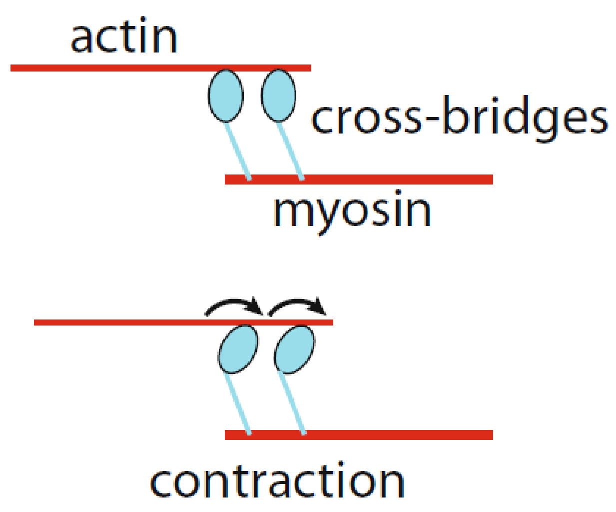
Kontrakce cév

Síly působící na biologické tkáně

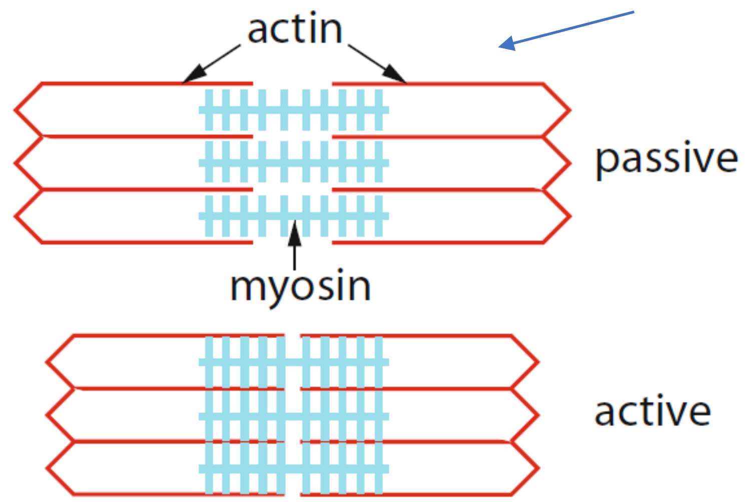
- Pasivní
  - Síly vzniklé deformací spojené s přeměnou mechanické energie
- Aktivní
  - Vyžadují zdroj metabolické energie vzniklé z biochemických reakcí
  - Nejčastěji kontraktilní síly
  - Jejich modelování je fenomenologické a nezahrnuje biofyzikální vysvětlení

Kontrakce svaloviny

- **Sarkomera**
  - Základní strukturální a funkční jednotka myofibril
  - Skládá se z proteinů (aktin, myozin + další)
- „**Sliding filament theory**“ – princip kontrakce
  - Myozinová hlava se naváže na aktinová filamenta (vyytvoří tzv. cross-bridge)
  - Při hydrolýze ATP se myozinová hlava otočí a posune aktinový filament
  - Myozinová hlava se odpojí od aktinu a vrátí se do původní polohy a cyklus se opakuje
- Kosterní svaly jsou určeny pro velikou sílu a rychlost kontrakce –> jsou uspořádné (viditelné příčné pruhování)
- Kontraktilní elementy hladké svaloviny jsou neuspořádané



Sarkomera



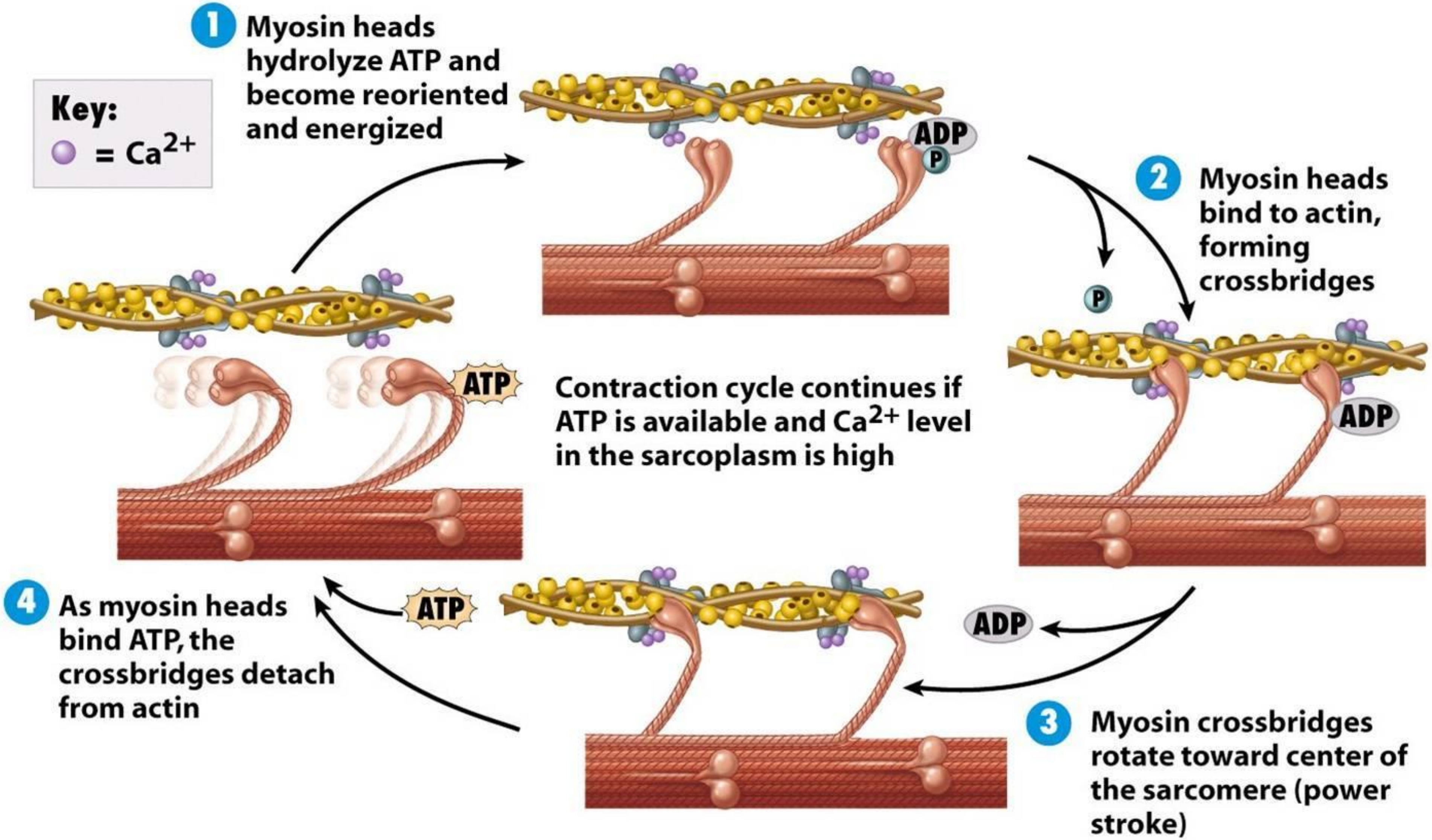
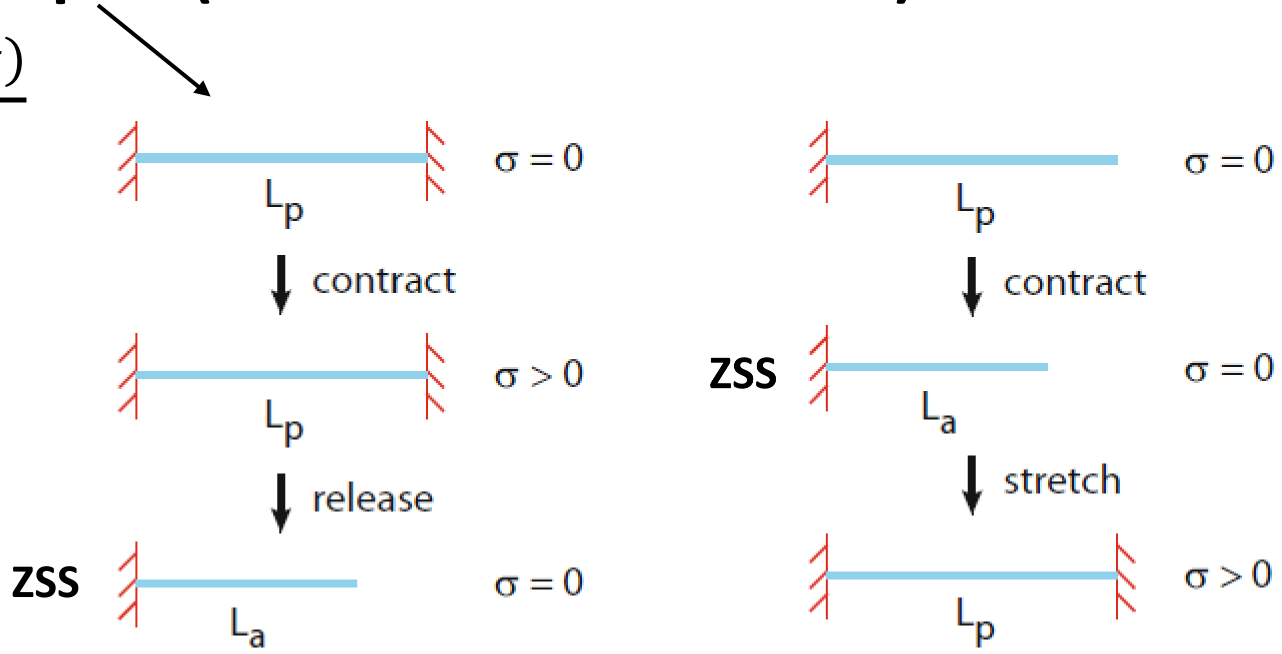


