Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Исраелян Ева Арамовна
Группа:	РК6-54Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Модель биологического нейрона

Студент ____________ Исраелян Е.А.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ ____________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2021

МГТУ им. Н.Э.Баумана, кафедра «Системы автоматизированного проектирования» (РК-6), шаблон LAB (размещение sa2tml)

Содержание

Модель биологического нейрона

1 Задание

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются далеко за пределами стандартных инженерных задач. Примером области, где подобные численные методы крайне востребованы, является нейробиология, где открытые в XX веке модели биологических нейронов выражаются через дифференциальные уравнения 1-го порядка. Математическая формализация моделей биологических нейронов также привела к появлению наиболее реалистичных архитектур нейронных сетей, известных как спайковые нейронные сети (Spiking Neural Networks). В данной лабораторной работе мы исследуем одну из простейших моделей подобного типа: модель Ижикевича.

Задача 20 (Модель Ижикевича)
Дана система из двух ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f_1(u, v) = 0.04v^2 + 5v + 140 - u + 1; \\ \frac{du}{dt} = f_2(u, v) = a(bv - u); \end{cases} \tag{1}$$

и дополнительного условия, определяющего возникновение импульса в нейроне:

$$\text{если } v \geq 30, \text{ то } \begin{cases} u \leftarrow c; \\ u \leftarrow u + d; \end{cases} \tag{2}$$

где v - потенциал мембраны (мВ), u - переменная восстановления мембраны (мВ), t - время (мс), I - внешний ток, приходящий через синапс в нейрон от всех нейронов, с которым он связан.

Описание параметров представленной системы:

a - задаёт временной масштаб для восстановления мембраны (чем больше a, тем быстрее происходит восстановление после импульсов);

b - чувствительность переменной восстановления к флуктуациям разности потенциалов;

c - значение потенциала мембраны сразу после импульса;

d - значение переменной восстановления мембраны сразу после импульса.

Таблица 1. Характерные режимы заданной динамической системы и соответствующие значения её параметров

Режим	a	b	c	d
Tonic spiking (TS)	0.02	0.2	-65	6
Phasic spiking (PS)	0.02	0.25	-65	6
Chattering (C)	0.02	0.2	-50	2
Fast spiking (FS)	0.1	0.2	-65	2

Требуется (базовая часть):

1. Реализовать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией f, начальным условием x_0, шагом по времени h и конечным временем t_n:
   - euler(x_0, t_n, f, h), где дискретная траектория строится с помощью метода Эйлера;
   – implicit_euler(x_0, t_n, f, h), где дискретная траектория строится с помощью неявного метода Эйлера;
   – runge_kutta(x_0, t_n, f, h), где дискретная траектория строится с помощью метода Рунге–Кутта 4-го порядка.

2. Для каждого из реализованных методов численно найти траектории заданной динамической системы, используя шаг $h = 0.5$ и характерные режимы, указанные в таблице 1. В качестве начальных условий можно использовать $v(0) = c$ и $u(0) = bv(0)$. Внешний ток принимается равным $I = 5$.

3. Вывести полученные траектории на четырех отдельных графиках как зависимости потенциала мембраны v от времени t, где каждый график должен соответствовать своему характерному режиму работы нейрона.

4. По полученным графикам кратко описать особенности указанных режимов.

Требуется (продвинутая часть):

1. Объяснить, в чем состоят принципиальные отличия реализованных методов? В чем они схожи?

2. Произвести интегрирование во времени до 1000 мс нейронной сети с помощью метода Эйлера, используя следующую информацию:
   (a) Динамика каждого нейрона в нейронной сети описывается заданной моделью Ижикевича. В нейронной сети имеется 800 возбуждающих нейронов и 200 тормозных. Возбуждающие нейроны имеют следующие значения параметров: $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -65 + 15\alpha^2$, $d = 8 - 6\beta^2$ и внешний ток в отсутствие токов от других нейронов равен $I = I_0 = 5\xi$, где α, β и ξ - случайные числа от 0 до 1. Тормозные нейроны имеют следующие значения параметров: $a = 0.02 + 0.08\gamma$, $b = 0.25 - 0.05\delta$, $c = -65$, $d = 2$ и внешний ток в отсутствие токов от других нейронов равен $I = I_0 = 2\zeta$, где γ, δ и ζ - случайные числа от 0 до 1. В качестве начальных условий используются значения $v(0) = -65$ и $u(0) = bv(0)$.
   (b) Нейронная сети может быть смоделирована с помощью полного графа. Матрица смежности W этого графа описывает значения токов, передаваемых от нейрона к нейрону в случае возникновения импульса. То есть, при возникновении импульса нейрона j внешний ток связанного с ним нейрона i единовременно увеличивается на величину W_{ij} и затем сразу же падает до нуля, что и моделирует передачу импульса по нейронной сети. Значение W_{ij} равно 0.5θ, если нейрон j

является возбуждающим, и -τ, если тормозным, где θ и τ – случайные числа от 0 до 1.

