矩阵的特征值与特征向量

作者 刘国华

东南大学 数学系

December 14, 2019

目录

矩阵的特征值与特征向量的历史

- 柯西(Augustin Louis Cauchy[法])：给出了特征方程的术语，证明了任意阶实对称矩阵都有实特征值给出了相似矩阵的概念，证明了相似矩阵有相同的特征值.
- 凯莱(Arthur Cayley[英])：方阵的特征方程和特征根(特征值)的一些结论.
- 克莱伯施(Rudolf Friedrich Alfred Clebsch[德])，布克海姆(A. Buchheim[德])等：证明了对称矩阵的特征根性质.
- 泰伯(H. Taber)：引入矩阵的迹的概念并给出了一些有关的结论.
- 约当(Marie Ennemond Camille Jordan[法])：矩阵化为标准型的问题.

相似矩阵

定义

设 A, B 都是 n 阶方阵，若有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，则称矩阵 A 与 B 相似。记为 $A \sim B$. P 为相似变换矩阵.

相似矩阵

定义

设 A, B 都是 n 阶方阵, 若有可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$, 则称矩阵 A 与 B 相似. 记为 $A \sim B$. P 为相似变换矩阵.

例

证明: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a & \lambda_0 \end{pmatrix}$ 相似.

注

1. 相似是等价关系的特例：相似必等价，反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性；传递性.)

注

1. 相似是等价关系的特例: 相似必等价, 反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性; 传递性.)

性质

1. 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

注

1. 相似是等价关系的特例: 相似必等价, 反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性; 传递性.)

性质

1. 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.
2. 设 $A \sim B$, f 是一个多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$.

注

1. 相似是等价关系的特例: 相似必等价, 反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性; 传递性.)

性质

1. 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.
2. 设 $A \sim B$, f 是一个多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$.
3. 若 $A \sim B$, 则 $|A| = |B|$.

注

1. 相似是等价关系的特例：相似必等价，反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性；传递性.)

性质

1. 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.
2. 设 $A \sim B$, f 是一个多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$.
3. 若 $A \sim B$, 则 $|A| = |B|$.
4. 若 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$.

定义

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义A 的迹：$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

定义

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义A 的迹：$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

性质

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;
- $tr(kA) = ktr(A)$;
- $tr(AB) = tr(BA)$.

性质

1. 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.
2. 设 $A \sim B$, f 是一个多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$.
3. 若 $A \sim B$, 则 $\mid A \mid = \mid B \mid$.
4. 若 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$.
5. 若 $A \sim B$, 则 $tr(A) = tr(B)$;

例

若矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, 和矩阵$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求x, y 的值.

请用10 秒钟计算

$$34+55+89+144+233+377+610+987+1597+2584=??$$

请用10 秒钟计算

$$34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 = ??$$

答案是6710.

请用10 秒钟计算

$$34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 = ??$$

答案是6710.

定义

若一个数列,前两项等于*1*,而从第三项起,每一项是其前两项之和,则称该数列为斐波那契数列.即：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$

请用10 秒钟计算

$$34+55+89+144+233+377+610+987+1597+2584=??$$

答案是6710.

定义

若一个数列,前两项等于*1*,而从第三项起,每一项是其前两项之和,则称该数列为斐波那契数列.即：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$

数学家发现：连续10个斐波那契数之和，必定等于第7个数的11 倍！所以上面式子的答案为$610 \times 11 = 6710$.

矩阵的特征值与特征向量

假设一对初生兔子要一个月才到成熟期，而一对成熟兔子每月会生一对(雌雄)兔子，那么，由一对初生兔子开始，12 个月后会有多少对兔子呢？

假设一对初生兔子要一个月才到成熟期，而一对成熟兔子每月会生一对(雌雄)兔子，那么，由一对初生兔子开始，12 个月后会有多少对兔子呢？

1月1对；(小)；
2月1对；(大)；
3月2对；(1小+1大)
4月3对；(1小+2大)
5月5对；(2小+3大)
6月8对；(3小+5大)
7月13对；(5小+8大)

1) 分析问题、抓住本质、简化。本质上有两类兔子：一类是能生殖的兔子，简称为大兔子；新生的兔子不能生殖，简称为小兔子；小兔子一个月就长成大兔子. 求的是大兔子与小兔子的总和.

2）深入观察发现规律①每月小兔对数=上个月大兔对数. ②每月大兔对数=上个月大兔对数+上个月小兔对数=上个月大兔对数+上上个月大兔对数=前两个月大兔对数之和.

