第 4 章
一阶逻辑基本概念

命题逻辑具有一定的局限性，甚至无法判断一些常见的简单推理. 例如，考虑下面的推理：

凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.

这个推理是数学中的真命题，但在命题逻辑中却无法判断它的正确性. 在命题逻辑中只能将推理中出现的 3 个简单命题依次符号化为 p, q, r，将推理的形式结构符号化为

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

由于上式不是重言式，所以不能由它判断推理的正确性. 问题出在“凡”字，在命题逻辑中不能很好地描述“凡偶数都能被 2 整除”的本意，只能把它作为一个简单命题. 为克服命题逻辑的这种局限性，需要引入量词，以期达到表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系，这就是一阶逻辑所研究的内容. 一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑.

4.1 一阶逻辑命题符号化

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的 3 个基本要素. 下面讨论这 3 个要素.

1. 个体词

个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体. 例如，小王，小李，中国，$\sqrt{2}$，3 等都可作为个体词. 将表示具体或特定的客体的个体词称作个体常项，一般用小写英文字母 a, b, c 等表示，而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，常用 x, y, z 等表示. 并称个体变项的取值范围为个体域（或称作论域）. 个体域可以是有穷集合，例如，$\{1,2,3\}$，$\{a,b,c,d\}$，

$\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$ 等，也可以是无穷集合，如自然数集合 $\mathbf{N}$、实数集合 $\mathbf{R}$ 等. 有一个特殊的个体域，它是由宇宙间一切事物组成的，称作全总个体域. 本书在论述或推理中如不指明所采用的个体域，都是使用全总个体域.

2. 谓词

谓词是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词，常用 F,G,H 等表示. 考虑下面 4 个陈述句.

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) x 是有理数.

(3) 小王与小李同岁.

(4) x 与 y 具有关系 L.

在(1)中，$\sqrt{2}$ 是个体常项，“……是无理数”是谓词，记为 F. 整个陈述句可以表示成 $F(\sqrt{2})$. 在(2)中，x 是个体变项，“……是有理数”是谓词，记作 G. 这个陈述句可以表示成 $G(x)$. 在(3)中，小王，小李都是个体常项，“……与……同岁”是谓词，记作 H，这个陈述句可符号化为 $H(a,b)$，其中 a 表示小王，b 表示小李. 在(4)中，x,y 为两个个体变项，L 是谓词，这个陈述句的符号化形式为 $L(x,y)$.

同个体词一样，谓词也有常项与变项之分. 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项，表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项. 无论是谓词常项或变项都用大写英文字母 F，G，H 等表示，要根据上下文区分. 在上面 4 个陈述句中，(1)，(2)，(3)中谓词 F,G,H 是常项，而(4)中谓词 L 是变项.

一般地，含 $n(n\geqslant 1)$ 个个体变项 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的谓词 P 称作 n 元谓词，记作 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n=1$ 时，$P(x_1)$ 表示 x_1 具有性质 P；当 $n\geqslant 2$ 时，$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 具有关系 P. n 元谓词是以个体域为定义域，以 $\{0,1\}$ 为值域的 n 元函数或关系.

有时将不带个体变项的谓词称作 0 元谓词. 例如，$F(a)$，$G(a,b)$，$P(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 等都是 0 元谓词. 当 F,G,P 为谓词常项时，0 元谓词为命题. 反之，任何命题均可以表示成 0 元谓词，因而可以将命题看成特殊的谓词.

例 4.1　将下列命题在一阶逻辑中用 0 元谓词符号化，并讨论它们的真值.

(1) 只有 2 是素数，4 才是素数.

(2) 如果 5 大于 4，则 4 大于 6.

解　(1) 设 1 元谓词 $F(x)$：x 是素数，命题可符号化为

$$F(4)\to F(2)$$

由于此蕴涵式的前件为假，所以命题为真.

(2) 设 2 元谓词 $G(x,y)$：$x>y$，命题可符号化为

$$G(5,4)\to G(4,6)$$

由于 $G(5,4)$ 为真，而 $G(4,6)$ 为假，所以命题为假.

3. 量词

表示个体常项或变项之间数量关系的词称作量词. 有两种量词.

(1) 全称量词. 日常生活和数学中常用的"一切的""所有的""每一个""任意的""凡""都"等词统称作全称量词,用符号"$\forall$"表示,$\forall x$ 表示个体域里的所有个体 x,其中个体域是事先约定的. 例如,$\forall xF(x)$ 表示个体域里所有个体 x 都有性质 F,$\forall x\forall yG(x,y)$ 表示个体域里的所有个体 x 和 y 有关系 G,其中 F 和 G 是谓词.

(2) 存在量词. 日常生活和数学中常用的"存在""有一个""有的""至少有一个"等词统称作存在量词,用符号"$\exists$"表示. $\exists x$ 表示个体域里有一个个体 x. 例如,用 $\exists xF(x)$ 表示在个体域里存在个体 x 具有性质 F,$\exists x\exists yG(x,y)$ 表示在个体域里存在个体 x 和 y 有关系 G.

全称量词和存在量词可以联合使用. 例如,$\forall x\exists yG(x,y)$ 表示对个体域里所有个体 x,存在 y 使得 x 和 y 有关系 G;而 $\exists x\forall yG(x,y)$ 表示个体域里存在个体 x 使得其和所有的个体 y 有关系 G.

下面举例说明一阶逻辑中的命题符号化.

例 4.2 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时,将下面两个命题符号化.

(1) 凡人都呼吸.

(2) 有的人用左手写字.

其中:(a) 个体域 D_1 为人类集合;

(b) 个体域 D_2 为全总个体域.

解 (a) 令 $F(x)$:x 呼吸. $G(x)$:x 用左手写字.

在 D_1 中除人外,再无别的东西,因而

(1) 符号化为

$$\forall xF(x) \tag{4.1}$$

(2) 符号化为

$$\exists xG(x) \tag{4.2}$$

(b) D_2 中除有人外,还有万物,因而在符号化时必须考虑将人先分离出来. 为此引入谓词 $M(x)$:x 是人. 在 D_2 中,把(1),(2)分别说得更清楚些:

(1) 对于宇宙间一切个体而言,如果个体是人,则他呼吸.

(2) 在宇宙间存在用左手写字的人(或者更清楚地,在宇宙间存在这样的个体,它是人且用左手写字).

于是,(1),(2)的符号化形式应分别为

$$\forall x(M(x)\rightarrow F(x)) \tag{4.3}$$

和

$$\exists x(M(x)\land G(x)) \tag{4.4}$$

其中 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的含义同(a).

由例 4.2 可知,命题(1),(2)在不同的个体域中符号化的形式可能不一样. 当使用全总个体域 D_2 时,为了将人与其他事物区别出来,引进了谓词 $M(x)$. 这样的谓词称作特性谓词. 在命题符号化时一定要注意正确使用特性谓词.

这里要提醒初学者注意一个常见的错误：不能正确地使用→与∧．例如，有些初学者，在 D_2 中将(1)符号化为下面形式：

$$\forall x(M(x) \land F(x)) \tag{4.5}$$

这是不对的．若将它翻译成自然语言，则应该是“宇宙间的所有个体都是人并且都呼吸”，这显然不是(1)的原意．另一方面，还有人将(2)符号化为

$$\exists x(M(x) \rightarrow G(x)) \tag{4.6}$$

这也是不对的．将它翻译成自然语言应该为“在宇宙间存在个体，如果这个体是人，则他用左手写字”，这显然也不是(2)的原意．

当 F 是谓词常项时，$\forall xF(x)$ 是一个命题．如果把个体域中的任何一个个体 a 代入，$F(a)$ 都为真，则 $\forall xF(x)$ 为真；否则 $\forall xF(x)$ 为假．$\exists xF(x)$ 也是一个命题．如果个体域中存在一个个体 a，使得 $F(a)$ 为真，则 $\exists xF(x)$ 为真；否则 $\exists xF(x)$ 为假．