3. Вывести на экран импульсы всех нейронов как функцию времени и определить частоты характерных синхронных (или частично синхронных) колебаний нейронов в сети.

2 Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – изучить и применить на практике численные методы решения задачи Коши для системы ОДУ. Получить трактории потенциала мембраны биологического нейрона и выявить особенности характерных режимов. Сравнить рассмотренные методы и смоделивать нейронную сеть.

3 Вычисление дискретных траекторий системы ОДУ

Рассмотрим систему ОДУ 1-ого порядка в векторном виде:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

с начальными условиями $y_1(a) = \alpha_1, ..., y_n(a) = \alpha_n$, где $t \in [a; b]$.
Все рассматриваемые методы предполагают дискретизацию координаты t в сетку вида $t_i = a + ih,\ i = 1, ..., m$, где $h = \frac{b-a}{m} = t_{i+1} - t_i$ называют шагом. Это автоматически даёт дискретизацию решения $y(t)$ в виде $y_i = y(t_i)$.

Реализация метода Эйлера

Метод Эйлера формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i),\ \ i = 0, 1, ..., m-1, \end{gathered} \tag{3}$$

где $w_i \approx y\,(t_i)$.

Программная реализация метода Эйлера (3) с учётом дополнительного условия, определяющего возникновение импульса в нейроне (2), представлена в Листинге 1.

Листинг 1. Код функции euler(x_0, t_n, f, h)

```
def euler(x_0, t_n, f, h):
  m = int((t_n - t_0) / h)
  w = np.zeros(shape = (m + 1, len(x_0)))
  t = np.linspace(t_0, t_n, m + 1)
  w[0] = x_0
  for i in range(m):
    if w[i][0] >= 30: # проверка на возникновение импульса
      w[i][0] = c
```

```
        w[i][1] += d
    w[i + 1] = w[i] + h*f(t[i], w[i])
  return t, w
```

Реализация неявного метода Эйлера

Формулировка неявного метода Эйлера имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., m-1. \end{gathered} \tag{4}$$

Данный метод требует решения нелинейного уравнения относительно w_{i+1}:

$$w_{i+1} - w_i - hf(t_i, w_{i+1}) = 0$$

Для его решения использовалась функция scipy.optimize.root, в качестве начального приближения использовалось предыдущее значение w_i. Код функции, реализующей неявный метод Эйлера (4), представлен в Листинге 2.

Листинг 2. Код функции implicit_euler(x_0, t_n, f, h)

```
def implicit_euler(x_0, t_n, f, h):
  m = int((t_n - t_0) / h)
  w = np.zeros(shape = (m + 1, len(x_0)))
  t = np.linspace(t_0, t_n, m + 1)
  w[0] = x_0
  for i in range(m):
    if w[i][0] >= 30: # проверка на возникновение импульса
      w[i][0] = c
      w[i][1] += d
    cur_w = w[i]
    def func(x):
      return x - cur_w - h*f(t[i], x)
    sol = root(func, cur_w)
    w[i + 1] = sol.x
  return t, w
```

Реализация метода Рунге–Кутта 4-го порядка

Формулировка метода Рунге–Кутты 4-го порядка имеет вид:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha, \\
k_1 &= hf\left(t_i, w_i\right), \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
k_4 &= hf\left(t_i + h, w_i + k_3\right), \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \quad i = 0, 1, ..., m-1,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Код функции, реализующей метод Рунге-Кутта 4-ого порядка (5), представлен в Листинге 3.