特征值与特征向量的定义

1. 培养观察问题分析问题的能力

1月1对;	(1小);	2月1 对;	(1 大);
3月2对;	(1小+1大)	4月3 对;	(1 小+2 大)
5月5对;	(2小+3大)	6月8对;	(3 小+5 大)
7月13对;	(5小+8大)	8月21对;	(8 小+13 大)
9月34对;	(13小+21大)	10月55对;	(21 小+34 大)
11月89对;	(34小+55大)	12月144对;	(55小+89 大)
12月233对;	(89小+144大)		

即：二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

特征值与特征向量的定义

1. 培养观察问题分析问题的能力

1月1对;	(1小);	2月1 对;	(1 大);
3月2对;	(1小+1大)	4月3 对;	(1 小+2 大)
5月5对;	(2小+3大)	6月8对;	(3 小+5 大)
7月13对;	(5小+8大)	8月21对;	(8 小+13 大)
9月34对;	(13小+21大)	10月55对;	(21 小+34 大)
11月89对;	(34小+55大)	12月144对;	(55小+89 大)
12月233对;	(89小+144大)		

即：二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

2. 深入观察发现规律

I 每月小兔对数=上个月大兔对数.

II 每月大兔对数=上个月大兔对数+上个月小兔对数.

3. 深入研究问题

由二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots \text{ 可得:}$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

特征值与特征向量的定义

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

特征值与特征向量的定义

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

分析：

1. 若A 是对角阵，则易求A^k.
2. 若A 不是对角阵，怎么求A^k

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

分析：

1. 若A 是对角阵，则易求A^k.
2. 若A 不是对角阵，怎么求A^k
3. 若存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = \Lambda$, Λ 为对角阵，则易求得A^k. 此时称方阵A 可与对角阵此时称方阵A 可与对角阵Λ 相似.

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

分析：

1. 若A 是对角阵，则易求A^k.
2. 若A 不是对角阵，怎么求A^k
3. 若存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$, Λ 为对角阵，则易求得A^k. 此时称方阵A 可与对角阵此时称方阵A 可与对角阵Λ 相似.

问题：如何判断A 可与对角阵Λ 相似？当且仅当存在n 个线性无关的向量$p_1, p_2, \cdots, p_n$，使得

$$Ap_i = \lambda_i p_i.$$

特征值与特征向量的定义

定义

设 $A \in M_n$, 如果存在数 λ, 非零向量η 使得

$$A\eta = \lambda\eta,$$

则称数λ 为A 的一个**特征值**, 称向量η 为A 的属于λ 的**特征向量**.

特征值与特征向量的定义

定义

设 $A \in M_n$, 如果存在数 λ, 非零向量η 使得

$$A\eta = \lambda\eta,$$

则称数λ 为A 的一个**特征值**, 称向量η 为A 的属于λ 的**特征向量**.

这里有两点要注意:
(1) 特征向量α 一定是非零的向量, λ 可以为零.
(2) λ 必须是数, 否则数乘$\lambda\alpha$ 没有意义.

特征值存在的条件及基本性质

对于给定的方阵A, 它满足什么条件才有特征值呢?

性质

下列三个条件等价:
(1) A 有特征值λ;
(2) 以方阵$\lambda E - A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)x = 0$$

有非零解;
(3) n 阶行列式

$$|\lambda E - A| = 0.$$

特征值存在的条件及基本性质

对于给定的方阵A, 它满足什么条件才有特征值呢?

性质

下列三个条件等价:

(1) A 有特征值λ;

(2) 以方阵$\lambda E - A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)x = 0$$

有非零解;

(3) n 阶行列式

$$|\lambda E - A| = 0.$$

特征值存在的条件及基本性质

将行列式$|\lambda E - A|$展开, 得到一个变量为λ 的n 次多项式, 记为$f_A(\lambda)$, 即

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个多项式称为A 的 **特征多项式**, 方程称为矩阵A的 **特征方程**. 特征多项式的根即为A 的**特征值**.

特征值与特征向量的求法

由上述讨论可知A的特征值和特征向量可按如下步骤求得：
(1) 写出A的特征多项式，并求出根，即A的全部特征值.
(2) 对求得的每一特征值$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, s(\leq n))$，求齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

的基础解系，此即A的属于λ_i最大个数的线性无关的特征向量.
(3) 写出基础解系的一切非零的线性组合，即得属于特征值λ_i的全部特征向量.