例 4.3　在个体域限制为(a)和(b)条件时，将下列命题符号化，并给出它们的真值．

(1) 对于任意的 x，均有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$．

(2) 存在 x，使得 $x+5=3$．

其中：(a) 个体域 $D_1=\mathbf{N}$

(b) 个体域 $D_2=\mathbf{R}$

解　(a) 令 $F(x)$：$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，$G(x)$：$x+5=3$．命题(1)的符号化形式为

$$\forall xF(x) \tag{4.7}$$

命题(2)的符号化形式为

$$\exists xG(x) \tag{4.8}$$

显然(1)为真命题，而(2)为假命题．

(b) 在 D_2 内，(1)与(2)的符号化形式还分别是式(4.7)和式(4.8)，(1)仍然是真命题，而此时(2)也为真命题．

从例 4.2 和例 4.3 可以看出以下两点．

1. 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同．

2. 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同．

另外，作为一种约定，今后若没有特别指明个体域，都是采用全总个体域．

例 4.4　将下列命题符号化，并讨论它们的真值．

(1) 所有的人都长着黑头发．

(2) 有的人登上过月球．

(3) 没有人登上过木星．

(4) 在美国留学的学生未必都是亚洲人．

解　由于本题没指明个体域，因而应采用全总个体域．令 $M(x)$：x 为人．

(1) 令 $F(x)$：x 长着黑头发．命题(1)符号化形式为

$$\forall x(M(x) \rightarrow F(x)) \tag{4.9}$$

设 a 为某金发姑娘，则 $M(a)$ 为真，而 $F(a)$ 为假，所以 $M(a) \to F(a)$ 为假，故式(4.9)为假.

(2) 令 $G(x)$：x 登上过月球. 命题(2)符号化形式为

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)) \tag{4.10}$$

设 a 是 1969 年登上月球完成阿波罗计划的美国宇航员阿姆斯特朗，$M(a) \wedge G(a)$ 为真，所以式(4.10)为真.

(3) 令 $H(x)$：x 登上过木星. 命题(3)符号化形式为

$$\neg \exists x(M(x) \wedge H(x)) \tag{4.11}$$

到目前为止，还没有人登上过木星，所以对任何个体 a，要么 $M(a)$ 为假(a 不是人)，要么 $H(a)$ 为假(a 没有登上过木星)，故 $M(a) \wedge H(a)$ 均为假，因而 $\exists x(M(x) \wedge H(x))$ 为假，式(4.11)为真.

(4) 令 $F(x)$：x 是在美国留学的学生，$G(x)$：x 是亚洲人. 命题(4)符号化形式为

$$\neg \forall x(F(x) \to G(x)) \tag{4.12}$$

此命题为真.

下面的问题要使用 $n(n \geqslant 2)$ 元谓词.

例 4.5 将下列命题符号化.

(1) 兔子比乌龟跑得快.

(2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快.

(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快.

(4) 不存在跑得同样快的两只兔子.

解 因为本题没有指明个体域，因而采用全总个体域. "……比……跑得快"是 2 元谓词，需引入两个个体变项 x 与 y. 令 $F(x)$：x 是兔子，$G(y)$：y 是乌龟，$H(x,y)$：x 比 y 跑得快，$L(x,y)$：x 与 y 跑得同样快，$N(x,y)$：$x=y$. 这 4 个命题分别符号化为

$$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)) \tag{4.13}$$

$$\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \to H(x,y))) \tag{4.14}$$

$$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)) \tag{4.15}$$

$$\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge N(x,y) \wedge L(x,y)) \tag{4.16}$$

对于含 n 元谓词的命题，在符号化时应该注意以下几点.

1. 命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为一元和 $n(n \geqslant 2)$ 元谓词.

2. 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词.

3. 一般说来，当多个量词出现时，它们的顺序不能随意调换. 例如，考虑个体域为实数集，$H(x,y)$ 表示 $x+y=10$，则命题"对于任意的 x，都存在 y，使得 $x+y=10$"的符号化形式为

$$\forall x \exists y F(x,y) \tag{4.17}$$

所给命题显然为真命题. 但如果改变两个量词的顺序，则得

$$\exists y \forall x H(x,y) \tag{4.18}$$

它的意思是"存在 y 使得，对所有的 x 都有 $x+y=10$"，这是一个假命题. 式(4.18)与式(4.17)表达的是两个不同的意思.

4. 命题的符号化形式不唯一. 例如,在例 4.5 中,(3)还可以符号化为

$$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y)) \tag{4.19}$$

(4)还可以符号化为

$$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge N(x,y) \rightarrow \neg L(x,y)) \tag{4.20}$$

第 5 章可以证明式(4.15)和式(4.19)、式(4.16)与式(4.20)是等值的.

由于引进了个体词、谓词和量词的概念,现在可以将本章开始时讨论的推理"凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除."在一阶逻辑中可符号化为

$$(\forall x(F(x) \rightarrow G(x))) \wedge F(6) \rightarrow G(6) \tag{4.21}$$

其中,$F(x)$:x 是偶数,$G(x)$:x 能被 2 整除. 第 5 章可以证明式(4.21)是永真式,即恒真.

4.2　一阶逻辑公式及其解释

4.1 节中给出的(4.1)~(4.21)各式都是具体命题或推理在一阶逻辑中的符号化形式. 与在命题逻辑中一样,为在一阶逻辑中进行演算和推理,还必须给出一阶逻辑中公式的抽象定义以及它们的解释. 为此,首先给出*一阶语言*的概念. 所谓一阶语言,是用于一阶逻辑的形式语言,而一阶逻辑是建立在一阶语言上的逻辑体系. 一阶语言本身是由抽象符号构成的,可以根据需要被解释成各种具体的含义. 有多种形式的一阶语言,本书介绍一阶语言 $\mathscr{L}$,用它可以方便地将自然语言中的命题符号化.

在描述对象和形式化时要使用个体常项、个体变项、函数、谓词、量词、联结词和括号与逗号. 个体常项符号、函数符号和谓词符号称作*非逻辑符号*,个体变项符号、量词符号、联结词符号和括号与逗号称作*逻辑符号*.

定义 4.1　设 L 是一个非逻辑符号集合,由 L 生成的*一阶语言* $\mathscr{L}$ 的*字母表*包括下述符号.

非逻辑符号

(1) L 中的个体常项符号,常用 $a,b,c,\cdots$ 或 $a_i,b_i,c_i,\cdots(i\geqslant 1)$表示.

(2) L 中的函数符号,常用 $f,g,h,\cdots$ 或 $f_i,g_i,h_i,\cdots(i\geqslant 1)$表示.

(3) L 中的谓词符号,常用 $F,G,H,\cdots$ 或 $F_i,G_i,H_i,\cdots(i\geqslant 1)$表示.

逻辑符号

(4) 个体变项符号:$x,y,z,\cdots,x_i,y_i,z_i,\cdots(i\geqslant 1)$.

(5) 量词符号:$\forall$,$\exists$.

(6) 联结词符号:$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$.

(7) 括号与逗号:(,),,.

定义 4.2　$\mathscr{L}$ 的*项*定义如下.

(1) 个体常项符号和个体变项符号是项.

(2) 若 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数符号,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 n 个项,则 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的.

定义 4.3　设 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元谓词符号,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 的 n 个项,则称 $R(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的原子公式.

例 4.5 中的 1 元谓词 $F(x)$,$G(y)$,2 元谓词 $H(x,y)$,$L(x,y)$ 等都是原子公式.

定义 4.4　$\mathscr{L}$ 的合式公式定义如下.

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式,则$(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若 A,B 是合式公式,则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若 A 是合式公式,则 $\forall xA$, $\exists xA$ 也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)～(4)构成的符号串才是合式公式.

$\mathscr{L}$ 的合式公式也称作谓词公式,简称为公式.

为方便起见,公式$(\neg A)$,$(A\wedge B)$,…的最外层括号可以省去,写成$\neg A$,$A\wedge B$ 等. 在定义中出现的字母 A,B 是元语言符号,表示任意的合式公式. 例如,可以是 $F(x)$,$G(x)$等原子公式,也可以是 $F(x)\rightarrow\exists yG(y)$, $\forall x(F(x,y)\wedge G(x,z))$等形式比较复杂的公式. 式(4.1)～式(4.21)都是合式公式.

