Vecteurs, Droites Et Plans de l'Espace

1. Vecteurs de l'espace

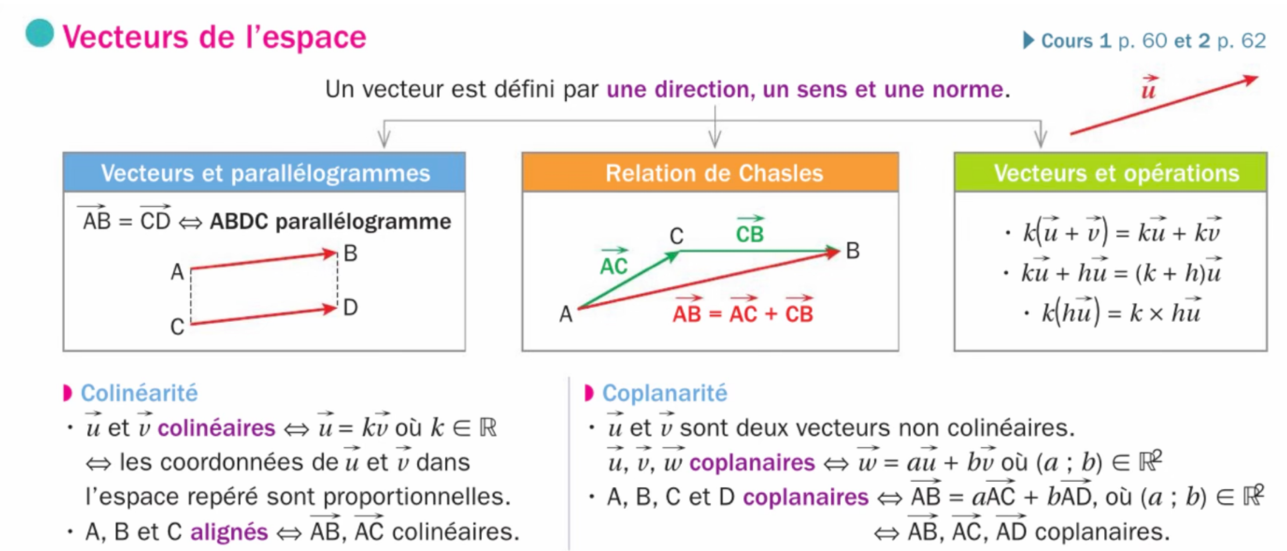
Définition

Un vecteur est défini par une direction + un sens + une norme

Vecteur ≡ Déplacement

M' est l'image du point M par la **translation** de vecteur $\vec{u}$
$\Leftrightarrow \quad (MM')^{\to} = \vec{u}.$
$\Leftrightarrow \quad$ « $M' = M + \vec{u}$ »

Propriétés



Vecteurs de l'espace

▶ Cours 1 p. 60 et 2 p. 62

Un vecteur est défini par une direction, un sens et une norme.

Vecteurs et parallélogrammes

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC parallélogramme

Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Vecteurs et opérations

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k\vec{u} + h\vec{u} = (k + h)\vec{u}$
- $k(h\vec{u}) = k \times h\vec{u}$

▶ **Colinéarité**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **colinéaires** $\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$ où $k \in \mathbb{R}$
  $\Leftrightarrow$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace repéré sont proportionnelles.
- A, B et C **alignés** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ colinéaires.

▶ **Coplanarité**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ **coplanaires** $\Leftrightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où $(a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2$
- A, B, C et D **coplanaires** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$, où $(a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ coplanaires.

Définition

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$

2. Droites et plans de l’espace

Droites de l’espace

- Un vecteur directeur d’une droite d est tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d

- Deux droites de vecteurs directeur $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires.

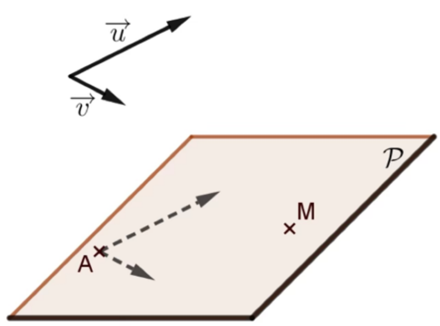
- Soit d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Plans de l’espace

- Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d’un plan.

- Deux plans sont parallèles $\Leftrightarrow$ deux vecteurs directeurs de l’un sont combinaisons linéaires des deux vecteurs directeur de l’autre.

- Soit un plan P passant par A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ non colinéaires.
$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\,\vec{v}$ avec $x \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}$.



Vecteurs coplanaires

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (peuvent être représentés dans un même plan) si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

En pratique :

- Trois vecteurs avec deux colinéaires sont toujours coplanaires

- Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ avec $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires. Alors $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists\ a, b \in \mathbb{R}, tq\ \vec{w} = \overrightarrow{au} + b\vec{v}$

Points coplanaires

A, B, C, D sont coplanaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

3. Bases et repères de l’espace.

Définition

Une base de l’espace est formée d’un triplet de vecteurs $(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\,)$ non coplanaires.

Propriété

Tout vecteur peut s’écrire comme combinaison linéaire de la base :
$\forall\,\vec{u}$, $\exists\; x,y,z \in \mathbb{R}\; tq : \vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

x, y, z sont les cordonnées de $\vec{u}$ dans cette base

Deux vecteurs sont colinéaires ⇔ leurs cordonnées sont proportionnelles

Définition

Un **repère de l’espace** est formé d’un point origine O et d’une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On note $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Propriété

Pour tout point M de l’espace il existe un unique triplet (x,y,z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

(x,y,z) sont les cordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

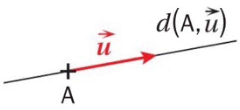
Si $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ alors le milieu du segment $[AB]$ a pour cordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$

4. Positions relatives de droites et de plans

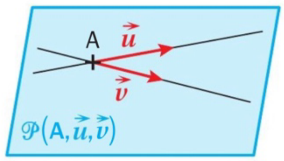
- La direction d'une droite est définie par son vecteur directeur

- La direction d'un plan est définie par deux vecteurs directeurs non colinéaires

Une droite est définie par un point et un vecteur directeur.