Figure 10-7 Principles of Anatomy and Physiology, 11/e

Kinematika kontrakce

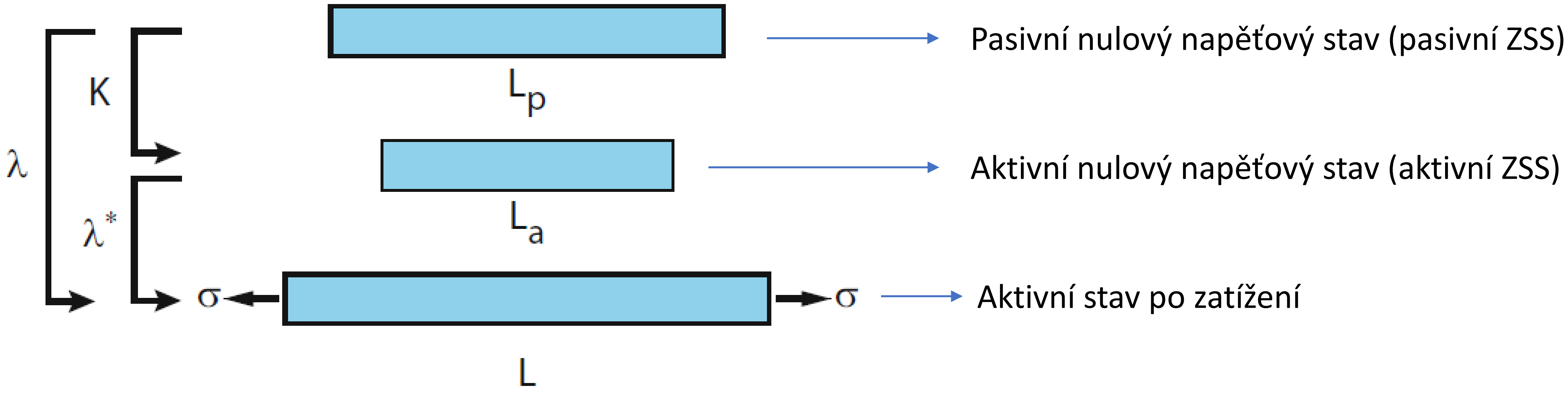
- Předpoklad: aktivní kontraktilní element mění svou délku v závislosti na čase a **ve stavu nulového napětí (zero-stress state – ZSS)**
- Míra kontrakce -> $K(t) = \frac{L_a(t)}{L_p}$
- Kontrakce ≠ zkrácení



Konfigurace kontraktilního elementu

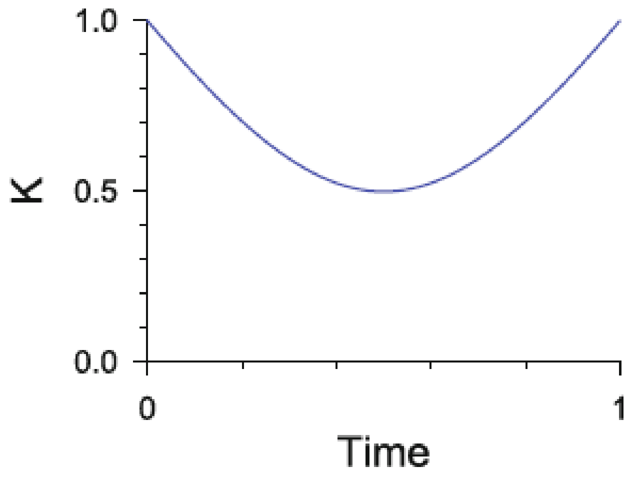
$$\boldsymbol{\lambda = K\lambda^*}$$

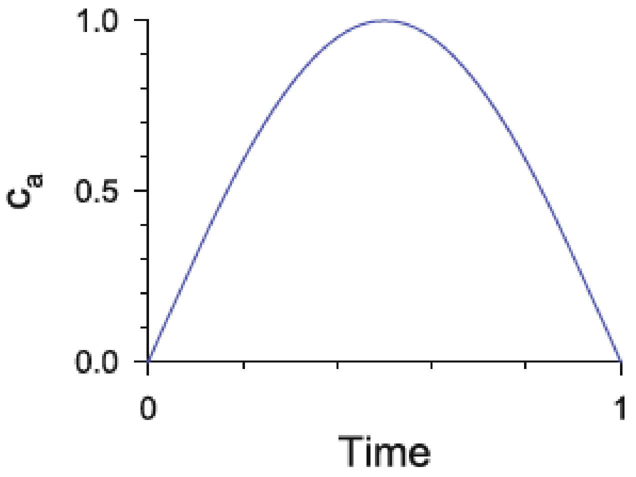
- $K = \frac{L_a}{L_p}$ míra kontrakce
- $\lambda^* = \frac{L}{L_a}$ elastická míra streče (vzhledem k aktivnímu ZSS)
- $\lambda = \frac{L}{L_p}$ celková míra streče (vzhledem k pasivnímu ZSS)



