第 3 章 命题逻辑的推理理论

3.1 推理的形式结构

数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理. 所谓推理是指从前提出发推出结论的思维过程,而前提是已知的命题公式集合,结论是从前提出发应用推理规则推出的命题公式. 为此,首先应该明确什么样的推理是正确的.

定义 3.1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 和 B 都是命题公式,若对于 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 和 B 中出现的命题变项的任意一组赋值,或者 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 为假,或者当 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 为真时 B 也为真,则称由前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推出结论 B 的推理是有效的或正确的,并称 B 为有效的结论.

关于定义 3.1 还需做以下几点说明.

1. 由前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推出结论 B 的推理是否正确与诸前提的排列次序无关,前提是一个有限的公式集合. 设前提为集合 Γ,将由 Γ 推出 B 的推理记为 $\Gamma\vdash B$. 若推理是正确的,则记为 $\Gamma\vDash B$,否则记为 $\Gamma\nvDash B$. 这里称 $\Gamma\vdash B$ 或 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}\vdash B$ 为推理的形式结构.

2. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k,B$ 中共出现 n 个命题变项,对于任一组赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$($\alpha_i=0$ 或 1, $i=1,2,\cdots,n$),前提和结论的取值情况有以下 4 种.

(1) $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 为 0,B 为 0;

(2) $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 为 0,B 为 1;

(3) $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 为 1,B 为 0;

(4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 1, B 为 1.

由定义 3.1 可知，只要不出现情况(3)，推理就是正确的，因而判断推理是否正确，就是判断是否会出现情况(3).

3. 由上面的讨论可知，推理正确并不能保证结论 B 一定成立，因为前提可能就不成立. 这与人们通常对推理的理解是不同的，通常认为只有在正确的前提下推出正确的结论才是正确的推理. 而在这里，如果前提不正确，不论结论正确与否，都说推理正确.

例 3.1　判断下列推理是否正确.

(1) $\{p, p\to q\} \vdash q$.

(2) $\{p, q\to p\} \vdash q$.

解　写出前提的合取式与结论的真值表，看是否出现前提合取式为真，而结论为假的情况.

(1) 由表 3.1，没有出现前提合取式为真，结论为假的情况，因而推理正确，即 $\{p, p\to q\} \models q$.

(2) 由表 3.1，当赋值为 10 时，前提的合取式为真，而结论为假，因而推理不正确，即 $\{p, q\to p\} \not\models q$.

表 3.1

p　q	$p\wedge(p\to q)$	q	$p\wedge(q\to p)$	q
0　0	0	0	0	0
0　1	0	1	0	1
1　0	0	0	1	0
1　1	1	1	1	1

对于例 3.1 中这样简单的推理，不难通过直接观察判断推理是否正确. 如在(1)中，当 q 为假时，无论 p 是真还是假，$p\wedge(p\to q)$ 均为假，因而不会出现前提合取式为真，结论为假的情况，故推理正确. 而在(2)中，当 q 为假，p 为真时，出现了前提合取式为真，结论为假的情况，因而推理不正确.

下面给出推理形式结构另一种等价的形式. 为此，首先证明下面定理.

定理 3.1　命题公式 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$$

为重言式.

证　必要性. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的推理正确，则对于 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 B 中所含命题变项的任意一组赋值，不会出现 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真且 B 为假的情况，因而在任何赋值下，蕴涵式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ 均为真，故它为重言式.

充分性. 若蕴涵式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ 为重言式，则对于任何赋值此蕴涵式均为真，因而不会出现前件为真后件为假的情况，即在任何赋值下，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为假，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 和 B 同时为真，故 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推 B 的推理正确.

由定理3.1,由前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推出 B 的推理的形式结构

$$\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}\vdash B \tag{3.1}$$

等同于蕴涵式

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\rightarrow B \tag{3.2}$$

其中推理前提的合取式成了蕴涵式的前件,结论成了蕴涵式的后件.推理正确

$$\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}\vDash B \tag{3.3}$$

等同于

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\Rightarrow B \tag{3.4}$$

其中⇒同⇔一样是一种元语言符号,表示蕴涵式为重言式.

