案。

练习 3.8 — 曲线绘制. 回答以下问题：

(a) 求 k 的值，使得 $x-2$ 是 $kx^3-21x^2+24x-4$ 的因子。

(b) 设 $f(x)=15x^2-63x+72$。Q 是曲线 f 在第一象限上的一个动点。P 和 R 分别是 Q 到 x 轴和 y 轴的垂足。

(i) 设 P 的坐标为 $(m,0)$。用 m 表示矩形 $OPQR$ 的面积。

(ii) 是否存在三个不同的 Q 点，使得矩形 $OPQR$ 的面积为 12？解释你的答案。

练习 3.9 设 $f(x)=6x^3-13x^2-46x+34$。当 $f(x)$ 被 $2x^2+ax+4$ 除时，商和余数分别为 $3x+7$ 和 $bx+c$，其中 a,b 是常数。

(a) 求 a。

(b) 设 $g(x)$ 是一个二次多项式，当 $g(x)$ 被 $2x^2+ax+4$ 除时，余数为 $bx+c$。

(i) 证明 $f(x)-g(x)$ 能被 $2x^2+ax+4$ 整除。

(ii) 有人声称方程 $f(x)-g(x)=0$ 的所有根都是整数。你同意吗？解释你的答案。

练习 3.10 — 三次多项式. 设 $p(x)$ 是一个三次多项式。当 $p(x)$ 被 $x-1$ 除时，余数为 50。当 $p(x)$ 被 $x+2$ 除时，余数为 -52。已知 $p(x)$ 能被 $2x^2+9x+14$ 整除。

(a) 求 $p(x)$ 被 $2x^2+9x+14$ 除时的商。

(b) 方程 $p(x)=0$ 有多少个有理根？解释你的答案。

练习 3.11 — 陷阱. 设 $f(x) = 4x(x+1)^2 + ax + b$，其中 a, b 是常数。已知 $x-3$ 是 $f(x)$ 的因子。当 $f(x)$ 被 $x+2$ 除时，余数为 $2b+165$。

