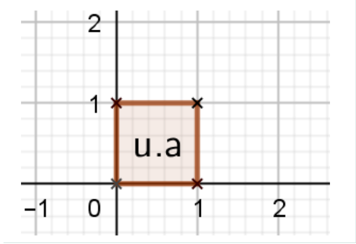
Calcul intégral

1. Intégrale d’une fonction continue et positive

Définition : Unité d’aire

L’unité d’aire dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est l’aire du rectangle formé par les unités du repère :

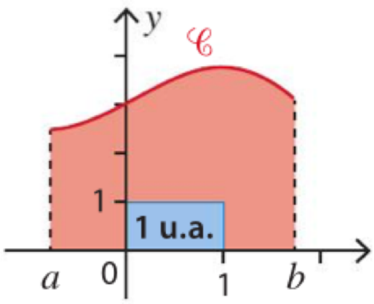


Définition : Intégrale et aire

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

L’aire (exprimé en u.a) du domaine délimité par la courbe C_f, l’axe des abscisses, les droites d’équations $x = a$ et $x = b$, est appelé intégrale de a à b de la fonction f.

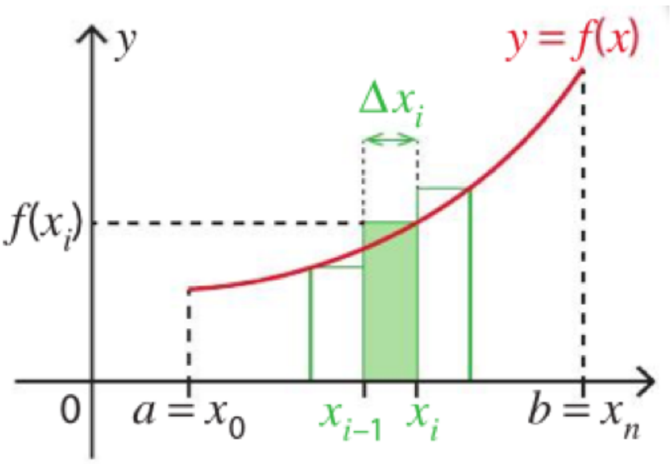
On le note : $\int_a^b f(x)dx$



Remarques :

- Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend que de a, b et f. On dit que x est une variable muette.

- $\int$ ressemble à S, et peut se lire somme. Ceci découle du fait que $\int_a^b f(x)dx$ peut-être approximée par $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$, qui correspond à la somme des rectangles de largeur Δx_i et de hauteur (x_i):



Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur $[\mathrm{a}; \mathrm{b}]$.
Soit F une primitive de f
On : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Remarques :

- Le théorème permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive grâce à une primitive de f.

- Le réel $F(b) - F(a)$ ne depend pas de la primitive choisie pour f.

2. Généralisation: Intégrale d'une fonction continue

Definition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.

On définit l'intégrale de a à b de f par:

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ F(b) - F(a)$$

Proprietes

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_b^a f(x)dx = \ -\int_a^b f(x)dx$

- Relation de Chasles:
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

- Linéarité :
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Integrales et inegalites

- <u>Signe :</u>

  f ≥ 0 sur [a ;b] $\Rightarrow \int_b^a f(x)dx \geq 0$
  f ≤ 0 sur [a ;b] $\Rightarrow \int_b^a f(x)dx \leq 0$

  L'intégrale donne une aire algébrique

- <u>Intégration d'une inégalité :</u>

  f $\leq$ g sur [a ;b] $\Rightarrow \int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$

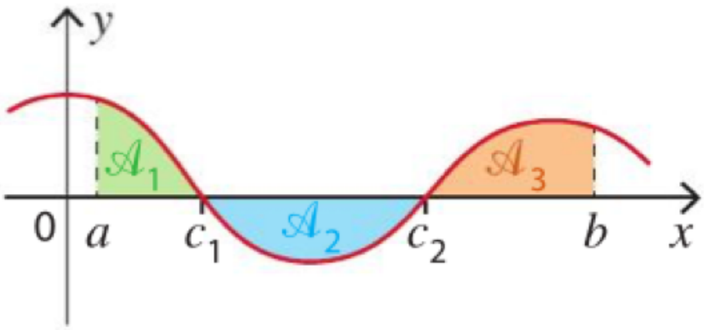
Intégration par parties

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

3. Applications du calcul intégral des aires

Calcul d'aire

Il faut connaître le signe de la fonction avant de pouvoir calculer des aires :

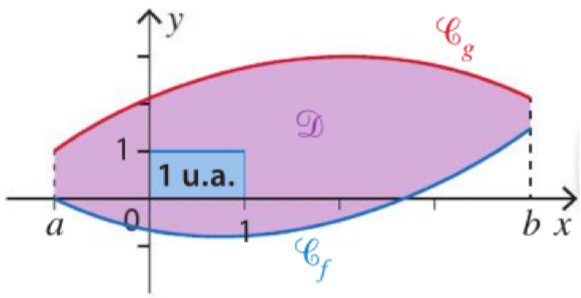


$$\mathcal{A}_{\text{totale coloriée}} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Mais $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \neq \mathcal{A}_{\text{coloriée}}$

