Représentations paramétriques et équations cartésiennes

1. Représentation paramétrique d'une droite

Soit (d) est une droite définie par un point A$(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

$$M(x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow \exists\ t \in \mathbb{R}, tq: \quad \begin{cases} x = x_A + a \cdot t \\ y = y_A + b \cdot t \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases}$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (d).

<u>Exemple :</u>

Le système : $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ définit la droite passant par

le point $(-2; 0; 1)$ et de vecteur directeur $(3; -1; 2)$

2. Équation cartésienne d'un plan

Soit P le plan passant par le point A$(x_A; y_A; z_A)$ et admettant un vecteur normal $\vec{n}\,(a; b; c)$

$$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Ceci donne une équation de la forme
$ax + by + cz + d = 0 \qquad (d = -ax_A - by_A - cz_A)$

Cette équation est appelé équation cartésienne du plan.

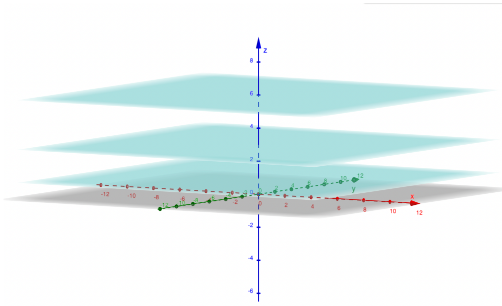
Exemple:

L'équation $2x - 3y - z + 4 = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $(2; -3; -1)$ et passant par le point $(0; 0; 4)$

3. Cas particuliers

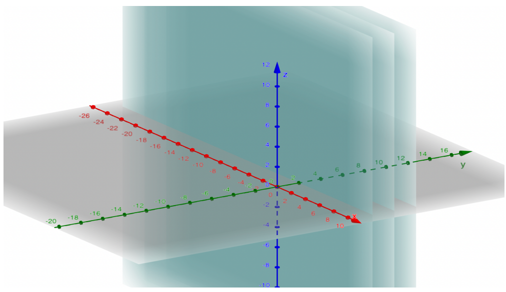
Les équations $z + d = 0$ correspondent à des plans orthogonaux à l'axe (OZ) et donc de vecteur normal (0 ;0 ;1)

Ces plans définissent l'ensemble des points dont la hauteur z est constante



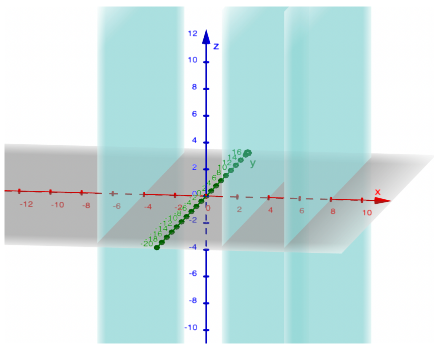
De même les équations $y + d = 0$ correspondent à des plans orthogonaux à l'axe (OY) et donc de vecteur normal (0 ;1 ;0)

Ces plans définissent l'ensemble des points dont l'ordonnée y est constante



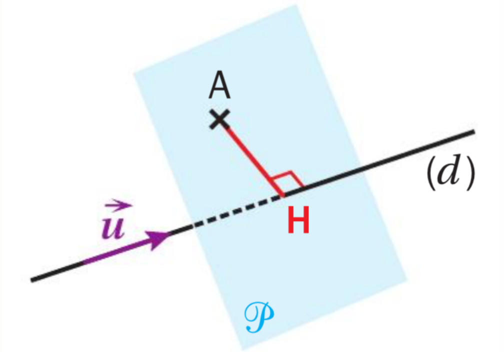
Les équations $x + d = 0$ correspondent à des plans orthogonaux à l'axe (OX) et donc de vecteur normal (1 ;0 ;0)

Ces plans définissent l'ensemble des points dont l'abscisse x est constante



4. Projeté orthogonale d'un point sur une droite

- Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d) est l'unique point H intersection de la droite (d) et du plan orthogonal à (d) passant par A

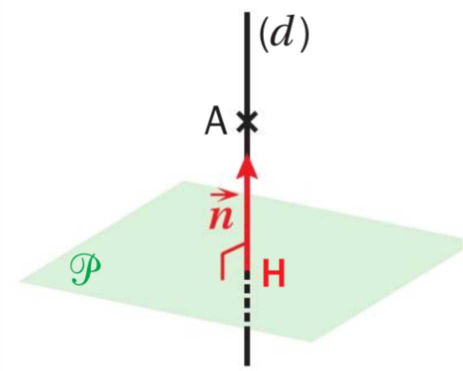


- Pour trouver les coordonnées de H, on utilise son écriture paramétrique qui découle de l'équation paramétrique de (d)

  on calcule ensuite les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ et on résout l'équation $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

5. Projeté orthogonale d’un point sur une plan

- Le projeté orthogonal d’un point A sur un plan P est l’unique point H intersection de P et de la droite (AH) orthogonale à P passant par A



- Pour trouver les coordonnées de H, on commence par trouver l’équation paramétrique de la droite (AH) orthogonale à P passant par A.

