Γραφήματα
Βασικές Έννοιες

Δ. Μάγος

15 Οκτωβρίου 2020

Γράφημα

Γράφημα: μία διμελής σχέση μεταξύ τω στοιχείων ενός συνόλου.

Ορισμός 1 *Ένα γράφημα $G(V, E)$ αποτελείται από*

- *ένα σύνολο κορυφών (κόμβων) $V(G)$ και*
- *ένα σύνολο ακμών*

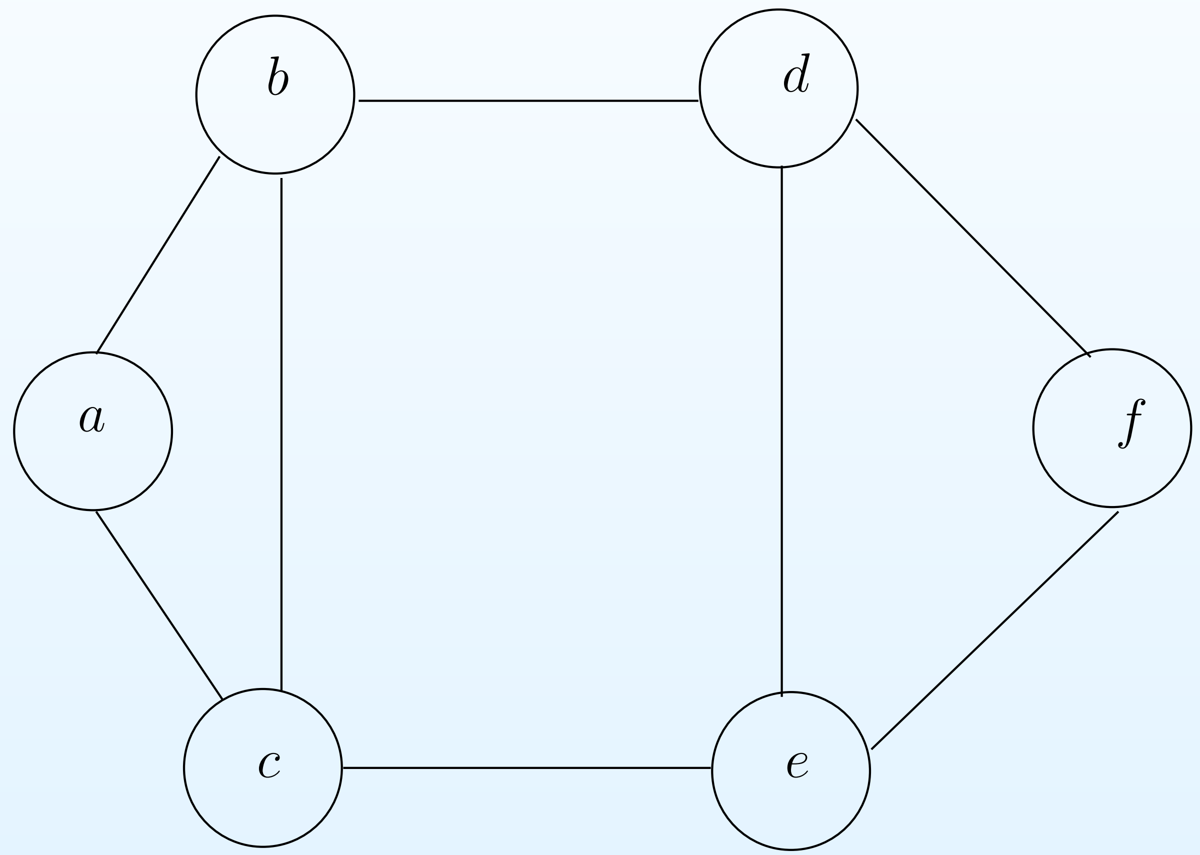
$$E(G) \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V(G)\}.$$

Τάξη γραφήματος: $n = |V(G)|$
Μέγεθος γραφήματος: $m = |E(G)|$
Αν $n = 0 \Rightarrow$ κενό γράφημα
Αν $n > m = 0 \Rightarrow$ γράφημα χωρίας ακμές

Παράδειγμα

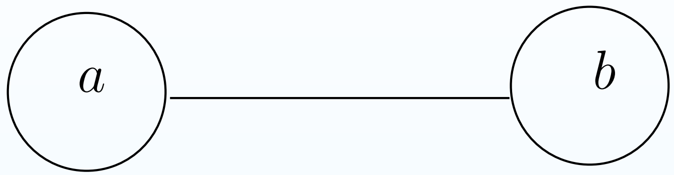
$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$$

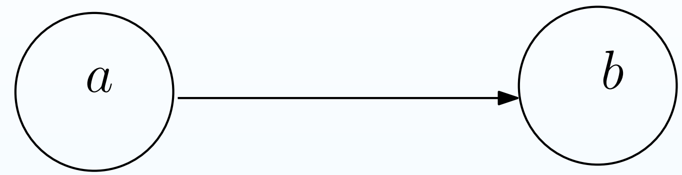


Σχήμα 1: Μη κατευθυνόμενο γράφημα με $n = 6$, $m = 8$.