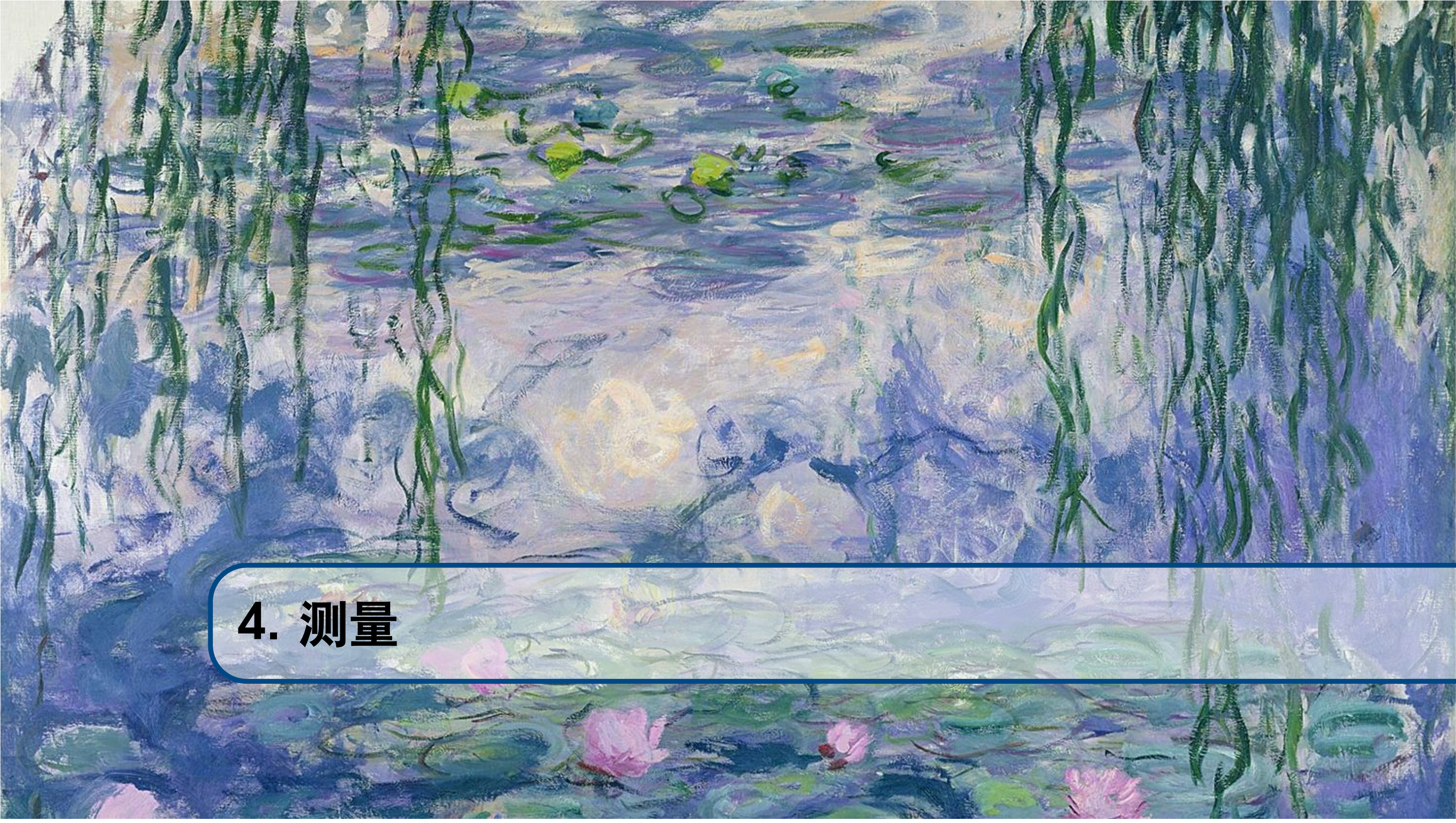
(a) 求 a 和 b。

(b) 有人声称方程 $f(x) = 0$ 至少有一个无理根。你同意吗？解释你的答案。

练习 3.12 — 选择题. 设 $p(x)$ 是一个多项式。当 $p(x)$ 被 $x+1$ 除时，余数为 -2。如果 $p(x)$ 被 $x-1$ 除，求 $p(x)$ 被 x^2-1 除时的线性余数。

练习 3.13 — 选择题. 设 $g(x) = ax^3 + 4ax^2 - 24$，其中 a 是常数。如果 $x+2$ 是 $g(x)$ 的因子，求 $g(2)$。

练习 3.14 — 选择题. 设 k 是常数，使得 $2x^4 + kx^3 - 4x - 16$ 能被 $2x + k$ 整除。求 k。



4. 测量

4.1 面积与体积

4.1.1 测度

许多物体的面积和体积的证明超出了课程范围，即使是小学阶段教授的圆的面积，也只是简单地告诉学生其公式为 πr^2。对于面积，我们可以利用以下定义：

定义 4.1.1 — 面积. 我们定义面积：

$$A(E) := \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)(c_k - d_k)$$

其中 $E := \coprod_{k=1}^{n}\langle a_k, b_k\rangle \times \langle c_k, d_k\rangle$，$E$ 是由一组不相交的矩形组成的点集，$A(E)$ 是这些矩形的面积。

然后，我们用矩形的并集 E 来包围任意形状 S，并用 S 来包围 E^*，从而近似所需的面积 $A(S)$。我们将所有矩形的并集定义为简单区域。

定义 4.1.2 — $\mathbb{R}^2$ 中的 Jordan 测度. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个非空有界集。我们定义其内 Jordan 测度 $\mu_*(\Omega)$ 和外 Jordan 测度 $\mu^*(\Omega)$ 为：

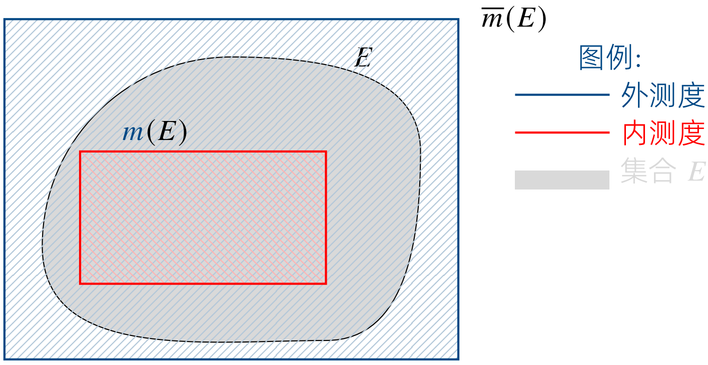
$$\mu_*(\Omega) := \sup\{A(S) : S \subset \Omega \text{ 且} S \text{ 是} \mathbb{R}^2 \text{ 中的简单区域}\}$$