Míra kontrakce – rytmický popis

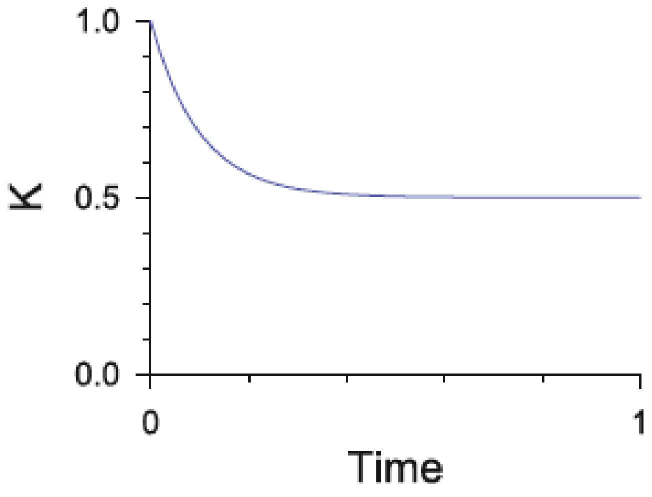
- aproximace rytmického stahování svalu
- Srdeční svalstvo, hladké svalstvo ve střevech (umožňuje pohyb tráveniny)
- $K(t) = 1 - (1 - K_{min}) \sin(\frac{\pi t}{T})$
- C_a … aktivní modul pružnosti

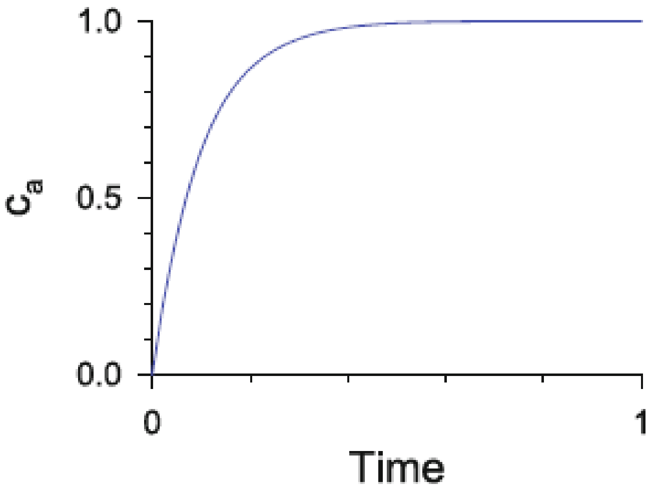




Míra kontrakce – exponenciální popis

- Aproximace kontrakce do určité hladiny
- Typické pro cévy (regulace proudění krve)
- $K(t) = 1 - (1 - K_{min})(1 - e^{-\alpha t})$





Model kontraktilního vlákna

- Odvozeno ze „směšovacího pravidla“ kompozitů
- Kontraktilní element obsahuje aktivní a pasivní složku
- $\phi_p = \frac{dv_p}{dv}$ $\qquad\qquad$ $\phi_a = \frac{dv_a}{dv}$
- dv … objem celku, dv_p … objem pasivní složky , dv_a … objem aktivní složky
- $\phi_p + \phi_a = 1$

Model kontraktilního vlákna

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L_p}}$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{K}$$

- Cauchy stress

$$\sigma = \phi_p \sigma_p(\lambda) + \phi_a \sigma_a(\lambda^*)$$

- J=1 … můžeme použít princip Lagrangeova multiplikátoru *p* (týká se pouze pasivní složky)

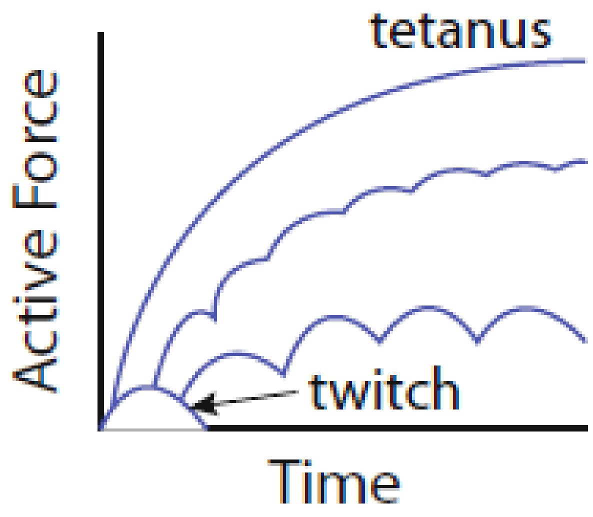
$$\sigma_p = \overline{\sigma_p} - \frac{p}{\phi_p}$$

- Po dosazení do směšovacího pravidla dostáváme

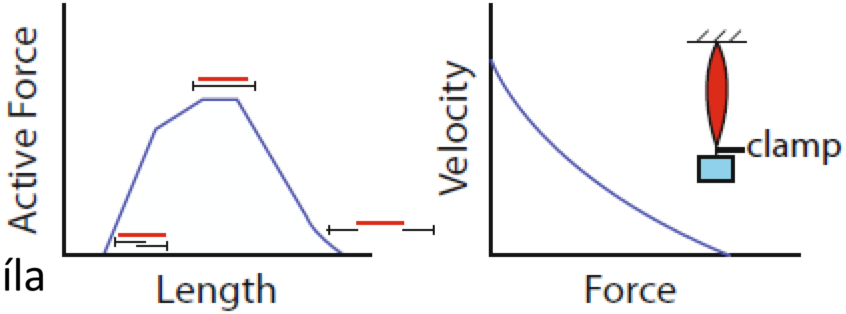
$$\sigma = \phi_p \overline{\sigma_p} + \phi_a \sigma_a - p$$

$$\overline{\sigma_p} = \lambda \frac{\partial W_p(\lambda)}{\partial \lambda} \qquad \sigma_a = \lambda^* \frac{\partial W_a(\lambda^*)}{\partial \lambda^*}$$

Aktivní složka kontrakce



- Stimulace svalu -> stah (twitch)
- Série stahů ve vysoké frekvenci -> tetanický stah
- Srdeční sval je schopen pouze oddělených stahů
- Hladké svalstvo umožňuje stah, sérii stahů nebo souvislou kontrakci
  - Arterioly – regulace proudění krve
  - Peristaltické pohyby střev pro průchod tráveniny
- Sval je závislý na rychlosti kontrakce a na délce svalu