- On cherche ensuite l’intersection de cette droite avec le plan P en insérant les coordonnées paramétriques dans l’équation cartésienne du plan P.

METHODES

Donner une équation paramétrique d'une droite

Soient $A = (7; 2; -3)$ et $B = (2; 4; 1)$

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(-5; 2; 4)$

Donc une représentation paramétrique de la droite (AB)

est : $\begin{cases} x = 7 - 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

Montrer qu'un point appartient à une droite

On considère la droite (d) définie par $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 5 - t \end{cases}$

$A(9; 13; 1)$ appartient-il à la droite (d) ?

Pour cela on résout le système d'équations :

$$\begin{cases} 9 = 1 + 2t \\ 13 = -3 + 4t \\ 1 = 5 - t \end{cases}$$

$9 = 1 + 2t \Leftrightarrow t = 4$
Et on vérifie les deux autres équations sont bien vérifiées :
$13 = -3 + 4 \times 4$ et $1 = 5 - 4$

Donc le point $A(9; 13; 1)$ appartient à la droite (d)

Donner une équation cartésienne d'un plan

Soit le plan P qui passe par le point $A(1;-2;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(5;3;-1)$

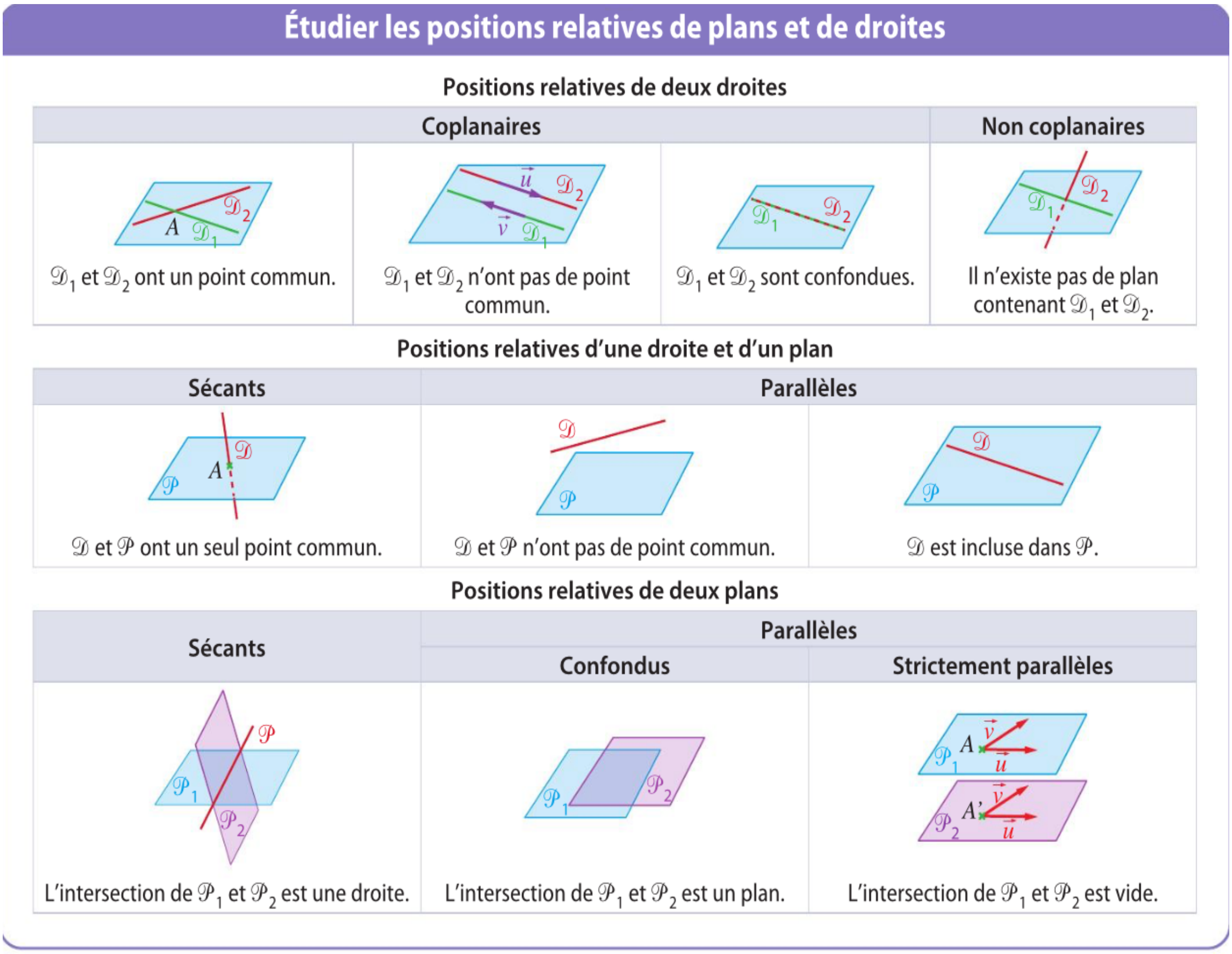
Une équation cartésienne de P s'écrit
$5x+3y-z+d=0$