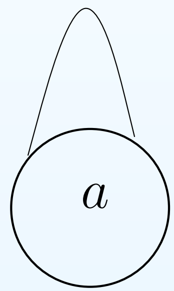
Ορολογία



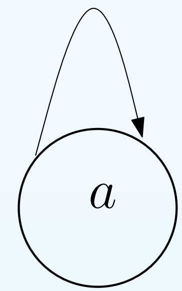
$\{a, b\}$
μη-διατεταγμένες ακμές



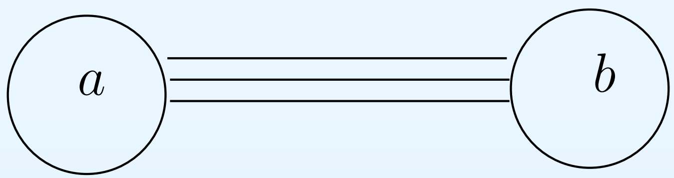
(a, b)
διατεταγμένες ακμές



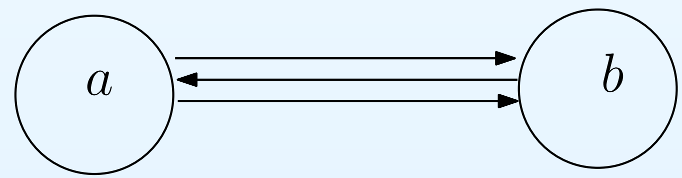
Βρόχος



Βρόχος



Παράλληλες ακμές



Παράλληλες ακμές

Απλό γράφημα: δεν περιέχει βρόχους ή παράλληλες ακμές

Βαθμός Κορυφής

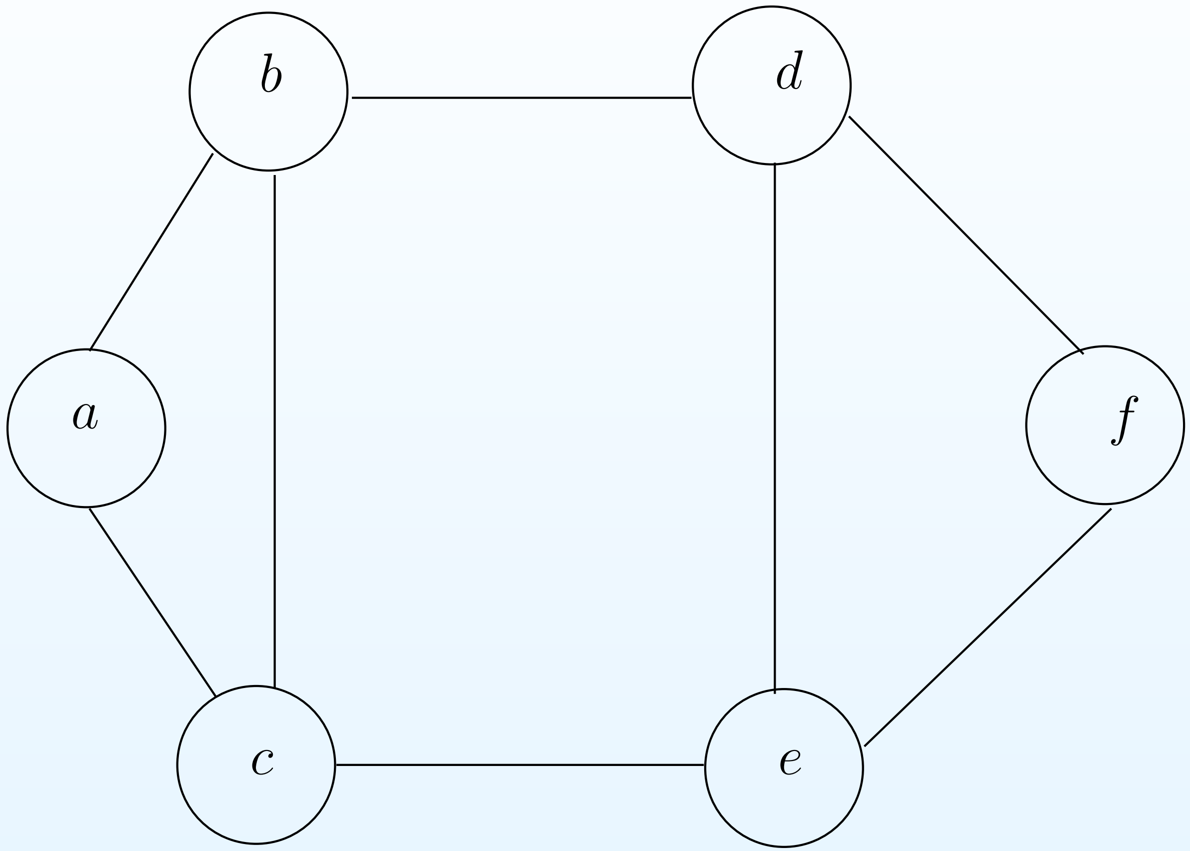
Μη-κατευθυνόμενο γράφημα:

$$N(v) = \{u \in V(G) : \{v, u\} \in E(G)\},$$
$$d(v) = |N(v)|\,.$$

Κατευθυνόμενο γράφημα:

$$N^+(v) = \{u \in V(G) : (v, u) \in E(G)\}, d^+(v) = |N(v)|$$
$$N^-(v) = \{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}, d^-(v) = |N(v)|$$

