Orthogonalité et distances dans l'espace

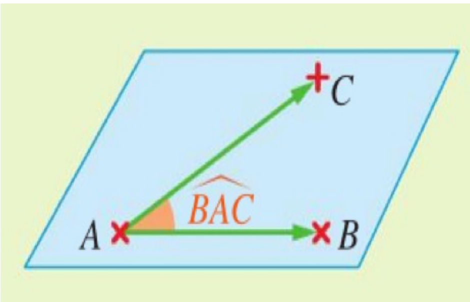
1.Produit scalaire dans l'espace

Definition

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace avec des représentants $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B, C

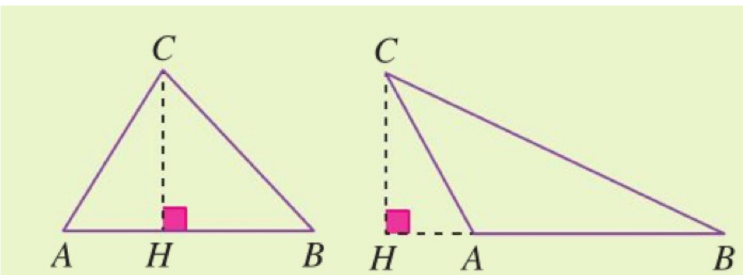
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



Autres definitions

- En utilisant H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :

  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si dans le même sens
  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si le sens est différent



- En utilisant les cordonnées dans un repère orthonormé :

  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Propriétés algébriques du produit scalaire

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot k\vec{v}$

Identités remarquables

- $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||v||^2$
- $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||v||^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||v||^2$

Formules de polarisation

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||v||^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||v||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$

Orthogonalité de deux vecteurs

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2. Orthogonalité dans l'espace

2.1 Orthogonalité de deux droites.

Définition

- Deux droites sont orthogonales $\Leftrightarrow$ un vecteur directeur de l'une est orthogonal a un vecteur directeur de l'autre.

Propriétés

- Si deux droites sont orthogonales, tout vecteur directeur de l'une est orthogonal a tout vecteur directeur de l'autre.
- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires. Dans le cas particulier ou elles sont coplanaires, elles sont alors perpendiculaires.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

2.2 Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition

P est un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

d *et* P sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan $\Leftrightarrow$ elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
(car deux droites sécantes définissent deux vecteurs non colinéaires du plan et donc une base du plan)

- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan

- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

- Si deux plans sont orthogonaux à la même droite, alors ils sont parallèles.

Colinéaire / Parallèle $\Leftrightarrow$ ***Ami***

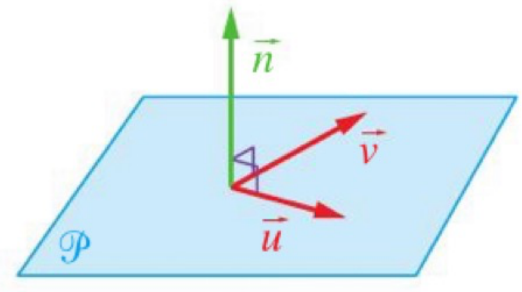
Orthogonale $\Leftrightarrow$ ***Ennemi***

3. Vecteur normal, projeté orthogonal.

3.1 Vecteur normal à un plan

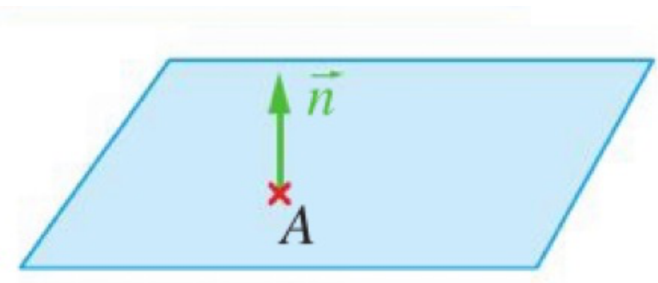
Définition

Soit P un plan dirigé par $(\vec{u}, \vec{v})$
Un vecteur normal au plan P est un vecteur $\vec{n}$ non nul, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$



Propriété

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$



Remarques :