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$.
L'aire délimité par les courbes C_f et C_g et les droites $x = a$ et $x = b$ est égale a $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$



Valeur moyenne

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

METHODES

Comment calculer une intégrale

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$:

- On détermine une primitive F de f
- On applique le théorème :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Attention : Écrire toujours le $-$ avant de calculer la valeur de $F(a)$

Comment intégrer par parties

- On identifie $u'(x)$ et $v(x)$ et on détermine dans la foulée $u(x)$ et $v'^{(x)}$

$$u'(x) = \cdots \quad ; \quad u(x) = \cdots$$
$$v(x) = \cdots \quad ; \quad v'(x) = \cdots$$

- On applique le théorème :

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Astuces sur l'intégration par parties

- En présence d'un terme x^n, on va souvent choisir de prendre $v(x) = x^n$ car le dérivation de $v(x)$ nous donne un terme en x^{n-1} et donc un problème un degrés plus simple

  Exemple :

  $$\int_0^1 x^n e^x dx$$

  $$u'(x) = e^x \,; u(x) = e^x$$
  $$v(x) = x^n \,;\; v'(x) = n\, x^{n-1}$$

  $$\int_0^1 x^n e^x dx = [x^n e^x]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^x dx$$

- La seule exception est quand on $x^n \ln x$. Car ici c'est la dérivation de $\ln x$ qui va simplifier le problème.

- Exemple :

  $$\int_1^e x^2 \ln x \; dx$$

  $$u'(x) = x^2 \,; u(x) = \frac{x^3}{3}$$
  $$v(x) = \ln x \,;\; v'(x) = \frac{1}{x}$$

  $$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$
  $$= \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx$$

Rappel : Primitives de fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^n$ n entier différent de (-1) et 0	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^{x}$	$F(x) = \mathrm{e}^{x}$
$f(x) = \ln x$ (un classique à connaître)	$F(x) = x \ln x - x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$

Rappel : Linéarité des primitives

Si F et G sont des primitives respectives de f et g, et k un nombre réel, alors:

- $F + G$ est une primitive de $f + g$
- kF est une primitive de kf

Rappel : Primitives de fonctions composées

Il faut penser à utiliser les formules de dérivation des fonctions composées :

f de la forme ...	Une primitive F est donnée par ...
$u'\,\mathrm{e}^{u}$	e^{u}
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$

Penser aussi aux fonctions de type :

$u' \cos(u)$ dont les primitives sont de la forme $\sin(u)$

$u' \sin(u)$ dont les primitives sont de la forme $-\cos(u)$

Comment comparer deux intégrales

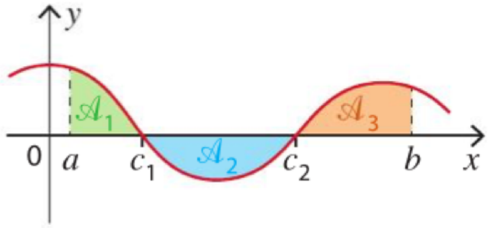
- Pour étudier le signe de $\int_a^b f(x)dx$, il **suffit** d'étudier le signe de f

- Plus généralement, pour comparer $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$, il **suffit** de comparer f et g .

- On peut se servir de $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ pour majorer $\int_a^b f(x)dx$ si on sait intégrer g

Comment calculer une aire géométriques

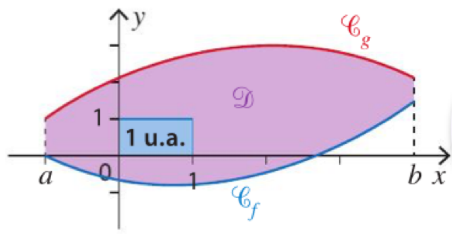
Il faut connaître le signe de la fonction avant de pouvoir calculer des aires :



$$\mathcal{A}_{\text{totale coloriée}} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{Mais } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \neq \mathcal{A}_{\text{coloriée}}$$

L'aire délimité par les courbes C_f et C_g et les droites $x = a$ et $x = b$ est égale a $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$



Comment étudier une suite d'intégrales

Deux types de suites avec intégrales :

- $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$: l'indice porte sur la fonction à intégrer

- $J_n = \int_a^n f(x)dx$: l'indice est sur l'intervalle d'intégration

Étude de $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$

- Étudier la monotonie de $I_n \Leftrightarrow$ comparer I_n et I_{n+1}. Il suffit souvent pour cela de comparer f_n et f_{n+1}

- Pour étudier l'existence d'une limite $\lim_{n\to+\infty} I_n$, on utilise un théorème de convergence après avoir comparé ou encadré au préalable I_n

Étude de $J_n = \int_a^n f(x)dx$

- $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$. Une étude du signe de f suffit pour conclure sur la monotonie de J_n

- Pour étudier l'existence d'une limite $\lim_{n\to+\infty} J_n$, on utilise également un theoreme de convergence après avoir comparé ou encadré au préalable J_n