今后把推理的形式结构写成

前提:$A_1,A_2,\cdots,A_k$

结论:B (3.5)

并且也把式(3.2)称作推理的形式结构,通过判断式(3.2)是否为重言式来确定推理是否正确.根据前2章的讨论,判断式(3.2)是否为重言式有下面3种方法.

1. 真值表法.

2. 等值演算法.

3. 主析取范式法.

现在可以将例3.1中的两个推理写成式(3.5)的形式.

(1)

前提:$p,p\rightarrow q$

结论:q

推理的形式结构:$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$

(2)

前提:$p,q\rightarrow p$

结论:q

推理的形式结构:$(p\wedge(q\rightarrow p))\rightarrow q$

由例3.1已知,(1)正确,即 $(p\wedge(p\rightarrow q))\Rightarrow q$;而(2)不正确,记为 $(p\wedge(q\rightarrow p))\nRightarrow q$.

例3.2 判断下面推理是否正确.

(1) 若 a 能被4整除,则 a 能被2整除. a 能被4整除.所以,a 能被2整除.

(2) 若 a 能被4整除,则 a 能被2整除. a 能被2整除.所以,a 能被4整除.

(3) 下午马芳或去看电影或去游泳.她没去看电影.所以,她去游泳了.

(4) 若下午气温超过30℃,则王小燕必去游泳.若她去游泳,她就不去看电影了.所以,若王小燕没去看电影,下午气温必超过了30℃.

解 解上述类型的推理问题,首先应将简单命题符号化.然后分别写出前提、结论、推理的形式结构,接着进行判断.

(1) 设

p: a 能被 4 整除.

q: a 能被 2 整除.

前提: $p \to q, p$

结论: q

推理的形式结构: $(p \to q) \land p \to q$　　(3.6)

由例 3.1 已知此推理正确,即 $(p \to q) \land p \Rightarrow q$.

(2) 设 p, q 的含义同(1).

前提: $p \to q, q$

结论: p

推理的形式结构: $(p \to q) \land q \to p$　　(3.7)

当然可以用真值表法、等值演算、主析取范式等方法来判断式(3.7)是否为重言式.但在此推理中,容易看出,01 是式(3.7)的成假赋值,所以此推理不正确.

(3) 设

p: 马芳下午去看电影.

q: 马芳下午去游泳.

前提: $p \lor q, \neg p$

结论: q

推理的形式结构: $((p \lor q) \land \neg p) \to q$　　(3.8)

用等值演算法来判断式(3.8)是否为重言式.

$$
\begin{aligned}
&((p \lor q) \land \neg p) \to q \\
\Leftrightarrow &((p \land \neg p) \lor (q \land \neg p)) \to q \\
\Leftrightarrow &(q \land \neg p) \to q \\
\Leftrightarrow &\neg(q \land \neg p) \lor q \\
\Leftrightarrow &\neg q \lor p \lor q \\
\Leftrightarrow &1
\end{aligned}
$$

得证式(3.8)为重言式,所以推理正确.

(4) 设

p: 下午气温超过 30℃.

q: 王小燕去游泳.

r: 王小燕去看电影.

前提: $p \to q, q \to \neg r$

结论: $\neg r \to p$

推理的形式结构: $((p \to q) \land (q \to \neg r)) \to (\neg r \to p)$　　(3.9)

用主析取范式法判式(3.9)是否为重言式.

$$\begin{aligned}
&((p\to q)\wedge(q\to\neg r))\to(\neg r\to p)\\
\Leftrightarrow&\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee(r\vee p)\\
\Leftrightarrow&((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge r))\vee(r\vee p)\\
\Leftrightarrow&p\vee r \qquad\text{（用两次吸收律）}\\
\Leftrightarrow&(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\\
&\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\\
&\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\
\Leftrightarrow&m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7 \qquad\text{（重排了序）}
\end{aligned}$$

可见式(3.9)不是重言式(主析取范式中缺2个极小项 m_0 和 m_2)，所以推理不正确.

有一些重要的重言蕴涵式，称作**推理定律**. 下面给出9条推理定律，它们是：

1. $A\Rightarrow(A\vee B)$ 附加律
2. $(A\wedge B)\Rightarrow A$ 化简律
3. $(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$ 拒取式
5. $(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)$ 假言三段论
7. $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$ 构造性二难

   $(A\to B)\wedge(\neg A\to B)\Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$ 破坏性二难

其中 A,B,C,D 等是元语言符号，表示任意的命题公式.