Παράδειγμα

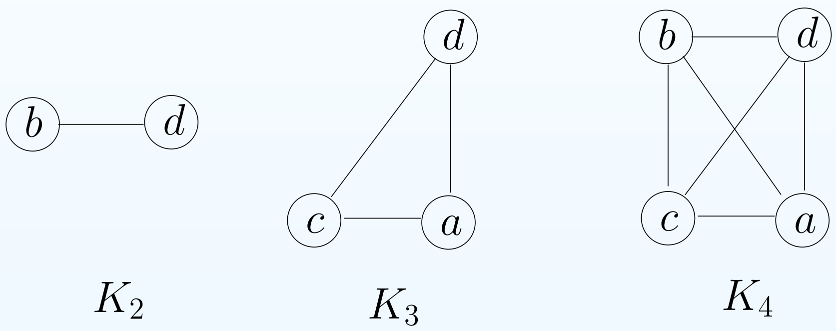


$$d(a) = 2, d(b) = 3, d(c) = 3, d(d) = 3, d(e) = 3, d(f) = 2.$$

Λήμμα Χειραψίας: $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$

Πλήρες γράφημα

Συμβολίζεται με K_n : απλό γράφημα με ακμές ανάμεσα σε όλους τους κόμβους



Σχήμα 2: Πλήρη γραφήματα με 2,3,4 κορυφές, αντίστοιχα

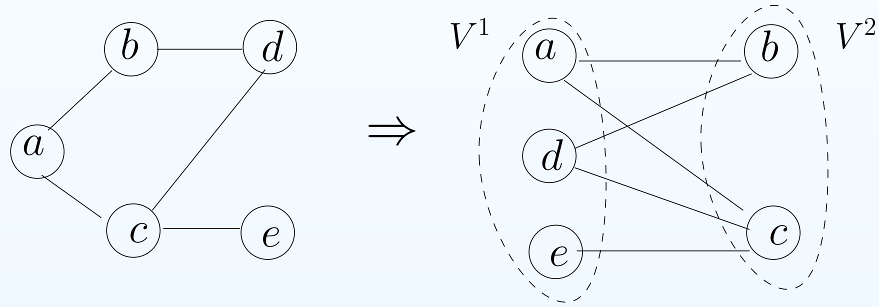
Αριθμός ακμών K_n : $\frac{n(n-1)}{2}$.

Για κάθε απλό γράφημα ισχύει

$$0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

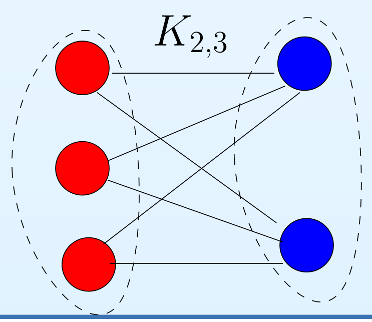
Διμερή γραφήματα

Ένα γράφημα $G(V, E)$ ονομάζεται *διμερές* αν υπάρχει διαμερισμός του συνόλου των κορυφών σε σύνολα V^1, V^2 έτσι ώστε για κάθε ακμή $\{v, u\} \in E$, $v \in V^1, u \in V^2$.



Σχήμα 3: Διμερές γράφημα

Ένα διμερές γράφημα με $\left|V^1\right| = n_1, \left|V^2\right| = n_2$ που έχει $n_1 * n_2$ ακμές ονομάζεται πλήρες διμερές και συμβολίζεται με K_{n_1,n_2}.

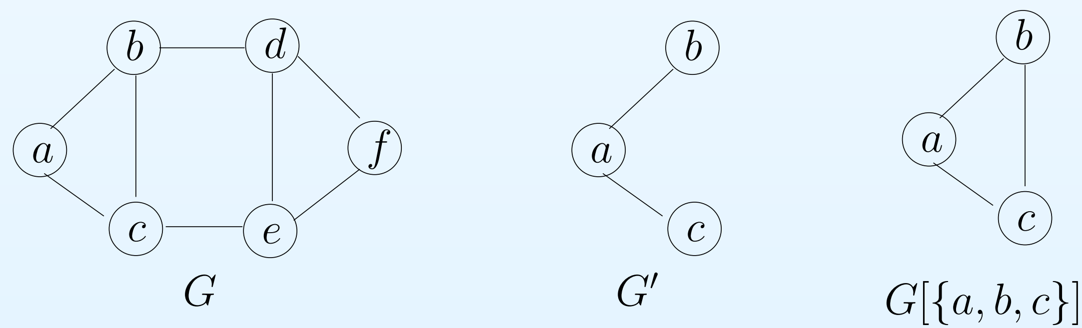


Email:dmagos@teiath.gr

Υπογράφημα

Ένα *υπογράφημα* ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ένα γράφημα $G'(V', E')$ με την ιδιότητα $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Συμβολίζουμε $G' \subseteq G$.

Ένα υπογράφημα $G' \subseteq G$ καλείται *μεγιστοτικό* αν δεν υπάρχει άλλο υπογράφημα $H \subseteq G$ τέτοιο ώστε $G' \subset H$. Ένα *επαγόμενο* υπογράφημα $G'(V', E')$ του G περιέχει κάθε ακμή ανάμεσα στους κόμβους του V' που υπάρχει στο G. Είναι δηλαδή ένα μεγιστοτικό υπογράφημα του G ως προς V'. Το συμβολίζουμε ως $G[V']$.

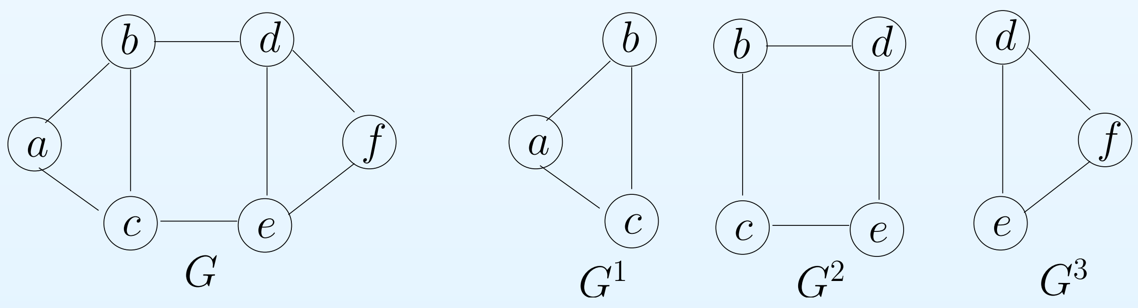


Σχήμα 5: Γράφημα G, Υπογράφημα G', Επαγόμενο υπογράφημα $G[\{a, b, c\}]$

Υπογράφημα

Ένα *υπογράφημα* ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ένα γράφημα $G'(V', E')$ με την ιδιότητα $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Συμβολίζουμε $G' \subseteq G$.

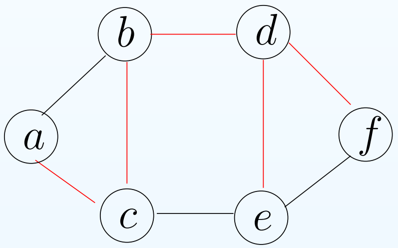
Ένα υπογράφημα $G' \subseteq G$ καλείται *μεγιστοτικό* αν δεν υπάρχει άλλο υπογράφημα $H \subseteq G$ τέτοιο ώστε $G' \subset H$. Ένα *επαγόμενο* υπογράφημα $G'(V', E')$ του G περιέχει κάθε ακμή ανάμεσα στους κόμβους του V' που υπάρχει στο G. Είναι δηλαδή ένα μεγιστοτικό υπογράφημα του G ως προς V'. Το συμβολίζουμε ως $G[V']$.



Σχήμα 5: Γράφημα G και όλα τα μεγιστοτικά υπογραφήματα με βαθμό κόμβου 2

Υπογράφημα (συνεχ.)

Ένα *γεννητορικό υπογράφημα* $G'(V', E')$ του $G(V, E)$ έχει $V = V'$ και $E' \subset E$. Άρα το G' είναι μεγιστοτικό ως προς το σύνολο E'.



Σχήμα 6: Ένα γεννητορικό υπογράφημα του G (κόκκινο σύνολο ακμών).

Υπογράφημα (συνεχ.)

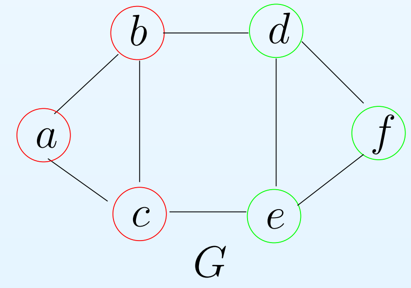
clique: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με ακμές ανάμεσα σε όλους τους κόμβους. Στο προηγούμενο σχήμα τα $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ είναι **cliques** μεγέθους 3.

Ανεξάρτητο σύνολο: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με $E(G[Q]) = \emptyset$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα στους κόμβους του Q. Στο γράφημα του προηγούμενου σχήματος τα σύνολα $\{a, f\}, \{a, d\}, \{a, e\}$ είναι τα ανεξάρτητα σύνολα που συμμετέχει η κορυφή a.

Υπογράφημα (συνεχ.)

clique: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με ακμές ανάμεσα σε όλους τους κόμβους. Στο προηγούμενο σχήμα τα $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ είναι **cliques** μεγέθους 3.

Ανεξάρτητο σύνολο: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με $E(G[Q]) = \emptyset$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα στους κόμβους του Q. Στο γράφημα του προηγούμενου σχήματος τα σύνολα $\{a, f\}, \{a, d\}, \{a, e\}$ είναι τα ανεξάρτητα σύνολα που συμμετέχει η κορυφή a.

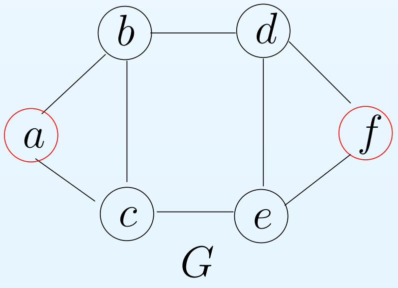


Σχήμα 7: cliques μεγέθους 3.

Υπογράφημα (συνεχ.)

clique: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με ακμές ανάμεσα σε όλους τους κόμβους. Στο προηγούμενο σχήμα τα $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ είναι **cliques** μεγέθους 3.

Ανεξάρτητο σύνολο: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με $E(G[Q]) = \emptyset$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα στους κόμβους του Q. Στο γράφημα του προηγούμενου σχήματος τα σύνολα $\{a, f\}, \{a, d\}, \{a, e\}$ είναι τα ανεξάρτητα σύνολα που συμμετέχει η κορυφή a.

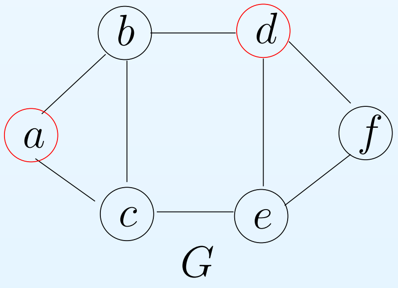


Σχήμα 7: Ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2.

Υπογράφημα (συνεχ.)

clique: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με ακμές ανάμεσα σε όλους τους κόμβους. Στο προηγούμενο σχήμα τα $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ είναι **cliques** μεγέθους 3.

Ανεξάρτητο σύνολο: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με $E(G[Q]) = \emptyset$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα στους κόμβους του Q. Στο γράφημα του προηγούμενου σχήματος τα σύνολα $\{a, f\}, \{a, d\}, \{a, e\}$ είναι τα ανεξάρτητα σύνολα που συμμετέχει η κορυφή a.

