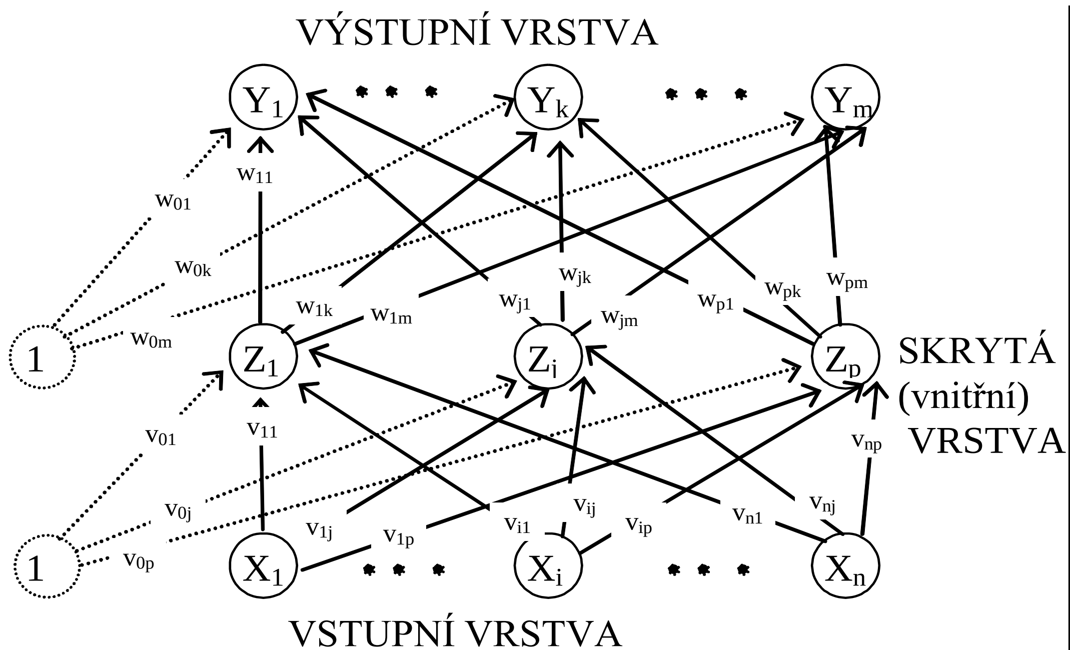
Backpropagation

odvození adaptačního pravidla

Topologie vícevrstvé sítě

Vícevrstvá neuronová síť je tvořena minimálně třemi vrstvami neuronů: **vstupní**, **výstupní** a alespoň jednou **vnitřní** vrstvou. Vždy mezi dvěma sousedními vrstvami se pak nachází tzv. *úplné propojení neuronů*, tedy každý **neuron nižší vrstvy** je spojen se **všemi neurony vrstvy vyšší**.

Bias odpovídá váhové hodnotě přiřazené spojení mezi daným neuronem a fiktivním neuronem, jehož aktivace je vždy *1*.



Standardní metoda backpropagation

Adaptační algoritmus **zpětného šíření chyby** (*backpropagation*).

Samotný algoritmus obsahuje tři etapy:

- dopředné (*feedforward*) šíření vstupního signálu tréninkového vzoru
- zpětné šíření chyby
- aktualizace váhových hodnot na spojeních

Adaptační algoritmus backpropagation

Krok 0. Váhové hodnoty a bias jsou inicializovány malými náhodnými čísly.

Přiřazení inicializační hodnoty koeficientu učení α.

Krok 1. Dokud není splněna **podmínka ukončení výpočtu**, opakovat kroky (2 až 9).

Podmínka ukončení:
pokud již nenastávají žádné změny váhových hodnot nebo pokud již bylo vykonáno maximálně definované množství váhových změn, stop; jinak, pokračovat.

Feedforward:

Krok 3. Aktivovat vstupní neurony (X_i, $i=1, \ldots n$)

$x_i = s_i$..