$A \in P$ donc $5-6-4+d=0 \Leftrightarrow d=5$

Une équation cartésienne de P est donc :

$5x+3y-z+5=0$

Positions relatives de droites et plans dans l’espace



Étudier les positions relatives de plans et de droites

Positions relatives de deux droites

Coplanaires			Non coplanaires
$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont un point commun.	$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ n’ont pas de point commun.	$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont confondues.	Il n’existe pas de plan contenant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Positions relatives d’une droite et d’un plan

Sécants	Parallèles	
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont un seul point commun.	$\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n’ont pas de point commun.	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$.

Positions relatives de deux plans

Sécants	Parallèles	
	Confondus	Strictement parallèles
L’intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est une droite.	L’intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est un plan.	L’intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est vide.

Cas particuliers :

- Deux plans sont orthogonaux
  $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux

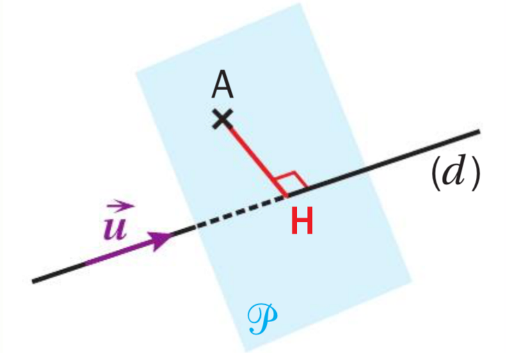
- Une droite et un plan sont orthogonaux
  $\Leftrightarrow$ un vecteur directeur de la droite est colinéaire a un vecteur normal du plan

- Deux droites sont orthogonales
  $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux

  Si les droites sont en plus coplanaires, alors elles sont perpendiculaires

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

- Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d) est l'unique point H intersection de la droite (d) et du plan orthogonal à (d) passant par A



<u>Exemple :</u>

Soient $A(3;5;4)$ et (d) passant par le point $(1;-3;20)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2;-1;2)$

- Pour trouver les coordonnées de H, on utilise les coordonnes paramétriques de H qui découlent de l'équation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 20 + 2t \end{cases}$$

- on calcule ensuite les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ et on résout l'équation $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

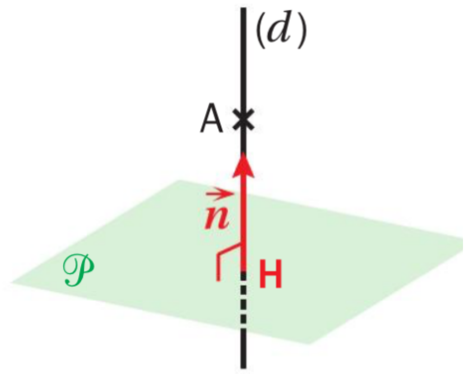
$$\overrightarrow{AH} = (-2 + 2t; -8 - t; 16 + 2t)$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-2 + 2t) - (-8 - t) + 2(16 + 2t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ -4 + 4t + 8 + t + 32 + 4t = 0 \Leftrightarrow 36 + 9t = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -\frac{36}{9} = -4$$

Donc $H = (-7;1;12)$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan

La projection orthogonal d'un point A sur un plan P est le point d'intersection H entre ce plan P et la droite orthogonale à P passant par A.



<u>Exemple :</u>

$P: 4x + y - 2z - 66 = 0$ et $A(-1; 3; -2)$

- On commence par trouver l'équation paramétrique de la droite (AH) orthogonale a P passant par A :

$$(AH): \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

- On cherche ensuite l'intersection de cette droite avec le plan P en insérant les coordonnées paramétriques dans l'équation cartésienne du plan P

$4x + y - 2z - 66 = 0$
$\Leftrightarrow\ 4(-1 + 4t) + (3 + t) - 2(-2 - t) - 66 = 0$
$\Leftrightarrow 21t - 63 = 0$
$\Leftrightarrow\ t = 3$

Donc $H = (11\,;6\,;8)$

Trouver le point d'intersection entre un plan et une droite

$P: 3x + y - 5z + 6 = 0$ et $(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$

Pour trouver le point d'intersection, on injecte les coordonnées paramétriques dans l'équation cartésienne du plan P.