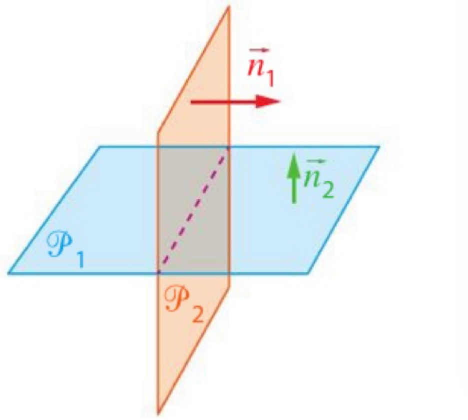
Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est aussi un vecteur normal à ce plan

Si deux vecteurs sont normaux à un plan alors ils sont colinéaires entre eux. (amis, ennemis, etc.. ☺)

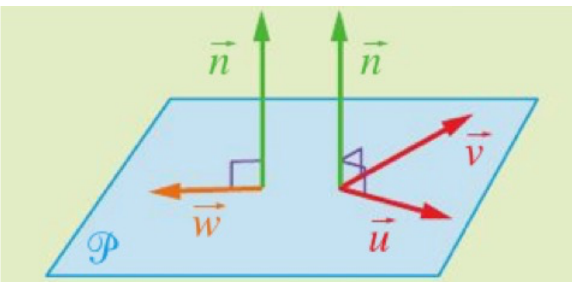
Définition

P_1 un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$
P_2 un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$

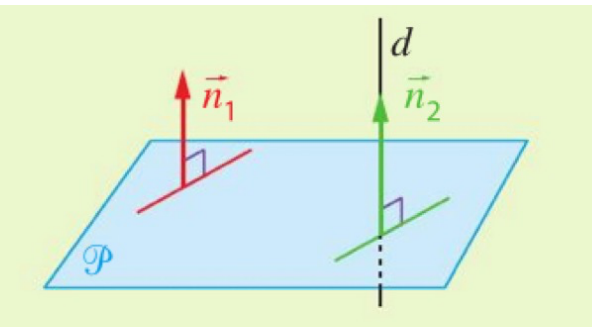
P_1 est perpendiculaire à $P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à n_2



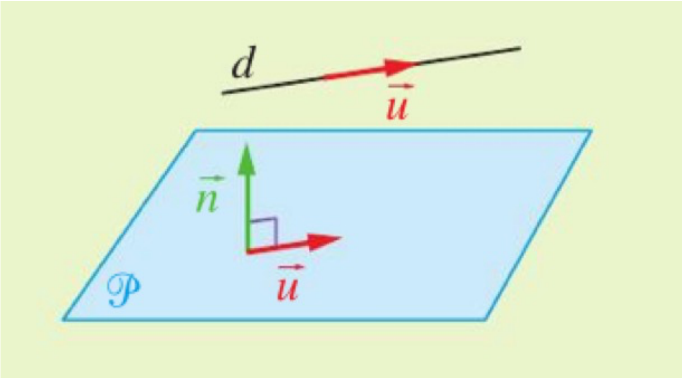
- Un vecteur normal à un plan $P \Leftrightarrow$ il est orthogonal à tout vecteur du plan



- Une droite est orthogonale à un plan $\Leftrightarrow$ un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan

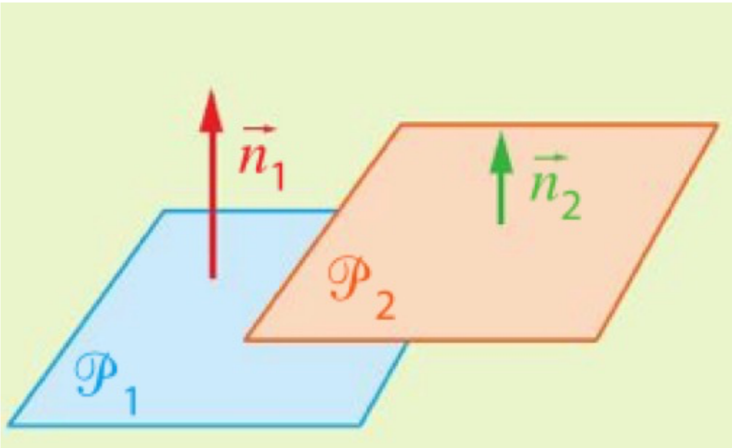


- Une droite est parallèle à un plan $\Leftrightarrow$ un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.