不同的一阶语言使用不同的非逻辑符号集合 L,但它们构造合式公式的规则是一样的. 一阶逻辑研究一阶语言的一般性质,而不是针对某个特定的一阶语言. 对一个具体的应用而言,L 通常是不言自明的,由使用的全部非逻辑符号组成. 因此,今后除特殊需要外,不再特别指明 L,而简称为一阶语言 $\mathscr{L}$.

L 不一定要包含全部 3 类非逻辑符号,可以只包含其中的 1 种或 2 种,甚至等于空集$\varnothing$. 当 $L=\varnothing$时,$\mathscr{L}$ 中没有任何公式,也就没有任何意义. 当 L 不包含谓词符号时,$\mathscr{L}$ 退化成命题逻辑中的语言. 因此,通常总假设 L 中至少包含一个谓词符号. 下面的讨论均在一阶语言中进行,也常常不再指明.

定义 4.5　在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中,称 x 为指导变元,A 为量词的辖域. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中,x 的所有出现都称作约束出现,A 中不是约束出现的其他变项均称作自由出现.

例 4.6　指出下列各公式中的指导变元,各量词的辖域,自由出现以及约束出现的个体变项.

(1) $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$　　(4.22)

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow G(y))\rightarrow\exists y(H(x)\wedge L(x,y,z))$　　(4.23)

解　(1) x 是指导变元. 量词$\forall$的辖域 $A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$. 在 A 中,x 是约束出现,而且约束出现两次,y 和 z 均为自由出现,各自由出现一次.

(2) 公式中含 2 个量词,前件上的量词$\forall$的指导变元为 x,$\forall$的辖域$(F(x)\rightarrow G(y))$,其中 x 是约束出现,y 是自由出现. 后件中的量词$\exists$的指导变元为 y,$\exists$的辖域为$(H(x)\wedge L(x,y,z))$,其中 y 是约束出现,x,z 均为自由出现. 在整个公式中,x 约束出现一次,自由出现两次,y 自由出现

一次,约束出现一次,z 自由出现一次.

注意:在式(4.23)中前件中的 x(它在 $\forall$ 的辖域中)与后件中的 x(它不在 $\forall$ 的辖域中,而在 $\exists$ 的辖域中)不是一个东西,而是两个不同的东西使用了同一个符号,如同两个人都叫张强,是两个不同的人起了同一个名字.

为方便起见,本书用 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示含 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 自由出现的公式,并用 Δ 表示任意的量词($\forall$ 或 $\exists$). 例如,$\Delta x_1 A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是含 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 自由出现的公式,可以记作 $A_1(x_2,x_3,\cdots,x_n)$. 类似地,$\Delta x_2 \Delta x_1 A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可以记作 $A_2(x_3,x_4,\cdots,x_n)$,$\Delta x_{n-1}\Delta x_{n-2}\cdots\Delta x_1 A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中只有 x_n 是自由出现的个体变项,记作 $A_{n-1}(x_n)$,而 $\Delta x_n\cdots\Delta x_1 A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 已无自由出现的个体变项了.

可以将例 4.6(1)中公式记作 $A(y,z)$,表明它含自由出现的个体变项 y,z. 而 $\forall yA(y,z)$ 中只有 z 为自由出现,$\exists z\forall yA(y,z)$ 中已无自由出现的个体变项了,此时的公式为

$$\exists z\forall y\forall x(F(x,y)\to G(x,y,z)) \tag{4.24}$$

定义 4.6　设 A 是任意的公式,若 A 中不含自由出现的个体变项,则称 A 为封闭的公式,简称作闭式.

易知式(4.1)~式(4.21)以及式(4.24)都是闭式,而式(4.22)和式(4.23)则不是闭式. 要想使含 $r(r\geqslant 1)$ 个自由出现的个体变项的公式变成闭式至少要加上 r 个量词. 将式(4.22)加 2 个量词就变成闭式(4.24). 类似地,也可以用加量词的方法将式(4.23)变成闭式.

$\mathscr{L}$ 中的合式公式是按照形成规则生成的符号串,没有实际的含义. 只有将其中的变项(个体变项、谓词变项等)用指定的常项代替后,所得公式才具有特定的实际含义.

例 4.7　(1) $\exists xF(f(x),a)$

下面指定个体域和个体常项符号 a,函数符号 f 及谓词符号 F 的含义.

(a) 个体域为实数集 $\mathbf{R}$,$a=0$,$f(x)=2x+1$,$F(x,y):x=y$. 公式的含义是:存在实数 x,使得 $2x+1=0$. 这是真命题.

(b) a,$f(x)$,$F(x,y)$ 的含义同上,个体域改为自然数集 $\mathbf{N}$. 公式的含义是:存在自然数 x,使得 $2x+1=0$. 这是假命题.

(2) $\forall xG(x,y)$

指定个体域为自然数集 $\mathbf{N}$,$G(x,y):x\geqslant y$. 公式的含义是:所有的自然数大于等于 y. 这不是命题. 为使公式成为命题,需要指定自由出现的个体变项 y 的值. 若指定 $y=0$,则公式的含义是:所有的自然数大于等于 0. 这是真命题. 若指定 $y=1$,则公式的含义是:所有的自然数大于等于 1. 这是假命题.

上面对公式中个体域及个体常项符号、函数符号、谓词符号的指定称作解释,指定自由出现的个体变项的值称作赋值. 定义如下.

定义 4.7　设 $\mathscr{L}$ 是由 L 生成的一阶语言,$\mathscr{L}$ 的解释 I 由下面 4 部分组成.

(a) 非空个体域 D_I

(b) 对每一个个体常项符号 $a\in L$,有一个 $\bar{a}\in D_I$,称 $\bar{a}$ 为 a 在 I 中的解释.

(c) 对每一个 n 元函数符号 $f \in L$，有一个 D_I 上的 n 元函数 $\bar{f}: D_I^n \to D_I$，称 $\bar{f}$ 为 f 在 I 中的解释.

(d) 对每一个 n 元谓词符号 $F \in L$，有一个 D_I 上的 n 元谓词常项 $\bar{F}$，称 $\bar{F}$ 为 F 在 I 中的解释.

I 下的赋值 σ：对每一个个体变项符号 x 指定 D_I 中的一个值 $\sigma(x)$.

设公式 A，规定：在解释 I 和赋值 σ 下，

1. 取个体域 D_I，
2. 若 A 中含个体常项符号 a 就将它替换成 $\bar{a}$，
3. 若 A 中含函数符号 f 就将它替换成 $\bar{f}$，
4. 若 A 中含谓词符号 F 就将它替换成 $\bar{F}$，
5. 若 A 中含自由出现的个体变项符号 x 就将它替换成 $\sigma(x)$，

把这样所得到的公式记作 A'. 称 A' 为 A 在 I 下的解释，或 A 在 I 下被解释成 A'.

例 4.8　给定解释 I 和 I 下的赋值 σ 如下.

(a) 个体域 $D = \mathbf{N}$.

(b) $\bar{a} = 0$.

(c) $\bar{f}(x,y) = x+y$，$\bar{g}(x,y) = x \cdot y$.

(d) $\bar{F}(x,y)$ 为 $x=y$.

(e) $\sigma(x)=1$，$\sigma(y)=2$，$\sigma(z)=3$.

写出下列公式在 I 及 σ 下的解释，并指出哪些公式为真？哪些为假？哪些真值不能确定？

(1) $F(f(x,y),g(x,y))$

(2) $F(f(x,a),y) \to F(g(x,y),z)$

(3) $\neg F(g(x,y),g(y,z))$

(4) $\forall x F(g(x,y),z)$

(5) $\forall x F(g(x,a),x) \to F(x,y)$

(6) $\forall x F(g(x,a),x)$

(7) $\forall x \forall y (F(f(x,a),y) \to F(f(y,a),x))$

(8) $\forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$

(9) $\exists x F(f(x,x),g(x,x))$

解　(1) 在 I 下，该公式被解释成“$1+2=1\times2$”，假命题.

