Projekt grupowy: V

Informatyka Przemysłowa

Termin oddania - 17.01.2021

Zad. 1 (10 pkt) Napisać funkcję `MojePolowienie.m` realizującą metodę połowienia (bisekcji) oraz funkcję `MojaRegulaFalsi.m` realizującą metodę reguły falsi, a następnie za ich pomocą rozwiązać równania:

a) $x = 1 + 0.3\cos(x)$, b) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

Narysować wykres błędu bezwzględnego osiąganego w kolejnych krokach metody. Ile należy wykonać iteracji, aby metodą połowienia i regułą falsi otrzymać przybliżoną wartość pierwiastka z błędem nie przekraczającym 10^{-4}. Następnie zbadać zależność liczby potrzebnych iteracji od szerokości przedziału poszukiwań do osiągnięcia zadanej dokładności i zilustrować ją wykresem. Przyjąć maksymalny przedział poszukiwań równy $[\alpha - 10, \alpha + 10]$, gdzie α jest pierwiastkiem równania. Następnie sukcesywnie zmniejszać przedział poszukiwań.

Zad. 2 (15 pkt) Rozwiązać równanie różniczkowe opisujące wahadło matematyczne bez tłumienia:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

oraz równanie różniczkowe dla małych wychyleń

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{2}$$

gdzie l jest długością wahadła, g jest przyspieszeniem ziemskim i $\varphi(t)$ jest wychyleniem wahadła od punktu równowagi mierzonym kątem.

Zadania do wykonania:

a) Rozwiązać układ (1) i (2) **metodą Eulera** (napisać własną funkcję `MojEuler`) na przedziale czterech okresów drgań $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

b) Wyniki metody dla równania (2) porównać z rozwiązaniem analitycznym. Narysować wykresy błędu całkowitego oraz lokalnego dla kąta położenia i prędkości kątowej. Jaki jest średni całkowity i lokalny błąd metody względem rozwiązania analitycznego?

c) Czy metoda jest stabilna i od czego zależy jej stabilność? Wypowiedzi uzasadnić.

Za warunki początkowe przyjąć:

- kąt wychylenia wahadła [radiany]: $\varphi_0 = \varphi(t = 0) = 1$,
- prędkość kątowa ruchu wahadła [radiany/s]: $\omega_0 = \dot{\varphi}(t = 0) = 0$.

Wyniki powinny być przedstawione na wykresie:

- czasowym: położenia i prędkości od czasu ($\varphi(t)$ vs. t i $\omega(t)$ vs. t),
- fazowym: zależność prędkości od położenia, czyli wykresie parametrycznym ($\omega(t)$ vs $\varphi(t)$).

W pliku **MojeWahadlo.m** zapisujemy funkcję `MojeWahadlo`, która musi mieć dwa parametry: pierwszy reprezentuje zmienną niezależną (czas), drugi jest wektorem ze zmiennymi zależnymi (czyli przesunięcie i prędkość). W swoich funkcjach przyjąć zakres zmiennej niezależnej $[0, 4T]$ oraz warunki początkowe $[1, 0]$.

Wstęp teoretyczny

Zgodnie z II prawem Newtona:

$$F = ma$$

W tym przypadku jedyną siłą jest grawitacja, czyli

$$F = -mg\sin\varphi$$

Porównując otrzymujemy

$$a = -g\sin\varphi$$

Długość łuku przy odchyleniu φ to $s = l \cdot \phi$. Mamy kolejno

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt} \\ a &= \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} \end{aligned}$$

Ruch zawieszonego na nierozciągliwej nici punktu materialnego prowadzi do równania ruchu rzędu drugiego w postaci

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0,$$

które można zapisać jako układ dwóch równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases}$$

gdzie l jest długością wahadła, g jest przyspieszeniem ziemskim, zaś φ bieżącym kątem jaki tworzy nić wahadła z pionem. Rozwiązaniem tego równania jest zależność położenia kątowego wahadła od czasu $\varphi(t)$. Na podstawie tej zależności, dla każdej chwili czasowej możliwe jest określenie położenia wahadła $P(t) = (x, y)$. Współrzędne x oraz y dla danego kąta wychylenia wahadła wyznaczyć można z zależności trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} x &= l\sin\varphi \\ y &= -l\cos\varphi \end{aligned}$$

Dla uproszczenia można przyjąć, że długość nici wynosi $l = 1$ m, a przyspieszenie ziemskie jest równe w przybliżeniu $g = 9.80665$ ms^{-2}.

Dla małych wychyleń przyjmuje się, że można zamiast $\sin\varphi$ napisać φ, co prowadzi do równania

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases}$$

Rozwiązanie analityczne równania ruchu uproszczonego modelu wahadła (założenie o małych kątach, które upraszcza równanie ruchu wahadła prostego na tyle, że jesteśmy w stanie rozwiązać je zarówno numerycznie jak i analitycznie!) jest tożsame z równaniem oscylatora harmonicznego prostego i dla kąta położenia ma postać:

$$\varphi = \varphi_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

oraz dla prędkości kątowej:

$$\omega = \dot{\varphi} = -\varphi_m\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

gdzie φ_m jest to maksymalne wychylenie wahadła (przyjąć $\varphi_m = 5°$).

Pliki z rozwiązaniami oraz funkcjami należy przesłać jako niespakowane załączniki jednym listem elektronicznym o temacie **MATLAB - PROJEKT GRUPOWY V** na adres:

zofia.grudziak@pw.edu.pl

W treści listu należy podać imiona i nazwiska.