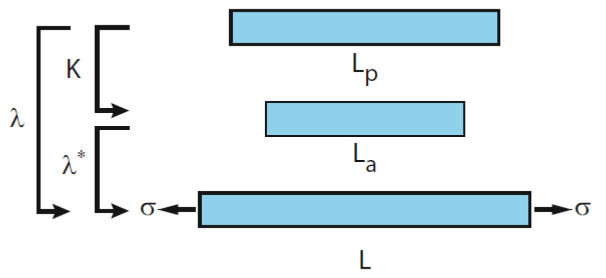
Rychlost svalu Síla svalu Max. izom. síla

Hillova rovnice *(a* a *b* jsou konstanty*)*

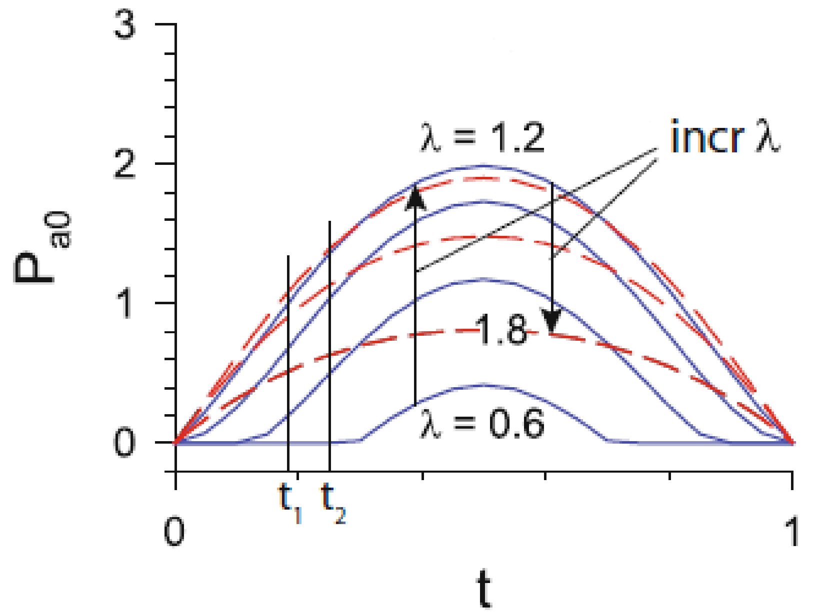
$$(v+b)(f+a)=b(f_{\max}+a)$$

Časově proměnná elasticita

$$\lambda = \frac{L}{L_p}$$

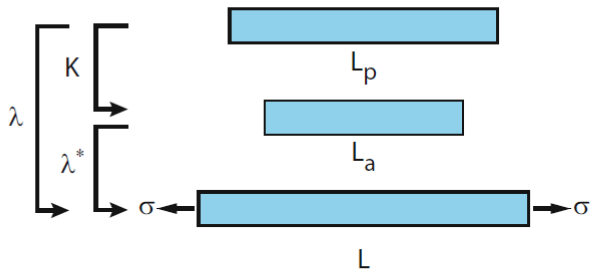


- pozorování ukázalo, že kontraktilní vlákno při kontrakci zvyšuje svou tuhost
- Závisí na poměru kontrakce K
- Stah při izometrické kontrakci (při různých hodnotách streče)
  - $K_{min} = 0.5$
  - Při zvyšujícím se λ se $P_{a0,max}$ zvyšuje do jisté meze (modré křivky)
  - Po překročení meze se $P_{a0,max}$ zmenšuje (červené křivky)