(2) 公式被解释成“$(1+0=2) \to (1\times2=3)$”，真命题.

(3) 公式被解释成“$1\times2 \neq 2\times3$”，真命题.

(4) 公式被解释成“$\forall x(2x=3)$”，假命题.

(5) 公式被解释成“$\forall x(x\cdot0=x) \to (1=2)$”，由于蕴涵式的前件为假，所以为真.

(6) 公式被解释成“$\forall x(x\cdot0=x)$”，假命题.

(7) 公式被解释成“$\forall x \forall y((x+0=y) \to (y+0=x))$”，真命题.

(8) 公式被解释成“$\forall x \forall y \exists z(x+y=z)$”,真命题.

(9) 公式被解释成“$\exists x(x+x=x\cdot x)$”,真命题.

给定解释 I 和 I 下的赋值 σ,任何公式都被解释成命题. 特别地,对于闭式,由于没有自由出现的个体变项符号,所以不要赋值,只需要解释就够了.

有的公式在任何解释和任何赋值下均为真,有些公式在任何解释和任何赋值下均为假,而又有些公式既存在成真的解释和赋值,又存在成假的解释和赋值. 为了区别这 3 种不同的公式类型,定义如下.

定义 4.8　设 A 为一公式,若 A 在任何解释和该解释下的任何赋值下均为真,则称 A 为*永真式*(或称作*逻辑有效式*). 若 A 在任何解释和该解释下的任何赋值下均为假,则称 A 为*矛盾式*(或*永假式*). 若至少存在一个解释和该解释下的一个赋值使 A 为真,则称 A 是*可满足式*.

根据定义,永真式一定是可满足式,但是可满足式不一定是永真式. 在例 4.8 中,公式(2),(3),(5),(7),(8),(9)都是可满足的,因为在那里已给出它们的成真的解释和赋值;而公式(1),(4),(6)不是永真式,因为已有解释和赋值使它成假.

在命题逻辑中可以用真值表等方法判断任意给定的公式是否是可满足的(重言式、矛盾式). 但在一阶逻辑中,情况就完全不同了. 由于公式中的谓词和函数可以有各种不同的解释,使得情况变得异常复杂,结果是判断任意给定的公式是否是可满足的(永真式、矛盾式)的问题是不可判定的,即不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定的公式是否是可满足的(永真式、矛盾式). 下面仅讨论某些简单的情况.

定义 4.9　设 A_0 是含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的命题公式,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个谓词公式,用 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 处处代替 A_0 中的 p_i,所得公式 A 称为 A_0 的*代换实例*.

例如,$F(x)\to G(x)$,$\forall xF(x)\to\exists yG(y)$ 都是 $p\to q$ 的代换实例.

定理 4.1　重言式的代换实例都是永真式,矛盾式的代换实例都是矛盾式.

证明略.

例 4.9　判断下列公式中,哪些是永真式,哪些是矛盾式?

(1) $\forall x(F(x)\to G(x,y))$

(2) $\exists x(F(x)\land G(x,y))$

(3) $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$

(4) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\land\exists yG(y)$

解　为方便起见,用 A,B,C,D 分别记(1),(2),(3),(4)中的公式.

(1) A 是闭式,只需要考虑解释. 取解释 I_1:个体域为实数集合 $\mathbf{R}$,$F(x)$:x 是整数,$G(x)$:x 是有理数. 在 I_1 下 A 为真,因而 A 是可满足式. 取解释 I_2:个体域仍为 $\mathbf{R}$,$F(x)$:x 是无理数,$G(x)$:x 能表示成分数. 在 I_2 下 A 为假,A 不是永真式. 所以 A 是非永真式的可满足式.

(2) 取解释 I:个体域为实数集合 $\mathbf{R}$,$F(x)$:x 是自然数,$G(x,y)$:$x=y$. 赋值 $\sigma_1(y)=1$. 在 I 和 σ_1 下 B 成为真命题. 若取赋值 $\sigma_2(y)=-1$,则在 I 和 σ_2 下 B 成为假命题. 所以 B 是非永真式的可满足式.

(3) C 是 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例,而该命题公式是重言式,所以 C 是永真式.

(4) D 是 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例,而该命题公式是矛盾式,所以 D 是矛盾式.

例 4.10 证明下列公式是永真式.

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$

(2) $\forall xF(x)\rightarrow F(y)$

(3) $\forall xF(x)\rightarrow F(c)$

(4) $F(y)\rightarrow\exists xF(x)$

(5) $F(c)\rightarrow\exists xF(x)$

解 (1) 这是闭式,只需考虑解释. 设 I 为任意一个解释,个体域为 D. 若在 I 下后件 $\exists xF(x)$ 为假,则对所有的 $x\in D$,$F(x)$ 为假. 于是,$\forall xF(x)$ 为假. 从而公式为真. 由 I 的任意性,得证公式是永真式.

(2) 设 I 为任意一个解释,σ 是 I 下的任意一个赋值,个体域为 D. 若在 I 和 σ 下前件 $\forall xF(x)$ 为真,即对所有的 $x\in D$,$F(x)$ 为真,那么后件 $F(\sigma(y))$ 也为真. 从而,公式为真. 得证公式是永真式.

(3) 可类似(2)证明.

(4) 设 I 为任意一个解释,σ 是 I 下的任意一个赋值,个体域为 D. 若在 I 和 σ 下前件 $F(y)$ 为真,即 $F(\sigma(y))$ 为真,则后件 $\exists xF(x)$ 在 I 和 σ 下也为真. 从而,公式为真. 得证公式是永真式.

(5) 可类似(4)证明.

习 题 4

1. 将下列命题用 0 元谓词符号化.

(1) 小王学过英语和法语.

(2) 除非李健是东北人,否则他一定怕冷.

(3) 2 大于 3 仅当 2 大于 4.

(4) 3 不是偶数.

(5) 2 或 3 是素数.

2. 在一阶逻辑中,分别在(a),(b)时将下列命题符号化,并讨论各命题的真值.

(1) 凡整数都能被 2 整除.

(2) 有的整数能被 2 整除.

其中:

(a) 个体域为整数集.

(b) 个体域为实数集.

3. 在一阶逻辑中,分别在(a),(b)时将下列命题符号化,并讨论各命题的真值.

(1) 对于任意的 x,均有 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2) 存在 x,使得 $x+5=9$.

其中：

(a) 个体域为自然数集合.

(b) 个体域为实数集合.

4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 没有不能表示成分数的有理数.

(2) 在北京卖菜的人不全是外地人.

(3) 乌鸦都是黑色的.

(4) 有的人天天锻炼身体.

5. 在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 火车都比轮船快.

(2) 有的火车比有的汽车快.

(3) 不存在比所有火车都快的汽车.

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的.

6. 将下列命题符号化,个体域为实数集合 **R**,并指出各命题的真值.

(1) 对所有的 x,都存在 y 使得 $x\cdot y=0$.

(2) 存在 x,使得对所有 y 都有 $x\cdot y=0$.

(3) 对所有的 x,都存在 y 使得 $y=x+1$.

(4) 对所有的 x 和 y,都有 $x\cdot y=y\cdot x$.

(5) 对任意的 x 和 y,都有 $x\cdot y=x+y$.

(6) 对于任意的 x,存在 y 使得 $x^2+y^2<0$.

7. 将下列公式翻译成自然语言,并判断各命题的真假,其中个体域为整数集 **Z**.

(1) $\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$

(2) $\forall x\exists y(x\cdot y=1)$

(3) $\exists x\forall y\forall z(x+y=z)$

8. 指出下列公式中的指导变元,量词的辖域,各个体变项的自由出现和约束出现.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x,y))$

(2) $\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

(3) $\forall x\exists y(F(x,y)\wedge G(y,z))\vee\exists xH(x,y,z)$

9. 给定解释 I 和 I 下的赋值 σ 如下.

(a) 个体域为实数集合 **R**.

(b) 特定元素 $\bar{a}=0$.

(c) 函数 $\bar{f}(x,y)=x-y,x,y\in\mathbf{R}$.

(d) 谓词 $\bar{F}(x,y):x=y,\bar{G}(x,y):x<y,x,y\in\mathbf{R}$.