Un plan est défini par un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires.



- Deux droites : $d_1(\mathrm{A}, \vec{u})$ et $d_2(\mathrm{B}, \vec{v})$
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires → (d_1) et (d_2) sont parallèles.
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires → (d_1) et (d_2) sont sécantes ou non coplanaires.
- Un plan et une droite : $\mathcal{P}(\mathrm{B}, \vec{v}, \vec{w})$ et $d(\mathrm{A}, \vec{u})$
  - Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires → $(d) \mathbin{/\!/} \mathcal{P}$ ou $(d) \subset \mathcal{P}$.
  - Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires → (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point.
- Deux plans : $\mathcal{P}_1(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}_2(\mathrm{B}, \vec{u'}, \vec{v'})$
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont combinaisons linéaires de $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ → $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas combinaisons linéaires de $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ → $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite.

Attention :

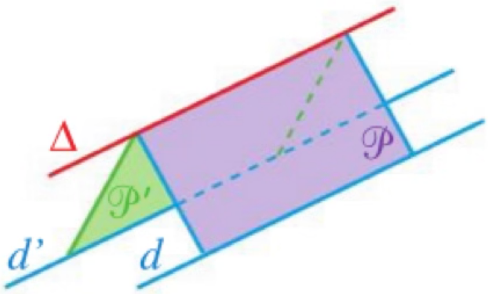
- Dans l'espace, deux droites peuvent ne pas se toucher sans forcément être parallèles. Elles sont dans ce cas non coplanaires.

- Deux droites peuvent appartenir a deux plans parallèles sans qu'elles soient parallèles.

- Deux droites peuvent appartenir a deux plans sécants tout en étant parallèles.

Théorème du toit

Soient P et P' deux plans.
Soient d une droite $\in P$ et $d^\wedge{}'$ une droite $\in P'$ tq d // d'
Si P et P' sont sécants en une droite Δ
Alors Δ // d // d'



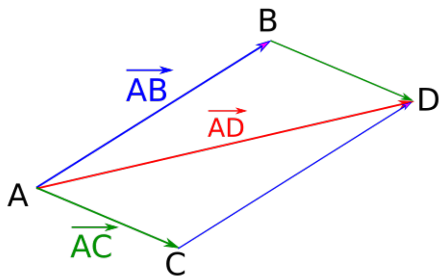
METHODES

Exprimer un vecteur comme combinaison linéaire

On utilise :

1. La relation de Chasles

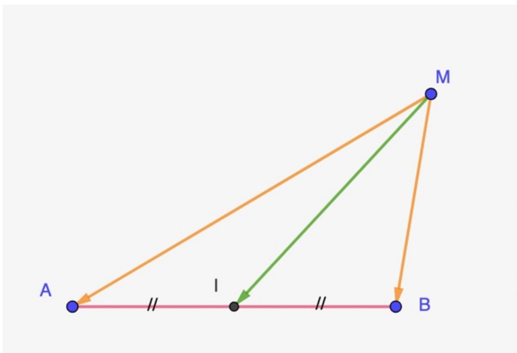
2. La règle du parallélogramme



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

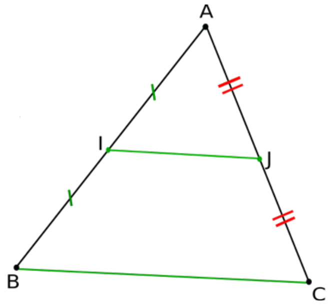
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

3. La propriété caractérisant un milieu :



$$\forall \text{ le point } M, \qquad \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$$

4. Théorème des milieux :



$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Reconnaitre géométriquement une base de l'espace

Il faut repérer 3 vecteurs non coplanaires

Montrer que A, B, C sont alignés

On montre que $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow$ les cordonnés sont proportionnelles.

Montrer l'appartenance d'un point à un plan

Soit un plan P$(A, \vec{u}, \vec{v})$

$M \in\ P \Leftrightarrow \ni a, b\ tq\ \overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Pour ça, on résout un système d'équation en a et en b.

S'il y'a des solutions alors $M \in P$

Montrer que $\vec{w}$ est dans la direction de D ou de P

- À la direction d'une droite d, on montre que $\vec{w}$ est colinéaire à un vecteur directeur de la droite d

- À la direction d'un plan P, on montre que $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs du plan P

Montrer que trois vecteurs sont coplanaires

On démontre que l'un peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres qui sont a priori non-colinéaires.

Montrer que trois vecteurs sont libres

On démontre que

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0, et\ c = 0$

Montrer que quatre points sont coplanaires

On démontre que trois vecteurs formés par les <u>quatre</u> points sont coplanaires.

Montrer qu'une droite est incluse dans un plan P

- Si la droite est donnée par deux points $A\ et\ B$, il suffit de montrer que les deux points appartiennent à P

- Si la droite est donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, il suffit de montrer que $A \in P$ et que $\vec{u}$ s'écrit comme combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P ($\vec{u}$ est dans la direction de P)

Montrer que deux droites sont parallèles

Il suffit de montrer que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires (coordonnées proportionnelles)

Montrer que deux plans sont parallèles

Il suffit de montrer qu'un couple de vecteurs directeurs de P_1 peut chacun s'écrire comme combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P_2

Montrer qu'une droite d est parallèle à un plan P

Il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de d peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P.