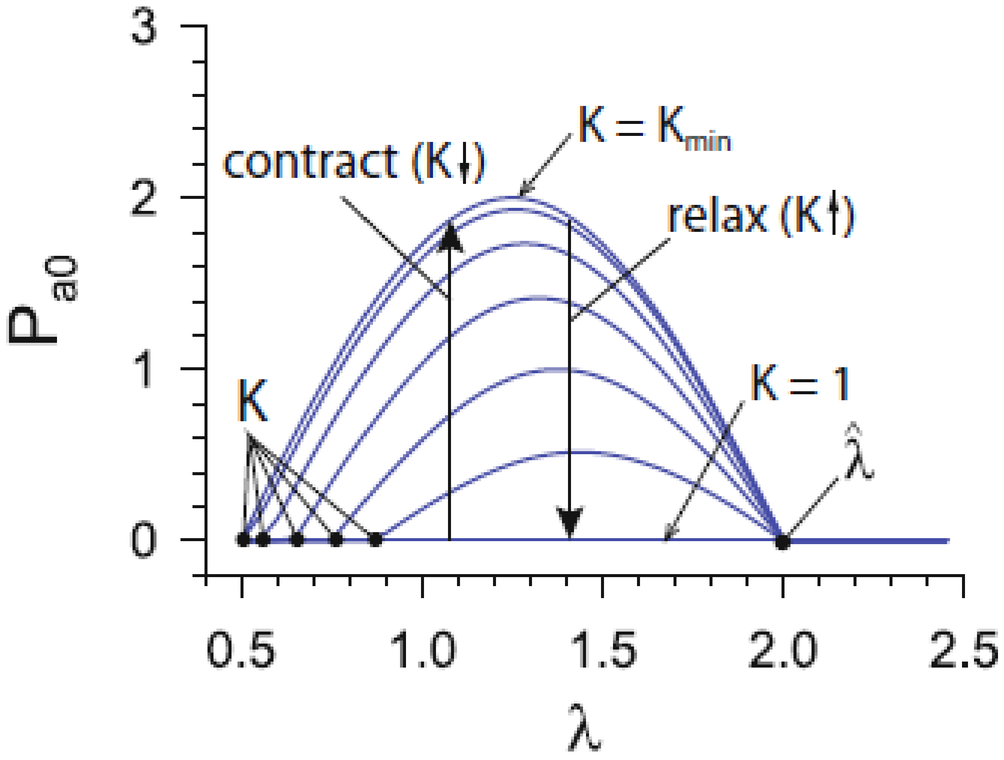


P_{a0} … „aktivní“ smluvní napětí

Časově proměnná elasticita



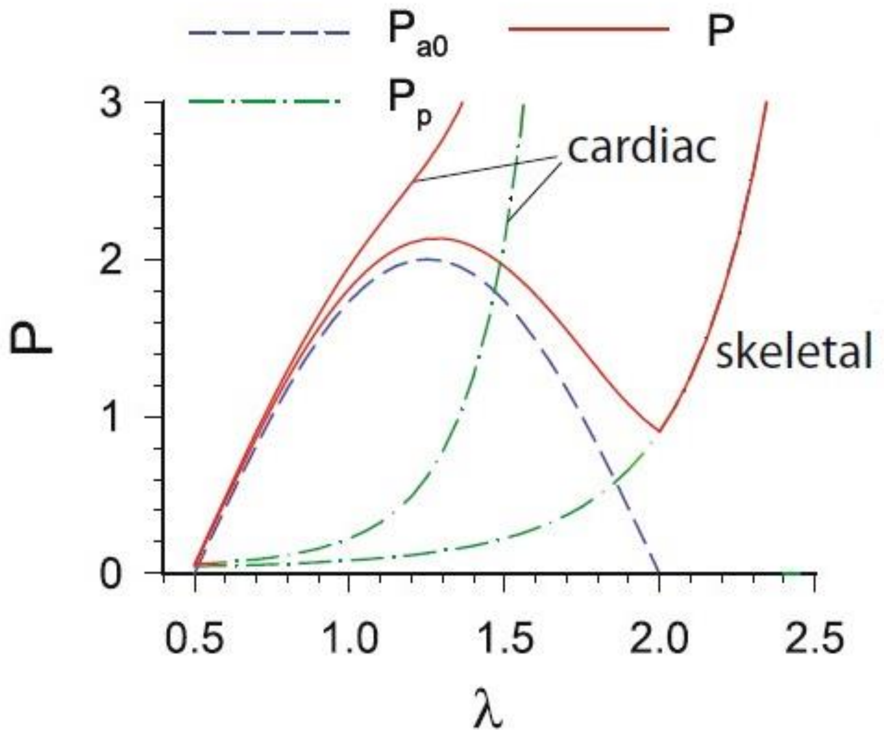
- Natahování vlákna při různých hodnotách kontrakce
  - nejprve se díky kontrakci vlákno stáhne na aktivní ZSS (kde je P_{a0}=0)
  - poté se vlákno natahuje a měří se se P_{a0} v závislosti na streči λ
  - $\hat{\lambda}$ … „overstretch" (po překročení této hodnoty je aktivní napětí nulové)
  - U grafů je zřejmá závislost délky a napětí svalu



P_{a0} … „aktivní" smluvní napětí

Pasivní složka kontrakce

- Závislost napětí-délka svalu aktivní složky je podobná u všech typů svalstva (kosterní, hladké, srdeční)
- Pasivní složka se s typem svalu mění
- Pasivní síla u srdečního svalstva zabraňuje svalu přílišné roztažení -> srdeční sval se při diastole roztáhne „pouze“ na úroveň své optimální délky -> při systole je poté schopen konat největší sílu
- U kosterního svalstva nemá pasivní složka tak významnou roli



P_{a0} … „aktivní“ napětí

P_P … „pasivní“ napětí

P … celkové napětí

Konstitutivní vztahy kontraktilního elementu

- Konst. vztahy kontr. elementu musí splňovat následující předpoklady
  - napětí v pasivním stavu (K=0) je nulové
  - v aktivním stavu (0>K>1) je napjatost zhruba 1D a závisí na poměru streče $\lambda^* = \lambda/K$ (pro $\lambda^* = 1$ je $\sigma_a = 0$)
  - Při izometrické kontrakci aktivní napětí stoupá ke svému maximu a poté klesá k nule
  - Se zvyšující se kontrakcí (K se zmenšuje) se zvyšuje tuhost
  - Rychlost kontrakce klesá se zvyšujícím se napětí
- Hustota deformační energie se konstruuje na základě prvních čtyř kritérií, poté se dosadí do Hillova modelu

Výpočtový model

$\hat{\lambda}^*$… “overstretch” (hranice, kde je napětí opět nulové)

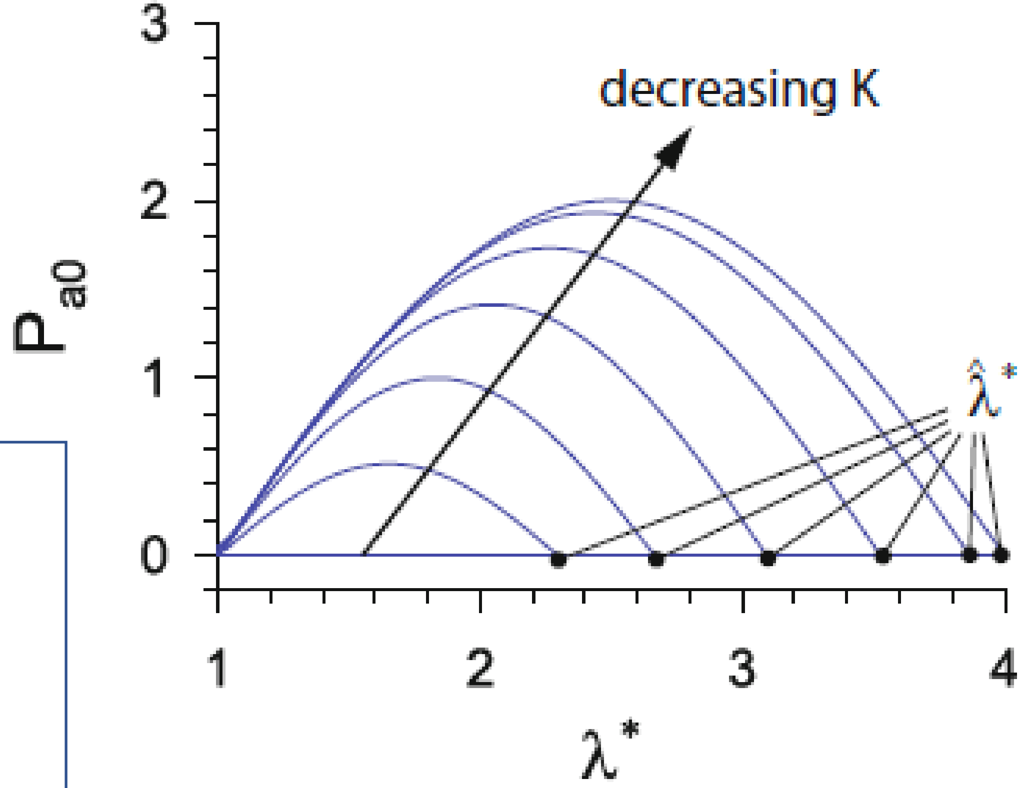
$\lambda^* = \lambda / K$

$$W_a = \begin{cases} \dfrac{c_a(t)}{\pi}\left[1 - \cos\pi\left(\dfrac{\lambda^* - 1}{\hat{\lambda}^* - 1}\right)\right], & 1 \leq \lambda^* \leq \hat{\lambda}^* \\ 0, & \lambda^* < 1 \text{ and } \lambda^* > \hat{\lambda}^* \end{cases}$$

Časově proměnný aktivní modul ($c_{a,max}$ je zjištěno experimentálně)

$$c_a = \left[\frac{1 - K(t)}{1 - K_{min}}\right] c_{a,max}$$

$$P_{a0} = \frac{\partial W_a}{\partial \lambda} = \frac{\partial W_a}{\partial \lambda^*}\frac{\partial \lambda^*}{\partial \lambda} = \begin{cases} c_a(t) K^{-1} \sin\pi\left(\dfrac{\lambda^* - 1}{\hat{\lambda}^* - 1}\right), & 1 \leq \lambda^* \leq \hat{\lambda}^* \\ 0, & \lambda^* < 1 \text{ and } \lambda^* > \hat{\lambda}^* \end{cases}$$