(e) $\sigma(x)=1,\sigma(y)=-1$.

给出下列公式在 I 与 σ 下的解释,并指出它们的真值.

(1) $\forall x(G(x,y)\rightarrow\exists yF(x,y))$

(2) $\forall y(F(f(x,y),a)\rightarrow\forall xG(x,y))$

(3) $\exists xG(x,y)\rightarrow\forall yF(f(x,y),a)$

(4) $\forall yG(f(x,y),a) \rightarrow \exists xF(x,y)$

10. 给定解释 I 和 I 下的赋值 σ 如下.

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$.

(b) 特定元素 $\bar{a}=2$.

(c) $\mathbf{N}$ 上的函数 $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x \cdot y$.

(d) $\mathbf{N}$ 上的谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$.

(e) $\sigma(x)=2, \sigma(y)=3, \sigma(z)=4$.

给出下列各式在 I 与 σ 下的解释,并讨论它们的真值.

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

(2) $\exists xF(f(x,a),y) \rightarrow \exists yF(f(y,a),x)$

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

(4) $\exists xF(f(x,y),g(x,z))$

11. 判断下列公式的类型.

(1) $F(x,y) \rightarrow (G(x,y) \rightarrow F(x,y))$

(2) $\forall x(F(x) \rightarrow F(x)) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge \neg G(y))$

(3) $\forall x\exists yF(x,y) \rightarrow \exists x\forall yF(x,y)$

(4) $\exists x\forall yF(x,y) \rightarrow \forall y\exists x F(x,y)$

(5) $\forall x\forall y(F(x,y) \rightarrow F(y,x))$

(6) $\neg(\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y)) \wedge \exists yG(y)$

12. 判断下列各式的类型.

(1) $F(x) \rightarrow \forall xF(x)$

(2) $\exists xF(x) \rightarrow F(x)$

(3) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall xF(x) \rightarrow \forall xG(x))$

(4) $(\forall xF(x) \rightarrow \forall xG(x)) \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

13. 给出下列公式的一个成真解释和一个成假解释.

(1) $\forall x(F(x) \vee G(x))$

(2) $\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge H(x))$

(3) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \wedge H(x,y)))$

14. 证明下列公式既不是永真式也不是矛盾式.

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$

(2) $\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$

第 5 章 一阶逻辑等值演算与推理

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

在一阶逻辑中，有些命题可以有不同的符号化形式. 例如，命题“没有不犯错误的人”，取全总个体域时有下面两种不同的符号化形式.

(1) $\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

(2) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

其中，$F(x)$:x 是人，$G(x)$:x 犯错误. 与命题逻辑的情况一样，称(1)与(2)是等值的，下面给出等值式的定义.

本章仍然使用一阶语言 $\mathscr{L}$，在下面的讨论中不再一一说明.

定义 5.1 设 A,B 是一阶逻辑中任意两个公式，若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 等值，记作 $A \Leftrightarrow B$. 称 $A \Leftrightarrow B$ 是等值式.

由定义 5.1 可知，判断公式 A 与 B 是否等值，等价于判断公式 $A \leftrightarrow B$ 是否为永真式. 同命题逻辑中一样，证明了一些常用的重要等值式，并用这些等值式推演出更多的等值式，这就是一阶逻辑等值演算的内容.

下面给出一阶逻辑中的基本等值式.

第 1 组

由于命题逻辑中的重言式的代换实例都是一阶逻辑中的永真式，因而第 2 章 16 组等值式模

式给出的代换实例都是一阶逻辑的等值式. 例如:

$$\forall xF(x)\Leftrightarrow\neg\neg\forall xF(x)$$

$$\forall x\exists y(F(x,y)\to G(x,y))\Leftrightarrow\neg\neg\forall x\exists y(F(x,y)\to G(x,y))$$

等都是式(2.1)的代换实例. 又如:

$$F(x)\to G(x)\Leftrightarrow\neg F(x)\lor G(y)$$

$$\forall x(F(x)\to G(y))\to\exists zH(z)\Leftrightarrow\neg\forall x(F(x)\to G(y))\lor\exists zH(z)$$

等都是式(2.12)的代换实例.

第2组

1. 消去量词等值式

设个体域为有限集 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则有

(1) $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\land A(a_2)\land\cdots\land A(a_n)$

(2) $\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\lor A(a_2)\lor\cdots\lor A(a_n)$ (5.1)

2. 量词否定等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x,则

(1) $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$

(2) $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$ (5.2)

可以如下直观解释式(5.2). 对于(1),"并不是所有的 x 都有性质 A"与"存在 x 没有性质 A"是一回事. 对于(2),"不存在有性质 A 的 x"与"所有 x 都没有性质 A"是一回事.

3. 量词辖域收缩与扩张等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x,B 不含 x 的自由出现,则

(1) $\forall x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\lor B$

$\forall x(A(x)\land B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\land B$

$\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$

$\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\forall xA(x)$ (5.3)

(2) $\exists x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\lor B$

$\exists x(A(x)\land B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\land B$

$\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$

$\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$ (5.4)

4. 量词分配等值式

设公式 $A(x)$,$B(x)$ 含自由出现的个体变项 x,则

(1) $\forall x(A(x)\land B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\land\forall xB(x)$

(2) $\exists x(A(x)\lor B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\lor\exists xB(x)$ (5.5)

进行等值演算,除以上基本等值式外,还有以下2条规则.

1. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式,$\Phi(B)$ 是用公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中所有的 A 之后所得到的公式.

那么,若 $A \Leftrightarrow B$,则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同,只是在这里 A,B 是一阶逻辑公式.

2. 换名规则

设 A 为一公式,将 A 中某量词辖域中的一个约束变项的所有出现及相应的指导变元全部改成该量词辖域中未曾出现过的某个个体变项符号,公式中其余部分不变,将所得公式记作 A',则$A' \Leftrightarrow A$.

例 5.1　将下面公式化成等值的公式,使其不含既是约束出现又是自由出现的个体变项.

(1) $\forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$

(2) $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yG(x,y,z))$

解　(1) 公式中 x,y 都是既约束出现,又自由出现的个体变项,可以通过换名消去这种情况.

$$\begin{aligned} & \forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z) \\ \Leftrightarrow\ & \forall tF(t,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z) && \text{(换名规则)} \\ \Leftrightarrow\ & \forall tF(t,y,z) \rightarrow \exists wG(x,w,z) && \text{(换名规则)} \end{aligned}$$

(2) 公式中 y 既有约束出现,又有自由出现,需要处理. 而 x 只有约束出现,z 只有自由出现,保持不变.

$$\begin{aligned} & \forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yG(x,y,z)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists tG(x,t,z) && \text{(换名规则)} \end{aligned}$$

例 5.2　证明:

(1) $\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

(2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

其中 $A(x)$,$B(x)$ 为含 x 自由出现的公式.

证　(1) 取 $A(x)=F(x)$,$B(x)=G(x)$,并证明 $\forall x(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 不是永真式,其中 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是谓词变项.

取解释 I 为:个体域为自然数集合 $\mathbf{N}$,$\overline{F}(x)$:x 是奇数,$\overline{G}(x)$:x 是偶数,则 $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 在解释 I 下为真命题,而 $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假命题. 故 $\forall x(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 不是永真式.

可以类似地证明(2).

例 5.2 说明,全称量词"$\forall$"对"$\vee$"无分配律,存在量词"$\exists$"对"$\wedge$"无分配律,请初学者务必注意. 如果把式中的 $B(x)$ 改为没有 x 自由出现的 B 时,就得到量词辖域收缩与扩张等值式(5.3)和(5.4)中的第一个式子.

例 5.3　设个体域 $D=\{a,b,c\}$,将下列公式的量词消去.

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\forall x(F(x) \vee \exists yG(y))$

(3) $\exists x \forall y F(x,y)$

解 (1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

$\Leftrightarrow (F(a)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists y G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x F(x)\vee\exists y G(y)$ (式(5.3))

$\Leftrightarrow (F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

注意$\exists y G(y)$与x无关,故可用式(5.3).如果不用式(5.3)将量词的辖域缩小,演算要烦琐一些.