Krok 4 Vypočítat vstupní hodnoty vnitřních neuronů:

(Z_j, $j=1,\ldots, p$):

$$z\_in_j = v_{0\,j} + \sum_{i=1}^{n} x_i v_{i\,j}\,.$$

Stanovení výstupních hodnot vnitřních neuronů

$$z_j = f\left(z\_in_j\right).$$

Krok 5 Stanovení skutečných výstupních hodnoty signálu

neuronové sítě (Y_k, $k=1, \ldots, m$):

$$y\_in_k = w_{0\,k} + \sum_{j=1}^{p} z_j\ w_{j\,k}\,,$$

$$y_k = f\left(y\_in_k\right).$$

Backpropagation:

Krok 6 Ke každému neuronu ve výstupní vrstvě (Y_k, $k=1, ..., m$) je přiřazena hodnota očekávaného výstupu pro vstupní tréninkový vzor. Dále je vypočteno $\delta_k = (t_k - y_k) f'(y\_in_k)$, které je součástí váhové korekce $\Delta w_{jk} = \alpha \delta_k z_j$ i korekce biasu $\Delta w_{0k} = \alpha \delta_k$.

Krok 7 Ke každému neuronu ve vnitřní vrstvě (Zj, $j=1, ..., p$) je přiřazena sumace jeho delta vstupů (tj. z neuronů, které se nacházejí v následující vrstvě), $\delta\_in_j = \sum_{k=1}^{m} \delta_k w_{jk}$. Vynásobením získaných hodnot derivací jejich aktivační funkce obdržíme $\delta_j = \delta\_in_j f'(z\_in_j)$, které je součástí váhové korekce $\Delta v_{ij} = \alpha \delta_j x_i$ i korekce biasu $\Delta v_{0j} = \alpha \delta_j$.

Aktualizace vah a prahů:

Krok 8 Každý neuron ve výstupní vrstvě (Y_k, *k=1, ..., m)* aktualizuje na svých spojeních váhové hodnoty včetně svého biasu (*j=0, ..., p)*:

$$w_{jk}(new) = w_{jk}(old) + \Delta w_{jk}.$$

Každý neuron ve vnitřní vrstvě (Z_j, *j=1, ..., p)* aktualizuje na svých spojeních váhové hodnoty včetně svého biasu (*i=0, ..., n)*:

$$v_{ij}(new) = v_{ij}(old) + \Delta v_{ij}.$$

Krok 9. Podmínka ukončení:

pokud již nenastávají žádné změny váhových hodnot nebo pokud již bylo vykonáno maximálně definované množství váhových změn, stop; jinak, pokračovat.

Trénovací množina

$$\boldsymbol{T} = \{[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{t_1}], \dots, [\boldsymbol{x_p}, \boldsymbol{t_p}]\}$$

$\boldsymbol{x_j} = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ vstupní vektor *j.* vzoru

$\boldsymbol{t_j} = (t_{1j}, \dots, t_{mj})$ výstupní vektor *j.* vzoru

p počet vzorů trénovací množiny

Chyba neuronové sítě

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\left(y_{ij} - t_{ij}\right)^2$$

$\boldsymbol{y_j} = \left(y_{1j}, \dots, y_{mj}\right)$ **skutečný** výstupní vektor *j.* vzoru

$\boldsymbol{t_j} = \left(t_{1j}, \dots, t_{mj}\right)$ **požadovaný** výstupní vektor *j.* vzoru

Přírůstky vah

$$\Delta w_i = -\alpha \frac{\partial E}{\partial w_i} + \mu \Delta w_i^{'}$$

α koeficient učení z intervalu $(0,1\rangle$

μ koeficient setrvačnosti - momentum z intervalu $\langle 0,1\rangle$

$\Delta w_i^{'}$ změna váhy v předchozím kroku

- $\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y\_in} \cdot \frac{\partial y\_in}{\partial w_i}$
- $E = \frac{1}{2}(y_i - t_i)^2$ chyba pro *i*. výstupní neuron
- $y = \frac{1}{1+e^{-\lambda \cdot y\_in}} = \left(1 + e^{-\lambda \cdot y\_in}\right)^{-1}$ aktivační (přenosová) funkce – logická sigmoida (λ je parametr strmost sigmoidy)
- $y\_in = \sum_i x_i \cdot w_i$ vnitřní potenciál neuronu
  …. jedna složka $y\_in = x_i \cdot w_i$

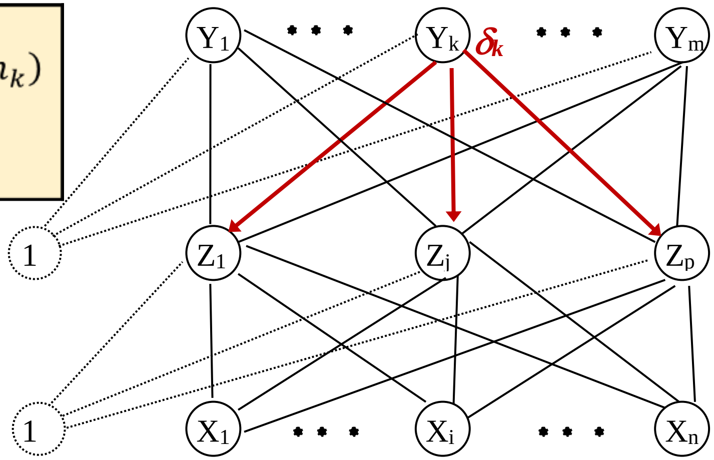
Přírůstky vah mezi vnitřní a výstupní vrstvou:

