Билет 1

6 июня 2022 г.   15:24

Уравнения Лапласа и Пуассона. Примеры стационарных явлений. Потенциалы (электростатический, потенциал скоростей и др.). Постановка краевых задач. Задачи Дирихле и Неймана.

Уравнение Лапласа:

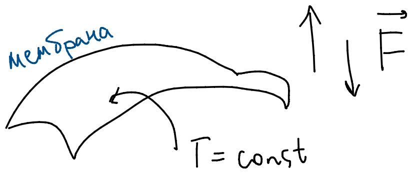
$$\Delta u = 0$$

В декартовых: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

В цилиндрических: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

В сферических: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$

Уравнение Пуассона: $\Delta u = f$



Примеры стационарных явлений:

Мембрана: $\rho u_{tt} = \operatorname{div} T\nabla u + F$

$\rho u_{tt}=0$

Рассмотрим задачу, если нет зависимости от времени в F и проекция внешних сил на плоскость мембраны равна 0, тогда получим: $\Delta u = -\frac{F}{T}$

можем вынести T из div, а $\operatorname{div}\nabla = \Delta$

Это **уравнение Пуассона** будет описывать **стационарный прогиб мембраны**.

Уравнение теплопроводности в твёрдом теле:

$$c\rho u_t = \operatorname{div} k\nabla u + Q$$

Рассмотрим задачу, если мощность источников тепла Q не зависит от времени и k постоянно, тогда получим: $\Delta u = -\frac{Q}{k}$

Это **уравнение Пуассона** будет описывать **стационарное распределение температуры внутри твёрдого тела**.

Потенциалы:

Электростатический потенциал: $\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$

ρ — объемная плотность электрических зарядов

ε — диэлектрическая проницаемость, не зависит от пространственных координат

т.к. электро**статика**, то о времени очевидно ничего не зависит

Потенциал стационарного тока: $\Delta u = 0$

Всюду, вне источников тока, предполагая проводимость σ не зависящей от пространственных координат, он удовлетворяет **уравнению Лапласа**.

Потенциал скорости:

Уравнение непрерывности для идеальной жидкости: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0$

Если жидкость несжимаема, то $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Введём потенциал скоростей $\vec{v} = -\nabla u$ (u — потенциал)

Подставим в исходное уравнение и получим что потенциал будет удовлетворять **уравнению Лапласа**.

Постановка краевых задач.

У нас есть несколько видов задач: **внешние** и **внутренние**

Внутренние ставятся в **ограниченной области** и **граница** этой области **обязательно** должна быть **замкнутой**.
Как пример постановки такой задачи можно привести:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] = f(M), M \in D \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \mu(M), \ M \in S \end{cases} \quad \text{при этом: } \alpha(M) + \beta(M) > 0, \ M \in S$$

Оператор $\mathcal{L}[u] \equiv \operatorname{div}(-k(M)\overset{\text{grad}}{\nabla} u) + q(M) \cdot u, \ k(M) > 0, \ q(M) \geq 0$

Внешние ставятся на **неограниченной области** и, в отличии от внутренней задачи при постановке внешних задач требуют **регулярность решения на бесконечности**.
Для чего это надо? А для того чтобы мы могли выделить единственное решение задачи.

Т.е. постановка будет выглядеть аналогично, однако рассмотрим это условие регулярности отдельно:

В **двухмерном случае** решение задачи должно быть ограничено на бесконечности, можно это формализовать как: $\lim\limits_{M \to \infty} |u(M)| < +\infty$

В **трёхмерном случае** решение задачи этого будет недостаточно, необходимо потребовать, чтобы функция $u(M)$ на бесконечности равномерно стремилась к нулю.
Записать это можно так:

$$\lim_{M \to \infty} |u(M)| < g(r), \ g(r) \xrightarrow{r \to +\infty} 0 \quad \text{либо} \quad \lim_{M \to \infty} |u(M)| < \frac{A}{r}, \ A = const < +\infty$$

На практике обычно хватит просто $\lim\limits_{M \to \infty} |u(M)| = 0$

Задачи Дирихле и Неймана.

Задача Дирихле это внутренняя или внешняя краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона с граничным условием первого рода, например:

$$\begin{cases} \Delta u = f(M), \ M \in D \\ u|_S = \mu(M), \ M \in S \end{cases}$$

+условие регулярности для внешней задачи.

Задача Неймана это внутренняя или внешняя краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона с граничным условием второго рода, например:

$$\begin{cases} \Delta u = f(M), \ M \in D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(M), \ M \in S \end{cases}$$

+условие регулярности для внешней задачи.