On a donc : $3(-1 + 2t) + (2 - 3t) - 5(5 + t) + 6 = 0$

Soit après simplification : $-2t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = -10$

Le point d'intersection est donc $(-21; 32; -5)$

Trouver le point d'intersection entre deux droites

$(d): \begin{cases} x = 9 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3k \end{cases}$ $(d'): \begin{cases} x = k' \\ y = 2 - k' \\ z = -1 + k' \end{cases}$

Pour trouver le point d'intersection (éventuel), on résout le système :

$$\begin{cases} 9 + k = k' \\ -1 + 2k = 2 - k' \\ -3k = -1 + k' \end{cases}$$

On peut par exemple utiliser les deux premières équations pour trouver k et k'. En additionnant ces équations on élimine k' et on trouve

$8 + 3k = 2 \Leftrightarrow k = -2$ et donc $k' = 9 + k = 7$

On vérifie ensuite que La dernière équation est aussi vérifiée pour ces valeurs : $-3 \times -2 = -1 + 7$

On a donc bien un point d'intersection. Ses coordonnées sont (7 ; -5 ; 6)

Trouver la droite d'intersection entre deux plans sécants

$P_1: 2x + 3y - z + 2 = 0 \qquad P_2 : x + y - 2z + 5 = 0$

Pour trouver la droite d'intersection, on résout le système d'équations:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

on fixe une des variables, par exemple $z = t$ et on résout le système pour déterminer x et y en fonction de t

$$\begin{cases} 2x + 3y = t - 2 \\ x + y = 2t - 5 \end{cases}$$

Après calcul on trouve $\begin{cases} x = -13 + 5t \\ y = 8 - 3t \end{cases}$

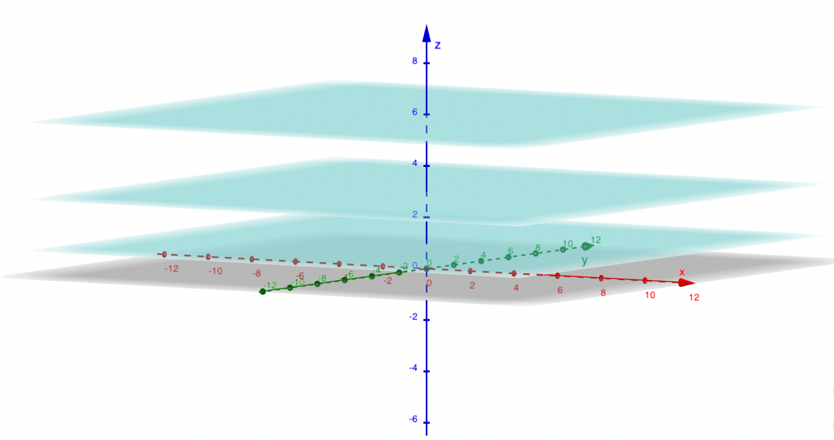
La droite d'intersection $P_1 \cap P_2$ a donc pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -13 + 5t \\ y = 8 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

Plans particuliers dans l'espace

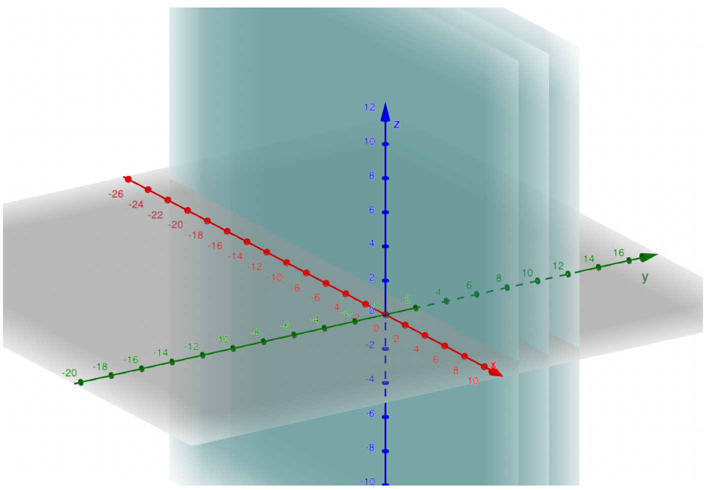
- $z + d = 0 \iff z$ constant

  Plan orthogonal à l'axe des z de vecteur normal $(0; 0; 1)$



- $y + d = 0 \iff y$ constant

  Plan orthogonal à l'axe des y de vecteur normal $(0; 1; 0)$



- $x + d = 0 \;\Leftrightarrow x$ constant

  Plan orthogonal à l'axe des x de vecteur normal $(1; 0; 0)$