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y\_in} \cdot \frac{\partial y\_in}{\partial w_i}$$

SKRIPTA:

$$\delta_k = (t_k - y_k) \cdot f'(y\_in_k)$$

$$\Delta w_{jk} = \alpha \cdot \delta_k \cdot z_j$$



$$\frac{\partial E}{\partial y} = (y - t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial y_{in}} = -1 \cdot \left(1 + e^{-\lambda \cdot y\_in}\right)^{-2} \cdot e^{-\lambda \cdot y\_in} \cdot (-\lambda)$$

$$= \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot y\_in} + 1 - 1}{(1 + e^{-\lambda \cdot y\_in})^2} = \lambda \cdot \left(\frac{\left(1 + e^{-\lambda \cdot y\_in}\right)}{(1 + e^{-\lambda \cdot y\_in})^2} - \frac{1}{(1 + e^{-\lambda \cdot y\_in})^2} \right)$$

$$= \lambda \cdot (y - y^2) = \lambda \cdot y \cdot (1 - y)$$

$$\frac{\partial y\_in}{\partial w_i} = x_i$$

$$\Delta w_i = -\alpha \cdot (y - t) \cdot \lambda \cdot y \cdot (1 - y) \cdot x_i$$

$$\boxed{\Delta w_{jk} = \alpha \cdot (t_k - y_k) \cdot \lambda \cdot y \cdot (1 - y) \cdot z_j}$$

Přírůstky vah mezi vstupní a vnitřní vrstvou:

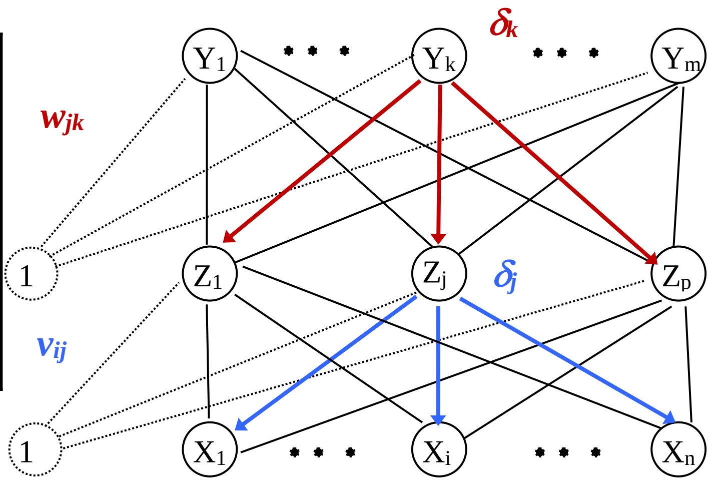
$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y\_in} \cdot \frac{\partial y\_in}{\partial w_i}$$

SKRIPTA:

$$\delta\_in_j = \sum_{k=1}^{m} \delta_k \cdot w_{jk}$$

$$\delta_j = \delta\_in_j \cdot f'\left(z_{in_j}\right)$$

$$\Delta v_{ij} = \alpha \cdot \delta_j \cdot x_i$$



$$\frac{\partial E}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial E}{\partial y\_in_i} \cdot \frac{\partial y\_in_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y\_in_i} \cdot \frac{\partial y\_in_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y\_in_i} \cdot w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (y_i - t_i) \cdot \lambda \cdot y_i \cdot (1 - y_i) \cdot w_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial y\_in} = \lambda \cdot z \cdot (1 - z) \qquad \frac{\partial y\_in}{\partial w_i} = x_i$$

$$\Delta w_i = -\alpha \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} (y_i - t_i) \cdot \lambda \cdot y_i \cdot (1 - y_i) \cdot w_i \right) \lambda \cdot z \cdot (1 - z) \cdot x_i$$

$$\boxed{\Delta v_{ij} = \alpha \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} (t_k - y_k) \cdot \lambda \cdot y_k \cdot (1 - y_k) \cdot w_{kj} \right) \lambda \cdot z_j \cdot (1 - z_j) \cdot x_i}$$