特征值与特征向量的求法

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

特征值与特征向量的求法

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量.

例

证明

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

是关于λ 的n 次多项式, 并求λ^n, λ^{n-1} 的系数以及常数项.

例

证明

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

是关于λ 的n 次多项式，并求λ^n, λ^{n-1} 的系数以及常数项.

定理

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ (实数或复数，可重复)是n 阶方阵A 的n 个特征值，即$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ 则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\quad \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=detA.$$

定理

若 n 阶方阵 A 与 B 相似，则有相同的特征多项式和特征值.

定理

若 n 阶方阵 A 与 B 相似, 则有相同的特征多项式和特征值.

注: 特征多项式相同的矩阵未必相似.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 有相同的特征多项式和特征值, 但是不相似.

特征多项式相同是相似的必要而非充分的条件.

例

设λ 是方阵A 的特征值, α 是A 的属于λ 的特征向量, 证明:
(1) λ^2 是A^2 的特征值, 且 α 是A^2 的属于λ^2 的特征向量;
(2) 当A 可逆时, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, , $|A|\lambda^{-1}$ 是 A^* 的特征值, 且 α 是A^{-1}, A^* 对应的特征向量;
(3) $k\lambda$ 是kA 的特征值, 且 α 是kA 的属于$k\lambda$ 的特征向量;
(4) 设2 为A 的一个特征值, 求矩阵 $3A^2+2A-5E$ 的一个特征值;
(5) 设三阶矩阵A的特征值为$1,-2,3$, 求$|\ A^*+2A-3E\ |$;
(6) 设三阶矩阵 $E-A$, $E+A$, $2E-3A$ 都不可逆, 则$tr(A)=$? $|\ A\ |=$?

例

设λ 是方阵A 的特征值, α 是A 的属于λ 的特征向量, 证明:
(1) λ^2 是A^2 的特征值, 且 α 是A^2 的属于λ^2 的特征向量;
(2) 当A 可逆时, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, , $|A|\lambda^{-1}$ 是 A^* 的特征值, 且 α 是A^{-1}, A^* 对应的特征向量;
(3) $k\lambda$ 是kA 的特征值, 且 α 是kA 的属于$k\lambda$ 的特征向量;
(4) 设2 为A 的一个特征值, 求矩阵 $3A^2+2A-5E$ 的一个特征值;
(5) 设三阶矩阵A的特征值为$1,-2,3$, 求$|\ A^*+2A-3E\ |$;
(6) 设三阶矩阵 $E-A$, $E+A$, $2E-3A$ 都不可逆, 则$tr(A)=$? $|\ A\ |=$?

推论

1. 若λ 是A 的特征值, 则$\varphi(\lambda)$ 是$\varphi(A)$ 的特征值.
2. A 与A^{T} 有相同的特征多项式, 因此也有相同的特征值.
3. 方阵A 可逆的充要条件是A 的特征值均不为0.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

性质

矩阵A 的特征值全是$f(\lambda)=0$ 的根.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

性质

矩阵A 的特征值全是$f(\lambda)=0$ 的根.

注

A 的化零多项式的根未必都是A 的特征值.

A 的化零多项式的根$\supset$ A 的特征值.

A 的化零多项式的根是A 的所有可能的特征值.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

性质

矩阵A 的特征值全是$f(\lambda)=0$ 的根.

注

A 的化零多项式的根未必都是A 的特征值.
A 的化零多项式的根$\supset$ A 的特征值.
A 的化零多项式的根是A 的所有可能的特征值.

例

若$A^2=E$，求A 的所有可能的特征值.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵, 则称矩阵可以相似对角化, 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵, 则称矩阵可相似对角化, 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

定理

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵, 则称矩阵可以相似对角化, 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

定理

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

注

若 n 阶方阵 A 有少于 n 个线性无关的特征向量, 则 A 不与对角矩阵相似, 不是每个方阵都与对角矩阵相似.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵, 则称矩阵可以相似对角化, 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

定理

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

注

若 n 阶方阵 A 有少于 n 个线性无关的特征向量, 则 A 不与对角矩阵相似, 不是每个方阵都与对角矩阵相似.

问题的提出：如何判断 A 是否有 n 个线性无关的特征向量？

定理

假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关.

定理

假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关.

推论

若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，则 A 与对角矩阵相似.

定理

假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关.

推论

若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，则 A 与对角矩阵相似.

定理

假设 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互不相同的特征值，$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{it_i}$ 是 A 的对应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，则向量组

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{2t_2}, \cdots, \eta_{s1}, \eta_{s2}, \cdots, \eta_{st_s}$$

线性无关.