把具体的命题公式代入某条推理定律后就得到这条推理定律的一个代入实例. 例如，$p\Rightarrow p\vee q$，$p\to q\Rightarrow(p\to q)\vee r$，$p\Rightarrow p\vee q\vee r$ 等都是附加定律的代入实例. 推理定律的每一个代入实例都是重言式，可以使用这些推理定律证明推理正确. 在3.2节将看到，由这9条推理定律产生9条推理规则，构成一个推理系统中的推理规则集.

除上述9条推理定律外，2.1节给出的24个等值式中的每一个都能产生出两条推理定律. 例如，双重否定律 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$ 产生两条推理定律 $A\Rightarrow\neg\neg A$ 和 $\neg\neg A\Rightarrow A$.

3.2 自然推理系统 P

本节将对由前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推出结论 B 的正确推理的证明给出严格的形式描述. **证明**是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论(中间结论或推理中的结论).

定义 3.2 一个形式系统 I 由下面4个部分组成.

(1) 非空的字母表 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集 $R(I)$.

将 I 记为 4 元组 $<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$. 其中 $<A(I),E(I)>$ 是 I 的形式语言系统,而 $<A_X(I),R(I)>$ 为 I 的形式演算系统.

形式系统一般分为两类. 一类是自然推理系统,它的特点是从任意给定的前提出发,应用系统中的推理规则进行推理演算,最后得到的命题公式是推理的结论(它是有效的结论,可能是重言式,也可能不是重言式). 另一类是公理推理系统,它只能从若干条给定的公理出发,应用系统中的推理规则进行推理演算,得到的结论是系统中的重言式,称为系统中的定理. 本书只介绍自然推理系统 P,它的定义中无公理部分,因而只有 3 个部分.

定义 3.3　自然推理系统 P 定义如下.

1. 字母表

(1) 命题变项符号:$p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots(i\geq 1)$.

(2) 联结词符号:$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$.

(3) 括号与逗号:(,),,.

2. 合式公式

同定义 1.6.

3. 推理规则

(1) 前提引入规则:在证明的任何步骤都可以引入前提.

(2) 结论引入规则:在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提.

(3) 置换规则:在证明的任何步骤,命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换,得到公式序列中的又一个公式.

由 9 条推理定律和结论引入规则可以导出以下各条推理规则.

(4) 假言推理规则(或分离规则):若证明的公式序列中已出现过 $A\rightarrow B$ 和 A,则由假言推理定律 $(A\rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B$ 可知,B 是 $A\rightarrow B$ 和 A 的有效结论. 由结论引入规则可知,可以将 B 引入命题序列. 用图式表示为如下形式.

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ \underline{A} \\ \therefore B \end{array}$$

以下各条推理规则直接以图式给出,不再加以说明.

(5) 附加规则:

$$\begin{array}{c} \underline{A} \\ \therefore A\vee B \end{array}$$

(6) 化简规则:

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则:

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B \\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则:

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B \\ B \rightarrow C\end{array}}{\therefore A \rightarrow C}$$

(9) 析取三段论规则:

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B \\ \neg B\end{array}}{\therefore A}$$

(10) 构造性二难推理规则:

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C\end{array}}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则:

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \neg B \vee \neg D\end{array}}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则:

$$\frac{\begin{array}{c}A \\ B\end{array}}{\therefore A \wedge B}$$

设前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$,结论 B 和公式序列 $C_1, C_2, \cdots, C_l$. 如果每一个 $i(i=1,2,\cdots,l)$, C_i 是某个 A_j,或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到,并且 $C_l = B$,则称公式序列 $C_1, C_2, \cdots, C_l$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的证明.

例 3.3 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

(1) 前提: $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论: $r \wedge (p \vee q)$

(2) 前提: $\neg p \vee q, r \vee \neg q, r \rightarrow s$

结论: $p \rightarrow s$

解 (1) 证明:

①	$p \to s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg p$	①②拒取式
④	$p \vee q$	前提引入
⑤	q	③④析取三段论
⑥	$q \to r$	前提引入
⑦	r	⑤⑥假言推理
⑧	$r \wedge (p \vee q)$	⑦④合取引入

此证明的序列长为 8,最后一步为推理的结论,所以推理正确,$r \wedge (p \vee q)$是有效的结论.

