练习题答案：

一、选择题

1．函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a，b 满足（D）

（A）$a<0,b<0$；　（B）$a>0,b>0$；　（C）$a\le 0,b>0$；　（D）$a\ge 0,b<0$。

2．设 $f(x)=\begin{cases}\ln(\cos x)x^{-2}, & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（ D ）。

（A）0；　（B）1；　（C）∞；　（D）$-\dfrac{1}{2}$。

二、填空题

1．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x<0\\ ax+b, & 0\le x\le 1\\ \arctan\dfrac{1}{x\text{-}1}, & x>1\end{cases}$ 在所定义的区间上连续，则 $a=$_π_；$b=$_$-\dfrac{\pi}{2}$_。

2．设 $f(x)=\begin{cases}(1-\sin^2 x+x^3)^{\frac{2}{x^2}}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $A=$_e^2_。

3．设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+1}{x^{2n}+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为_$x=1$_。

4．函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sin x+e^{tx}}{x+2e^{tx}}$ 的连续区间为_$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$_，间断点为_$x=0$_，其类型为__第一类间断点（跳跃间断点）__。

三、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x<0.\end{cases}$ 求 $f(x)$的间断点，并说明其类型。

解：$f(x)$ 在$x=0$ 和 $x=1$处无定义， $f(x)$在$(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$ 内都是连续的。

$\because$ $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$， $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{e}$，

$\therefore$ $x=0$是第一类间断点， 且是跳跃间断点。

$\because\ f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$， $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，

$\therefore\ x=1$是第二类间断点，且是无穷间断点。

2．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，试确定 a 和 b 的值。

解：当$|x|<1$时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$；

当$|x|>1$时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}+ax^{2-2n}+bx^{1-2n}}{1+x^{-2n}}=\dfrac{1}{x}$；

当$x=1$时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\dfrac{a+b+1}{2}$，

当$x=-1$时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\dfrac{a-b-1}{2}$。

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ ax^2+bx, & |x|<1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\end{cases}$$

$\because\ f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$， $(-1,\ 1)$， $(1,\ +\infty)$ 内为初等函数，

$\therefore\ f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$， $(-1,\ 1)$， $(1,\ +\infty)$ 内连续。

故只要适当选取$a,\ b$，使 $f(x)$ 在 $x=\pm1$处同时连续即可，由连续的定义应有：

$$\begin{cases}f(1)=f(1+0)=f(1-0)\\ f(-1)=f(-1+0)=f(-1-0)\end{cases},$$

$\because\ f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1$， $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b$， $\therefore\ a+b=1$。①

$\because\ f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1^+}(ax^2+bx)=a-b$， $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x}=-1$，$\therefore\ a-b=-1$。②

由①、②解得$a=0$， $b=1$。

四、证明题

1．设 $f(x)$ 在点 $x_{\circ}$ 连续，且 $f(x_{\circ})>0$，试证：存在 $x_{\circ}$ 的某邻域，使得在此邻域内有 $kf(x)>f(x_{\circ})$，其中 $k>1$。

证明：∵ $f(x)$ 在点 $x_{\circ}$ 连续，$k>1$，∴ $\lim\limits_{x\to x_{\circ}} f(x)=f(x_{\circ})>\frac{1}{k}f(x_{\circ})$，

由函数极限的保序性可知，$\exists\delta>0$，$\ni x\in N(x_{\circ},\delta)$，恒有 $f(x)>\frac{1}{k}f(x_{\circ})$，

即 $kf(x)>f(x_{\circ})$。

2．证明方程 $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$，其中 $a_1,a_2,a_3>0$，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，在 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 内至少各有一个实根。

证法 1：令 $f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$，则 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 内均连续。

∵ $\lim\limits_{x\to\lambda_1^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\lambda_2^-} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\lambda_2^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\lambda_3^-} f(x)=-\infty$，

∴必有 $[x_1,x_2]\subset(\lambda_1,\lambda_2)$，使得 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$，

由零点定理知，$\exists c_1\in(x_1,x_2)\subset(\lambda_1,\lambda_2)$，使得 $f(c_1)=0$。

同理，必有 $[x_3,x4]\subset(\lambda_2,\lambda_3)$，使得 $f(x_3)>0$，$f(x_4)<0$，

由零点定理知，$\exists c_2\in(x_3,x_4)\subset(\lambda_2,\lambda_3)$，使得 $f(c_2)=0$。

故方程 $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ 在 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 内各有一个实根。

证法 2：令 $f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$

$$=\frac{a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)}=\frac{F(x)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)}$$

则 $f(x)=0$ 与 $F(x)=0$ $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 内同解。

∵ $F(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ 是二次多项式，

$\therefore F(x)$在$[\lambda_1,\lambda_2]$, $[\lambda_2,\lambda_3]$上必连续，

$\because a_1, a_2, a_3 > 0$，$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$，

$\therefore F(\lambda_1) = a_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) > 0$，$F(\lambda_2) = a_2(x - \lambda_1)(x - \lambda_3) < 0$，

$F(\lambda_3) = a_3(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) > 0$，

由零点定理知，$\exists c_1 \in (\lambda_1,\lambda_2)$，使得$F(c_1)=0$；$\exists c_2 \in (\lambda_2,\lambda_3)$，使得$F(c_2)=0$。

因此$F(x)=0$在(λ_1,λ_2)和(λ_2,λ_3)内至少各有一个实根，又二次方程至多有两个实根，故$F(x)=0$在(λ_1,λ_2)和(λ_2,λ_3)内各有且仅有一个实根，从而$f(x)=0$，

即$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$在$(\lambda_1,\lambda_2)$和$(\lambda_2,\lambda_3)$内各有且仅有一个实根。

3．设$f \in C_{[a,b]}$且$f(a)=f(b)$，证明：至少存在一个区间$[\alpha,\beta]$且$\beta-\alpha=\dfrac{b-a}{2}$，使得$f(\alpha)=f(\beta)$。

证明：设$F(x)=f(\dfrac{b-a}{2}+x)-f(x)$，则$F(x)\in C[a,\dfrac{a+b}{2}]$，

且$F(a)=f(\dfrac{b-a}{2}+a)-f(a)=f(\dfrac{b+a}{2})-f(a)$，

$$F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{b-a}{2}+\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2})=f(b)-f(\frac{a+b}{2})=f(a)-f(\frac{a+b}{2})$$

于是$F(a)\cdot F(\dfrac{a+b}{2})\le 0$，所以由零点定理可得，$\exists\xi\in[a,\dfrac{a+b}{2}]$使得$F(\xi)=0$，

即$f(\dfrac{b-a}{2}+\xi)=f(\xi)$，因此取$\alpha=\xi,\beta=\dfrac{b-a}{2}+\xi$即可得证。