



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»  
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

## ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Израелян Ева Арамовна
Группа:	РК6-54Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Использование аппроксимаций для численной оптимизации

Студент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Израелян Е.А.  
\_\_\_\_\_  
Фамилия, И.О.

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

\_\_\_\_\_  
Фамилия, И.О.

Москва, 2021

# Содержание

<b>Использование аппроксимаций для численной оптимизации</b>	<b>3</b>
1    Задание . . . . .	3
2    Цель выполнения лабораторной работы . . . . .	4
3    Разработка функции численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона . . . . .	4
4    Разработка функции численного интегрирования с помощью составной формулы трапеций . . . . .	5
5    Вычисление интеграла с помощью составных формул численного интегрирования . . . . .	5
6    Вычисление абсолютной погрешности численного интегрирования с помощью составных формул . . . . .	6
7    Зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования . . . . .	7
8    Заключение . . . . .	8

# Использование аппроксимаций для численной оптимизации

## 1 Задание

В данной лабораторной работе была рассмотрена одна из старейших задач вариационного исчисления: задача о брахистохроне, т.е. задача о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки  $(x, y) = (0, 0)$  достигнет точки  $(x, y) = (a, y_a)$  под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось  $y$  направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая  $y(x)$ , которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$F(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx, \quad (1)$$

где  $g$  обозначает ускорение свободного падения, и  $y'(x) = dy/dx$ . Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{cases} x(t) = C \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \\ y(t) = C \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) \end{cases} \quad (2)$$

Параметр  $t \in [0; T]$ . В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. Здесь и далее принимается  $a = 2$ ,  $y_a = 1$ . Константы циклоиды для этого граничного условия равны  $C = 1.03439984$ ,  $T = 1.75418$ .

### Задача 15 (Аппроксимация) Требуется:

1. Написать функцию `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции  $f$  на интервале  $[a; b]$  по  $n$  узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию `composite_trapezoid(a, b, n, f)` численного интегрирования функции  $f$  на интервале  $[a; b]$  по  $n$  узлам с помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитать интеграл (1) для функции  $y(x)$ , соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений  $n \in [3; 9999]$ . Построить  $\log\text{-}\log$  график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объяснить, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.

5. Для обеих формул сравнить порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обосновать свой ответ.

## 2 Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – вычислить время движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска при помощи составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций. Сделать выводы о зависимости абсолютной погрешности от шага интегрирования.

## 3 Разработка функции численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона

Для того чтобы рассчитать интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  можно разделить отрезок  $[a; b]$  на чётное число подотрезков  $n$  и применить формулу Симпсона на каждом из них. Составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_1) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) + f(x_{n+1}) \right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad (3)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Разработанная функция численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона (3) принимает на вход пределы интегрирования  $a$  и  $b$ , количество узлов  $n$  и функцию `func`, которая возвращает значения подынтегральной функции на всех узлах. Остаточный член в функции не учитывается, так как предполагается достаточно малым. Код функции `composite_simpson(a, b, n, func)` представлен в Листинге 1.

Листинг 1. Код функции `composite_simpson(a, b, n, func)`

```

1 def composite_simpson(a, b, n, func):
2     if n%2 != 0:
3         n+=1
4     x = np.linspace(a, b, n + 1)
5     f = func(x)
6     h = (b - a) / n
7     return h/3.*(f[0] + 2*np.sum(f[2:-1:2]) + 4*np.sum(f[1::2]) + f[-1])

```

## 4 Разработка функции численного интегрирования с помощью составной формулы трапеций

Составная формула трапеций, где количество  $n$  может быть как чётным, так и нечётным, имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_1) + 2 \sum_{i=1}^n f(x_i) + f(x_{n+1}) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad (4)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Аналогично функции `composite_simpson(a, b, n, func)` была разработана функция `composite_trapezoid(a, b, n, func)` для численного интегрирования с помощью составной формулы трапеций (4). Её код представлен в Листинге 2.

Листинг 2. Код функции `composite_trapezoid(a, b, n, func)`

```
1 def composite_trapezoid(a, b, n, func):
2     x = np.linspace(a, b, n + 1)
3     f = func(x)
4     h = (b - a) / n
5     return h/2.*(f[0] + 2*np.sum(f[1:-1]) + f[-1])
```

## 5 Вычисление интеграла с помощью составных формул численного интегрирования

Для того чтобы рассчитать интеграл (1) нам потребуются значения подынтегральной функции в  $n+1$  узлах, для которой, в свою очередь, требуются значения кривой наискорейшего спуска  $y(x)$  и её первой производной  $y'(x)$ . Для их расчёта были использованы функции, разработанные в ходе лабораторной работы №1, посвящённой интерполяции кубическими сплайнами.