(2) 证明:

①	$\neg p \vee q$	前提引入
②	$p \to q$	①置换
③	$r \vee \neg q$	前提引入
④	$q \to r$	③置换
⑤	$p \to r$	②④假言三段论
⑥	$r \to s$	前提引入
⑦	$p \to s$	⑤⑥假言三段论

得证 $p \to s$ 是有效结论.

可以在自然推理系统 P 中构造数学和日常生活中的一些推理,所得结论都是有效的. 当所有前提为真时,结论必为真.

例 3.4　在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

若数 a 是实数,则它不是有理数就是无理数. 若 a 不能表示成分数,则它不是有理数. a 是实数且它不能表示成分数. 所以 a 是无理数.

解　设简单命题

p: a 是实数.

q: a 是有理数.

r: a 是无理数.

s: a 能表示成分数.

前提: $p \to (q \vee r)$, $\neg s \to \neg q$, $p \wedge \neg s$

结论: r

证明:

①	$p \wedge \neg s$	前提引入
②	p	①化简
③	$\neg s$	①化简
④	$p \to (q \vee r)$	前提引入

⑤ $q \vee r$ ②④假言推理

⑥ $\neg s \to \neg q$ 前提引入

⑦ $\neg q$ ③⑥假言推理

⑧ r ⑤⑦析取三段论

下面介绍两种构造证明方法.

1. 附加前提证明法

设推理的形式结构具有如下形式

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B) \tag{3.10}$$

其结论也为蕴涵式. 此时可以将结论中的前件也作为推理的前提,使结论为 B,即把推理的形式结构改写为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B \tag{3.11}$$

两者的等价性证明如下.

$$\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B)\\
\Leftrightarrow &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)\\
\Leftrightarrow &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B\\
\Leftrightarrow &(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B
\end{aligned}$$

因为式(3.10)与式(3.11)是等值的,因而若能证明式(3.11)是重言式,则式(3.10)也是重言式. 在证明式(3.10)时采用形式结构式(3.11),称作附加前提证明法,并将 A 称作附加前提.

例 3.5 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

如果小张和小王去看电影,则小李也去看电影;小赵不去看电影或小张去看电影;小王去看电影. 所以,当小赵去看电影时,小李也去.

解 设简单命题

p: 小张去看电影.

q: 小王去看电影.

r: 小李去看电影.

s: 小赵去看电影.

前提: $(p \wedge q) \to r, \neg s \vee p, q$

结论: $s \to r$

证明:用附加前提证明法.

① s 附加前提引入

② $\neg s \vee p$ 前提引入

③ p ①②析取三段论

④ $(p \wedge q) \to r$ 前提引入

⑤ q 前提引入

⑥ $p \wedge q$ ③⑤合取引入

⑦ r　　④⑥假言推理

如果不用附加前提证明法证明，那么又应该如何证明呢？请读者自行证明，并比较这两种证明方法.

2. 归谬法

在构造形式结构为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B$$

的推理证明中，若将$\neg B$作为前提能推出矛盾来，比如说得出$(A \wedge \neg A)$，则说明推理正确. 其原因如下.

$$\begin{aligned}&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B\\ \Leftrightarrow &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B\\ \Leftrightarrow &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)\end{aligned}$$

若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$为矛盾式，则说明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B$为重言式，即

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B$$

故推理正确.

这种将结论的否定式作为附加前提引入并推出矛盾式的证明方法称作归谬法. 数学上经常使用的反证法就是归谬法.

例 3.6　在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

如果小张守第一垒并且小李向 B 队投球，则 A 队取胜；或者 A 队未取胜，或者 A 队成为联赛第一名；A 队没有成为联赛的第一名；小张守第一垒. 因此，小李没向 B 队投球.

解　设简单命题

p：小张守第一垒.

q：小李向 B 队投球.

r：A 队取胜.

s：A 队成为联赛第一名.

