Suites Numériques I

1. Définition et notation

Une suite est une fonction u de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. $u: n \rightarrow u_n$

Formule explicite d'une suite

La formule explicite d'une suite est l'expression de u_n en fonction de n.

Exemple :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 5n + 2$

Formule par récurrence d'une suite

La formule par récurrence d'une suite est l'expression de u_n en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents.

Exemple :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 5;\ u_0 = 1$

2. Démonstration par récurrence

On cherche à démontrer que $\forall n \geq p,$ la propriété P_n est vraie

Structure d'une démonstration par récurrence

- Initialisation : on démontre que la propriété est vraie au rang p
- Hérédité : on suppose que P_k est vraie et on démontre que P_{k+1} est vraie.
- Conclusion : P_n est vraie $\forall n \geq p$

Exemple : soit (u_n) définie par
u_0= 2 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$

Montrons par récurrence que $\forall n,\ u_n = -2^n + 3$.

Initialisation : $u_0 = 2 = -2^0 + 3$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose que P_k est vraie $\Leftrightarrow\ u_k = -2^k + 3$ et on essaye de démontrer que P_{k+1} est vraie.

$u_{k+1} = 2u_k - 3 \ = \ 2(-2^k + 3) - 3 = -2^{k+1} + 3$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ -2^n + 3.$

3. Variations des suites

Suite croissante / décroissante

(u_n) est croissante $\Leftrightarrow \forall\, n \geq p,\ u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) est décroissante $\Leftrightarrow \forall\, n \geq p,\ u_{n+1} \leq u_n$

Méthode : Étudier les variations d'une suite

Il y'a plusieurs méthodes possibles :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Méthode la plus commune

- Si la suite est toujours strictement positive, on étudie si $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1.

- Si la suite est définie de façon explicite : $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction f.

- Si la suite est définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, et si f est croissante, on peut faire une démonstration par récurrence.

h4. Suites majorées, minorées et bornées

Définitions

Une suite (u_n) est majorée $\Leftrightarrow \ni M \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$

Une suite (u_n) est minorée $\Leftrightarrow \ni m \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$

Une suite (u_n) est bornée $\Leftrightarrow \ni m, M \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$

Méthode

Pour montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée :

- On peut utiliser des inégalités ou des inéquations.

  Exp. Si $u_n = \frac{u_n^2}{u_n^2+1}$, on a $\forall\, n, 0 \leq u_n \leq 1$

- Si la suite est définie par récurrence on peut faire une démonstration par récurrence.

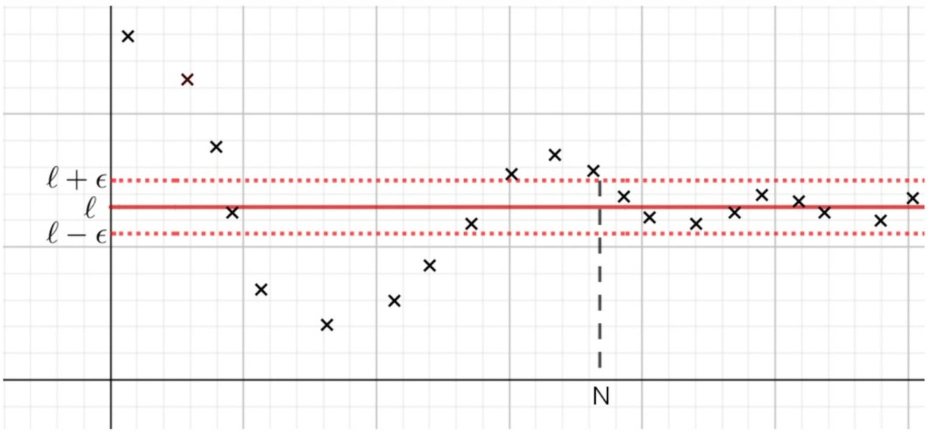
Suites numériques II

2. *Limite et convergence d'une suite*

Limite d'une suite vers un réel

On dit que (u_n) tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert (aussi petit qu'on le veut) contenant l, $\ni$ un rang n_0, à partir duquel tous les éléments de la suite seront dans cette intervalle.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ni n_0\ tq\ \ \forall n > n_0,\ u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[\Leftrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$



N ici représente n_0

Unicité de la limite

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors l est unique.

Limite d’une suite vers $+\infty$

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$ (aussi grand que l’on veut), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les éléments de la suite sont supérieurs à A.

$\forall A > 0, \exists\ n_0\ tq\ \forall n > n_0,\ u_n > A$

Limite d’une suite vers $-\infty$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les éléments de la suite sont inférieurs à A.

$\forall A < 0, \exists\ n_0\ tq\ \forall n > n_0,\ u_n < A$

Limites des suites usuelles

On note $k \in N^*$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

3. Opérations sur les limites

Limite de sommes de suites

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Limite de produits de suites

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \times v_n$	$l \times l'$	∞ *(le signe dépend du signe de l)*	∞ *(le signe dépend du signe de l)*	$\pm\infty$ *(le signe dépend du signe du produit des signes*	F.I

Limite de quotients de suites

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$l' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$ *(le signe dépend du signe de l et du 0)*	$\pm\infty$ *(le signe dépend du signe de l et de celui de ∞)*	F.I	F.I

Méthode : Lever l'indétermination

- Mettre en facteur le/les termes prépondérants
- Simplifiez
- Cherchez les limites séparément

4. Limite et comparaison

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang N, si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l' , alors $l \leq l'$

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang N.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que
$u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un rang N, et $l \in \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

5. Monotonie et convergence

Propriété

- Si (u_n) est croissante et converge vers $l \in \mathbb{R}$,
  alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$

- Si (u_n) est décroissante et converge vers $l \in \mathbb{R}$,
  Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq l$

Théorème de convergence monotone

Une suite croissante est :

- Soit majorée et convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$

- Soit non majorée et diverge vers $+\infty$

Une suite décroissante est :

- Soit minorée et convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$

- Soit non minorée et diverge vers $-\infty$

Théorème de convergence des suites géométriques

- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite

Suites Arithmético-géometriques

1. Definition

(u_n) est une suite arithmetico-géometrique si elle est définie par un premier terme et la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$

si $a = 1, b \neq 0$ alors (u_n) est une suite arithmétique de raison b

si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors (u_n) est une suite géometrique de raison a

2. Thèoréme

(u_n) est une suite arithmetico-géometrique définie par : $u_{n+1} = au_n + b$

soit K tq $K = aK + b$

Alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - K$ est une suite géométrique de raison a

Démonstration :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ K = aK + b \end{cases} \Longrightarrow \quad u_{n+1} - K = a(u_n - K)$$

Théorème

(u_n) est une suite arithmetico-géometrique définie par :
$u_{n+1} = au_n + b$

soit K tq $K = aK + b$

alors la forme explicite de u_n est : $u_n = (u_0 - K) \times a^n + K$

démonstration

$(u_n) - K$ est une suite géométrique de raison a

donc $\forall n, u_n - K = (u_0 - K) \times a^n$

donc $u_n = (u_0 - K) \times a^n + K$