Для расчёта коэффициентов кубического сплайна была задействована функция `qubic_spline_coeff(x_nodes, y_nodes)`, для расчёта её значений  $y(x)$  - `qubic_spline(x, qs_coeff, x_nodes, y_nodes)` и для расчёта значений первой производной  $y'(x)$  - `d_qubic_spline(x, qs_coeff, x_nodes, y_nodes)`. Перечисленные функции были подробно описаны в отчёте по лабораторной работе №1.

Сначала было сгенерировано  $10^4$  равноудалённых значений для параметра  $t$  на промежутке  $[1e-1; T]$ . Нижний предел интегрирования был взят с отступом от нуля, чтобы избежать деления на ноль. Так как рассчитанные по параметрически заданной системе уравнений (2) узлы не равноудалённые, было принято решение отобрать из них 500 равноудалённых с целью дальнейшего использования для интерполяции.

Для заново сгенерированных 500 равноудалённых узлов с помощью разработанной функции `nearest_index(x, x_new)` были отобраны 500 примерно равноудалённых значений из первоначальных  $10^4$  узлов. Код функции `nearest_index(x, x_new)` представлен Листинге 3.

Листинг 3. Код функции nearest\_index(x, x\_new)

```

1 def nearest_index(x, x_new):
2     index = np.searchsorted(x, x_new)
3     if np.fabs(x[index-1]-x_new) < np.fabs(x[index]-x_new):
4         return index-1
5     else:
6         return index

```

По полученным 500 узлам были рассчитаны коэффициенты кубического сплайна.

Была разработана функция res\_function(x), которая, получая на вход массив значений  $x$ , считает значения подынтегральной функции в этих точках. Её код представлен в Листинге 4.

Листинг 4. Код функции res\_function(x)

```

1 def res_function(x):
2     y_spline = [] #значения сплайна в точках x[i], i = 0, ..., n
3     d_y_spline = [] #значения первой производной сплайна в точках x[i], i = 0, ..., n
4     res_func = [] #значения подынтегральной функции в точках x[i], i = 0, ..., n
5     for i in range(len(x)):
6         y_spline.append(qubic_spline(x[i], coeff, x_for_interpol, y_for_interpol))
7         d_y_spline.append(d_qubic_spline(x[i], coeff, x_for_interpol, y_for_interpol))
8         res_func.append(np.sqrt((1. + d_y_spline[i]**2.) / (2. * g * y_spline[i])))
9     return res_func

```

## 6 Вычисление абсолютной погрешности численного интегрирования с помощью составных формул

Для расчёта абсолютной погрешности требуется точное значение интеграла. Его можно получить, если в выражении (1) перейти к интегрированию по  $t$ . Пусть  $t_0$  - это нижний предел интегрирования.

$$dx = C[1 - \cos(2t)]dt$$

$$dy = C \sin(2t)dt$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}$$

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \int_{t_0}^{t_a} \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{2gy(t)}} dx dt = \sqrt{\frac{1}{2g}} \cdot \int_{t_0}^{t_a} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}\right)^2}{\frac{1}{2}C(1 - \cos 2t)}} C(1 - \cos 2t) dt = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2g}} \cdot \int_{t_0}^{t_a} \sqrt{\frac{2(1 - \cos(2t))}{1 - \cos(2t)}} 2C dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} \cdot \int_{t_0}^{t_a} dt
 \end{aligned}$$

$$F(y) = \sqrt{\frac{2C}{g}} \cdot \int_{t_0}^{t_a} dt \quad (5)$$

По формуле (5) рассчитывалось точное значение интеграла `exact_integral`, которое в функциях `error_simpson(a, b, n)` и `error_trapezoid(a, b, n)` использовалось для расчёта абсолютной погрешности вычисления. Листинги 5 и 6 для этих функций представлены ниже.

Листинг 5. Код функции `error_simpson(a, b, n)`:

```
1 def error_simpson(a, b, n):
2     return np.abs(exact_integral - composite_simpson(a, b, n, res_function))
```

Листинг 6. Код функции `error_trapezoid(a, b, n)`:

```
1 def error_trapezoid(a, b, n):
2     return np.abs(exact_integral - composite_trapezoid(a, b, n, res_function))
```

## 7 Зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования

Код функции для отрисовки log-log графика зависимости абсолютной погрешности от шага интегрирования представлен в Листинге 7.