Pro zahrnutí efektu rychlosti kontrakce dosadíme do Hillovy rovnice

$$(-\dot{\lambda} + b)(P_a + a) = b(P_{a0} + a)$$

Dostáváme

$$P_a(\lambda, \dot{\lambda}, t) = \frac{P_{a0}(\lambda, t) + a\dot{\lambda}/b}{1 - \dot{\lambda}/b}$$

P_{a0} … „aktivní“ smluvní napětí

Příklad tlakování cévy s aktivní složkou

- Levá krkavice
- Parametry cévy
  - $c_0 = 11{,}23\ kPa, c_{11} = 6{,}12\ kPa, c_{12} = 14{,}17\ kPa, c_{22} = 6{,}61\ kPa, c_{31} = c_{41} = 9{,}27\ kPa, c_{32} = c_{42} = 16{,}16\ kPa$
  - $R = 3{,}44\ mm, H = 0{,}32\ mm, \gamma = 42{,}71°$
  - $Ca_{max} = 40\ kPa$
  - $\phi_a = 0{,}4; \phi_p = 0{,}6$

$$W\left(\mathbf{C}, \mathbf{M}^{\mathrm{i}}\right) = \frac{c_0}{2}\left(I_C - 3\right) + \sum_{i=1}^{4} \frac{c_1^i}{4c_2^i}\left\{\exp\left[c_2^i\left(I_4^i - 1\right)^2\right] - 1\right\}$$

$$I_4^1 = \lambda_z^2, \quad I_4^2 = \lambda_\theta^2, \quad I_4^{3,4} = \lambda_z^2 \cos^2\gamma + \lambda_\theta^2 \sin^2\gamma$$

Model pro W_p

Model pro W_a

$$W_a = c_a(t)\left(\lambda_\theta^* - 1\right)^2$$

$$c_a = \left[\frac{1 - K(t)}{1 - K_{\min}}\right] c_{a,\max} \qquad \lambda_\theta^* = \frac{\lambda_\theta}{K}$$

$$K(t) = 1 - \left(1 - K_{\min}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

Příklad tlakování cévy s aktivní složkou

- Model tenkostěnné nádoby

$$W_a = c_a(t)\left(\lambda_\theta^* - 1\right)^2$$

$$W_p\left(\mathbf{C}, \mathbf{M}^i\right) = \frac{c_0}{2}\left(I_C - 3\right) + \sum_{i=1}^{4} \frac{c_1^i}{4c_2^i}\left\{\exp\left[c_2^i\left(I_4^i - 1\right)^2\right] - 1\right\}$$

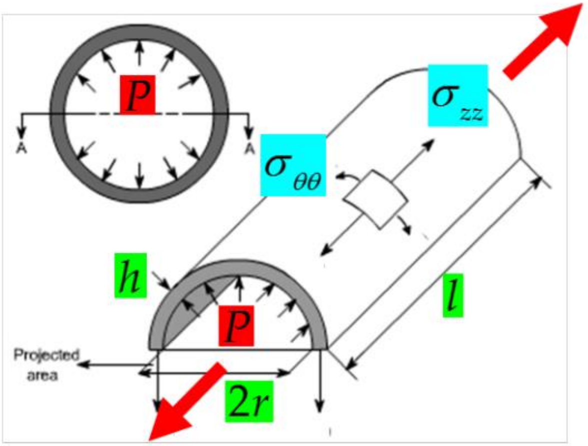
$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \phi_p \lambda_r \frac{\partial W_p}{\partial \lambda_r} - p \\ \sigma_\theta &= \phi_p \lambda_\theta \frac{\partial W_p}{\partial \lambda_\theta} + \phi_a \lambda_\theta^* \frac{\partial W_a}{\partial \lambda_\theta^*} - p \\ \sigma_z &= \phi_p \lambda_z \frac{\partial W_p}{\partial \lambda_z} - p \end{aligned}}$$

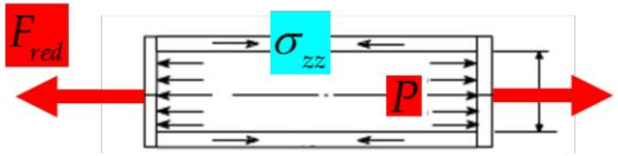
Silová rovnováha

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{rP}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

$$\sigma_{rr} = 0$$





$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{Z} \end{pmatrix}$$

$$h = \lambda_{rR} H$$

$$r = \lambda_{\theta\Theta} R$$

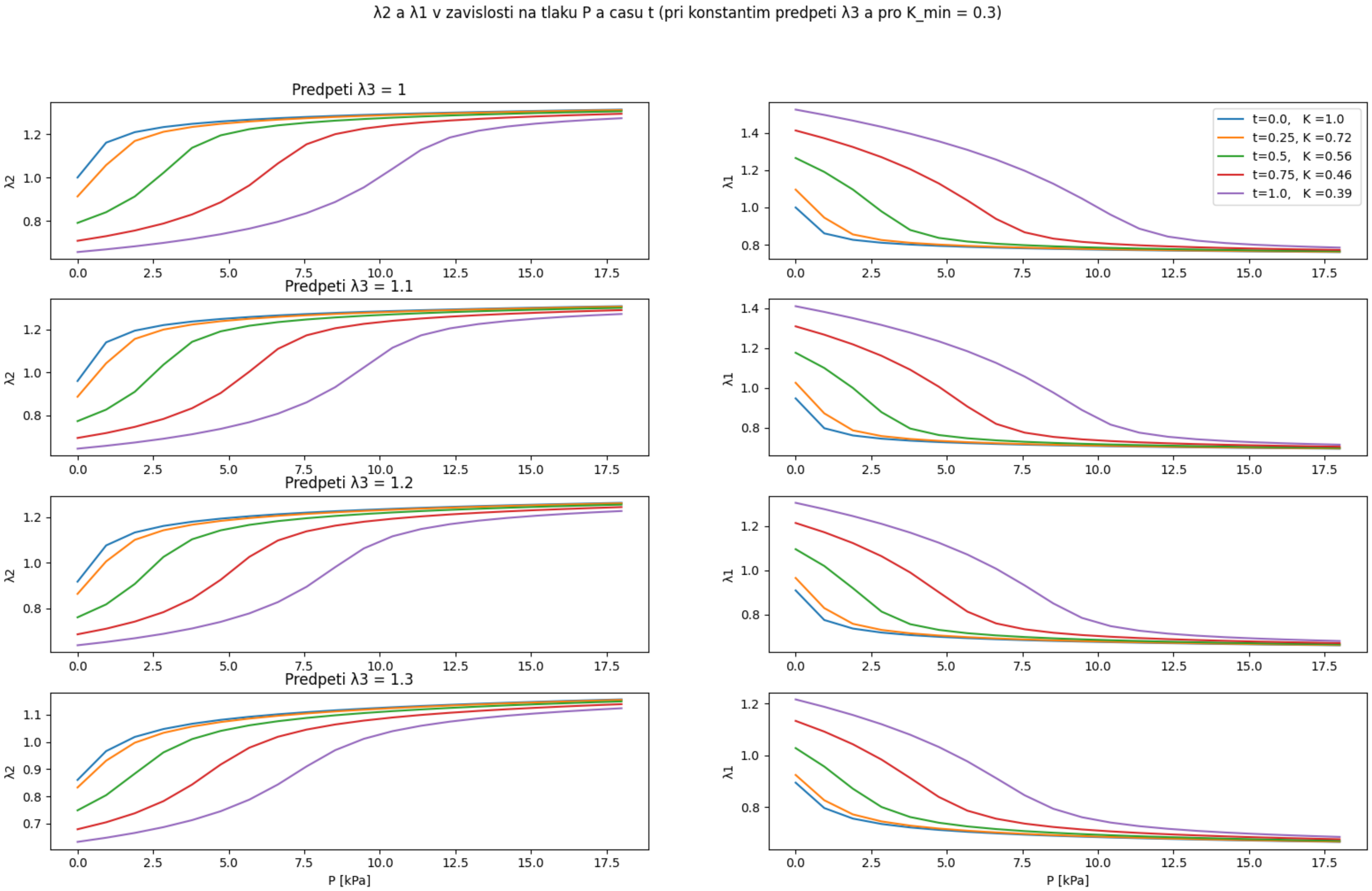
$$z = \lambda_{zZ} Z$$

Tlakování od 0 do 18kPa při konstantních hodnotách K

$$\lambda 1 = \lambda_r$$

$$\lambda 2 = \lambda_\theta$$

$$\lambda 3 = \lambda_z$$

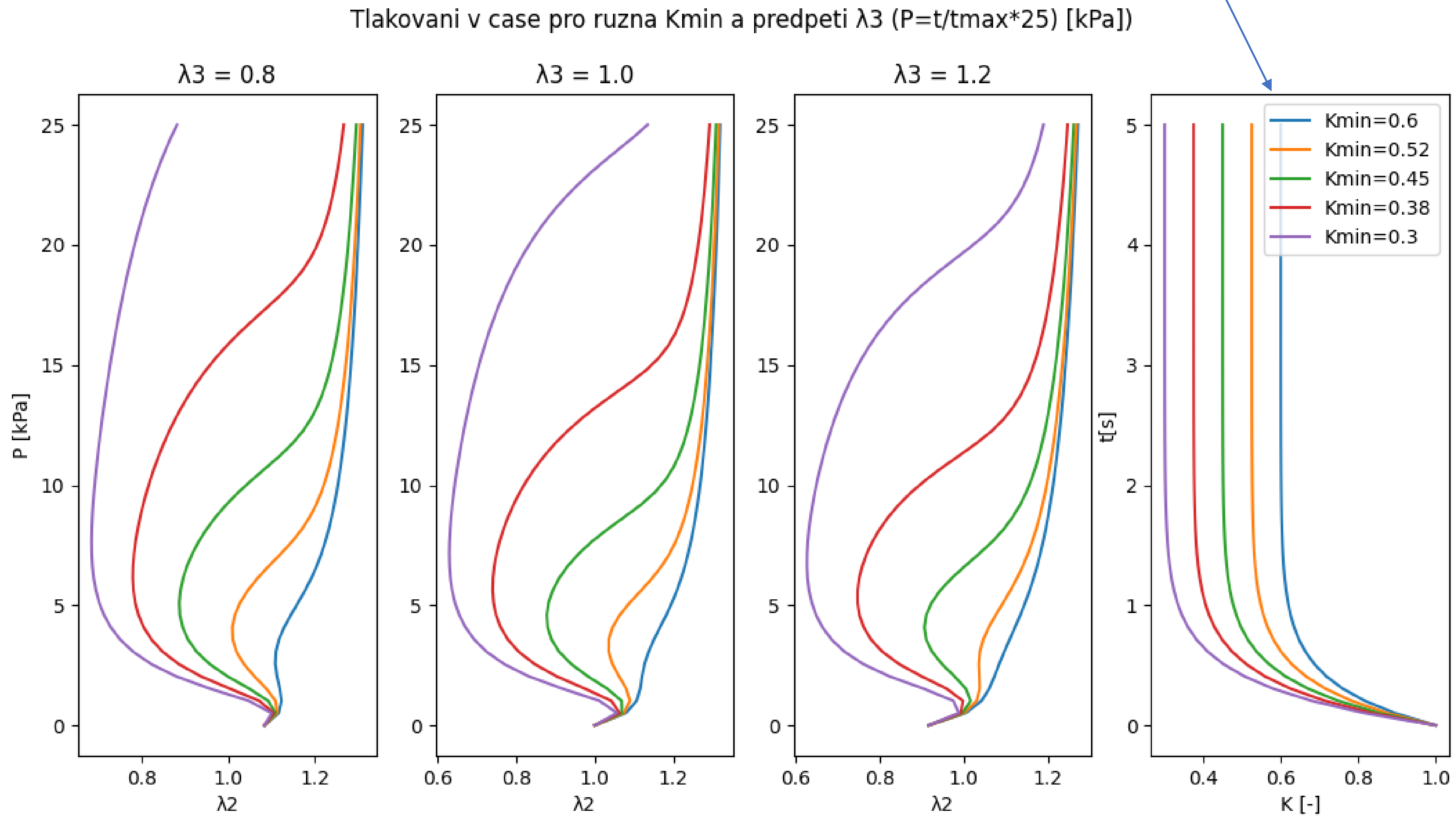


Tlakování od 0 do 25 kPa za 5s

$$\lambda 2 = \lambda_\theta$$