Листинг 3. Код функции runge_kutta(x_0, t_n, f, h)

```python
def runge_kutta(x_0, t_n, f, h):
  m = int((t_n - t_0) / h)
  w = np.zeros(shape = (m + 1, len(x_0)))
  k1 = k2 = k3 = k4 = np.zeros(shape = (1, len(x_0)))
  t = np.linspace(t_0, t_n, m + 1)
  w[0] = x_0
  for i in range(m):
    if w[i][0] >= 30: # проверка на возникновение импульса
      w[i][0] = c
      w[i][1] += d
    k1 = h*f(t[i], w[i])
    k2 = h*f(t[i] + h/2., w[i] + k1/2.)
    k3 = h*f(t[i] + h/2., w[i] + k2/2.)
    k4 = h*f(t[i] + h, w[i] + k3)
    w[i + 1] = w[i] + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6.
  return t, w
```

4 Зависимость потенциала мембраны v от времени t

В контексте поставленной задачи: $f = [f_1(u, v), f_2(u, v)]^T$ (см. систему (1)). Код функции f(t, w), которая будет передаваться в ранее перечисленные функции, вычисляющие дискретные траектории системы ОДУ, представлен в Листинге 4.

Листинг 4. Код функции f(t, w)

```python
def f(t, w):
  v, u = w[0], w[1]
  v_new = 0.04*v**2 + 5*v + 140 - u + I
```

```
    u_new = a*(b*v - u)
    w_new = np.asarray([v_new, u_new])
    return w_new
```

Для получения графиков зависимостей $v(t)$ в цикле сначала подбирались значения параметров a, b, c, d в соответствии с режимом (см. таблицу (1)). Затем устанавливались начальные условия и с помощью реализованных функций рассчитывались дискретные траектории заданной динамической системы. За конечное время t_n было принято значение 100. Код для вывода полученных траекторий на 4 отдельных графиках как зависимостей потенциала мембраны v от t представлен в Листинге 5.

Листинг 5. Код для получения зависимостей $v(t)$ для 4 режимов

```
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(25, 15))
for i in range(4):
    mode_name, a, b, c, d = modes[i].values() # коэффиценты режима
    j, k = loc[i].values() # расположение графика
    x_0 = np.asarray([c, b*c]) # начальные условия
    t_euler, w_euler = euler(x_0, t_n, f, h) # метод Эйлера
    t_kutta, w_kutta = runge_kutta(x_0, t_n, f, h) # метод Рунге-Кутта
    t_imp, w_imp = implicit_euler(x_0, t_n, f, h) # неявный метод Эйлера
    v = get_v(len(t_euler), w_euler, w_kutta, w_imp) # получение значений v
    axs[j, k].set_title(mode_name)
    axs[j, k].plot(t_euler, v[0], linewidth=2, label = r'Euler')
    axs[j, k].plot(t_kutta, v[1], linewidth=2, label = r'Runge-Kutta')
    axs[j, k].plot(t_imp, v[2], linewidth=2, label = r'Implicit Euler')
```

Полученные зависимости представлены на рис. 1.

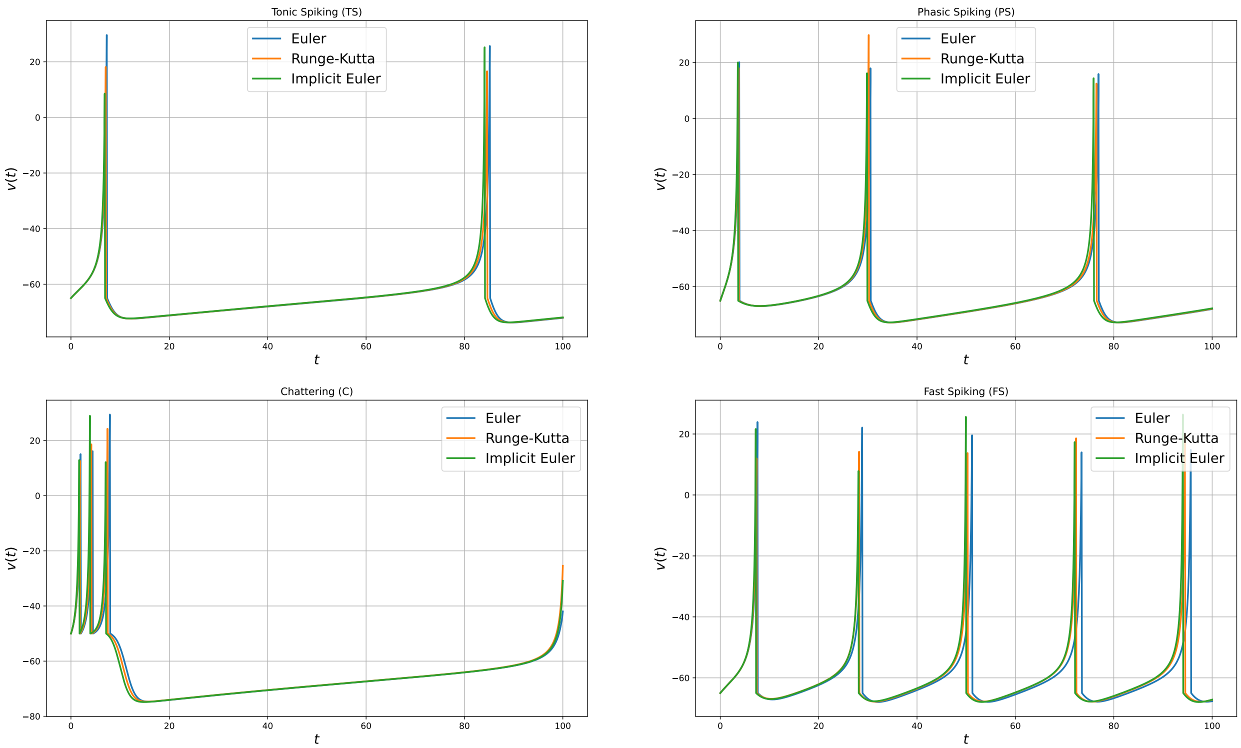

Рис. 1. Зависимость потенциала мембраны v от времени t для 4 характерных режимов.

5 Особенности характерных режимов

Полученные графики можно объяснить параметрами характерных режимов (см. таблицу (1)).

1. Параметр a задаёт временной масштаб для восстановления мембраны, его значение у режима Fast Spiking наибольшее. На рис. 1 мы можем наблюдать, что у графика, соответствующего режиму Fast Spiking, восстановление мембраны происходит быстрее, чем у остальных режимов.

2. В режиме Chattering мы можем наблюдать несколько импульсов подряд, после чего идёт долгое восстановление мембраны. Это объясняется тем, что значение параметра c, задающего значение потенциала мембраны сразу после импульса, у данного режима больше, чем у остальных.

3. В режиме Tonic Spiking за заданный временной промежуток происходит всего два импульса, когда у Phasic Spiking мы наблюдаем три импульса. Это связано с тем, что значение параметра b, задающее чувствительность переменной восстановления к флуктуациям разности потенциалов, у режима Phasic Spiking больше. Остальные параметры у этих двух режимов одинаковы.

6 Особенности реализованных методов для решения системы ОДУ

1. Рассмотренные в ходе лабораторной работы методы для решения системы ОДУ схожи тем, что предполагают дискретизацию координаты t. Вычисление значения каждой новой точки происходит на основе значения предыдущей.

2. Особенность метода Эйлера заключается в его порядке точности. Из курса лекций нам известно, что данный метод имеет глобальную погрешность $O(h)$ и локальную погрешность $O(h^2)$. Несмотря на это он самый быстрый из рассмотренных.

3. Метод Рунге-Кутта 4-ого порядка имеет большую вычислительную сложность, так как предполагает вычисление значений $k1$, $k2$, $k3$, $k4$ (то есть 4 вычисления функции $f(t, y)$) на каждой итерации. Однако данный метод имеет высокий порядок точности $O(h^4)$.

4. Так как неявный метод Эйлера предполагает решение нелинейных уравнений, его погрешность будет включать в себя погрешность выбранного метода их решения. Вычислительная сложность также будет зависеть от подхода к решению нелинейных уравнений. Однако этот метод имеет свойство абсолютной устойчивости.

7 Моделирование нейронной сети

Требовалось произвести интегрирование во времени до 1000 мс нейронной сети с помощью метода Эйлера. Для начала были сгенерированы значения параметров a, b, c, d для 800 возбуждающих и 200 тормозящих нейронов. Для получения случайных чисел использовалась функция np.random.uniform. Далее согласно условию были заданы начальные значения u и v для всех 1000 нейронов. Также создана матрица смежности W, описывающая значения токов, передаваемых от нейрона к нейрону в случае возникновения импульса. На временном промежутке от 0 до 1000 с шагом 0.5 рассчитывались значения u и v при помощи ранее рассмотренного метода Эйлера. На каждом шаге производилась проверка на возникновение импульса в нейронах, и индексы нейронов, в которых возник импульс, сохранялись для дальнейшего вывода на график. Внешний ток нейронов, связанных с нейронами, в которых возник импульс, увеличивался на величину W_{ij} согласно условию.
Полученный график в виде функции времени, где ось абсцисс соответствует времени, а ось ординат - номеру нейрона, представлен на рис 2 .