$$\mu^*(\Omega) := \inf\{A(S) : T \supset \Omega \text{ 且} T \text{ 是} \mathbb{R}^2 \text{ 中的简单区域}\}$$

如果 $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$，则称 Ω 是Jordan 可测的，并定义其面积 $\mu(\Omega)$。

因此，我们可以通过使用许多小矩形来近似面积，当矩形的数量趋近于无穷大时，如果近似误差趋近于零，则可以得到精确的面积（这是微积分的基础）。对于 $\mathbb{R}^3$ 的情况，可以

通过类似的论证定义体积。



4.1.2 物体的表面积与体积

本节重点讨论物体的表面积和体积，因为 $\mathbb{R}^2$ 物体的面积已经教授过了。

定理 4.1.1 — 物体的表面积. 我们有以下公式：

- 球体：$4\pi r^2$，其中 r 是半径。
- 圆锥：$\pi rl + \pi r^2$，其中 r 是底面半径，l 是斜高。

定理 4.1.2 — 物体的体积. 我们有以下公式：

- 球体：$\dfrac{4}{3}\pi r^3$，其中 r 是半径。
- 圆锥和棱锥：$\dfrac{1}{3}bh$，其中 b 是底面积，h 是高度。

4.2 相似性

4.2.1 角度与相似三角形

有一些关于两个三角形或其他物体相似时高度比例的命题。然而，这些命题不需要记忆，因为我们可以通过画图来理解它们。

注意，如果两个相似的圆锥 A 和 B 的体积分别为 $\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$ 和 $\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$，则有 $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}$，其中 θ_1 是圆锥 A 的斜高与半径之间的夹角，圆锥 B 类似。对于棱锥也可以得出类似的结论，我们可以用这个结论来解决以下问题。

定理 4.2.1 — 比例. 设 A 和 B 是两个相似的圆锥或棱锥。使用上述常用符号，$S(A)$ 和 $V(A)$ 分别表示 A 的斜表面积和体积，B 类似。我们有

$$h_A^2 : h_B^2 = S(A) : S(B) \quad \text{且} \quad h_A^3 : h_B^3 = V(A) : V(B)$$

将 h 替换为 r，对于球体也可以得出相同的结论。

练习 4.1 证明上述定理。

4.3 历年试题

练习 4.2 实心圆柱体 X 的底面半径与实心圆锥 Y 的底面半径相等。X 和 Y 的高度分别为 20 cm 和 24 cm。实心圆锥 Z 的体积等于 X 和 Y 的体积之和。Z 的底面半径等于 X 的底面直径。工匠发现 Y 的体积为 800π cm^3。

(a) 求 Y 的底面半径。

(b) Y 和 Z 是否相似？解释你的答案。

(c) 工匠声称 X 和 Y 的侧面积之和大于 Z 的侧面积。你同意吗？解释你的答案。

练习 4.3 一个实心圆锥的高度和底面半径分别为 36 cm 和 15 cm。该圆锥被两个平行于底面的平面分成三部分，三部分的高度相等。

(a) 求中间部分的体积。

(b) 求中间部分的侧面积。

练习 4.4 两个球体的体积之和为 $324\pi\ \mathrm{cm}^3$。较大球体的半径等于较小球体的直径。

(a) 求较大球体的体积。

(b) 求两个球体的表面积之和。

练习 4.5 一个底面半径为 8 cm、高度为 64 cm 的直立圆柱形容器和一个底面半径为 20 cm、高度为 60 cm 的倒置圆锥形容器垂直放置。容器完全装满水。现在将容器中的水倒入圆锥形容器中。