$$\lambda 3 = \lambda_z$$

$$K(t) = 1 - (1 - K_{min})(1 - e^{-\alpha t})$$

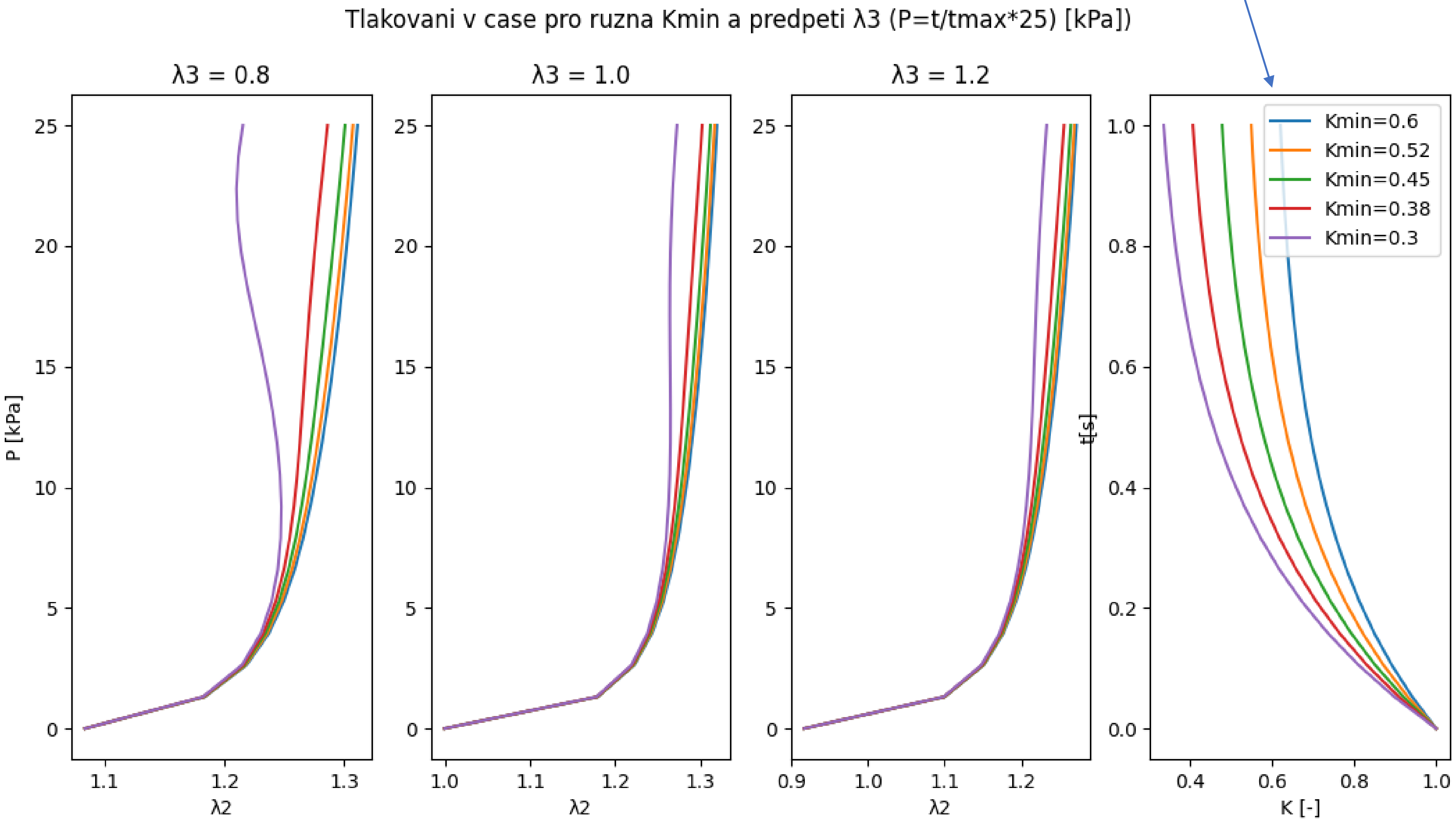


$$K(t) = 1 - (1 - K_{min})(1 - e^{-\alpha t})$$

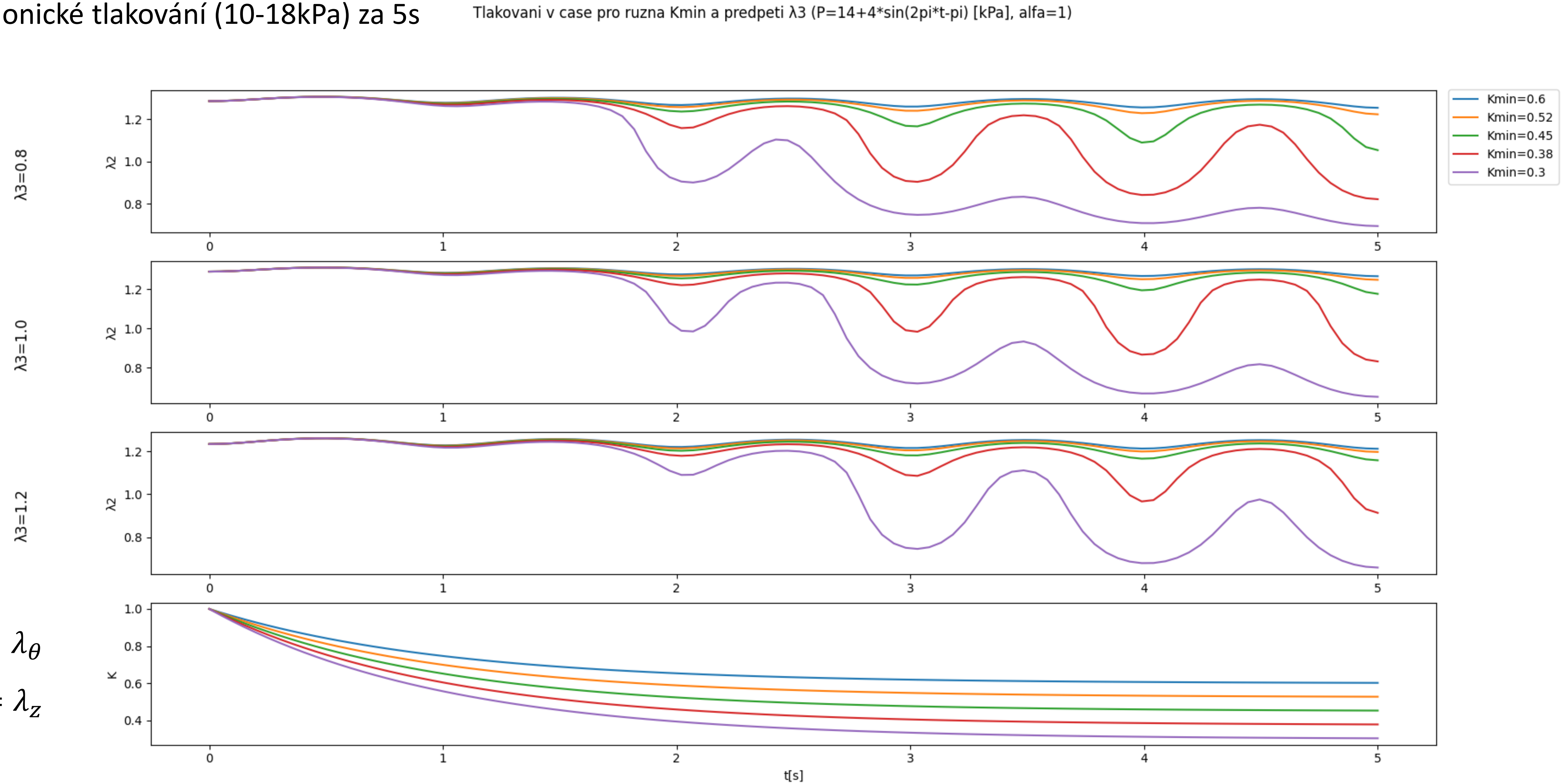
Tlakování od 0 do 25 kPa za 1s

$$\lambda 2 = \lambda_\theta$$

$$\lambda 3 = \lambda_z$$



Harmonické tlakování (10-18kPa) za 5s



$\lambda 2 = \lambda_\theta$

$\lambda 3 = \lambda_z$

$$K(t) = 1 - (1 - K_{min})(1 - e^{-\alpha t})$$