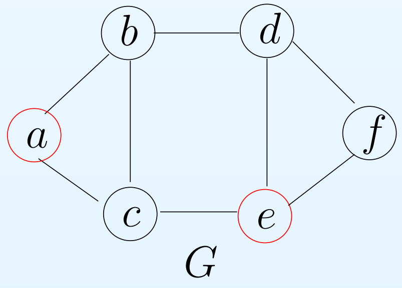


Σχήμα 7: Ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2.

Υπογράφημα (συνεχ.)

clique: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με ακμές ανάμεσα σε όλους τους κόμβους. Στο προηγούμενο σχήμα τα $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ είναι **cliques** μεγέθους 3.

Ανεξάρτητο σύνολο: Υποσύνολο κόμβων $Q \subseteq V$ με $E(G[Q]) = \emptyset$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα στους κόμβους του Q. Στο γράφημα του προηγούμενου σχήματος τα σύνολα $\{a, f\}, \{a, d\}, \{a, e\}$ είναι τα ανεξάρτητα σύνολα που συμμετέχει η κορυφή a.



Σχήμα 7: Ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2.

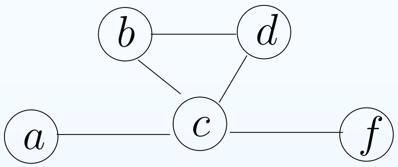
Διαδρομή και Μονοπάτια

Διαδρομή: Μία ακολουθία κορυφών $W =< \upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k >$ με $\{\upsilon_i, \upsilon_{i+1}\} \in E(G), i = 0, \ldots, k-1$.

Διαδρομή και Μονοπάτια

Διαδρομή: Μία ακολουθία κορυφών $W =< v_0, v_1, \ldots, v_k >$ με $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), i = 0, \ldots, k-1$.

Μονοκονδυλιά: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη ακμή



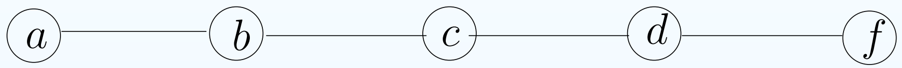
Σχήμα 8: Μονοκονδυλιά

Διαδρομή και Μονοπάτια

Διαδρομή: Μία ακολουθία κορυφών $W =< v_0, v_1, \ldots, v_k >$ με $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), i = 0, \ldots, k-1$.

Μονοκονδυλιά: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη ακμή

Μονοπάτι: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη κορυφή



Σχήμα 8: Μονοπάτι P_5

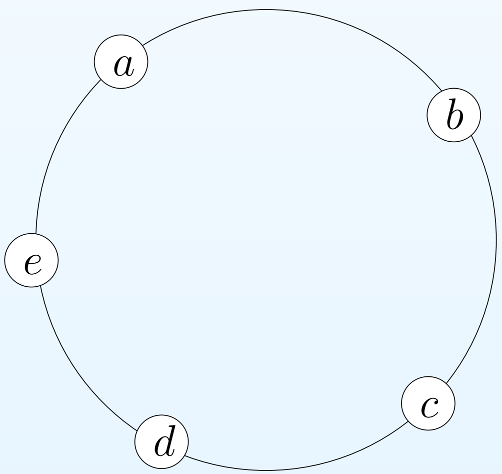
Διαδρομή και Μονοπάτια

Διαδρομή: Μία ακολουθία κορυφών $W =< v_0, v_1, \ldots, v_k >$ με $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), i = 0, \ldots, k-1$.

Μονοκονδυλιά: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη ακμή

Μονοπάτι: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη κορυφή

Κύκλος: Μονοπάτι όπου επαναλαμβάνεται μόνο η τερματική κορυφή.



Σχήμα 8: Κύκλος C_5

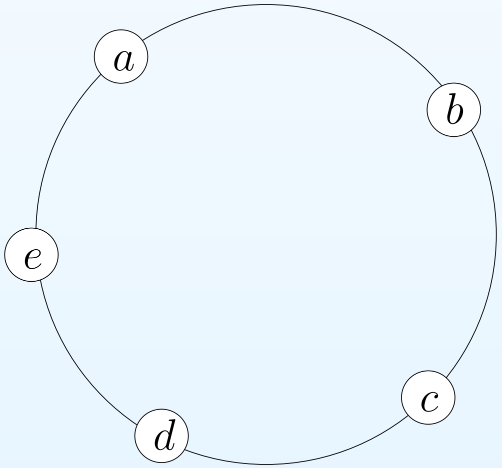
Διαδρομή και Μονοπάτια

Διαδρομή: Μία ακολουθία κορυφών $W = < v_0, v_1, \ldots, v_k >$ με $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), i = 0, \ldots, k-1$.

Μονοκονδυλιά: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη ακμή

Μονοπάτι: Διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη κορυφή

Κύκλος: Μονοπάτι όπου επαναλαμβάνεται μόνο η τερματική κορυφή.



Σχήμα 8: Κύκλος C_5

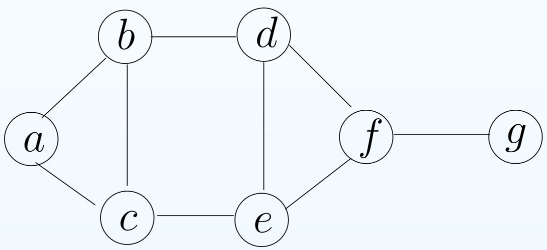
Ένα γράφημα που δεν περιέχει κύκλο ονομάζεται *άκυκλο*

Συνδεδεμένο γράφημα

Ένα γράφημα ονομάζεται *συνδεδεμένο (ή συνεκτικό)* αν υπάρχει μονοπάτι που συνδέει κάθε ζευγάρι κορυφών.