(a) 求圆锥形容器中水的体积（用 π 表示）。

(b) 求圆锥形容器中水的深度。

(c) 如果将半径为 14 cm 的实心金属球放入圆锥形容器中，并且球完全浸入水中，水会溢出吗？解释你的答案。

练习 4.6 一个底面积为 84 cm^2、高度为 20 cm 的实心金属棱柱被熔化并重铸为两个相似的实心棱锥。两个棱锥的底面都是正方形。较小棱锥的底面积与较大棱锥的底面积之比为 4:9。

(a) 求较大棱锥的体积。

(b) 如果较大棱锥的高度为 12 cm，求较小棱锥的总表面积。

练习 4.7 一个倒置的圆锥形容器中装有一些牛奶。容器垂直放置。容器中牛奶的深度为 12 cm。彼得然后将 $444\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的牛奶倒入容器中，没有溢出。他现在发现容器中牛奶的深度为 16 cm。

(a) 用 π 表示容器中牛奶的最终体积。

(b) 彼得声称容器湿润的侧面积至少为 $800\ \mathrm{cm}^2$。你同意吗？解释你的答案。

练习 4.8 一个扇形的半径和面积分别为 12 cm 和 30π cm^2。

(a) 求扇形的角度。

(b) 用 π 表示扇形的周长。

练习 4.9 图 3 显示了一个由底面半径为 72 cm、高度为 96 cm 的倒置圆锥截去下部形成的截头圆锥形容器。容器的高度为 60 cm。容器被放置在水平桌面上。现在向容器中倒入一些水。约翰发现容器中水的深度为 28 cm。

(a) 用 π 表示容器湿润的侧面积。

(b) 约翰声称容器中水的体积大于 0.1 m^3。你同意吗？解释你的答案。

练习 4.10 在一个车间中，两个底面半径为 R cm 的相同实心金属圆柱被熔化并重铸为 27 个较小的相同实心圆柱，每个小圆柱的底面半径为 r cm，高度为 10 cm。已知较大圆柱的底面积是较小圆柱的 9 倍。

(a) 求

(i) $r : R$，

(ii) 较大圆柱的高度。

(b) 工匠声称较小圆柱和较大圆柱是相似的。你同意吗？解释你的答案。

练习 4.11 在图 2 中，实心棱柱 $ABCDEFGH$ 的体积为 1020 cm^3。棱柱的底面 $ABCD$ 是一个梯形，其中 AD 平行于 BC。已知 $\angle BAD = 90°$，$AB = 12$ cm，$BC = 6$ cm，$DE = 10$ cm。

(a) 求 AD 的长度。

(b) 求棱柱 $ABCDEFGH$ 的总表面积。

练习 4.12 图 3(a) 显示了一个底面半径为 48 cm、高度为 96 cm 的实心金属圆锥。

(a) 用 π 表示圆锥的体积。

(b) 一个半径为 60 cm 的半球形容器垂直放置在水平表面上。容器完全装满牛奶。

(i) 用 π 表示容器中牛奶的体积。

(ii) 现在将圆锥垂直放入容器中，如图 3(b) 所示。工匠声称容器中剩余的牛奶体积大于 0.3 m^3。你同意吗？解释你的答案。

5. 指数与对数函数

5.1 可逆性

定义 5.1.1 — 函数. 若映射 $f|_D$ 满足：对任意 $x^* \in D$，存在唯一 $y^* \in f(D)$ 使得 $f(x^*) = y^*$，则称该映射为函数。

定义 5.1.2 — 可逆性. 若函数 $f|_D$ 满足：对任意 $y^* \in f(D)$，存在唯一 $x^* \in D$ 使得 $f(x^*) = y^*$，则称该函数是可逆的。需注意的是，若对应的 “f^{-1}” 不满足函数定义，则 f 不可逆。

对数函数是指数函数的逆函数。设 $f(x) = y$ 且 f 是可逆函数，则将其逆函数记作 f^{-1}，满足 $f^{-1}(y) = x$。

■ **例子 5.1**

- $y = \pm\sqrt{x}$ 不是函数。
- $y = x^2$ 是函数。
- $y = x^2$ 不可逆。
- 圆方程 $(x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$ 不是函数。
- $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 在 $(0°, 90°)$ 上可逆，但在 $(0°, 180°)$ 上不可逆（后续将深入学习）。
- a^x 是函数且可逆。

■

5.2 对数函数的算术规则

定义 5.2.1 对于任意 $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$，若 $0 < y = a^x$ 且 $x \in \mathbb{R}$，则定义对数函数为：

$$\log_a y = x$$

其中 a 称为对数函数的底数。

练习 5.1 证明以下命题:

(a) 对于任意 $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$，$\log_a 1 = 0$。

(b) 对于任意 $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$，$\log_a a = 1$。

(c) 解释为什么底数 $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$。

接下来证明对数函数的算术规则：

定理 5.2.1 对于任意 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$，有

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$$

证明. 存在 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$a^{x_1} = y_1 \quad 且 \quad a^{x_2} = y_2$$

因此 $a^{x_1+x_2} = y_1 y_2$。根据 $\log_a y_1 = x_1$ 和 $\log_a y_2 = x_2$，可得

$$\log_a y_1 + \log_a y_2 = x_1 + x_2 = \log_a y_1 y_2$$

∎

定理 5.2.2 对于任意 $y \in \mathbb{R}_{>0}$，$a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ 和 $b \in \mathbb{R}$,

$$\log_a y^b = b \log_a y$$

证明. 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $a^x = y$，则

$$a^{bx} = y^b$$

因此 $bx = \log_a y^b$。故

$$b \log_a y = bx = \log_a y^b$$

∎

练习 5.2 展开表达式（a, b, c, d 为实数常数）：

$$\log_a \frac{b}{c^d}$$

其中 $\frac{b}{c^d} > 0$。

练习 5.3 对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f > 0$，证明：

$$\log_a f(1)f(2)\cdots f(n) = \log_a f(1) + \log_a f(2) + \ldots + \log_a f(n)$$

其中 $a \in \mathbb{R}_{>0}\backslash\{1\}$。

练习 5.4 解下列方程：

(a) $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 = 0$

(b) $(\log_2 x)^3 - 6(\log_2 x)^2 + 11\log_2 x - 6 = 0$

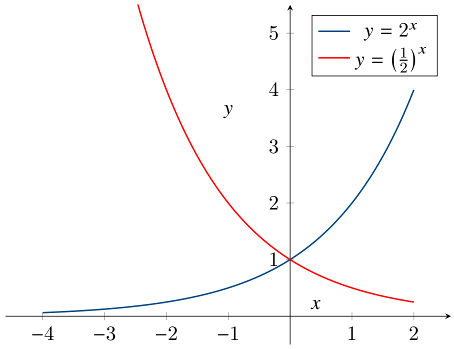
回忆一下增/减函数的定义，我们有以下例子：

例子 5.2
- x 在 $(-\infty, \infty)$ 上递增。
- x^2 在 $(-\infty, 0)$ 上递减，在 $(0, \infty)$ 上递增。
- $\sqrt{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上递增。
- a^x 在 $(-\infty, \infty)$ 上递增。
- 当 $a \in (0, 1)$ 时，$\log_a x$ 在 $(0, \infty)$ 上递减。
- 当 $a \in (1, \infty)$ 时，$\log_a x$ 在 $(0, \infty)$ 上递增。

■

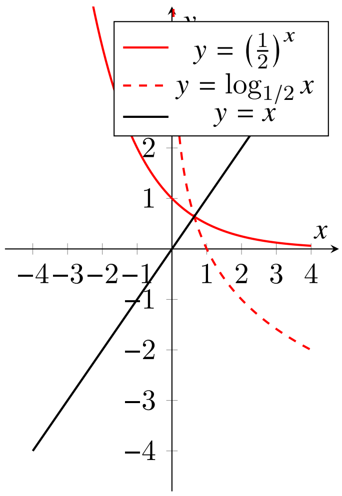
推论 5.2.3 任意递增或递减函数皆可逆。

当 $a > 1$ 时，$a^x = y$ 的图像满足：若 $x_2 > x_1$，则 $a^{x_2} > a^{x_1}$，因此 a^x 是增函数。当 $0 < a < 1$ 时，若 $x_2 > x_1$，则 $a^{x_1} > a^{x_2}$，因此 a^x 是减函数。两种情况下函数值均为正，且增减速度随 x 增大而加快。基于这些性质可绘制曲线：