前提：$(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

证明：用归谬法

① q　　结论的否定引入

② $\neg r \vee s$　　前提引入

③ $\neg s$　　前提引入

④ $\neg r$　　②③析取三段论

⑤ $(p \wedge q) \to r$　　前提引入

⑥ $\neg(p \wedge q)$　　④⑤拒取式

⑦ $\neg p \vee \neg q$　　⑥置换

⑧ p　　前提引入

⑨ $\neg q$ ⑦⑧析取三段论

⑩ $q \wedge \neg q$ ①⑨合取

由于最后一步 $q \wedge \neg q \Rightarrow 0$，即$(((p \wedge q) \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge p) \wedge q \Rightarrow 0$，所以推理正确. 请读者不用归谬法证明之.

3.3 消解证明法

消解证明法是根据归谬法的思想，采用消解规则构造证明的方法. 它的基本做法是，把前提中的公式和结论的否定都化成等值的合取范式，以这些合取范式中的所有简单析取式作为前提，用消解规则构造证明. 如果能得到空式，则证明推理是正确的. 消解证明法除准备工作外，只使用前提引入和消解两条规则.

例 3.7 用消解证明法证明下面推理.

前提：$q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$

结论：$p \wedge q \wedge s$

解 先求前提中各式和结论否定的合取范式.

$q \to p \Leftrightarrow \neg q \vee p$，$q \leftrightarrow s \Leftrightarrow (\neg q \vee s) \wedge (\neg s \vee q)$，$s \leftrightarrow t \Leftrightarrow (\neg s \vee t) \wedge (\neg t \vee s)$，$t \wedge r$，

$\neg(p \wedge q \wedge s) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg s$

将推理的前提改成下述形式.

前提：$\neg q \vee p, \neg q \vee s, \neg s \vee q, \neg s \vee t, \neg t \vee s, t, r$，$\neg p \vee \neg q \vee \neg s$

证明：① $\neg t \vee s$ 前提引入

② t 前提引入

③ s ①②归结

④ $\neg s \vee q$ 前提引入

⑤ q ③④归结

⑥ $\neg q \vee p$ 前提引入

⑦ p ⑤⑥归结

⑧ $\neg p \vee \neg q \vee \neg s$ 前提引入

⑨ $\neg q \vee \neg s$ ⑦⑧归结

⑩ $\neg s$ ⑤⑨归结

⑪ λ ③⑩归结

习 题 3

1. 从日常生活或数学中的各种推理中，构造两个满足附加律的推理定律，并将它们符号化. 例如，“若 2 是

偶数,则 2 是偶数或 3 是奇数". 令 p:2 是偶数,q:3 是奇数,则该附加律符号化为

$$p \Rightarrow p \vee q$$

2. 从日常生活或数学的各种推理中,构造两个满足化简律的推理定律,并将它们符号化. 例如,"我去过海南岛和新疆,所以我去过海南岛". 令 p:我去过海南岛,q:我去过新疆,则该化简律符号化为

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

3. 构造 3 个满足假言推理定律的推理,并将它们符号化. 例如,"如果 2 是素数,则雪是黑色的;2 是素数. 所以雪是黑色的". 令 p:2 是素数,q:雪是黑色的,该假言推理定律符号化为

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$$

4. 参照第 1,2,3 题,构造满足拒取式、析取三段论、假言三段论、等价三段论、构造性二难等推理定律的实例各一个,并将它们符号化.

5. 分别写出由德摩根律、吸收律所产生的推理定律(每个等值式产生两条推理定律).

6. 判断下面推理是否正确. 先将简单命题符号化,再写出前提、结论、推理的形式结构(以蕴涵式的形式给出)和判断过程(至少给出两种判断方法).

(1) 若今天是星期一,则明天是星期三. 今天是星期一. 所以明天是星期三.

(2) 若今天是星期一,则明天是星期二. 明天是星期二. 所以今天是星期一.

(3) 若今天是星期一,则明天是星期三. 明天不是星期三. 所以今天不是星期一.

(4) 若今天是星期一,则明天是星期二. 今天不是星期一. 所以明天不是星期二.

(5) 若今天是星期一,则明天是星期二或星期三. 今天是星期一. 所以明天是星期二.

(6) 今天是星期一当且仅当明天是星期三. 今天不是星期一. 所以明天不是星期三.

7. 对下面的每个前提给出两个结论,要求一个是有效的,而另一个不是有效的.