Συνδεδεμένο γράφημα

Ένα γράφημα ονομάζεται *συνδεδεμένο (ή συνεκτικό)* αν υπάρχει μονοπάτι που συνδέει κάθε ζευγάρι κορυφών.



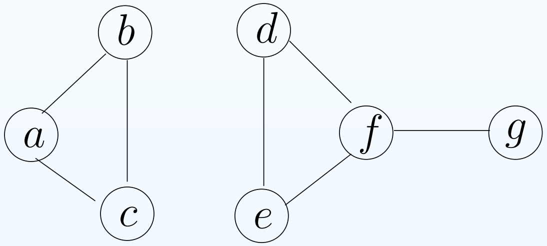
Σχήμα 9: Συνεκτικό γράφημα

Συνδεδεμένο γράφημα

Ένα γράφημα που δεν είναι συνδεδεμένο αποτελείται από *γραφικές συνιστώσες*.

Συνδεδεμένο γράφημα

Ένα γράφημα που δεν είναι συνδεδεμένο αποτελείται από *γραφικές συνιστώσες*.



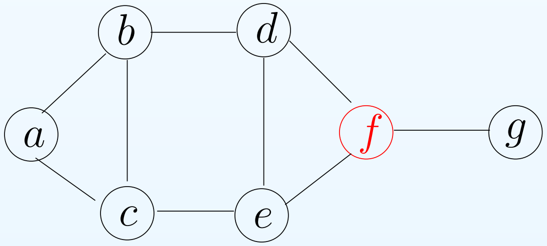
Σχήμα 9: Μη-συνεκτικό γράφημα με δύο συνιστώσες

Τομές

Μία κορυφή ονομάζεται *σημείο κοπής* αν η αφαίρεση της (μαζί με τις προσπίπτουσες ακμές) αποσυνδέει το γράφημα σε περισσότερες συνιστώσες.
Αντίστοιχα η ακμή ονομάζεται *γέφυρα* αν η αφαίρεση της αποσυνδέει το γράφημα σε περισσότερες συνιστώσες.

Τομές

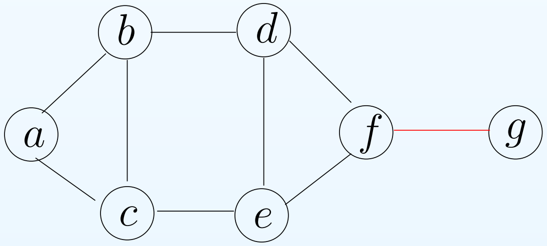
Μία κορυφή ονομάζεται *σημείο κοπής* αν η αφαίρεση της (μαζί με τις προσπίπτουσες ακμές) αποσυνδέει το γράφημα σε περισσότερες συνιστώσες.
Αντίστοιχα η ακμή ονομάζεται *γέφυρα* αν η αφαίρεση της αποσυνδέει το γράφημα σε περισσότερες συνιστώσες.



Σχήμα 10: Σημείο κοπής f

Τομές

Μία κορυφή ονομάζεται *σημείο κοπής* αν η αφαίρεση της (μαζί με τις προσπίπτουσες ακμές) αποσυνδέει το γράφημα σε περισσότερες συνιστώσες.
Αντίστοιχα η ακμή ονομάζεται *γέφυρα* αν η αφαίρεση της αποσυνδέει το γράφημα σε περισσότερες συνιστώσες.



Σχήμα 10: Γέφυρα $\{f, g\}$

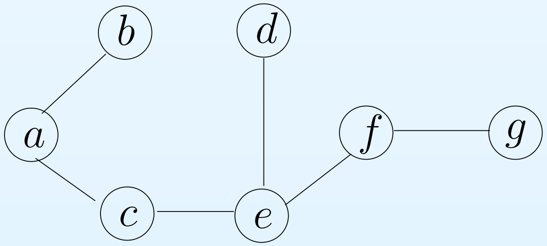
Παρατηρήσεις

- Ένα συνεκτικό γράφημα έχει μία γραφική συνιστώσα.
- Αν σε κάποιο γράφημα υπάρχει κορυφή v με $d(v) = n - 1$ τότε το γράφημα είναι συνδεδεμένο.
- Αν από ένα γράφημα αφαιρέσουμε μια γέφυρα τότε αυξάνεται ο αριθμός των γραφικών συνιστωσών κατά ένα.
- Αν από ένα γράφημα αφαιρέσουμε το σημείο κοπής v τότε αυξάνεται ο αριθμός των γραφικών συνιστωσών το πολύ κατά $d(v) - 1$.
- Για οποιοδήποτε γράφημα με k συνιστώσες ισχύει $n \leq k + m$.
- Για κάθε συνεκτικό γράφημα ισχύει ότι ο αριθμός των ακμών πρέπει να είναι τουλάχιστον όσο ο αριθμός των κορυφών μείον ένα: $n - 1 \leq m$.
- Αν ένα συνεκτικό γράφημα έχει ΑΚΡΙΒΩΣ $n - 1$ ακμές, δηλαδή αν, $m = n - 1$ τότε λέγεται *δένδρο*. Ισοδύναμα, ένα δένδρο ορίζεται ένα γράφημα το οποίο είναι *μεγιστοτικά άκυκλο* και *ελαχιστοτικά συνδεδεμένο*.

Ορισμοί

Έστω γράφημα $T(V, E)$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- Το γράφημα T είναι δένδρο.
- Στο T, μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών v, u με $v \neq u$ υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι από την v στην u.
- Το T είναι ένας συνδεδεμένο ακυκλικό γράφημα.
- Το T είναι συνδεδεμένο γράφημα και έχει $n - 1$ ακμές.
- Το T είναι ακυκλικό γράφημα και έχει $n - 1$ ακμές.
- Το T είναι συνδεδεμένο γράφημα και κάθε ακμή είναι γέφυρα.
- Το T είναι ακυκλικό γράφημα και η προσθήκη ακμής δημιουργεί κύκλο.

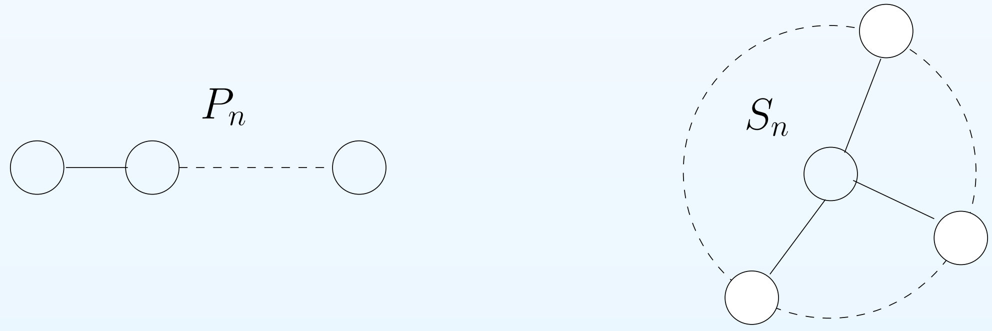


Σχήμα 11: Γράφημα δένδρο.

Παρατηρήσεις

- Οι κορυφές με βαθμό ένα σε κάθε δένδρο ονομάζονται *φύλλα*.
- Οι υπόλοιπες κορυφές ονομάζονται *εσωτερικές*.

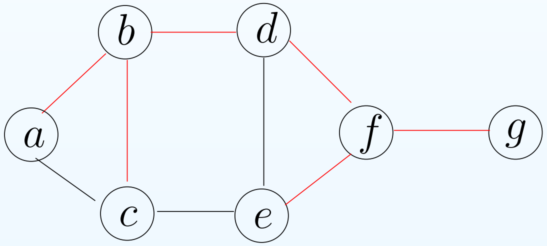
Ειδικά δένδρα.



Σχήμα 12: Γράφημα μονοπάτι (P_n) και γράφημα αστέρι (S_n).

Γεννητορικό Δένδρο

Έστω γράφημα $G(V, E)$ και υπογράφημα του $T(V, E')$, με $E' \subseteq E$ τέτοιο ώστε T είναι δένδρο. Το T ονομάζεται *γεννητορικό* ή συνεκτικό δένδρο του G.



Σχήμα 13: Κόκκινες ακμές σχηματίζουν ένα γεννητορικό δένδρο του G .

Ρίζα δένδρου

Ρίζα: Μία διακεκριμένη κορυφή του δένδρου η οποία δεν είναι φύλλο.
Υπάρχει μοναδικό μονοπάτι από την ρίζα σε κάθε φύλλο.
Έστω $v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ ένα τέτοιο μονοπάτι. Η κορυφή v_i ονομάζεται *γονέας (ή πατέρας)* της v_{i+1} και η v_{i+1} *παιδί* της v_i.

- Βάθος Κορυφής: αριθμός των ακμών στο μονοπάτι μέχρι τη ρίζα.
- Ύψος δένδρου: το μεγαλύτερο βάθος κάποιας κορυφής.
- Επίπεδο: όλες οι κορυφές με το ίδιο βάθος βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
- Η ρίζα του δένδρου βρίσκεται σε επίπεδο μηδέν.

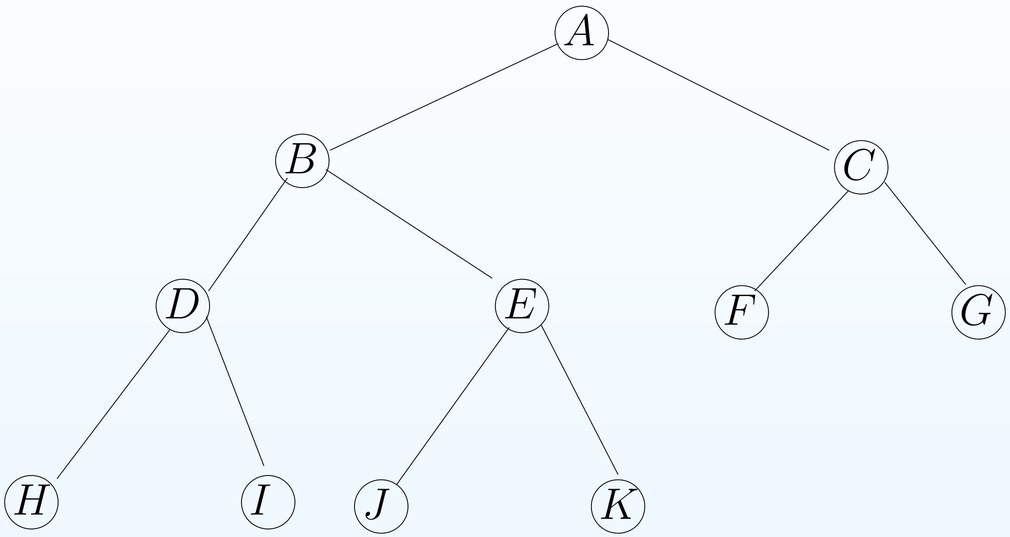
Δυαδικά δένδρα

- Κάθε κόμβος έχει το πολύ δύο παιδιά
- Διακρίνουμε μεταξύ αριστερού και δεξιού παιδιού (υποδένδρου).
- Αν σε κάθε επίπεδο υπάρχουν όλοι οι κόμβοι τότε το δένδρο λέγεται πλήρες.
- Το επίπεδο d έχει το πολύ 2^d κορυφές
- Αν h το ύψος του δένδρου, τότε