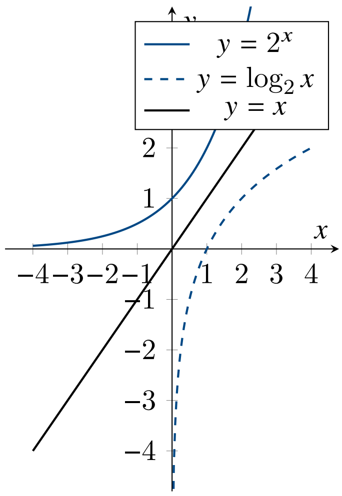


由于 $a^y = x$ 等价于 $\log_a x = y$，故 $\log_a$ 是 a^x 的反函数。其图像可通过交换 $a^x = y$ 的 x, y 值得到。

$0 < a < 1$



$a > 1$



定理 5.2.4 对于任意 $a > 0$，$a^x = 1$ 当且仅当 $x = 0$。

证明. 设 $x = x_1 + x_2$

$$a^x = 1$$
$$a^{x_1} = a^{-x_2}$$

由于 a^x 是严格递增函数，可得 $x = x_1 + x_2 = 0$。相反方向显然成立。 ■

定义 5.2.2 我们有以下定义：

- 全局极值：在 $\mathbb{R}$ 上的极值
- 局部极值：在 x 某邻域内的极值

定理 5.2.5 函数 $h(x) = a^x - x$ 存在唯一的全局/局部极小值。

证明. 假设 $x_2 > x_1 > 0$，令 $u := x_2 - x_1$，则有

$$h(x_2) - h(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} + x_1 - x_2 = a^{x_1}a^u - u - a^{x_1}$$

当且仅当 $x_1 > \frac{1}{\ln a}\ln\frac{u}{a^u-1}$ 时，$a^{x_1}a^u - u - a^{x_1} > 0$ 成立。对于 $a^{x_1}a^u - u - a^{x_1} > 0$ 的情况同理。由于 u 可与 x_1 无关，故存在 ξ 使得 h 在 $(-\infty, \xi)$ 递减，在 (ξ, ∞) 递增。因此存在唯一的全局/局部极小值 $\min_{x\in\mathbb{R}} h = h(\xi)$。 ■

定理 5.2.6 对于任意 $a > 1$，均有 $a^x \geq x$。特别地，存在某些 $a > 1$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $a^x = x$。

证明.
- 当 $x \leq 0$ 时，显然有 $a^x > 0 \geq x$。对于 $x > 0$ 的情况，由于 $a > 1$，可设 $a = 1 + \varepsilon$（其中 $\varepsilon > 0$）。根据二项式定理（我们会迟些证明）:

$$a^x = (1+\varepsilon)^x \geq \sum_{k=0}^{[x]} C_k^{[x]}\varepsilon^k \geq \frac{[x]!\varepsilon^j}{([x]-j)!}\cdot\frac{1}{j!}$$

  这里给定常数 $j \in \mathbb{Z}$，$[x]$ 表示 x 的整数部分。当 $\varepsilon \geq 1$ 时取 $j = 1$，可得对任意整数 $x \in \mathbb{Z}$ 有 $a^x \geq x$。
- 当 $\varepsilon < 1$ 时，对于充分大的 x，$[x]$ 可以足够大, 使得:

$$\frac{[x]!\varepsilon^j}{([x]-j)!} = \prod_{i=0}^{j-1}([x]-i)\varepsilon \geq \underbrace{\left(\prod_{i=k}^{j-1}([x]-i)\varepsilon\right)}_{:=C<1}[x][x-1]\varepsilon \geq [x]j!, \quad ([x]-(k-1))\varepsilon \geq 1$$

  其中 $k \in [0, j-1]$ 为常数。因此对于任意 $x \in \mathbb{Z}$ 和 $a > 1$，都有 $a^x \geq x$。
- 假设存在 $x^* \in \mathbb{R}$ 使得 $a^{x^*} < x^*$。由于 a^x 连续, 必存在 $\lambda \in ([x^*], x^*)$ 和 $\mu \in (x^*, [x^*]+1)$ 满足:

$$a^\lambda = \lambda, \quad a^\mu = \mu$$

  但根据定理 5.2.2，存在 ξ 使得 h 在 $(-\infty, \xi)$ 递减，在 (ξ, ∞) 递增，导致矛盾。因此对任意 $a > 1$ 都有 $a^x \geq x$。特别地，若 $a > 1$ 可表示为 $a = k^{k^{-1}}$（k 为常数），则当 $x = k$ 时 $a^x = x$。