(1) 前提: $p \to q, q \to r$

(2) 前提: $(p \wedge q) \to r, \neg r, q$

(3) 前提: $p \to (q \to r), p, q$

8. 对下面的每个前提给出两个结论,要求一个是有效的,而另一个不是有效的.

(1) 只有天气热,我才去游泳. 我正在游泳. 所以……

(2) 只要天气热,我就去游泳. 我没去游泳. 所以……

(3) 除非天气热并且我有时间,我才去游泳. 天气不热或我没有时间. 所以……

9. 用 3 种方法(真值表法、等值演算法、主析取范式法)证明下面推理是正确的.

若 a 是奇数,则 a 不能被 2 整除. 若 a 是偶数,则 a 能被 2 整除. 因此,如果 a 是偶数,则 a 不是奇数.

10. 用真值表法和主析取范式法证明下面推理不正确.

如果 a 和 b 之积是负数,则 a 和 b 中恰有一个是负数. a 和 b 之积不是负数. 所以 a 和 b 都不是负数.

11. 填充下面推理证明中没有写出的推理规则.

前提: $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \to s, p$

结论: s

证明:

① p　　　前提引入

② $\neg p \vee q$　　　前提引入

③ q

④ $\neg q \vee r$ 前提引入

⑤ r

⑥ $r \to s$ 前提引入

⑦ s

12. 填充下面推理证明中没有写出的推理规则.

前提:$p \to (q \to r), q \to (r \to s)$

结论:$(p \wedge q) \to s$

证明:

① $p \wedge q$

② p

③ q

④ $p \to (q \to r)$ 前提引入

⑤ $q \to r$

⑥ r

⑦ $q \to (r \to s)$ 前提引入

⑧ $r \to s$

⑨ s

13. 前提:$\neg(p \to q) \wedge q, p \vee q, r \to s$

结论1: r

结论2: s

结论3: $r \vee s$

(1) 证明从此前提出发,推出结论1、结论2、结论3的推理都是正确的.

(2) 证明从此前提出发,推出任何结论的推理都是正确的.

14. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

(1) 前提: $p \to (q \to r), p, q$

结论: $r \vee s$

(2) 前提: $p \to q, \neg(q \wedge r), r$

结论: $\neg p$

(3) 前提: $p \to q$

结论: $p \to (p \wedge q)$

(4) 前提: $q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$

结论: $p \wedge q$

(5) 前提: $p \to r, q \to s, p \wedge q$

结论: $r \wedge s$

(6) 前提: $\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q$

结论: $t \to (r \wedge s)$

15. 在自然推理系统 P 中用附加前提法证明下面推理.

(1) 前提: $p \to (q \to r), s \to p, q$

结论：$s \rightarrow r$

（2）前提：$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$，$(s \vee t) \rightarrow u$

结论：$p \rightarrow u$

16. 在自然推理系统 P 中用归谬法证明下面推理.

（1）前提：$p \rightarrow \neg q$，$\neg r \vee q$，$r \wedge \neg s$

结论：$\neg p$

（2）前提：$p \vee q$，$p \rightarrow r$，$q \rightarrow s$

结论：$r \vee s$

17. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没离开，A 就是谋杀嫌犯. A 曾到过受害者房间. 如果 A 在 11 点以前离开，看门人就会看见他. 看门人没有看见他. 所以 A 是谋杀嫌犯.

18. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

（1）如果今天是星期六，我们就要到颐和园或圆明园去玩. 如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园玩. 今天是星期六. 颐和园游人太多. 所以我们去圆明园玩.

（2）如果小王是理科生，则他的数学成绩一定很好. 如果小王不是文科生，则他一定是理科生. 小王的数学成绩不好. 所以小王是文科生.

19. 用消解证明法构造下列推理的证明.

（1）前提：$p \rightarrow (q \rightarrow r)$，$p$，$q$

结论：$r \vee s$

（2）前提：$p \rightarrow q$

结论：$p \rightarrow (p \wedge q)$

（3）前提：$q \rightarrow p$，$q \leftrightarrow s$，$s \leftrightarrow t$，$t \wedge r$

结论：$p \wedge q$

（4）前提：$\neg p \vee r$，$\neg q \vee s$，$p \wedge q$

结论：$t \rightarrow (r \wedge s)$

（5）前提：$p \vee q$，$p \rightarrow r$，$q \rightarrow s$

结论：$r \vee s$