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1 \Rightarrow \lg(n+1) \leq h \leq n - 1.$$

- Αν $n_i, i = 0, 1, 2$ είναι το πλήθος των κορυφών με i παιδιά τότε $n_0 = n_2 + 1$
- Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο έχει συνολικά $2^{h+1} - 1$ κορυφές, 2^h φύλλα και $2^h - 1$ εσωτερικές κορυφές.

Διάσχιση δένδρου



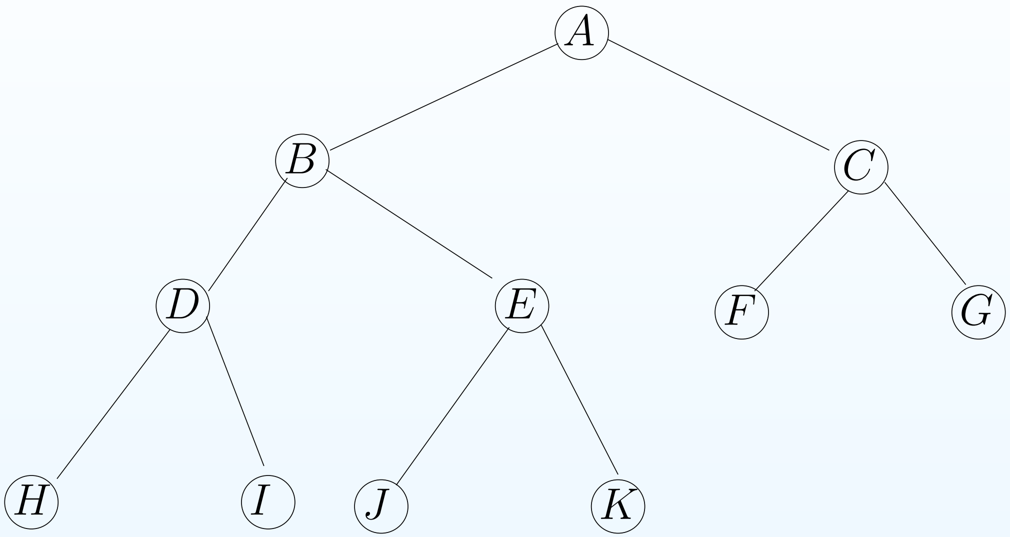
Σχήμα 14: Δυαδικό δένδρο.

Ένδο-διατεταγμένη (inorder) διέλευση :

- Αναδρομική διέλευση αριστερού υποδένδρου.
- Επεξεργασία ρίζας.
- Αναδρομική διέλευση δεξιού υποδένδρου.

HDIBJEKAFCG

Διάσχιση δένδρου



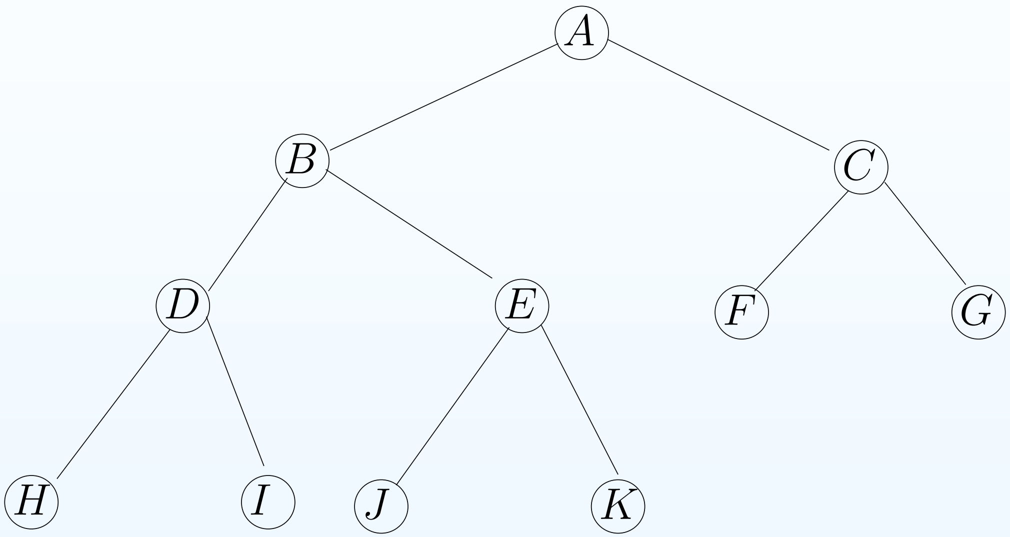
Σχήμα 14: Δυαδικό δένδρο.

Προ-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:

- Επεξεργασία ρίζας.
- Αναδρομική διέλευση αριστερού υποδένδρου.
- Αναδρομική διέλευση δεξιού υποδένδρου.

ABDHIEJKCFG

Διάσχιση δένδρου



Σχήμα 14: Δυαδικό δένδρο.

Μετα-διατεταγμένη (postorder) διέλευση:

- Αναδρομική διέλευση αριστερού υποδένδρου.
- Αναδρομική διέλευση δεξιού υποδένδρου.
- Επεξεργασία ρίζας.

HIDJKEBFGCA