■

R 这或许解释了为何 2025 年 DSE 多选题中出现争议性试题。

5.3 对数不等式

DSE 考试常要求用对数解不等式。注意增函数（如 $\log x$ 和 10^x）会保持不等号方向。

推论 5.3.1 对任意增函数 f，若 $u > v$，则

$$f(u) > f(v)$$

证明. 由定义可得。 ■

练习 5.5 求 $39^x > 100$ 的解区间。

练习 5.6 利用示例 5.2 中的函数，结合不等式 $2 < 5$ 和 $5 < 7$，构造相应的函数不等式。

5.4 历年试题精选

练习 5.7 15. 设 a,b 为常数，G 为 $y=a+\log_b x$ 的图像。已知 G 的 x 截距为 9，且经过点 $(243,3)$。用 y 表示 x。

练习 5.8 在 $\log_4 x$（横轴）与 $\log_8 y$（纵轴）坐标系中，设线性函数 $v = f(u)$ 的斜率为 $-\frac{1}{3}$ 且横轴截距为 3。用 $y = Ax^k$ 的形式表示 x 与 y 的关系（A, k 为常数）。

练习 5.9 在 $\log_5 x$（横轴）与 $\log_5 y$（纵轴）坐标系中，若线性函数 $v = f(u)$ 通过点 $(0, -4)$ 和 $(0, 2)$，则下列哪项必为真？

A. $xy^2 = 625$

B. $x^2 y = 625$

C. $\frac{y^2}{x} = 625$

D. $\frac{y}{x^2} = 625$

练习 5.10 设 a, b, c 为正常数。在同一直角坐标系中，$y = a + \log_b x$ 与 $y = \log_c x$ 的图像分别与 x 轴交于点 S 和 T，原点为 O。求 $OT : OS$ 的比值。

练习 5.11 在同一坐标系中考虑函数 $y = a^x$ 和 $y = b^x$ 的图像，其中 a, b 为正常数。若 $y = a^x$ 的图像是 $y = b^x$ 关于 y 轴的镜像（且 $y = a^x$ 严格递增），则下列哪些选项正确?

A. $a < 1$

B. $b > 1$

C. $ab = 1$

练习 5.12 设 $y = ab^x$（a, b 为常数），试绘制 x 与 $\log_y y$ 的关系图像。

练习 5.13 在同一坐标系中考虑函数 $y=b^x$ 和 $y=c^x$（b,c 为正常数）。若水平直线 L 分别与 y 轴、$y=b^x$、$y=c^x$ 相交于点 A,B,C，则下列哪些命题成立？

I. $b<c$

II. $bc>1$

III. $\frac{AB}{AC}=\log_b c$

练习 5.14 下列哪个数值最大？

A. 12^{241}

B. 24^{214}

C. 412^{142}

D. 42^{124}

练习 5.15 函数 $f(u) = v$ 描述 x 与 $\log_2 y$ 的线性关系。已知当 $(u, v) = (x, \log_9 y)$ 时，f 通过点 $(0, -2)$ 和 $(4, 0)$。若 $y = ab^x$，则 b 的值为？

A. -2

B. $\frac{1}{81}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 3

练习 5.16 图中直线 L 表示 $\log_4 x$ 与 $\log_4 y$ 的关系。已知当 $(u, v) = (\log_4 x, \log_4 y)$ 时，L 通过点 $(1, 2)$ 和 $(9, 6)$。若 $y = kx^a$，则 k 的值为？

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. 2

D. 8

练习 5.17 设 $x-y$ 平面上函数 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 的图像（a,b 为正常数），且对所有 $x>1$ 有 $\log_a x>\log_b x$。若垂直线与这两个对数曲线及 x 轴分别交于点 A,B,C，则下列哪些命题成立？

I. $a>1$

II. $a>b$

III. $\frac{AB}{BC}=\log_a\frac{b}{a}$

123