(3) $\exists x \forall y F(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

也可以先消去存在量词,得到结果是等值的.

例 5.4 给定解释I如下.

(a) 个体域$D=\{2,3\}$.

(b) D中特定元素$\bar{a}=2$.

(c) D上特定函数$\bar{f}(x)$:$\bar{f}(2)=3$,$\bar{f}(3)=2$.

(d) D上的特定谓词$\bar{F}(x)$:$\bar{F}(2)=0$,$\bar{F}(3)=1$;$\bar{G}(x,y)$:$\bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1$,$\bar{G}(3,3)=0$;$\bar{L}(x,y)$:$\bar{L}(2,2)=\bar{L}(3,3)=1$,$\bar{L}(2,3)=\bar{L}(3,2)=0$.

求下列各式在I下的真值.

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$

(2) $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$

(3) $\forall x\exists y L(x,y)$

(4) $\exists y\forall x L(x,y)$

解 (1) $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$

$\Leftrightarrow (F(2)\wedge G(2,2))\wedge(F(3)\wedge G(3,2))$

$\Leftrightarrow (0\wedge 1)\wedge(1\wedge 1)\Leftrightarrow 0$

(2) $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$

$\Leftrightarrow (F(f(2))\wedge G(2,f(2)))\vee(F(f(3))\wedge G(3,f(3)))$

$\Leftrightarrow (F(3)\wedge G(2,3))\vee(F(2)\wedge G(3,2))$

$\Leftrightarrow (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\Leftrightarrow 1$

(3) $\forall x\exists y L(x,y)$

$\Leftrightarrow (L(2,2)\vee L(2,3))\wedge(L(3,2)\vee L(3,3))$

$\Leftrightarrow (1\vee 0)\wedge(0\vee 1)\Leftrightarrow 1$

(4) $\exists y\forall x L(x,y)$

$\Leftrightarrow (L(2,2)\wedge L(3,2))\vee(L(2,3)\wedge L(3,3))$

$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 0$

由(3),(4)的结果也说明量词的次序不能随意颠倒.

例 5.5　证明下列各等值式.

(1) $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \to \neg F(x))$

(2) $\neg \forall x(M(x) \to F(x)) \Leftrightarrow \exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$

(3) $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)) \Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$

(4) $\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y)) \Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to \neg L(x,y))$

证　(1) $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg(M(x) \wedge F(x))$　　(式(5.2))

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x))$　　(置换规则)

$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \to \neg F(x))$　　(置换规则)

由此说明例 4.4 中(3)有两种等值的符号化形式.

(2) $\neg \forall x(M(x) \to F(x))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg(M(x) \to F(x))$　　(式(5.2))

$\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg M(x) \vee F(x))$　　(置换规则)

$\Leftrightarrow \exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$　　(置换规则)

由此说明例 4.4 中(4)有两种等值的符号化形式.

(3) $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg(\forall y(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee H(x,y)))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$

类似可证明(4). 这两个等值式表明,例 4.5 中(3)的符号化形式,即式(4.15)与式(4.19)是等值的,(4)的符号化形式,即式(4.16)与式(4.20)也是等值的.

5.2　一阶逻辑前束范式

在命题逻辑中,任何公式都可以表示成等值的析取范式与合取范式,在一阶逻辑中公式也有范式形式.

定义 5.2　具有如下形式

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k B$$

的一阶逻辑公式称作前束范式,其中 $Q_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$, B 为不含量词的公式.

例如, $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$

$\forall x \forall y \exists z(F(x) \wedge G(y) \wedge H(z) \to L(x,z))$

等都是前束范式,而

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$$
$$\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$$

等不是前束范式.

定理 5.1(前束范式存在定理) 一阶逻辑中的任何公式都存在等值的前束范式.

这里略去定理的严格证明. 仅通过下面的例子说明如何利用式(5.2)~式(5.5)及置换规则、换名规则求与公式等值的前束范式. 为方便起见,把与公式等值的前束范式简称为公式的前束范式.

例 5.6 求下列各式的前束范式.

(1) $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

(2) $\forall xF(x) \vee \neg \exists xG(x)$

解(1) $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \neg \exists yG(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall y \neg G(y)$ (式(5.2)第二式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall y \neg G(y))$ (式(5.3)第二式)

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge \neg G(y))$ (式(5.3)第二式)

或者

$\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall x \neg G(x)$ (式(5.2)第二式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \neg G(x))$ (式(5.5)第一式)

这两个式子都是原式的前束范式.

(2) $\forall xF(x) \vee \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x \neg G(x)$ (式(5.2)第二式)

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y \neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \forall y \neg G(y))$ (式(5.3)第一式)

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \vee \neg G(y))$ (式(5.3)第一式)

注意:

1. 在(1)中使用$\forall$对$\wedge$的分配律,得到只带一个量词的前束范式.

2. $\forall$对$\vee$不适合分配律,在(2)中要使用辖域扩张式(5.3)的第一式. 为此需通过换名使得$\vee$前后两项中的指导变元不重名. 使用式(5.4)时也与此类似.

3. 由(1)可见,公式的前束范式是不唯一的.

例 5.7 求下列各式的前束范式,请读者补填每一步的根据.

(1) $\exists xF(x) \wedge \forall xG(x)$

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$

(3) $\exists xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$

解(1) $\exists xF(x) \wedge \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists yF(y) \land \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists y(F(y) \land \forall xG(x))$

$\Leftrightarrow \exists y \forall x(F(y) \land G(x))$

(2) $\forall xF(x) \to \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall yF(y) \to \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists y(F(y) \to \exists xG(x))$

$\Leftrightarrow \exists y \exists x(F(y) \to G(x))$

(3) $\exists xF(x) \to \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists yF(y) \to \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall y(F(y) \to \forall xG(x))$

$\Leftrightarrow \forall y \forall x(F(y) \to G(x))$

请读者写出以上各式不同形式的前束范式.

例 5.8　求下列各式的前束范式.

(1) $\forall xF(x,y) \to \exists yG(x,y)$

(2) $(\forall x_1F(x_1,x_2) \to \exists x_2G(x_2)) \to \forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$

解　解本题时一定注意,哪些个体变项约束出现,哪些自由出现,特别要注意哪些既约束出现又自由出现的个体变项.在求前束范式时,要通过换名消去既约束出现又自由出现的个体变项.

(1) $\forall xF(x,y) \to \exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y) \to \exists wG(x,w)$　　(换名规则)

$\Leftrightarrow \exists t \exists w(F(t,y) \to G(x,w))$　　(式(5.3),式(5.4))

(2) $(\forall x_1F(x_1,x_2) \to \exists x_2G(x_2)) \to \forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftrightarrow (\forall x_4F(x_4,x_2) \to \exists x_5G(x_5)) \to \forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$　　(换名规则)

$\Leftrightarrow \exists x_4 \exists x_5(F(x_4,x_2) \to G(x_5)) \to \forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$　　(式(5.3),式(5.4))

$\Leftrightarrow \forall x_4 \forall x_5 \forall x_1(F(x_4,x_2) \to G(x_5) \to H(x_1,x_2,x_3))$　　(式(5.3),式(5.4))

5.3　一阶逻辑的推理理论

在一阶逻辑中,从前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 出发推出结论 B 的推理的形式结构,依然采用如下的蕴涵式形式

$$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \to B \tag{5.6}$$

若式(5.6)为永真式,则称推理正确,否则称推理不正确.于是,在一阶逻辑中判断推理是否正确也归结为判断式(5.6)是否为永真式.本节介绍在形式系统中构造证明的证明方法.

在一阶逻辑中称永真式的蕴涵式为推理定律. 若一个推理的形式结构是推理定律,则这个推理是正确的.

推理定律有下面几组来源.

第一组 命题逻辑推理定律的代换实例. 例如:

$$\forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$$

$$\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$$

分别为命题逻辑中化简律和附加律的代换实例,它们都是推理定律.

