Primitives
et Équations différentielles

1. Primitives d'une fonction

Définition

F est **une** primitive de f sur $I \Leftrightarrow F' = f$

Théorème

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

- Deux primitives de f sur I ne différent que d'une constante

- Soit F une primitive d'une fonction f .
  Toutes les autres primitives de f sont de la forme $F(x) + k$

Primitives de fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^n$ n entier différent de (-1) et 0	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \ln x$ (un classique à connaître)	$F(x) = x \ln x - x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$

Linéarité des primitives

Si F et G sont des primitives respectives de f et g, et k un nombre réel, alors:

- $F + G$ est une primitive de $f + g$
- kF est une primitive de kf

Primitives de fonctions composées

Il faut penser à utiliser les formules de dérivation des fonctions composées :

f de la forme ...	Une primitive F est donnée par ...
$u'\,\mathrm{e}^{u}$	e^{u}
$u'\,u^{n}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$

Penser aussi aux fonctions de type :

$u'\cos(u)$ dont les primitives sont de la forme $\sin(u)$

$u'\sin(u)$ dont les primitives sont de la forme $-\cos(u)$

2. Équation différentielle y'=f

Définition

Une fonction g est solution de l'équation $y' = f$ $\Leftrightarrow \quad g' = f$

Autrement dit, les solutions de cette équation sont les primitives de f.

3. Équation différentielle $y' = ay$ (H)

Théorème

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions : $f(x) = Ce^{ax}$, ou C est une constante $\in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $f' = af \Leftrightarrow f(x) = Ce^{ax}$

Démonstration :

1.($\Leftarrow$)
Soit $f(x) = Ce^{ax}$; $f'(x) = aCe^{ax} = af(x)$ CQFD.

2.($\Rightarrow$)

Soit f tel que : $f' = af$, on doit montrer alors que $f(x) = Ce^{ax}$

Or $f(x) = Ce^{ax} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{ax}} = f(x)e^{-ax} = C$

Considérons la fonction $g(x) = f(x)e^{-ax}$ et montrons que $g'(x) = 0$

$g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x) \times -ae^{-ax}$

Or $f'(x) = af(x)$

Donc $g'(x) = af(x)e^{-ax} + f(x) \times -ae^{-ax} = 0$

CQFD

4.Équation différentielle $y' = ay + b$ (E)

Théorème

Les solutions de l'équations différentielle $y' = ay + b$ sont

de la forme : $-\frac{b}{a} + Ce^{ax}$

<u>Démonstration :</u>

On remarque que la fonction constante :

$f_0 : x \to -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation.

f est solution de l'équation $\Leftrightarrow f' = af + b$

Or : $f_0' = af_0 + b$

$\Rightarrow (f - f_0)' = a(f - f_0)$

$\Rightarrow f - f_0$ est donc solution de l'équation $y' = ay$

$\Rightarrow (f - f_0)(x) = Ce^{ax}$

et donc $f(x) = f_0(x) + Ce^{ax} = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}$

5. Equation différentielle de la forme : $\boldsymbol{y' = ay + f \ (F)}$

Théorème

Si on a une solution particulière g_0 de (F) :$y' = ay + f$,

alors les solutions de (F) sont les fonctions de la forme : $g(x) = g_0(x) + Ce^{ax}$

En effet :

g solution de $y' = ay + f$
$\Leftrightarrow g' = ag + f$
$\Leftrightarrow g' - g_0' = ag + f - g_0'$
$\Leftrightarrow g' - g_0' = ag + f - (ag_0 + f)$ car g_0 verifie aussi (F)

$\Leftrightarrow g - g_0' = ag - ag_0$
$\Leftrightarrow (g - g_0)' = a(g - g_0)$

$\Leftrightarrow (g - g_0)(x) = Ce^{ax}$ car $g - g_0$ solution de (H) : $y' = ay$

$\Leftrightarrow g(x) = g_0(x) + Ce^{ax}$

Toutes les solutions de $y' = ay + f$ sont donc de la forme $x \rightarrow g_0(x) + Ce^{ax}$

METHODES

Comment calculer les primitives d'une fonction f

- Reconnaître une primitive de fonctions usuelles ou une combinaison linéaire de fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^n$ n entier différent de (-1) et 0	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \ln x$ (un classique à connaître)	$F(x) = x \ln x - x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$

- Reconnaître une primitive de fonction composée

f de la forme ...	Une primitive F est donnée par ...
$u'\,\mathrm{e}^{u}$	e^{u}
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$

Comment déterminer une primitive particulière

Pour trouver **<u>la</u>** primitive F_0 de f tq $F(x_0) = y_0$:

- On détermine l'ensemble des primitives de f qui s'écrivent de la forme $F + C$
- On détermine ensuite C en écrivant que $F(x_0) + C = y_0 \Rightarrow C = y_0 - F(x_0)$

Comment résoudre l'equation (H) : $y' = ay$

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont de la forme :

$x \to C\,e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$

Comment résoudre l'équation (E) : $y' = ay + b$

Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont de la forme :

$$x \to -\frac{b}{a} + C\, e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Comment résoudre l'équation (F) : $y' = ay + f$

Soit g_0 une solution particulière de (F), donnée par l'énoncé ou déterminée au préalable.

g est solution de (F)
$\Leftrightarrow$ $(g - g_0)$ est solution l'équation Homogène $(H) : y' = ay$

Les solutions de l'équation $y' = ay + f$ sont donc de la forme :

$$x \to g_0(x) + C\, e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Comment déterminer une solution particulière de forme donnée de l'équation (F) : $y' = ay + f$

Souvent on est amenés à chercher une solution particulière g_0 sous une forme donnée, qui dépend de paramètres $m, n,$ etc..

pour trouver ces paramètres :

- On écrit l'expression générale de g_0 et de g_0' en fonction de $m, n..$
- On écrit que $g_0' = ag + f$ et donc $g_0' - ag - f = 0$
- On trouve ensuite les paramètres $m, n, ..$ tq la fonction $g_0' - ag - f$ est nulle.