Листинг 7. Код функции `show_error()`:

```
1 def show_error():
2     fig, ax = plt.subplots(figsize=(12,8))
3     h = np.logspace(-4, -1, 30)
4     n = np.array((b-a)/h, dtype=int)
5     ax.loglog((b-a)/n, [error_simpson(a, b, n_) for n_ in n], 'o', label = r'$simpson$')
6     ax.loglog((b-a)/n, [error_trapezoid(a, b, n_) for n_ in n], 'o', label = r'$trapezoid$')
7     ax.set_xlabel(r'$h$', fontsize=16)
8     ax.set_ylabel(r'$E$', fontsize=16)
9     ax.legend(fontsize=16)
10    ax.grid()
```

Log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул представлен на рисунке 1.

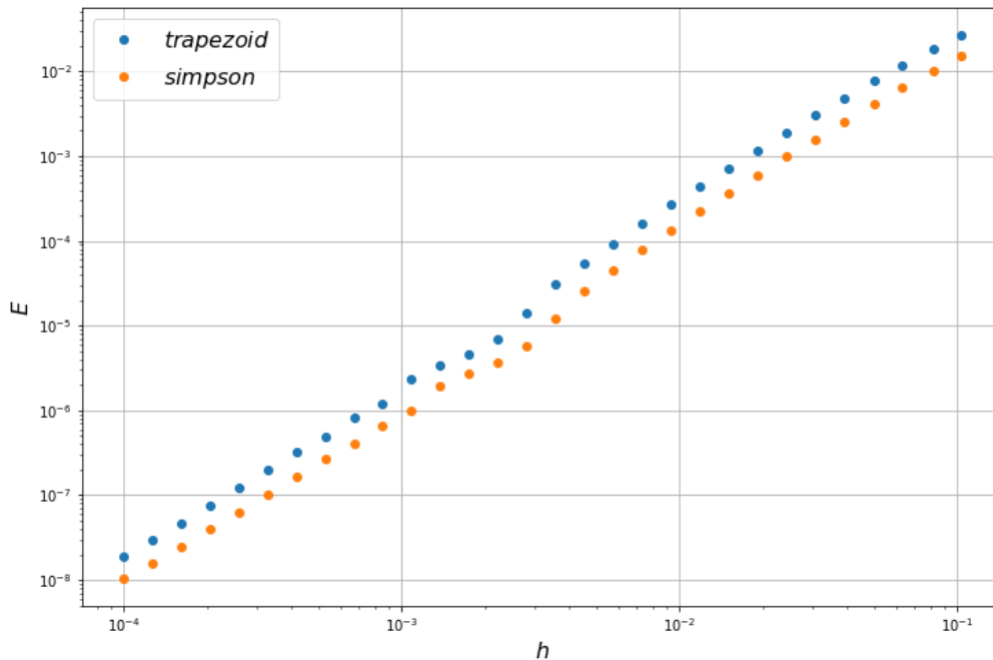


Рис. 1. Зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования.

Порядок точности формул будет равен тангенсу угла наклона полученных графиков.

$$k = \frac{-6 - (-8)}{-3 - (-4)} = 2$$

Полученный порядок точности пропорционален  $O(h^2)$ .

Аналитический порядок точности можно определить по остаточным членам формул (3) и (4): для формулы Симпсона порядок пропорционален  $O(h^4)$ , а для формулы трапеций  $O(h^2)$ .

Полученный порядок точности для формулы Симпсона значительно отличается от аналитического. Это можно объяснить тем, что итоговая погрешность включает в себя кроме погрешности интегрирования ещё и погрешность интерполяции, которую мы используем для расчёта значений  $y(x)$  и  $y'(x)$ . Кроме того, функция не гладкая и интегрирование производится не от 0, а с некоторым отступом, что также влияет на конечный результат.

На лекции было доказано, что полная погрешность оценивается как  $(b-a)\epsilon$ , то есть не зависит ни от шага, ни от количества подотрезков. Исходя из этого можно сделать вывод, что оптимального шага интегрирования не существует.

## 8 Заключение

1. В результате лабораторной работы были разработаны функции для численного интегрирования с помощью составных формул Симпсона и трапеций.





2. Получены зависимости абсолютной погрешности от шага интегрирования для обеих формул, рассчитан порядок точности формул. По полученным порядкам были сделаны выводы.
3. Были освоены базовые инструменты LaTeX для составления отчёта.

### Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140.

### Выходные данные

Исраелян Е.А.. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2021. — 9 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка:  ассистент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин  
Решение и вёрстка:  студент группы РК6-54Б, Исраелян Е.А.

2021, осенний семестр