P_1 un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$
P_2 un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$

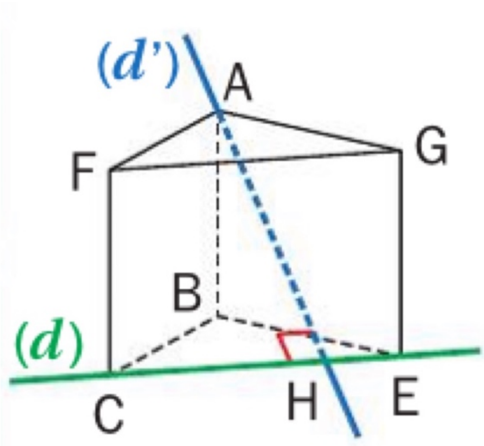
P_1 est parallèle à $P_2 \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{n_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n_2}$



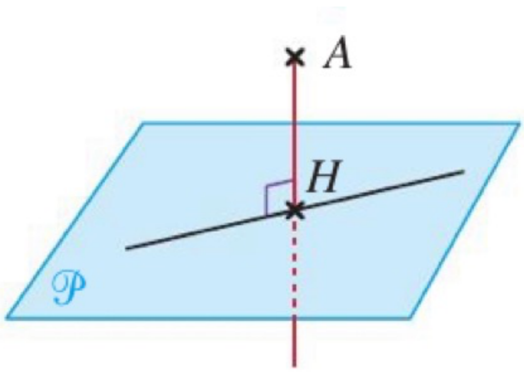
3.2 Projeté orthogonal d'un point.

Définition

A est un point et d est une droite de l'espace.
Il existe une unique droite d' perpendiculaire à d passant par A.
Cette droite coupe d en un point H appelé projeté orthogonal de A sur d.



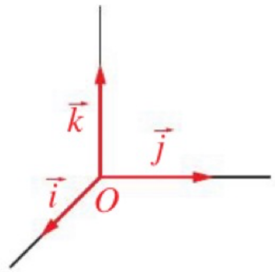
A est un point et P un plan de l'espace.
Il existe une unique droite passant par A et perpendiculaire à P.
Cette droite coupe P en un point H appelé projeté orthogonal de A sur P



4. Calculs de distances

Définition

Un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, k)$ est un repère tel que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



Proprietés

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

  $\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B)$

  $AB = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

METHODES

Calculer un produit scalaire sans repère

- Utiliser directement la définition (avec le cosinus) en choisissant deux représentants des deux vecteurs **avec la même origine** :

  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(B\hat{A}C)$

  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \cos(B\hat{A}C)$

- Décomposer les vecteurs (a l'aide de la relation de Chasles ou la propriété des milieux)

  Le but étant de se ramener à des vecteurs dont on sait calculer le produit scalaire (colinéaires, orthogonaux ou avec un angle défini)

  Généralement ces vecteurs sont colinéaires aux arêtes de la figure géométrique.

- Utiliser la définition avec le projeté orthogonal.

Calculer un produit scalaire avec repère

- Utiliser ou choisir soi-même un repère **orthonormé** et utiliser la définition avec les cordonnées.

Comment calculer un angle à l'aide du produit scalaire.

- On calcule le produit scalaire avec une des méthodes différentes et on déduit l'angle en utilisant la définition

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}C} = AB \times AC \times \cos\left(B\hat{A}C\right)$$

Montrer qu'un vecteur est un vecteur normal d'un plan.

- On montre que le vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan.

Montrer que deux droites sont orthogonales.

- On montre que deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux (produit scalaire nul)

- Des fois, on peut utiliser le fait que si une droite est orthogonal à un plan P alors elle est orthogonale a toutes les droites du plan.

Montrer qu'une droite est orthogonal à un plan

- On montre qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan.

- On montre qu'un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan.

Calculer la distance d'un point à une droite ou un plan

La distance d'un point à une droite ou un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal.