线性代数第1章

作者 刘国华

东南大学 数学系

October 16, 2019

基本信息

- 教材：线性代数（第二版）
  周建华　陈建龙　张小向等
- 参考书：
  几何与代数，东南大学；
  Linear Algebras ，Kenneth Hoffman Ray Kunze ;
  线性代数，同济大学；
  线性代数，北京大学

基本信息

- 教材：线性代数（第二版）
  周建华　陈建龙　张小向等
- 参考书：
  几何与代数，东南大学;
  Linear Algebras ， Kenneth Hoffman Ray Kunze ;
  线性代数，同济大学;
  线性代数，北京大学
- 教师：刘国华
  办公地点：图书馆北门,五楼数学系508
  联系方式：liuguohua@seu.edu.cn, QQ: 345820856
- 考核方式：课程总成绩由平时成绩、期中考试成绩和期末考试成绩三部分组成。
- 答疑：1-16周,周四中午12点-1点半,地点：图书馆508.
- 大学之道，在明德，在亲民，在止于至善。
  知止而后有定，定而后能静，静而后能安，安而后能虑，虑而后能得。物有本末，事有终始。知所先后，则近道矣。

2010年国家精品课程

课程的重要性

- 工科基础
  很多专业课要用到矩阵，方程组等.另外,各种程序设计中广泛涉及矩阵计算,
- 考研基础
  考研高数一中线性代数占22.5%,高数占55%，概率统计占22.5%,
- 思维训练
  培养化繁为简的思考模式
  培养分析问题的能力
  培养发散思维
  多角度看问题,探讨变换问题的条件,转换思考角度,训练思维的求异性,转化思维,训练思维的联想性.

大学与中学的区别

- 综合考评
- 应试型学习转为应用型学习, 被动学习转为主动学习
- 要善于运用新学的知识和方法

目录

《九章算术》（距今已有 1800 多年，秦汉时期）

- “今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？答曰：上禾一秉九斗四分斗之一；中禾一秉四斗四分斗之一；下禾一秉二斗四分斗之三. ”
- 化成方程组为 $\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$，答案为：$x=\frac{37}{4}=9\frac{1}{4}, y=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}, z=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.
- 负数理论历史上的第一次也是出现在我国的《九章算术》中.

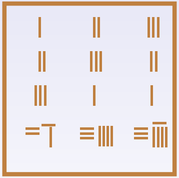
再看看刘徽（约公元 225年—295 年，魏晋期间）对方程的注释：**程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存，且为有所据而言耳。**

方程就是方盘中的程，如

线性代数———背景知识

再看看刘徽（约公元 225年—295 年，魏晋期间）对方程的注释：程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存，且为有所据而言耳。

方程就是方盘中的程，如



上等禾
中等禾
下等禾
实

矩阵的历史

- “矩阵(matrix)”这个词首先是英国数学家西尔维斯特(James Joseph Sylvester) 使用的. 他为了将数字的矩形阵列区别于行列式(determinant)而发明了这个述语.
- 英国数学家凯莱(Arthur Cayley)被公认为是矩阵论的创立者. 他首先把矩阵作为一个独立的数学概念, 并发表了一系列关于这个题目的文章.

矩阵的实例

引例1：某生产厂家每月向两个商场配送三种产品，按双月结算．假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示．

矩阵的实例

引例1: 某生产厂家每月向两个商场配送三种产品, 按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

11月份

商场 \ 产品（箱）	B_1	B_2	B_3
A_1	97	80	72
A_2	45	96	70

12月份

商场 \ 产品（箱）	B_1	B_2	B_3
A_1	88	82	75
A_2	47	92	68

矩阵的实例

引例1: 某生产厂家每月向两个商场配送三种产品, 按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

11月份

产品（箱）/ 商场	B_1	B_2	B_3
A_1	97	80	72
A_2	45	96	70

12月份

产品（箱）/ 商场	B_1	B_2	B_3
A_1	88	82	75
A_2	47	92	68

用矩阵表示为

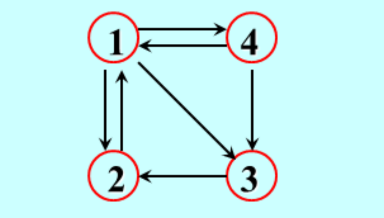
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 97 & 80 & 72 \\ 45 & 96 & 70 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & 82 & 75 \\ 47 & 92 & 68 \end{pmatrix}.$$

矩阵的实例

引例2: 四个城市间的直达航线的数目. 如下图所示.

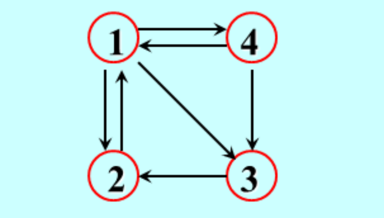
矩阵的实例

引例2：四个城市间的直达航线的数目. 如下图所示.



矩阵的实例

引例2: 四个城市间的直达航线的数目. 如下图所示.



若用 $a_{i,j}$ 表示从 i 市到 j 市的直达航线的条数, 则上图信息可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的定义

定义

mn 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots m, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 m 行 n 列的矩形阵列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ **矩阵**$(matrix)$，简记为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$m \times n$ 称为矩阵的**型**，矩阵的横排称为**行**，竖排称为**列**，a_{ij} 就是矩阵的第 i 行第 j 列的元素$(element/entry)$，我们称之为(i, j)-项. 通常用大写的A, B, C来表示矩阵.

矩阵的定义

定义

mn 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots m, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 m 行 n 列的矩形阵列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ **矩阵**$(matrix)$，简记为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$m \times n$ 称为矩阵的**型**，矩阵的横排称为**行**，竖排称为**列**，a_{ij} 就是矩阵的第 i 行第 j 列的元素$(element/entry)$，我们称之为(i, j)-项．通常用大写的A, B, C来表示矩阵.元素都是实数——实矩阵$(real\ \ )$,元素都是复数——复矩阵$(complex\ \ )$．

矩阵的定义

定义

1 行 n 列的矩阵，称为 n 维行向量，如$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

n 行1 列的矩阵，称为 n 维列向量，如 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

所有项均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记为 $0_{m\times n}$，简记为0.

矩阵的定义

定义

1 行 n 列的矩阵，称为 n 维行向量，如$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

n 行1 列的矩阵，称为 n 维列向量，如 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

所有项均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记为 $0_{m\times n}$，简记为0.
方阵，三角矩阵，对角矩阵，数量矩阵，单位矩阵，同型矩阵，相等矩阵,对称阵，反对称阵.

矩阵的定义

定义

1 行 n 列的矩阵，称为 n 维行向量，如$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

n 行1 列的矩阵，称为 n 维列向量，如 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

所有项均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记为 $0_{m\times n}$，简记为0.
方阵，三角矩阵，对角矩阵，数量矩阵，单位矩阵，同型矩阵，相等矩阵,对称阵，反对称阵.

线性方程组的系数矩阵与增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

和

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

分别成为方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

的系数矩阵和增广矩阵.

阶梯形矩阵

定义

如下形状的矩阵称为阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r}1 & * & a_{r\,n} \\ \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

定义

如下形状的矩阵称为阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r}1 & * & a_{r\,n} \\ \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 全零行位于非零行的下方;
- 非零行的非零首元(自左至右第一个不为零的元, 称为主元) 列标随行标的递增而递增.

矩阵的加法

引例：某生产厂家每月向两个商场配送三种产品，按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

矩阵的加法

引例：某生产厂家每月向两个商场配送三种产品，按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

11月份

产品（箱）/商场	B_1	B_2	B_3
A_1	97	80	72
A_2	45	96	70

12月份

产品（箱）/商场	B_1	B_2	B_3
A_1	88	82	75
A_2	47	92	68

矩阵的加法

引例：某生产厂家每月向两个商场配送三种产品，按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

11月份

商场 \ 产品（箱）	B_1	B_2	B_3
A_1	97	80	72
A_2	45	96	70

12月份

商场 \ 产品（箱）	B_1	B_2	B_3
A_1	88	82	75
A_2	47	92	68

用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 97 & 80 & 72 \\ 45 & 96 & 70 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & 82 & 75 \\ 47 & 92 & 68 \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法

引例：某生产厂家每月向两个商场配送三种产品，按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

11月份

产品（箱）/ 商场	B_1	B_2	B_3
A_1	97	80	72
A_2	45	96	70

12月份

产品（箱）/ 商场	B_1	B_2	B_3
A_1	88	82	75
A_2	47	92	68

用矩阵表示为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}97&80&72\\45&96&70\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}88&82&75\\47&92&68\end{pmatrix}.$$

问该厂家11月、12月向这两个商场总的配送情况如何?

矩阵的加法

解: 这显然是个求和问题,我们只要将该厂两次配送的产品数量相加即可. 用矩阵表示即为

矩阵的加法

解: 这显然是个求和问题,我们只要将该厂两次配送的产品数量相加即可. 用矩阵表示即为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 97+88 & 80+82 & 72+75 \\ 45+47 & 96+92 & 70+68 \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法

解: 这显然是个求和问题,我们只要将该厂两次配送的产品数量相加即可. 用矩阵表示即为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 97+88 & 80+82 & 72+75 \\ 45+47 & 96+92 & 70+68 \end{pmatrix}.$$

矩阵C称为矩阵A与矩阵B的和.

矩阵的加法

定义

设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 都是$m\times n$形矩阵,它们的和记作$A+B$,规定

矩阵的加法

定义

设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 都是$m\times n$形矩阵,它们的和记作$A+B$,规定

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

也就是说$A+B$的(i,j) 位置上元素为A与B的(i,j) 位置上元素之和,即$a_{ij}+b_{ij}$.

矩阵的加法

Example

求

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法

Example

求

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们把求矩阵和的运算叫做**加法运算**.

矩阵的减法

设矩阵$A=(a_{ij})$, 记

$$-A=(-a_{ij}),$$

称$-A$为矩阵A的**负矩阵**,

矩阵的减法

设矩阵$A=(a_{ij})$，记

$$-A=(-a_{ij}),$$

称$-A$为矩阵A的**负矩阵**,由此规定矩阵的减法运算为

$$A-B=A+(-B),$$

矩阵的减法

设矩阵$A = (a_{ij})$, 记

$$-A = (-a_{ij}),$$

称$-A$为矩阵A的**负矩阵**,由此规定矩阵的减法运算为

$$A - B = A + (-B),$$

也就是说$A - B$为矩阵A中的元素减去矩阵B中对应元素形成的矩阵.

矩阵的减法

设矩阵$A=(a_{ij})$, 记

$$-A=(-a_{ij}),$$

称$-A$为矩阵A的**负矩阵**,由此规定矩阵的减法运算为

$$A-B=A+(-B),$$

也就是说$A-B$为矩阵A中的元素减去矩阵B中对应元素形成的矩阵. 如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

对于矩阵的加法运算有

Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵, 则有

- 交换律: $A + B = B + A$;

矩阵的加法

对于矩阵的加法运算有

Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵，则有

- 交换律：$A + B = B + A$;
- 结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$;

矩阵的加法

对于矩阵的加法运算有

Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵, 则有

- 交换律: $A + B = B + A$;
- 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + O = A$;

矩阵的加法

对于矩阵的加法运算有

Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵，则有

- 交换律：$A + B = B + A$;
- 结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + O = A$;
- $A - A = O$.

数与矩阵相乘

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$, k为一个正整数, k个A相加记为kA, 由矩阵的加法可知

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

kA称为整数k与矩阵A的乘积.

数与矩阵相乘

定义

数k与矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的 乘积记作kA或Ak, 规定

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

数与矩阵相乘

例如，设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

则

$$\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

数与矩阵相乘

例如，设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

则

$$\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

显然

$$(-1)A = -A$$

数与矩阵相乘

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**.
矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**.
对于数乘运算, 有以下命题:

Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

- 结合律: $(kl)A = k(lA)$;

数与矩阵相乘

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**.
矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**.
对于数乘运算, 有以下命题:

Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

- 结合律: $(kl)A = k(lA)$;
- 分配律: $(k+l)A = kA + lA$, $k(A+B) = kA + kB$;

数与矩阵相乘

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**.
矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**.
对于数乘运算, 有以下命题:

Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

- 结合律: $(kl)A = k(lA)$;
- 分配律: $(k+l)A = kA + lA$, $k(A+B) = kA + kB$;
- $1A = A$(左边 "1" 为数1);

数与矩阵相乘

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**.
矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**.
对于数乘运算，有以下命题：

Proposition

设A, B 为同型矩阵，k, l 为数，则有

- 结合律：$(kl)A = k(lA)$;
- 分配律：$(k+l)A = kA + lA$, $k(A+B) = kA + kB$;
- $1A = A$(左边“1”为数1);
- $0A = O$(左边“0”为数0).

根据矩阵线性运算的性质，可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

根据矩阵线性运算的性质，可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成向量方程的形式

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b.$$

根据矩阵线性运算的性质，可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成向量方程的形式

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b.$$

这里$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

练习一

设$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$2A-3B$.

引例

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂，全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

引例

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂，全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0&8\\7&1&4&3\\3&4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{甲}\\\text{乙}\\\text{丙}\end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元，表示为矩阵

引例

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂，全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0&8\\7&1&4&3\\3&4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{甲}\\\text{乙}\\\text{丙}\end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元，表示为矩阵

引例

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂，全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元，表示为矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

那么该公司甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额矩阵为

引例

1\. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂，全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元，表示为矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

那么该公司甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5\times 6 + 2\times 10 + 0\times 4 + 8\times 2 \\ 7\times 6 + 1\times 10 + 4\times 4 + 3\times 2 \\ 3\times 6 + 4\times 10 + 1\times 4 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 74 \\ 64 \end{pmatrix} = C$$

引例

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂，全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元，表示为矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

那么该公司甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5\times 6+2\times 10+0\times 4+8\times 2 \\ 7\times 6+1\times 10+4\times 4+3\times 2 \\ 3\times 6+4\times 10+1\times 4+1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 74 \\ 64 \end{pmatrix} = C$$

这里66万元，74万元，64万元分别表示甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额.

矩阵的乘积

2. 某地区有四个工厂 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ, 生产甲、乙、丙三种产品, 矩阵A表示一年中各工厂生产各种产品的数量, 矩阵B表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元), 矩阵C表示各工厂的总收入及总利润.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

甲 乙 丙

单位价格 单位利润

总收入 总利润

矩阵的乘积

2. 某地区有四个工厂 I、II、III、IV，生产甲、乙、丙三种产品，矩阵A表示一年中各工厂生产各种产品的数量，矩阵B表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元)，矩阵C表示各工厂的总收入及总利润.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{单位价格} & \text{单位利润} \end{array} \end{array} \quad C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{总收入} & \text{总利润} \end{array} \end{array}$$

其中，a_{ik} 是第i 个工厂生产第k 种产品的数量，
b_{k1}及b_{k2} 分别是第k 种产品的单位价格及单位利润，
c_{i1}及c_{i2} 分别是第i 个工厂生产三种产品的总收入及总利润
$(i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3)$.

则矩阵A,B,C 的元素之间有下列关系:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \\ a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}(i=1,2,3,4;j=1,2).$$

矩阵的乘积

(3) 假设变量x_i, y_i, z_i 之间有关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1s}y_s \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2s}y_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{ms}y_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ y_s = b_{s1}z_1 + b_{s2}z_2 + \cdots + b_{sn}z_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_m = c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \cdots + c_{mn}z_n \end{cases}$$

矩阵的乘积

(3) 假设变量x_i, y_i, z_i 之间有关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1s}y_s \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2s}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{ms}y_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n \\ \cdots\cdots \\ y_s = b_{s1}z_1 + b_{s2}z_2 + \cdots + b_{sn}z_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n \\ \cdots\cdots \\ x_m = c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \cdots + c_{mn}z_n \end{cases}$$

则有$x_i = \sum\limits_{k=1} a_{ik}y_k = \sum\limits_{k=1} a_{ik}\sum\limits_{j=1} b_{kj}z_j = \sum\limits_{j=1}\sum\limits_{k=1}(a_{ik}b_{kj})z_j$. 上述矩阵$C$称为矩阵$A$与$B$的乘积.

矩阵乘法的定义

定义

设矩阵A是$m \times s$矩阵，B是$s \times n$矩阵，A与B的乘积记作AB，AB是$m \times n$矩阵，AB的(i,j)位置上的元素c_{ij}由下式给出：

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵乘法的定义

定义

设矩阵A是$m \times s$矩阵，B是$s \times n$矩阵，A与B的乘积记作AB，AB是$m \times n$矩阵，AB的(i,j)位置上的元素c_{ij}由下式给出：

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

即

$$AB = (c_{ij})_{m \times n}.$$

矩阵乘法的定义

注

- A的列数等于B的行数的, 其乘积AB的行数与A的行数相同,与B的列数相同.

矩阵乘法的定义

注

- A的列数等于B的行数的，其乘积AB的行数与A的行数相同,与B的列数相同.
- AB的(i,j)位置上元素等于A的第i行元素和B的第j列对应元素乘积的和，即

$$c_{ij}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},$$

$$(i=1,\cdots,m;j=1\cdots,n).$$

矩阵乘法的定义

图示如下

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

矩阵乘法的定义

容易知道：AB 的第i行就是A的第i行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$右乘$B$所得，即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

矩阵乘法的定义

容易知道：AB 的第i行就是A的第i行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$右乘$B$所得，即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

AB 的第j列就是

矩阵乘法的定义

容易知道：AB 的第i行就是A的第i行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$右乘$B$所得，即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

AB 的第j列就是B的第j列$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$左乘$A$所得，即

矩阵乘法的定义

容易知道：AB 的第i行就是A的第i行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$右乘$B$所得，即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

AB 的第j列就是B的第j列$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$左乘$A$所得，即

$$A\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix}.$$

根据矩阵乘法运算，可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成：

$$Ax = b.$$

根据矩阵乘法运算，可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成：

$$Ax = b.$$

这里 A 指方程组的系数矩阵，

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

矩阵乘法的定义

例

- 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$
  $D = \begin{pmatrix} -1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$
  求AB.

矩阵乘法的定义

例

- 设$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$,
  $D=\begin{pmatrix}-1, & 1, & 0\end{pmatrix}$
  求$AB.\ CD,\ DC.$

矩阵乘法的定义

例

- 设$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$,
  $D=\begin{pmatrix}-1, & 1, & 0\end{pmatrix}$
  求$AB. CD, DC.$
- 设

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

求$AB, AC.$

矩阵乘法的定义

例

- 设$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\4&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-2\\5&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$
  $D=\begin{pmatrix}-1, & 1, & 0\end{pmatrix}$
  求$AB.\ CD,\ DC.$
- 设

$$A=\begin{pmatrix}-2&2\\4&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}$$

  求$AB,\ AC.$

性质

矩阵的乘法不满足消去律和交换律.

矩阵乘法的运算性质

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律, 但有下面命题.

矩阵乘法的运算性质

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律，但有下面命题.

性质

设A, B, C 为矩阵，k 为数，且下列运算都是可行的，则有

- 结合律：$(AB)C = A(BC)$;
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;

矩阵乘法的运算性质

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律，但有下面命题.

性质

设A, B, C 为矩阵，k 为数，且下列运算都是可行的，则有

- 结合律：$(AB)C = A(BC)$;
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
- 左右分配律：$A(B+C) = AB + AC$,
  $(B+C)A = BA + CA$;

矩阵乘法的运算性质

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律, 但有下面命题.

性质

设A, B, C 为矩阵, k 为数, 且下列运算都是可行的, 则有

- 结合律: $(AB)C = A(BC)$;
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
- 左右分配律: $A(B+C) = AB + AC$,
  $$(B+C)A = BA + CA;$$
- $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$, 简写为$EA = AE = A$.

矩阵乘法的运算性质

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律，但有下面命题.

性质

设A, B, C 为矩阵，k 为数，且下列运算都是可行的，则有

- 结合律：$(AB)C = A(BC)$;
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
- 左右分配律：$A(B+C) = AB + AC$,
  $(B+C)A = BA + CA$;
- $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$，简写为$EA = AE = A$.

注

单位矩阵E的作用等同于数1.
当A不是方阵时，左右单位矩阵的阶数是不同的.

矩阵乘法的运算性质

2. 方阵的幂

如果A, B, C依次可相乘，由于乘法满足结合律，那么记法ABC合理．即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

矩阵乘法的运算性质

2. 方阵的幂

如果A, B, C依次可相乘，由于乘法满足结合律，那么记法ABC合理. 即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地，如果A是一个n阶方阵，则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA\cdots A}^{n\text{个}}, \quad n \text{ 为正整数}$$

也就是说，A^n就是n个A连乘，称A^n为矩阵A的n次幂.

矩阵乘法的运算性质

2. 方阵的幂

如果A, B, C依次可相乘，由于乘法满足结合律，那么记法ABC合理. 即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地，如果A是一个n阶方阵，则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA\cdots A}^{n\text{个}}, \quad n \text{ 为正整数}$$

也就是说，A^n就是n个A连乘，称A^n为矩阵A的n次幂.

注

对任何非负整数n, m 有$A^mA^n = A^{m+n}$ 以及$(A^m)^n = A^{mn}$.

矩阵乘法的运算性质

2. 方阵的幂

如果A, B, C依次可相乘，由于乘法满足结合律，那么记法ABC合理. 即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地，如果A是一个n阶方阵，则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA\cdots A}^{n\text{个}}, \quad n \text{ 为正整数}$$

也就是说，A^n就是n个A连乘，称A^n为矩阵A的n次幂.

注

对任何非负整数n, m 有$A^mA^n = A^{m+n}$ 以及$(A^m)^n = A^{mn}$.
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$当且仅当$AB = BA$.

矩阵乘法的运算性质

2. 方阵的幂

如果A, B, C依次可相乘，由于乘法满足结合律，那么记法ABC合理．即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地，如果A是一个n阶方阵，则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA\cdots A}^{n\text{个}}, \quad n \text{ 为正整数}$$

也就是说，A^n就是n个A连乘，称A^n为矩阵A的n次幂．

注

对任何非负整数n, m 有$A^m A^n = A^{m+n}$ 以及$(A^m)^n = A^{mn}$.
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$当且仅当$AB = BA$.
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$当且仅当$AB = BA$.

矩阵乘法的运算性质

3. 方阵的多项式

设A为一个方阵，$f(x)$ 为一个多项式

$$f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

则称

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

为方阵A 的一个多项式.

例

已知方阵$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 和多项式$f(x) = x^2 + x + 3$, 求$f(A)$.

矩阵乘法的运算性质

例

- (1) 已知$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,计算 $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $(\beta\alpha)^{2017}$.

矩阵乘法的运算性质

例

- (1) 已知$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,计算 $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $(\beta\alpha)^{2017}$.
- (2) 设$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求$A^k$.

矩阵转置的定义

定义

设A是$m \times n$矩阵，把A的第i行第j列元素a_{ij}放到新矩阵的第j行第i列的位置，$i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$，得到的矩阵称为矩阵$A$的**转置矩阵**，记为$A^{\mathrm{T}}$.

若$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,则有

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵转置的定义

定义

设A是$m\times n$矩阵，把A的第i行第j列元素a_{ij}放到新矩阵的第j行第i列的位置，$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$，得到的矩阵称为矩阵$A$的**转置矩阵**，记为$A^{\mathrm{T}}$.

若$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,则有

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

易知A^{T}是$n\times m$形矩阵.

矩阵转置的性质

性质

设A, B, 则有

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

矩阵转置的性质

性质

设A, B, 则有

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
- $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

矩阵转置的性质

性质

设A, B, 则有

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
- $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$;

矩阵转置的性质

性质

设A, B, 则有

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
- $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$;
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置的性质

性质

设A, B，则有

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
- $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$;
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例

已知

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求$(AB)^{\mathrm{T}}$.

对称矩阵

定义

对于任意方阵$A=(a_{ij})$，如果$A=A^{\mathrm{T}}$，即$a_{ij}=a_{ji}$，则称矩阵A为**对称矩阵**.如果$A=-A^{\mathrm{T}}$，即$a_{ij}=-a_{ji}$，则称矩阵A为**反对称矩阵**.

对称矩阵

定义

对于任意方阵$A=(a_{ij})$，如果$A=A^{\mathrm{T}}$，即$a_{ij}=a_{ji}$，则称矩阵A为**对称矩阵**.如果$A=-A^{\mathrm{T}}$，即$a_{ij}=-a_{ji}$，则称矩阵A为**反对称矩阵**.

如矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$为对称矩阵.

例

任何一个方阵可以表示为一个对称阵与反对称阵之和.

分块矩阵的定义

在进行矩阵的运算时,尤其是在处理行数或列数都很大的矩阵时,我们经常把矩阵中的行,列进行分组,把一个大矩阵看成是由一些小矩阵（子矩阵）构成的,参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理. 这样把一个矩阵看成是（子）矩阵的矩阵, 称为分块矩阵.

分块矩阵的定义

在进行矩阵的运算时,尤其是在处理行数或列数都很大的矩阵时,我们经常把矩阵中的行,列进行分组,把一个大矩阵看成是由一些小矩阵(子矩阵)构成的,参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理. 这样把一个矩阵看成是(子)矩阵的矩阵, 称为分块矩阵.

定义

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 在 A 的行间,列间用一些(贯穿整行和整列的)虚构的线将 A 分隔成若干块,这种视 A 为若干小矩阵的矩阵的方式称为分块矩阵.

分块矩阵的定义

在进行矩阵的运算时,尤其是在处理行数或列数都很大的矩阵时,我们经常把矩阵中的行,列进行分组,把一个大矩阵看成是由一些小矩阵（子矩阵）构成的,参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理. 这样把一个矩阵看成是（子）矩阵的矩阵, 称为分块矩阵.

定义

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 在 A 的行间,列间用一些（贯穿整行和整列的）虚构的线将 A 分隔成若干块,这种视 A 为若干小矩阵的矩阵的方式称为分块矩阵.

几种特殊的分块-分出特殊矩阵

例如, 将如下 4×5 矩阵用横线和纵线将它分为 4 块, 构成一个分块矩阵

几种特殊的分块-分出特殊矩阵

例如, 将如下 4×5 矩阵用横线和纵线将它分为 4 块, 构成一个分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

几种特殊的分块-分出特殊矩阵

例如，将如下 4×5 矩阵用横线和纵线将它分为 4 块，构成一个分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

其中，E_2为2阶单位阵，O为2×3的零矩阵，$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

几种特殊的分块-分出特殊矩阵

例如, 将如下 4×5 矩阵用横线和纵线将它分为 4 块, 构成一个分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

其中, E_2为2阶单位阵, O为2×3的零矩阵, $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

注

- 在分块矩阵中,处于同一行块上的小矩阵的行数相同,处于同一列块上的小矩阵的列数相同.

几种特殊的分块-分块对角阵

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

几种特殊的分块-分块对角阵

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

注

称 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}$ 为分块对角矩阵或准对角矩阵(*semi-diagonal matrix*), 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是方阵.

几种特殊的分块-按列分块

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

几种特殊的分块-按列分块

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

记 $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdots A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 则

$$A = (A_1,\ A_2,\ \cdots, A_n)$$

称为按列分块，类似的，可以有按行分块。

分块矩阵的计算

- 加减法和数乘

  由分块矩阵的定义和矩阵的加法,数乘的定义,若矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \text{和} B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

  分块方式相同,则有

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的计算

- 加减法和数乘

由分块矩阵的定义和矩阵的加法,数乘的定义,若矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \text{和} B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

分块方式相同,则有

$$A+B \quad = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的计算

- 加减法和数乘

  由分块矩阵的定义和矩阵的加法,数乘的定义,若矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \text{和} B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

  分块方式相同,则有

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的计算

- 矩阵乘法：

设 $A_{m\times n}, B_{n\times k}$矩阵，现设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$和

$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$, 当 A 的列分块方式与 B 的

行分块方式相同时, 我们有$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}$,

$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$.

分块矩阵的计算

例

现设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$, 试用分块矩阵法求$AB$.

分块矩阵的计算

设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$:

- 取 B 的各列 $B_1,\ldots,B_p$ 作为块矩阵，则

$$AB = A\left(B_1,\ldots,B_p\right) = \left(AB_1,\ldots,AB_p\right);$$

分块矩阵的计算

设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$:

- 取 B 的各列 $B_1,\ldots,B_p$ 作为块矩阵，则

$$AB = A\left(B_1,\ldots,B_p\right) = \left(AB_1,\ldots,AB_p\right);$$

- 取 A 的各行 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 作为块, B 整体作为一块, 则

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B; \end{pmatrix}$$

分块矩阵的计算

设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$:

- 取 B 的各列 $B_1,\dots,B_p$ 作为块矩阵，则

$$AB = A\left(B_1,\dots,B_p\right) = \left(AB_1,\dots,AB_p\right);$$

- 取 A 的各行 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$作为块, B整体作为一块, 则

$$AB = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}\alpha_1 B\\ \vdots\\ \alpha_m B;\end{pmatrix}$$

- 取 A 的各行 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$作为块, B 的各列 $B_1,\dots,B_p$ 作为块矩阵，则

$$AB = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\left(B_1,\dots,B_p\right) = \begin{pmatrix}\alpha_1 B_1 & \cdots & \alpha_1 B_p\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_m B_1 & \cdots & \alpha_m B_p.\end{pmatrix}$$

分块矩阵的计算

$$AB = A\left(B_1, \ldots, B_p\right) = \left(AB_1, \ldots, AB_p\right)$$

分块矩阵的计算

$$AB = A\left(B_1, \ldots, B_p\right) = \left(AB_1, \ldots, AB_p\right)$$

矩阵方程 $AX = B$ 可看成 t 个线性方程组

$$Ax_1 = b_1,\ Ax_2 = b_2, \cdots, Ax_t = b_t,$$

其中$B = (b_1, b_2, \cdots, b_t)$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_t)$

分块矩阵的计算

$$AB = A(B_1, \ldots, B_p) = (AB_1, \ldots, AB_p)$$

矩阵方程 $AX = B$ 可看成 t 个线性方程组

$$Ax_1 = b_1,\ Ax_2 = b_2, \cdots, Ax_t = b_t,$$

其中$B = (b_1, b_2, \cdots, b_t)$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_t)$

例

现设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$, 问当参数$\lambda$ 取何值时,矩阵方程$AX = B$ 有解? 当$AX = B$ 有解时, 求其解.

分块矩阵的计算

- 矩阵分块转置：

设$A_{m\times n}$,$B_{n\times k}$矩阵,现设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$,

则$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$.

注

分块转置中,每个子块一方面作为分块阵元素要转置；另一方面作为矩阵本身也要转置.

分块矩阵的计算

例

假设A 是二阶方阵, x 是二维非零列向量,若$A^2x + Ax = 6x$, $B = (x, Ax)$, 求一矩阵C, 使得$AB = BC$.

矩阵分块

矩阵分块的三个原则:

- 体现原矩阵特点.

矩阵分块

矩阵分块的三个原则:

- 体现原矩阵特点.
- 根据问题需要.

矩阵分块

矩阵分块的三个原则:

- 体现原矩阵特点.
- 根据问题需要.
- 能够把子块看作元素进行运算.

初等变换历史

- 公元前1世纪,《九章算术》
- 初等变换, 相当于高斯消元法(高斯-若当方法)
  高斯[德] (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 1855)
  若当[法] (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838 1922)

Gauss 消元法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解： 第三个方程乘以$\dfrac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Gauss 消元法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解： 第三个方程乘以$\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程, 第一个方程的(-1)倍加到第三个方程, 即得

Gauss 消元法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解： 第三个方程乘以$\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程, 第一个方程的(-1)倍加到第三个方程, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{再将..., 即得} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

Gauss 消元法

从上述的消元法求解过程可以看出，其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数, (如例1中变量从三个减少到两个, 再减少到一个) 然后再利用回代的方法求出线性方程组的解. 这种求解的方法, 称为**高斯消元法**.

Gauss 消元法

从上述的消元法求解过程可以看出，其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数，(如例1中变量从三个减少到两个，再减少到一个) 然后再利用回代的方法求出线性方程组的解. 这种求解的方法，称为**高斯消元法**.

综合上述求解过程，我们对方程组作了如下三种变换：

从上述的消元法求解过程可以看出，其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数, (如例1中变量从三个减少到两个, 再减少到一个) 然后再利用回代的方法求出线性方程组的解. 这种求解的方法, 称为**高斯消元法**.

综合上述求解过程, 我们对方程组作了如下三种变换:

(1) **换位变换**: 互换两个方程的位置(对调第i, 第j两个方程, 记为$r_i \leftrightarrow r_j$).

Gauss 消元法

从上述的消元法求解过程可以看出，其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数，(如例1中变量从三个减少到两个，再减少到一个) 然后再利用回代的方法求出线性方程组的解. 这种求解的方法，称为**高斯消元法**.

综合上述求解过程，我们对方程组作了如下三种变换：
(1) **换位变换**: 互换两个方程的位置(对调第i，第j两个方程，记为$r_i \leftrightarrow r_j$).
(2) **倍乘变换**: 用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端(第i个方程乘以k，记为$r_i \times k$).

Gauss 消元法

从上述的消元法求解过程可以看出，其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数，(如例1中变量从三个减少到两个，再减少到一个)然后再利用回代的方法求出线性方程组的解. 这种求解的方法，称为**高斯消元法**.

综合上述求解过程，我们对方程组作了如下三种变换：
(1) **换位变换**：互换两个方程的位置(对调第i，第j两个方程，记为$r_i \leftrightarrow r_j$).
(2) **倍乘变换**：用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端(第i个方程乘以k，记为$r_i \times k$).
(3) **消去变换**：把一个方程的等号两端同乘以k倍，分别加到另一个方程的等号两端(第j个方程两端乘以k加到第i个方程的两端，记为$r_i + kr_j$).

初等变换

Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

初等变换

Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为**同解变换**.

初等变换

Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为**同解变换**.
- 同解的方程组也称为**等价的方程组**.

初等变换

Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为**同解变换**.
- 同解的方程组也称为**等价的方程组**.
- 线性方程组的初等变换是同解变换.

初等变换

Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为**同解变换**.
- 同解的方程组也称为**等价的方程组**.
- 线性方程组的初等变换是同解变换.
- 任意方程组都可以经过若干次初等变换化成阶梯形方程组.

初等变换

Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为**同解变换**.
- 同解的方程组也称为**等价的方程组**.
- 线性方程组的初等变换是同解变换.
- 任意方程组都可以经过若干次初等变换化成阶梯形方程组.
- Gauss消元法的过程中只是对系数和常数变换, 变量没有变.

矩阵的初等变换

定义

- 互换矩阵的两行;
- 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行;
- 用一个非零数 k 乘矩阵某一行.

这三种变换称为矩阵的**初等行变换**. 相应地, 如果把上面三种变换中的行都变为列, 则这样的变换称为矩阵的**初等列变换**. 初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**.

矩阵的初等变换

定义

- 互换矩阵的两行;
- 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行;
- 用一个非零数 k 乘矩阵某一行.

这三种变换称为矩阵的**初等行变换**. 相应地, 如果把上面三种变换中的行都变为列, 则这样的变换称为矩阵的**初等列变换**. 初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**.

将这三种初等变换应用到单位矩阵上, 得到的矩阵称为初等矩阵.

矩阵的初等变换

定义

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则称 A 与 B 等价$(equivalent)$. 记为 $A \cong B$.

矩阵的初等变换

定义

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则称 A 与 B 等价*(equivalent)*. 记为 $A \cong B$.

容易验证矩阵之间的等价关系具有如下性质:

- 反身性(reflexivity) $A \cong A$,
- 对称性(symmetry) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$,
- 传递性(transitivity) $A \cong B,\ B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

矩阵的初等变换

定义

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则称 A 与 B 等价(*equivalent*). 记为 $A \cong B$.

容易验证矩阵之间的等价关系具有如下性质:

- 反身性(reflexivity) $A \cong A$,
- 对称性(symmetry) $A \cong B \Rightarrow \ B \cong A$,
- 传递性(transitivity) $A \cong B,\ B \cong C \Rightarrow \ A \cong C$.

一般地,设矩阵$A_{m\times n}$,则经过一系列初等变换,可以得到与矩阵A等价的,最简单的矩阵:

$$A \cong \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵定义

Question:

矩阵在初等变换前后，是不相等的,所以用箭头表示.能否将初等变换,用矩阵乘法描述?

初等矩阵定义

Question:

矩阵在初等变换前后，是不相等的,所以用箭头表示.能否将初等变换,用矩阵乘法描述?

定义 (初等矩阵)

对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵定义

Question:

矩阵在初等变换前后，是不相等的,所以用箭头表示.能否将初等变换,用矩阵乘法描述?

定义 (初等矩阵)

对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- $E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j), E \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} E(i,j)$;
- $E \xrightarrow{kr_i} E(i(k)), E \xrightarrow{kc_i} E(i(k))$;
- $E \xrightarrow{r_i + kr_j} E(i,j(k)), E \xrightarrow{c_j + kc_i} E(j,i(k))$.

初等矩阵$E(i,j)$

$$E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

初等矩阵$E(i(k))$

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵$E(i,j)$

$$E(i,j(k)) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & k &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵$E(i,j)$

Example

计算

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

初等矩阵$E(i,j)$

一般的，我们有

$$E(i,j)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$AE(i,j)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

初等矩阵$E(i,j)$

一般的，我们有

$$E(i,j)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$AE(i,j)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵A左乘$E(i,j)$，其效果为交换A的i、j行；
矩阵A右乘$E(i,j)$，其效果为交换A的i、j列.

初等矩阵$E(i,j)$

Example

计算
$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
和
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

初等矩阵$E(i,j(k))$

一般的,我们有

$$E(i,j(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$AE(j,i(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

初等矩阵$E(i,j(k))$

一般的,我们有

$$E(i,j(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$AE(j,i(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵A左乘$E(i,j(k))$,其效果为把A的第j行的k倍加到第i行;
矩阵A右乘$E(i,j(k))$,其效果为把A的第i列的k倍加到第j列.

初等矩阵与矩阵乘积

Theorem

设$A_{m\times n}$,

(1) 对A 作一次初等行变换,相当于用相应初等矩阵左乘A;

(2) 对A 作一次初等列变换,相当于用相应初等矩阵右乘A.

初等矩阵与矩阵乘积

Theorem

设$A_{m\times n}$,
(1) 对A 作一次初等行变换,相当于用相应初等矩阵左乘A;
(2) 对A 作一次初等列变换,相当于用相应初等矩阵右乘A.

Remark

对A 作初等行变换,等于用初等矩阵左乘A,且所乘的初等矩阵是对E作同样的初等行变换得到的.

Remark

对A作初等列变换,等于用初等矩阵右乘A,且所乘的初等矩阵是对E作同样的初等列变换得到的.

初等矩阵与矩阵乘积

Theorem

设$A_{m\times n}$，则存在 m 阶初等矩阵 P_1，P_2，$\cdots$，P_s s.t. $P_1P_2\cdots P_sA$ 为行最简形.

初等矩阵与矩阵乘积

Theorem

设$A_{m\times n}$，则存在 m 阶初等矩阵 P_1，P_2，$\cdots$，P_s s.t. $P_1P_2\cdots P_sA$ 为行最简形.

Theorem

设$A_{m\times n}$，则存在 m 阶初等矩阵P_1，P_2，$\cdots$，P_s 及n 阶初等矩阵 Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_t s.t. $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t = E^r_{m\times n}$，其中 r 为不超过 $min\{m,n\}$ 的非负整数.

例

- 设 A 是3 阶方阵，将 A 的第一列与第二列交换得到 B，再把 B 的第二列加到第三列得到C，求满足$AQ = C$ 的矩阵Q.

初等矩阵与矩阵乘积

例

- 设 A 是3 阶方阵，将 A 的第一列与第二列交换得到 B，再把 B 的第二列加到第三列得到C，求满足$AQ=C$ 的矩阵Q.
- 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $P^{2019}AQ^{2019}$.

可逆矩阵的概念与性质

定义

设A 是n 阶方阵，如果存在n 阶方阵B，使得

$$AB = BA = E$$

则称A为**可逆**的，并称B 为A 的逆矩阵.记作$B = A^{-1}$.

可逆矩阵的概念与性质

定义

设A 是n 阶方阵，如果存在n 阶方阵B，使得

$$AB = BA = E$$

则称A为**可逆**的，并称B 为A 的逆矩阵.记作$B = A^{-1}$.

注

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同，如果B 是A 的逆矩阵；则A 也是B 的逆矩阵；（互逆的）

可逆矩阵的概念与性质

定义

设A 是n 阶方阵，如果存在n 阶方阵B，使得

$$AB = BA = E$$

则称A为**可逆的**，并称B 为A 的逆矩阵.记作$B = A^{-1}$.

注

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同，如果B 是A 的逆矩阵；则A 也是B 的逆矩阵；（互逆的）
- 可逆矩阵A 的逆矩阵是唯一的；

可逆矩阵的概念与性质

定义

设A 是n 阶方阵，如果存在n 阶方阵B，使得

$$AB = BA = E$$

则称A为**可逆的**，并称B 为A 的逆矩阵.记作$B = A^{-1}$.

注

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同，如果B 是A 的逆矩阵；则A 也是B 的逆矩阵；（互逆的）
- 可逆矩阵A 的逆矩阵是唯一的；不是所有的矩阵都有逆矩阵.

可逆矩阵的概念与性质

定义

设A 是n 阶方阵，如果存在n 阶方阵B，使得

$$AB = BA = E$$

则称A为**可逆的**，并称B 为A 的逆矩阵.记作$B = A^{-1}$.

注

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同，如果B 是A 的逆矩阵；则A 也是B 的逆矩阵；（互逆的）
- 可逆矩阵A 的逆矩阵是唯一的；不是所有的矩阵都有逆矩阵.

例

用待定系数法求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$B = p\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

可逆矩阵的性质

根据定义有以下命题.

性质

如果A可逆，则

- A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$;

可逆矩阵的性质

根据定义有以下命题.

性质

如果A可逆，则

- A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$;
- A^{T} 可逆，$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

可逆矩阵的性质

根据定义有以下命题.

性质

如果A可逆，则

- A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$;
- A^{T} 可逆，$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- 当$k\neq 0$，则kA也可逆，且$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$;

可逆矩阵的性质

根据定义有以下命题.

性质

如果A可逆，则

- A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$;
- A^{T} 可逆，$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- 当$k\neq 0$，则kA也可逆，且$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$;
- 对于同阶方阵A,B，若A,B均可逆，则AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

可逆矩阵的性质

根据定义有以下命题.

性质

如果A可逆，则

- A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$;
- A^{T} 可逆，$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- 当$k \neq 0$，则kA也可逆，且$(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$;
- 对于同阶方阵A, B，若A, B均可逆，则AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- 若$A_i(i = 1, 2, \cdots, k)$都是n阶可逆矩阵，则它们的乘积$A_1A_2\cdots A_k$也可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

初等矩阵

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$;

初等矩阵

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$, $E(i(k))^T = E(i(k))$;

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$, $E(i(k))^T = E(i(k))$;
- $E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$, $E(i,j(k))^T = E(j,i(k))$.

初等矩阵

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$, $E(i(k))^T = E(i(k))$;
- $E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$, $E(i,j(k))^T = E(j,i(k))$.

例

证明可逆的行最简形矩阵为单位矩阵.

初等矩阵

容易验证

- $E(i,j)^{-1}=E(i,j)=E(i,j)^T$;
- $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$, $E(i(k))^T=E(i(k))$;
- $E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$, $E(i,j(k))^T=E(j,i(k))$.

例

证明可逆的行最简形矩阵为单位矩阵.

Lemma

若n阶方阵 A 可逆,则 A 必可以经过一系列初等行变换化为单位阵 E_n.

初等矩阵

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$, $E(i(k))^T = E(i(k))$;
- $E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$, $E(i,j(k))^T = E(j,i(k))$.

例

证明可逆的行最简形矩阵为单位矩阵.

Lemma

若n阶方阵 A 可逆,则 A 必可以经过一系列初等行变换化为单位阵 E_n.

Theorem

方阵 A 可逆当且仅当 A 可以写成一系列初等矩阵的乘积.

Remark

- 设A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 则存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q, 使得 $A = PE^rQ$.

Remark

- 设A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵, 则存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q, 使得 $A = PE^rQ$.
- 设A, B是$m \times n$ 阶矩阵,则A 和 B 等价当且仅当存在可逆矩阵P 和Q, 使得$B = PAQ$.

矩阵求逆矩阵

设 A 是 n 阶可逆矩阵,则 A^{-1} 可逆,根据定理,存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots P_s$,使得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

矩阵求逆矩阵

设 A 是 n 阶可逆矩阵,则 A^{-1} 可逆,根据定理,存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots P_s$,使得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

两边右乘 A 和 E,即得

$$E = P_s \cdots P_2 P_1 A,\ A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 E$$

矩阵求逆矩阵

设 A 是 n 阶可逆矩阵,则 A^{-1} 可逆,根据定理,存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots P_s$,使得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

两边右乘 A 和 E,即得

$$E = P_s \cdots P_2 P_1 A,\ A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 E$$

即

$$P_s \cdots P_2 P_1 (AE) = (EA^{-1})$$

求矩阵的逆

设 A 为 n 阶可逆方阵,求 A^{-1}的过程可用下列的初等行变换来实现:

1. 把 A 和E并排，构造一个$n \times (2n)$的矩阵$(A:E)$;
2. 对$(A:E)$实施初等行变换（A,E 同步进行）,根据前面定理,若干次以后,$(A:E) \Rightarrow \left(E_n \vdots A^{-1}\right)$.

求矩阵的逆

例

求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

求矩阵的逆

例

求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

解矩阵方程

- 设$AX = B$, 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$X$.

求矩阵的逆

例

求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

解矩阵方程

- 设$AX = B$, 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$X$.
- 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,求矩阵$X$,使得$AXB = C$.

可逆矩阵的存在性

问题

在什么条件下, n阶矩阵A是可逆的；如果可逆,如何求出它的逆矩阵?

可逆矩阵的存在性

问题

在什么条件下, n阶矩阵A是可逆的；如果可逆,如何求出它的逆矩阵?

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

Theorem

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}.$

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，

Theorem

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$.

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时，

- 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$ 则方程组无解；
- 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$ 时,第二个方程是第一个方程的倍式,所以方程组有无穷组解.

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时，

- 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$ 则方程组无解；
- 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$ 时，第二个方程是第一个方程的倍式,所以方程组有无穷组解！

这说明 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是否等于零能决定（ determine ）方程组是不是有唯一解！是一个起决定意义的数，称为方程组系数列的 2 阶行列式（英文 determinant，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

- 第1、2消得I $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

- 第1、2消得I $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
- 第1、3消得II $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$

三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

- 第1、2消得I $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
- 第1、3消得II $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$
- 第2、3消得III $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$

$I \times a_{33} - II \times a_{23} + III \times a_{13} \Rightarrow$

$$a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2$$

$$= a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

$$I \times a_{33} - II \times a_{23} + III \times a_{13} \Rightarrow$$

$$a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2$$

$$= a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

Theorem

称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式（*determinant*）.

Remark

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}.$$

n阶行列式定义

递推定义：

设 $n-1$ 阶行列式已被定义,则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{i+1} M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

其中 M_{kl} 为矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 划去第 k 行与第 l 列后剩下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式,称 M_{kl} 为 a_{kl} 的余子式,称 $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}$ 为 a_{kl} 的代数余子式. (每个都是 $n-1$ 阶行列式).p

行列式的按行展开

Example

设行列式$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$，试写出$M_{23}, A_{34}$.

n阶行列式定义

递推定义:

设 $n-1$ 阶行列式已被定义,则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} (-1)^{i+1} M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

其中 M_{kl} 为矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 划去第 k 行与第 l 列后剩下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式,称 M_{kl} 为 a_{kl} 的余子式,称 $A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$ 为 a_{kl} 的代数余子式. (每个都是 $n-1$ 阶行列式).

n阶行列式定义

递推定义：

设 $n-1$ 阶行列式已被定义,则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\left(-1\right)^{i+1} M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}$$

其中 M_{kl} 为矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 划去第 k 行与第 l 列后剩下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式,称 M_{kl} 为 a_{kl} 的余子式,称 $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}$ 为 a_{kl} 的代数余子式. (每个都是 $n-1$ 阶行列式).

Remark:

(1)$n!$ 项,不在同行,不在同列的 n 个数之积.

(2) 行列式是 $n\times n$ 阶矩阵对应的一个数值.

几类特殊的行列式

(1) 二阶、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}.$$

几类特殊的行列式

(2）对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

几类特殊的行列式

(2）对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(2）对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

几类特殊的行列式

(3)上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(4)下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

几类特殊的行列式

练习：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

行列式的性质

- 性质1.1 行列式行列对换,行列式的值不变.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n^T$$

行列式的性质

- 性质1.1 行列式行列对换，行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行（列）乘常数 k，其行列式等于原行列式乘 k.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地, 若行列式某行(或某列)的元素全为零,则行列式为零.

行列式的性质

Example:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} =$$

行列式的性质

Example:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

- 性质1.1. 行列式行列对换, 行列式的值不变.
- 性质1.2. 行列式某一行（列）乘常数k,其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3. 行列式两行（列）互换, 行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Example:

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

行列式的性质

Example:

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

Corollary:

若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.

行列式的性质

- 性质1.1 行列式行列对换，行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行（列）乘常数k，其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3 行列式两行（列）互换，行列式变号.
- 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.

行列式的性质

- 性质1.1 行列式行列对换，行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行（列）乘常数k，其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3 行列式两行（列）互换，行列式变号.
- 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.
  2 行列式某两行（列）的元素成比例,则行列式的值为零.

行列式的性质

- 性质1.1 行列式行列对换，行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行（列）乘常数k，其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3 行列式两行（列）互换，行列式变号.
- 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.
  2 行列式某两行（列）的元素成比例,则行列式的值为零.
- 性质1.4. 行列式的某一行（列）的每个元素都是两个数之和,则此行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

行列式的性质

Example:

求

$$\begin{vmatrix} a+b & x+y \\ c+d & m+n \end{vmatrix} =$$

行列式的性质

- 性质1.1. 行列式行列对换，行列式的值不变.
- 性质1.2. 行列式某一行（列）乘常数k,其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3. 行列式两行（列）互换,行列式变号.
- 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.
  推论2. 行列式某两行（列）的元素成比例,则行列式的值为零.
- 性质1.4. 行列式的某一行（列）的每个元素都是两个数之和,则此行列式等于两个行列式之和.
- 性质1.5. 行列式的某一行（列）的k 倍加到另一行（列）, 行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+k \end{vmatrix}$$

行列式的性质

Example

设行列式$\begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{vmatrix} = d,$

求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 2a_{2\,1} & -4a_{2\,2} & 2a_{2\,3} \\ 3a_{3\,1} & -6a_{3\,2} & 3a_{3\,3} \\ -1a_{1\,1} & 2a_{1\,2} & -1a_{1\,3} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} - 3a_{13} & a_{13} \\ -a_{21} & 3a_{23} - a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} - 3a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

行列式的性质

Example:

1. $$\begin{vmatrix} 96 & 97 \\ 98 & 99 \end{vmatrix} =$$
2. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

Vandermonde行列式

Example:

Vandermonde行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

Vandermonde行列式

Example:

Vandermonde行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$

从上式可以看出，Vandermonde行列式等于零当且仅当$a_1, a_2, \cdots, a_n$中至少有两个相同.

Vandermonde行列式

Vandermonde行列式的应用

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相同的n个数, 则对任意的$b_1, b_2, \cdots, b_n$, 存在唯一的一个次数小于n的多项式$f(x)$, 使得

$$f(a_i) = b_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Vandermonde行列式

Vandermonde行列式的应用

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 互 不 相 同 的n个 数， 则 对 任 意的$b_1, b_2, \cdots, b_n$, 存在唯一的一个次数小于n的多项式$f(x)$, 使得

$$f(a_i) = b_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Proof.

待定系数, 设$f(x) = c_n x^{n-1} + \cdots + c_2 x + c_1$，代入$f(a_i) = b_i$;

$$\begin{cases} c_1 + a_1 c_2 + \cdots + a_1^{n-1} c_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_1 + a_n c_2 + \cdots + a_n^{n-1} c_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式非零, 待定的系数有唯一解. □

Vandermonde行列式

Vandermonde行列式的应用

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相同的n个数，则对任意的$b_1, b_2, \cdots, b_n$，存在唯一的一个次数小于n的多项式$f(x)$，使得

$$f(a_i) = b_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Proof.

待定系数，设$f(x) = c_n x^{n-1} + \cdots + c_2 x + c_1$，代入$f(a_i) = b_i$；

$$\begin{cases} c_1 + a_1 c_2 + \cdots + a_1^{n-1} c_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_1 + a_n c_2 + \cdots + a_n^{n-1} c_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式非零，待定的系数有唯一解. $\square$

实际上，$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i}$

称为Lagrange插值多项式

行列式的性质

Example:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & * & \cdots & * \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=$$

行列式的性质

Example:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & * & \cdots & * \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

Example:

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \end{vmatrix}$$

$$=$$

行列式的性质

Example:

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

Example:

(1) 已知,

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -x \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

Example:

(1) 已知,

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -x \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

(2) 设,

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明: $f(\lambda)$ 是λ 的n 次多项式, 并求λ^n, λ^{n-1} 的系数.

乘法定理

定理

(行列式乘积法则) 设$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 都是n 阶方阵, 则

$$|AB|=|A||B|.$$

乘法定理

定理

(行列式乘积法则) 设$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 都是n 阶方阵, 则

$$|AB|=|A||B|.$$

推论

设n 阶方阵$A_1, A_2, \cdots, A_s$, 则有

$$|A_1A_2\cdots A_s|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

行列式按行展开定理

n 阶行列式$|A| = det(a_{ij})$ 等于它任意行(列)的各元素与其相应的代数余子式的乘积之和, 即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|, \forall\, 1 \leq i \leq n,$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = |A|, \forall\, 1 \leq j \leq n$$

行列式按行展开定理

n 阶行列式$|A| = det(a_{ij})$ 等于它任意行(列)的各元素与其相应的代数余子式的乘积之和, 即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|, \forall\ 1 \le i \le n,$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = |A|, \forall\ 1 \le j \le n$$

当行列式中一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和一定是于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ 1 \le i \ne j \le n,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ 1 \le i \ne j \le n.$$

行列式的计算

Example:

1. $$\begin{vmatrix} 96 & 97 \\ 98 & 99 \end{vmatrix} =$$
2. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

行列式的计算

一般数字行列式$\left|(a_{ij})_{n\times n}\right|$的计算步骤:

- 检查第一列是否有非零元, 若无, 行列式为零;
- 若有, 必要时可交换两行(行列式变号),使$(1,1)$位置非零;
- 把第一行的适当倍数加到其它行, 使第一列上其它位置均为零;
- 再对得到的 $n-1$ 阶行列式的$(1,1)$子式重复前面三步, 最后得到一个上三角行列式, 对角元乘在一起就得到该行列式.

行列式的计算

Example:

1. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Example:

1. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

2. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} =$$

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.

Example

计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.

Example

计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.

Example

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.

Example

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n D_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \left(\prod_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1} D_{n-2} \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} a_i \right) + \prod_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}
$$

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.
- 按行或者按列展开.

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.
- 按行或者按列展开.

Example

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

行列式的计算

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.
- 按行或者按列展开.

Example

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= \begin{vmatrix}
a & & & & & b \\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a & b & & \\
& & c & d & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
c & & & & & d
\end{vmatrix} \\
&= (ad-bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^n.
\end{aligned}
$$

行列式的计算

Example

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

行列式的计算

Example

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} \\
&= b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + ba^{n-1} + a^n
\end{aligned}
$$

本题有5种解法，包括两种递推方法、方程组方法、完全拆项法和归纳证明法.

行列式的计算

- 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

行列式的计算

- 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

- 拆开第一列, 得到$D_n = b^n + aD_{n-1}$.

行列式的计算

- 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

- 拆开第一列, 得到$D_n = b^n + aD_{n-1}$.
- 方程组解法由$D_n = b^n + aD_{n-1}$ 可得$D_n = a^n + bD_{n-1}$ (两个未知数对称), 解方程组可得$D_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$.

行列式的计算

- 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

- 拆开第一列, 得到$D_n = b^n + aD_{n-1}$.
- 方程组解法由$D_n = b^n + aD_{n-1}$ 可得$D_n = a^n + bD_{n-1}$ (两个未知数对称), 解方程组可得$D_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$.
- 完全拆项, 将每一列都拆成两列.

问题

在什么条件下, n 阶矩阵A 是可逆的; 如果可逆,如何求出它的逆矩阵?

伴随矩阵

定义

设n 阶方阵$A=(a_{ij})$，行列式$\det A$ 的每个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的**伴随矩阵**.

伴随矩阵

定义

设n 阶方阵$A=(a_{ij})$，行列式$\det A$ 的每个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的**伴随矩阵**.

例

(1) 计算矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 和矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

伴随矩阵

定义

设n 阶方阵$A=(a_{ij})$，行列式$\det A$ 的每个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的**伴随矩阵**.

例

(1) 计算矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 和矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

(2) 计算AA^* 和A^*A.

可逆矩阵

性质

设$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$，则

$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

可逆矩阵

性质

设$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$, 则

$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

定理

方阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$. 当$|A|\neq 0$时,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

其中A^*为A的伴随矩阵.

可逆矩阵

性质

设$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$，则

$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

定理

方阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$. 当$|A|\neq 0$时，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

其中A^*为A的伴随矩阵.

推论

n 阶方阵A可逆的充要条件是存在B，使得$AB=E$(或$BA=E$)，且$B=A^{-1}$.

例

设A是3阶方阵，且$|A| = 3$,计算：$|A^{-1}|$，$|A^*|$，$|(A^{-1})^*|$，$|(A^*)^{-1}|$，$|(A^*)^*|$，$|2A^{-1} - \frac{1}{2}A^*|$.

可逆矩阵

例

设A是3阶方阵，且$|A|=3$,计算：$|A^{-1}|$，$|A^*|$，$|(A^{-1})^*|$，$|(A^*)^{-1}|$，$|(A^*)^*|$，$|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|$.

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&3&5\\1&5&11\end{pmatrix}.$$

可逆矩阵

例

设A是3阶方阵，且$|A| = 3$,计算：$|A^{-1}|$，$|A^*|$，$|(A^{-1})^*|$，$|(A^*)^{-1}|$，$|(A^*)^*|$，$|2A^{-1} - \frac{1}{2}A^*|$.

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

例

- n阶矩阵A满足$A^2-2A+3E = O$, 求$(A+E)^{-1}, (A-E)^{-1}$.

可逆矩阵

例

设A是3阶方阵，且$|A|=3$,计算：$|A^{-1}|$，$|A^{*}|$，$|(A^{-1})^{*}|$，$|(A^{*})^{-1}|$，$|(A^{*})^{*}|$，$|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^{*}|$.

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&3&5\\1&5&11\end{pmatrix}.$$

例

- n阶矩阵A满足$A^2-2A+3E=O$，求$(A+E)^{-1}$，$(A-E)^{-1}$.
- n阶矩阵A,B满足$A+B=AB$．证明$A-E$可逆，并求逆矩阵.

例

设A是3阶方阵，且$|A|=3$,计算：$|A^{-1}|$，$|A^*|$，$|(A^{-1})^*|$，$|(A^*)^{-1}|$，$|(A^*)^*|$，$|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|$.

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&3&5\\1&5&11\end{pmatrix}.$$

例

- n阶矩阵A满足$A^2-2A+3E=O$, 求$(A+E)^{-1}$, $(A-E)^{-1}$.
- n阶矩阵A,B满足$A+B=AB$. 证明$A-E$ 可逆，并求逆矩阵.
- 矩阵$A,B,A+B$ 均可逆，则求$A^{-1}+B^{-1}$的逆.

分块对角阵的逆矩阵

例

设n阶方阵$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$,其中每个$A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$分别为n_i阶方阵,则重复利用$Laplace$定理,有$|A| = \prod_{k=1}^{s} |A_k|$, 所以$A$是可逆阵的充分必要条件为每个$A_i$都是可逆矩阵.

分块对角阵的逆矩阵

例

设n阶方阵$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$,其中每个$A_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$分别为n_i阶方阵,则重复利用$Laplace$定理,有$|A|=\prod_{k=1}^{s}|A_k|$,所以A是可逆阵的充分必要条件为每个A_i都是可逆矩阵.

此时由分块矩阵的乘法可知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1}. \end{pmatrix}$$

分块矩阵的计算

例

设$Q=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为分块矩阵,其中$A_{n\times n}$及$D_{m\times m}$. 若$A$可逆,则

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式,并利用行列式乘积法则及Laplace定理得: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|$;

分块矩阵的计算

例

设$Q=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为分块矩阵,其中$A_{n\times n}$及$D_{m\times m}$. 若$A$可逆,则

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式,并利用行列式乘积法则及Laplace定理得: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|$;

同理, 若D可逆, 则有$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|D|\cdot\left|A-BD^{-1}C\right|$;

分块矩阵的计算

例

设$Q=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为分块矩阵,其中$A_{n\times n}$及$D_{m\times m}$. 若$A$可逆,则

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式,并利用行列式乘积法则及Laplace定理得: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|$;

同理, 若D可逆, 则有$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|D|\cdot\left|A-BD^{-1}C\right|$;

进一步, 当A、B、C、D均为同阶方阵时, 若$AC=CA$, 则有$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$; 若$AB=BA$, 则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|DA-CB|$, 等等.

Cramer法则

当线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组有唯一解: $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$;

其中D_j是将系数矩阵中的第j列换成常数列后得到的行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & b_1 & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\ j-1} & b_2 & a_{2\ j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & b_n & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

Cramer法则

其中D_j是将系数矩阵中的第j列换成常数列后得到的行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

定理蕴含三个部分：在$D \neq 0$时,

- 方程组有解;
- 解是唯一的;
- 解的表达式.

Cramer法则

Example

用Cramer法则求解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Cramer法则

Example

用Cramer法则求解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$D = 27,\ \ D_1 = 81,\ \ D_2 = -108,\ \ D_3 = -27,\ \ D_4 = 27.$

Cramer法则

Example

用Cramer法则求解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$D = 27,\ \ D_1 = 81,\ \ D_2 = -108,\ \ D_3 = -27,\ \ D_4 = 27.$

Remark

- 齐次方程组有非零解当且仅当系数行列式为零.

Cramer法则

Example

当参数λ 取何值时,下列方程组有非零解:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Cramer法则

Example

当参数λ 取何值时,下列方程组有非零解:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0,\ 2,\ 3.$

Cramer法则

Remark

- Cramer法则建立了线性方程组的解和它的系数与常数项之间的关系.对于阶数较大的线性方程组,它需要很大的计算量,故Cramer法则主要用于理论推导.

Cramer法则

Remark

- Cramer法则建立了线性方程组的解和它的系数与常数项之间的关系.对于阶数较大的线性方程组,它需要很大的计算量,故Cramer法则主要用于理论推导.
- Cramer法则用于求解满足
  (1) 方程数= 变量数
  (2) 系数行列式非零
  的线性方程组.如果上面有一个条件不能满足,就无法使用,对于一般的线性方程组问题,需要寻找新的求解方法.

秩的定义

定义

在$A_{m\times n}$中，任取k行，k列$(k\leq m,\ ,k\leq n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式.

秩的定义

定义

在$A_{m\times n}$中，任取k行，k列$(k \le m, ,k \le n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式.共有$C_m^k C_n^k$ 个 k 阶子式.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

秩的定义

定义

在$A_{m\times n}$中，任取k行，k列$(k\le m,\ ,k\le n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式.共有$C_m^kC_n^k$ 个 k 阶子式.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\0&-1&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix},\text{有3阶零子式}\begin{vmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{vmatrix},$$

秩的定义

定义

在$A_{m\times n}$中，任取k行，k列$(k \leq m, ,k \leq n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式.共有$C_m^k C_n^k$ 个 k 阶子式.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 有3阶零子式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,

2阶非零子式$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

秩的定义

定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数，称为矩阵A 的秩，记为$r(A) = r$ 或$rank(A) = r$.

秩的定义

定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数，称为矩阵A 的秩，记为$r(A) = r$ 或$rank(A) = r$.

注

- $0 \leq r(A_{m\times n}) \leq min\{m, n\}$.

秩的定义

定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数，称为矩阵A 的秩，记为$r(A) = r$ 或$rank(A) = r$.

注

- $0 \leq r(A_{m\times n}) \leq min\{m, n\}$.
- 规定零矩阵的秩为*0*.

秩的定义

定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数，称为矩阵A 的秩，记为$r(A)=r$ 或$rank(A)=r$.

注

- $0 \leq r(A_{m\times n}) \leq min\{m,n\}$.
- 规定零矩阵的秩为*0*.
- 对于n 阶矩阵A,有：A 可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A)=n$.

秩的定义

定义

矩阵A的非零子式的最高阶数，称为矩阵A的秩，记为$r(A)=r$或$rank(A)=r$.

注

- $0 \le r(A_{m\times n}) \le min\{m,n\}$.
- 规定零矩阵的秩为0.
- 对于n阶矩阵A,有：A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A)=n$.
- 更一般地，如果$m\times n$阶矩阵A满足
  $r(A)=m$,则称A为**行满秩矩阵**
  $r(A)=n$,则称A为**列满秩矩阵**.

秩的定义

例

- 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

秩的定义

例

- 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$的秩.
- 讨论非零矩阵$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$的秩.

秩的定义

例

- 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$的秩.
- 讨论非零矩阵$A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$的秩.
- 讨论非零矩阵$A=\begin{pmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{pmatrix}$的秩.

秩的性质

注

- $r(A) = r(A^T)$;

秩的性质

注

- $r(A) = r(A^T)$;
- 如果A 的所有k 阶子式都为零，则$r(A) < k$;

秩的性质

注

- $r(A) = r(A^T)$;
- 如果A 的所有k 阶子式都为零，则$r(A) < k$;
- 如果A 有一个k 阶子式不为零，则$r(A) \geq k$.

秩的性质

注

- $r(A) = r(A^T)$;
- 如果A 的所有k 阶子式都为零，则$r(A) < k$;
- 如果A 有一个k 阶子式不为零，则$r(A) \geq k$.

推论

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 至少存在一个r 阶非零子式，同时A 的所有$r+1$ 阶子式为零.

秩的性质

例

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$的秩.

秩的性质

例

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$的秩.

例

求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&5\\0&3&8&9&2\\0&0&0&4&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$的秩.

秩的性质

例

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$的秩.

例

求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&5\\0&3&8&9&2\\0&0&0&4&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$的秩.

推论

阶梯形矩阵的秩等于它的阶梯数.

初等变换与矩阵的秩

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则$r(A) \leq r(B)$.

初等变换与矩阵的秩

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则$r(A) \leq r(B)$.

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B, 则B 经过初等行变换也可变成A.

初等变换与矩阵的秩

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则$r(A) \leq r(B)$.

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B, 则B 经过初等行变换也可变成A.

定理

初等行变换不改变矩阵的秩.

初等变换与矩阵的秩

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则$r(A) \leq r(B)$.

引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B, 则B 经过初等行变换也可变成A.

定理

初等行变换不改变矩阵的秩.

注

矩阵秩的计算：先经初等行变换将矩阵变为阶梯形矩阵，再由阶梯数确定矩阵秩.

例

计算下面矩阵的秩，并求出一个最高阶非零子式.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}.$$

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系
  如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B, 则称这两个矩阵是等价的, 记为$A \to B$.

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系
  如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B, 则称这两个矩阵是等价的, 记为$A \to B$.
- 等价关系满足：反身性,对称性,传递性.

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系
  如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B, 则称这两个矩阵是等价的, 记为$A \to B$.
- 等价关系满足：反身性,对称性,传递性.

性质

如果矩阵$A \to B$, 则$r(A) = r(B)$.

一般地, 设矩阵$A_{m\times n}$ 的秩为$r(A) = r$, 则经过一系列初等变换, 可以得到与矩阵A 等价的, 最简单的矩阵：

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系
  如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B, 则称这两个矩阵是等价的, 记为$A \to B$.
- 等价关系满足：反身性,对称性,传递性.

性质

如果矩阵$A \to B$, 则$r(A) = r(B)$.

一般地, 设矩阵$A_{m\times n}$ 的秩为$r(A) = r$, 则经过一系列初等变换, 可以得到与矩阵A 等价的, 最简单的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系
  如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B, 则称这两个矩阵是等价的, 记为$A \to B$.
- 等价关系满足：反身性,对称性,传递性.

性质

如果矩阵$A \to B$, 则$r(A) = r(B)$.

一般地, 设矩阵$A_{m\times n}$ 的秩为$r(A) = r$, 则经过一系列初等变换, 可以得到与矩阵A 等价的, 最简单的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理

两个矩阵等价当且仅当秩相等.

矩阵的秩的性质

设A, B 是$m \times s$ 和$n \times s$ 阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \leq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B);$$

矩阵的秩的性质

设A, B 是$m \times s$ 和$n \times s$ 阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \leq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B);$$

设A, B 是$m \times s$ 阶矩阵,则

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B);$$

矩阵的秩的性质

设A, B 是$m \times s$ 和$n \times s$ 阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \leq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B);$$

设A, B 是$m \times s$ 阶矩阵,则

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B);$$

设A, B 是$m \times s$ 和$n \times s$ 阶矩阵,则

$$r(AB) \leq Min\{r(A), r(B)\};$$

矩阵的秩的性质

设A, B 是$m \times s$ 和$n \times s$ 阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \leq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B);$$

设A, B 是$m \times s$ 阶矩阵,则

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B);$$

设A, B 是$m \times s$ 和$n \times s$ 阶矩阵,则

$$r(AB) \leq Min\{r(A), r(B)\};$$

$$r(AB) + n \geq r(A) + r(B);$$

矩阵的秩的性质

设A,B 是$m\times s$ 和$n\times s$ 阶矩阵,则

$$Max\{r(A),r(B)\}\leq r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leq r(A)+r(B);$$

设A,B 是$m\times s$ 阶矩阵,则

$$r(A+B)\leq r(A)+r(B);$$

设A,B 是$m\times s$ 和$n\times s$ 阶矩阵,则

$$r(AB)\leq Min\{r(A),r(B)\};$$

$$r(AB)+n\geq r(A)+r(B);$$

如果$AB=0$, 则有

$$r(A)+r(B)\leq n.$$

矩阵的代数运算与秩

例

设n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 试证 $r(A) + r(E - A) = n$.

例

设n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 试证 $r(A)+r(E-A)=n$.

例

设$A_{m\times n}$, 则$r(A)=1\Leftrightarrow A=\xi\eta^T$, 其中 ξ 和 η 分别为 m,n 维非零列向量.

学会归纳与思考

1, 矩阵上的哪些运算是只定义在方阵上的?

学会归纳与思考

1, 矩阵上的哪些运算是只定义在方阵上的?

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵,

学会归纳与思考

1, 矩阵上的哪些运算是只定义在方阵上的?

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵, 初等矩阵;
- 行列式

学会归纳与思考

1, 矩阵上的哪些运算是只定义在方阵上的?

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵, 初等矩阵;
- 行列式;
- 伴随矩阵,

学会归纳与思考

1, 矩阵上的哪些运算是只定义在方阵上的?

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵, 初等矩阵;
- 行列式;
- 伴随矩阵, 可逆矩阵.

学会归纳与思考

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

学会归纳与思考

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

- 方阵的正整数幂;

学会归纳与思考

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

- 方阵的正整数幂;
- 两个对角矩阵, 数量矩阵;

学会归纳与思考

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

- 方阵的正整数幂;
- 两个对角矩阵, 数量矩阵;
- 单位阵与任何矩阵相乘;

学会归纳与思考

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

- 方阵的正整数幂;
- 两个对角矩阵, 数量矩阵;
- 单位阵与任何矩阵相乘;
- 行列式$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$;

学会归纳与思考

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

- 方阵的正整数幂;
- 两个对角矩阵, 数量矩阵;
- 单位阵与任何矩阵相乘;
- 行列式$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$;
- 伴随矩阵$AA^* = A^*A$, p可逆矩阵$A^{-1}A = AA^{-1}$.