第二组 由基本等值式生成的推理定律. 5.1 节中给出的两组等值式中的每个等值式都可以生成两个推理定律. 例如,由双重否定律可生成

$$\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$$

$$\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$$

由量词否定等值式可以生成

$$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$$

$$\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$$

第三组 一些常用的重要推理定律.

(1) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$

等等.

此外,还有 4 条消去量词和引入量词的规则. 下面以图示的形式给出这 4 条推理规则,应用它们时一定要注意每条规则成立的条件. 设前提 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$,

1. 全称量词消去规则(简记为 ∀-)

$$\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)} \text{ 或 } \frac{\forall xA(x)}{\therefore A(c)}$$

其中 x,y 是个体变项符号,c 是个体常项符号,且在 A 中 x 不在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域内自由出现.

由于 $\forall xF(x)\to F(y)$ 和 $\forall xF(x)\to F(c)$ 是永真式(见例 4.10),这条规则是显然的. 这里要求在 A 中 x 不在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域中自由出现,是因为如果在 A 中 x 在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域中自由出现,这时在 A 中约束出现的 y 可能与自由出现的 x 有某种联系,而导致 $A(y)$ 不真. 后面将会给出例子说明.

2. 全称量词引入规则(简记为 ∀+)

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall xA(x)}$$

其中 y 是个体变项符号,且不在 Γ 的任何公式中自由出现.

这条规则的意思是,为了证明 $\forall xA(x)$ 为真,只需要任取一个 y,证明 $A(y)$ 为真. 为了保证 y

的任意性,要求 y 与前提中的条件无关,即 y 不在 Γ 的任何公式中自由出现.

3. 存在量词消去规则(简记为 $\exists -$)

$$\frac{\begin{array}{l}\exists xA(x)\\ A(y)\to B\end{array}}{\therefore\ B}\quad 或\quad \frac{A(y)\to B}{\therefore\ \exists xA(x)\to B}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\exists xA(x)\\ A(c)\to B\end{array}}{\therefore\ B}\quad 或\quad \frac{A(c)\to B}{\therefore\ \exists xA(x)\to B}$$

其中 y 是个体变项符号,且不在 Γ 的任何公式和 B 中自由出现. c 是个体常项符号,且不在 Γ 的任何公式和 A,B 中出现.

就第一对表述说明如下. 第一个表述的意思是,已知 $\exists xA(x)$,如果任意取一个 y,假设 $A(y)$ 为真,能推出 B,而 B 与 y 无关,那么就能得到 B. 第二个表述的意思是,为了证明 $\exists xA(x)\to B$ 为真,只需任取一个 y,证明 $A(y)\to B$ 为真. 这两个意思是一样的. 实际上,这两个表述是等价的,即两者可以互相导出. 与 $\forall +$规则一样,为了保证 y 的任意性,要求 y 与前提中的条件及 B 无关,即 y 不在 Γ 的任何公式和 B 中自由出现. 第二对表述的意思也与此类似.

4. 存在量词引入规则(简记为 $\exists +$)

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \exists xA(x)}\ 或\ \frac{B\to A(y)}{\therefore\ B\to\exists xA(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore\ \exists xA(x)}\ 或\ \frac{B\to A(c)}{\therefore\ B\to\exists xA(x)}$$

其中 x,y 是个体变项符号,c 是个体常项符号,并且在 A 中 y 和 c 分别不在 $\forall x$、$\exists x$ 的辖域内自由出现和出现.

由于 $F(y)\to\exists xF(x)$ 和 $F(c)\to\exists xF(x)$ 是永真式(见例 4.10),这条规则是显然的. 两对表述也是等价的. 要求在 A 中 y 和 c 不在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中自由出现的原因也和 $\forall -$规则中的一样.

下面给出一阶逻辑自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$.

定义 5.3　自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 定义如下.

1. 字母表. 同一阶语言 $\mathscr{L}$ 的字母表(见定义 4.1).

2. 合式公式. 同 $\mathscr{L}$ 的合式公式的定义(见定义 4.4).

3. 推理规则:

(1) 前提引入规则.

(2) 结论引入规则.

(3) 置换规则.

(4) 假言推理规则.

(5) 附加规则.

(6) 化简规则.

(7) 拒取式规则.

(8) 假言三段论规则.

(9) 析取三段论规则.

(10) 构造性二难推理规则.

(11) 合取引入规则.

(12) $\forall -$规则.

(13) $\forall +$规则.

(14) $\exists -$规则.

(15) $\exists +$规则.

推理规则中(1)～(11)同命题逻辑推理规则(见定义3.3).

在推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中推理的证明与自然推理系统 P 中推理的证明相同. 设前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$,结论 B 和公式序列 $C_1,C_2,\cdots,C_l$. 如果每一个 $i(i=1,2,\cdots,l)$,C_i 是某个 A_j,或者可以由序列中前面的公式应用推理规则得到,并且 $C_l=B$,则称公式序列 $C_1,C_2,\cdots,C_l$ 是由 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推出 B 的证明.

在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中构造推理的证明格式与在自然推理系统 P 中构造推理的证明格式相同,也是写出前提,结论和证明过程.

在推理的证明中使用 $\forall +$、$\forall -$、$\exists +$ 和 $\exists -$ 时要特别注意规则所要求的条件. 例如,可以对 $\forall xF(x)$ 使用 $\forall -$规则得到 $F(y)$. 而不能对公式 $\forall x\exists yF(x,y)$ 使用 $\forall -$规则得到 $\exists yF(y,y)$. 如果取解释 I:个体域为实数集合,$\overline{F(x,y)}:x>y$. 在 I 下,公式 $\forall x\exists yF(x,y)$ 被解释为 $\forall x\exists y(x>y)$,其值为真;而 $\exists yF(y,y)$ 被解释为 $\exists y(y>y)$,显然为假. 出现错误的原因是 x 自由出现在 $\exists y$ 的辖域 $F(x,y)$ 内,这不符合使用 $\forall -$规则的条件.

又如,下面是由前提:$\forall x(P(x)\to Q(x))$,$P(x)$,推出结论:$\forall xQ(x)$的"证明".

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$	前提引入
② $P(x)\to Q(x)$	①$\forall -$
③ $P(x)$	前提引入
④ $Q(x)$	②③假言推理
⑤ $\forall xQ(x)$	④$\forall +$

实际上,如果取解释 I:个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$,$\overline{P}(x):x$ 是偶数,$\overline{Q}(x):x$ 被2整除. I 下的赋值 $\sigma(x)=2$. 在 I 和 σ 下,$\forall x(P(x)\to Q(x))$ 和 $P(x)$ 为真,$\forall xQ(x)$ 为假,故这个推理是错误的. 上述"证明"的错误是⑤应用 $\forall +$时,个体变项符号 x 在前提的公式中自由出现,不符合使用该规则的条件.

同样可以举出在使用 $\exists +$ 和 $\exists -$时,若不符合规则要求的条件,将会产生错误的推理.

例 5.9 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中,构造下面推理的证明.

任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以,存在着整数. 个体域为实数集合 $\mathbf{R}$.

解 设 $F(x):x$ 为自然数,$G(x):x$ 为整数.

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists xF(x)$

结论：$\exists xG(x)$

证明：

① $\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入

② $F(x)\to G(x)$　　①$\forall-$

③ $F(x)\to\exists xG(x)$　　②$\exists+$

④ $\exists xF(x)$　　前提引入

⑤ $\exists xG(x)$　　③④$\exists-$

在使用$\forall+$，$\forall-$，$\exists+$和$\exists-$规则时，常用同一个个体变项符号表示规则中自由出现的 y 和指导变元及约束出现的 x，如例 5.9 中的②和③.

例 5.10　在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下面推理的证明.

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists x(F(x)\wedge H(x))$

结论：$\exists x(G(x)\wedge H(x))$

证明：

① $\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入

② $F(x)\to G(x)$　　①$\forall-$

③ $\neg F(x)\vee G(x)$　　②置换

④ $\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee G(x)$　　③附加

⑤ $(\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee G(x))\wedge(\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee H(x))$　　④置换

⑥ $F(x)\wedge H(x)\to G(x)\wedge H(x)$　　⑤置换

⑦ $F(x)\wedge H(x)\to\exists x(G(x)\wedge H(x))$　　⑥$\exists+$

⑧ $\exists x(F(x)\wedge H(x))$　　前提引入

⑨ $\exists x(G(x)\wedge H(x))$　　⑦⑧$\exists-$

例 5.11　在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下面推理的证明(个体域为实数集合).

不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数. 因此，有理数都不是无理数.

解　设 $F(x)$：x 为无理数，$G(x)$：x 为有理数，$H(x)$：x 能表示成分数.

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$，$\forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\to\neg F(x))$

证明：

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$　　前提引入

② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$　　①置换

③ $\forall x(F(x)\to\neg H(x))$　　②置换

④ $F(x)\to\neg H(x)$　　③$\forall-$

⑤ $\forall x(G(x)\to H(x))$　　前提引入

⑥ $G(x)\to H(x)$　　⑤$\forall-$

⑦ $H(x)\to\neg F(x)$ ④置换
⑧ $G(x)\to\neg F(x)$ ⑥⑦假言三段论
⑨ $\forall x(G(x)\to\neg F(x))$ ⑧∀+

习 题 5

1. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$，在 D 中消去公式 $\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$ 的量词. 甲、乙用了不同的演算过程.
甲的演算过程如下.

$$\begin{aligned}&\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))\\ \Leftrightarrow&\forall x(F(x)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))\\ \Leftrightarrow&(F(a)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))\\ &\wedge(F(b)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))\\ &\wedge(F(c)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))\end{aligned}$$

乙的演算过程如下.

$$\begin{aligned}&\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))\\ \Leftrightarrow&\forall xF(x)\wedge\exists yG(y)\\ \Leftrightarrow&(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))\end{aligned}$$

显然，乙的演算过程简单些. 试指出乙在演算过程中的关键步骤.

2. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$，消去下列各式的量词.

(1) $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(y))$

(2) $\forall x\forall y(F(x)\vee G(y))$

(3) $\forall xF(x)\to\forall yG(y)$

(4) $\forall x(F(x,y)\to\exists yG(y))$

3. 设个体域 $D=\{1,2\}$，请给出两种不同的解释 I_1 和 I_2，使得下面公式在 I_1 下都是真命题，而在 I_2 下都是假命题.

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

4. 给定公式 $A=\exists xF(x)\to\forall xF(x)$.

(1) 在解释 I_1 中，个体域 $D=\{a\}$，证明公式 A 在 I_1 下的真值为1.

(2) 在解释 I_2 中，个体域 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$n\geqslant 2$，A 在 I_2 下的真值还一定是1吗？为什么？

5. 给定解释 I 如下.

(a) 个体域 $D=\{3,4\}$；

(b) $\bar f(x)$：$\bar f(3)=4$，$\bar f(4)=3$；

(c) $\bar F(x,y)$：$\bar F(3,3)=\bar F(4,4)=0$，$\bar F(3,4)=\bar F(4,3)=1$.

试求下列各式在 I 下的真值.

(1) $\forall x\exists yF(x,y)$

(2) $\exists x\forall yF(x,y)$

(3) $\forall x\forall y(F(x,y)\to F(f(x),f(y)))$

6. 甲使用量词辖域收缩与扩张等值式进行如下演算：

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x,y))\Leftrightarrow \exists xF(x)\rightarrow G(x,y)$$

乙说甲错了. 乙说得对吗？为什么？

7. 请指出下列等值演算中的两处错误.

$$\begin{aligned}&\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\rightarrow H(x,y)))\\ \Leftrightarrow&\forall x\exists y(F(x)\wedge(G(y)\rightarrow H(x,y)))\\ \Leftrightarrow&\forall x\exists y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y))\end{aligned}$$

8. 在一阶逻辑中将下列命题符号化，要求用两种不同的等值形式.

(1) 没有小于负数的正数.

(2) 相等的两个角未必都是对顶角.

9. 设个体域 D 为实数集合，命题"有的实数既是有理数，又是无理数". 这显然是假命题. 可是某人却说这是真命题，其理由如下. 设 $F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是无理数. $\exists xF(x)$ 与 $\exists xG(x)$ 都是真命题，因此 $\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$ 是真命题. 又

$$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

故 $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 也是真命题，即有的实数既是有理数，又是无理数. 试问错误出在哪里.

10. $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 是前束范式吗？为什么？

11. 有人说无法求公式

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow\exists xG(x,y)$$

的前束范式，因为公式中的两个量词的指导变元相同. 他的理由对吗？为什么？

12. 求下列各式的前束范式.

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\forall yG(x,y)$

(2) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

(3) $\forall xF(x,y)\leftrightarrow\exists xG(x,y)$

(4) $\forall x_1(F(x_1)\rightarrow G(x_1,x_2))\rightarrow(\exists x_2H(x_2)\rightarrow\exists x_3L(x_2,x_3))$

(5) $\exists x_1F(x_1,x_2)\rightarrow(F(x_1)\rightarrow\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$

13. 将下列命题符号化，要求符号化的公式为前束范式.

(1) 有的汽车比有的火车跑得快.

(2) 有的火车比所有的汽车跑得快.

(3) 不是所有的火车都比所有汽车跑得快.

(4) 有的飞机比有的汽车慢是不对的.

14. 试给出实例说明，在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中使用 $\exists+$ 和 $\exists-$ 规则时，如果不符合规则要求的条件则可能"证明"错误的推理.

15. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

(1) 前提：$\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$，$\exists xF(x)$

　　结论：$\exists xR(x)$

(2) 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow(G(a)\wedge R(x)))$，$\exists xF(x)$

　　结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x))$

(3) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\neg\exists G(x)$

结论：$\exists xF(x)$

(4) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(\neg G(x)\vee\neg R(x))$，$\forall xR(x)$

结论：$\forall xF(x)$

16. 给出一个解释 I，使得在 I 下，$\forall xF(x)\to\forall xG(x)$ 为真，而 $\forall x(F(x)\to G(x))$ 为假，从而说明 $\forall xF(x)\to\forall xG(x)\not\Leftrightarrow\forall x(F(x)\to G(x))$.

17. 有些人给出下述推理的证明如下.

前提：$\forall x(F(x)\to\neg G(x))$，$\forall x(H(x)\to G(x))$

结论：$\forall x(H(x)\to\neg F(x))$

证明：

① $\forall xH(x)$　　附加前提引入

② $H(x)$　　①$\forall-$

③ $\forall x(H(x)\to G(x))$　　前提引入

④ $H(x)\to G(x)$　　③$\forall-$

⑤ $G(x)$　　②④假言推理

⑥ $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$　　前提引入

⑦ $F(x)\to\neg G(x)$　　⑥$\forall-$

⑧ $\neg F(x)$　　⑤⑦拒取式

⑨ $\forall x\neg F(x)$　　⑧$\forall+$

试指出上述证明中的错误.

18. 给出上题推理的正确证明.

19. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

前提：$\exists xF(x)\to\forall xG(x)$

结论：$\forall x(F(x)\to G(x))$

20. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明（可以使用附加前提证明法）.

(1) 前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$

结论：$\forall xF(x)\to\forall xG(x)$

(2) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$

结论：$\neg\forall xF(x)\to\exists xG(x)$

21. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

没有白色的乌鸦. 北京鸭是白色的. 因此，北京鸭不是乌鸦.

22. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

(1) 偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.

(2) 凡大学生都是勤奋的. 王晓山不勤奋. 所以王晓山不是大学生.

23. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，证明下列推理.

(1) 每个有理数都是实数. 有的有理数是整数. 因此，有的实数是整数.

(2) 有理数和无理数都是实数. 虚数不是实数. 因此，虚数既不是有理数，也不是无理数.

24. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车. 每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车. 有的人不喜欢乘汽车. 所

以有的人不喜欢步行.（个体域为人类集合）

25. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中,构造下列推理的证明.

每个科学工作者都是刻苦钻研的,每个刻苦钻研而又聪明的人在他的事业中都将获得成功. 王大海是科学工作者,并且是聪明的. 所以王大海在他的事业中将获得成功.（个体域为人类集合）