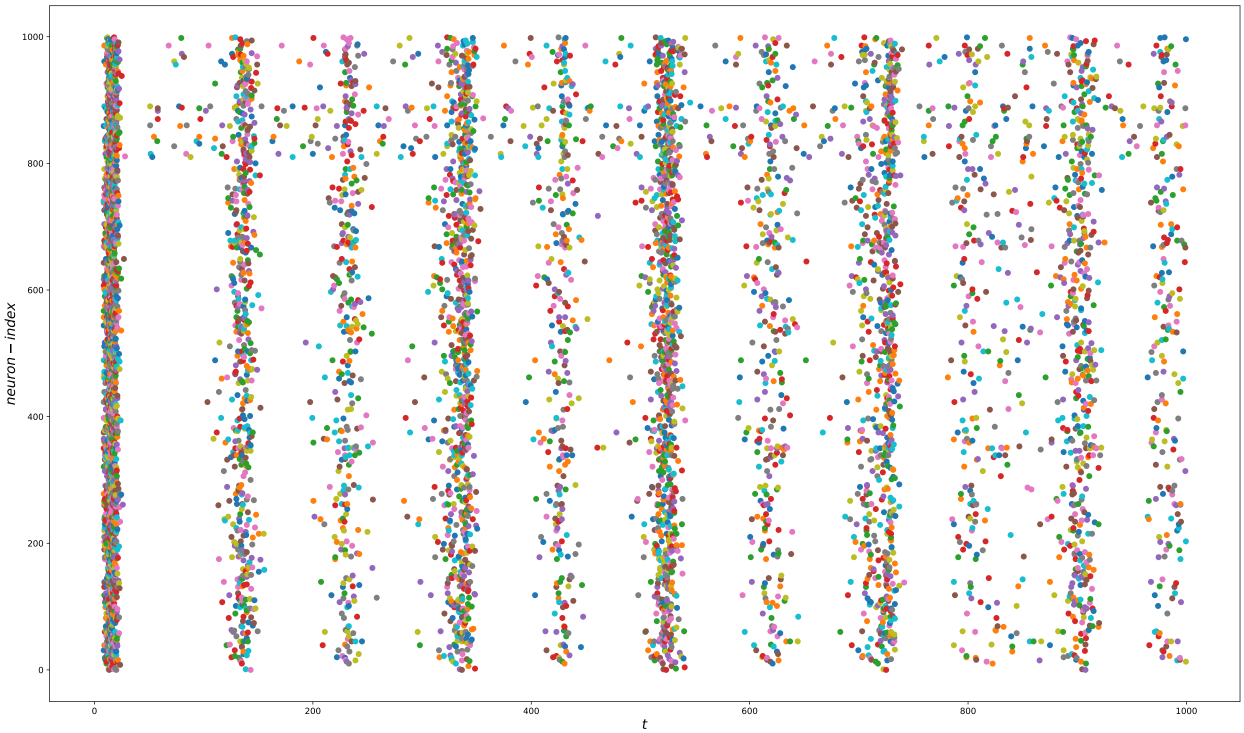

Рис. 2. Функция времени, где ось абсцисс соответсвует времени, а ось ординат - номеру нейрона, точки - импульсам в нейронах.

8 Заключение

1. В ходе лабораторной работы были реализованы функции для решения системы ОДУ такими методами, как метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Рунге-Кутта 4-ого порядка. Эти функции были применены для получения дискретных траекторий системы ОДУ 1-ого порядка (1).

2. По полученным графикам были сделаны выводы о характерных режимах заданной динамической системы. Наглядно было рассмотрено влияние значений параметров каждого характерного режима на потенциал мембраны $v(t)$.

3. Были найдены сходства и различия реализованных методов. Особенностью метода Эйлера были его скорость и большая погрешность. Метод Рунге-Кутта оказался более точным, но вместе с тем более вычислительно сложным. Неявный метод Эйлера, несмотря на свою устойчивость, также имел высокую вычислительную сложность из-за необходимости решения системы нелинейных уравнений.

4. Была смоделирована нейронная сеть с помощью полного графа и получен график функции времени с частично синхронными колебаниями нейронов. Период колебаний примерно равен 100 мс, а значит частота колебаний примерно равна 10 Гц.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140.

Выходные данные

Исраелян Е.А.. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2021. — 12 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка: *ассистент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин*

Решение и вёрстка: *студент группы РК6-54Б, Исраелян Е.А.*

2021, осенний семестр