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似
$\Leftrightarrow$ A 的每个n_i 重特征值 i 有 n_i 个线性无关的特征向量,
即 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$, $n = 1, \cdots, t$, 其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$
$\Leftrightarrow$ λ_i 的代数重数等于几何重数, $\forall\ \lambda_i$.

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似
$\Leftrightarrow$ A 的每个n_i 重特征值 i 有 n_i 个线性无关的特征向量,
即 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$, $n = 1, \cdots, t$, 其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$
$\Leftrightarrow$ λ_i 的代数重数等于几何重数, $\forall\ \lambda_i$.

例

若 $A = \begin{pmatrix} 2 & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ 相似于对角阵, 求 b, c, x, y, z.

相似对角化问题解题步骤

- 求特征值, 即所有$|\lambda E - A| = 0$ 的根.
- 判断有无重根, 若没有重根, 则可相似对角化, 对每一个特征值求出相应的特征向量, 并按顺序写成矩阵, 则有$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

相似对角化问题解题步骤

- 求特征值, 即所有$|\lambda E-A|=0$ 的根.
- 判断有无重根, 若没有重根, 则可相似对角化, 对每一个特征值求出相应的特征向量, 并按顺序写成矩阵, 则有$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.
- 判断有无重根, 若有重根, 则验证 $r(\lambda E-A)$ 与$n-n_i$ 是否相等, 若不等, 则不可相似对角化; 若相等, 则求出特征向量, 即可.
- 特征向量要与特征值的顺序相对应.

例

若 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 并求A^k.

Remark

1. 相似是等价的特例：相似必等价,反之不然.
2. 相似是一等价关系,不变量为特征值,迹,行列式,秩.
   注：不变量都只是必要条件，而非充要条件.
3. 相似对角化下的最简形为对角阵.
4. 相似则特征多项式相同，但反之不然.
5. 若A, B 都可相似对角化，且特征多项式相同，则A, B 相似吗？
6. $A \sim B$，则对于任意多项式 $f(x)$ 有 $f(A) \sim f(B)$. $tr(f(A)) = tr(f(B)), |f(A)| = |f(B)|, r(f(A)) = r(f(B))$.
7. $A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
8. A 属于不同特征值的线性无关的特征向量仍线性无关.

求斐波那契数列的通项

由二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

由$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可得$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

由$\lambda_2 E - A = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可得$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

所以有$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$,

使得$P^{-1}AP = \Lambda$.

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\1&-1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix},$$

$P^{-1}AP=\Lambda.$

$$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=P\Lambda^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}-1&\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\\-1&\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}$$

因此

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

$P^{-1}AP = \Lambda.$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = P\Lambda^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$$

因此

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

一个正整数序列的通项,竟然可以用带有无理数的式子表达.

斐波那契数列与黄金分割

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

$$\{\frac{F_n}{F_{n-1}}\}\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\cdots \to \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339.$$

斐波那契数列与黄金分割

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

$$\left\{\frac{F_n}{F_{n-1}}\right\}\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\cdots \to \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339.$$

“黄金分割”比喻这一“分割”如黄金一样珍贵。黄金比是工艺美术、建筑、摄影等艺术门类中审美的因素之一。认为它表现了恰到好处的“合谐”。

斐波那契数列与黄金分割

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

$$\left\{\frac{F_n}{F_{n-1}}\right\}\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\cdots \to \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339.$$

“黄金分割”比喻这一“分割”如黄金一样珍贵。黄金比是工艺美术、建筑、摄影等艺术门类中审美的因素之一。认为它表现了恰到好处的“合谐”。

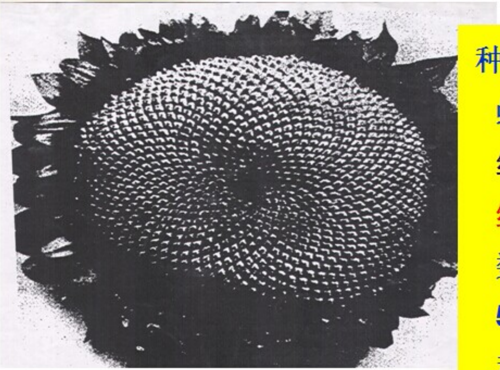
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \cdots \approx 1.618$$

称为第二黄金比.

生活中的斐波那契数

生活中的斐波那契数

向日葵花盘内葵花子排列的螺线数

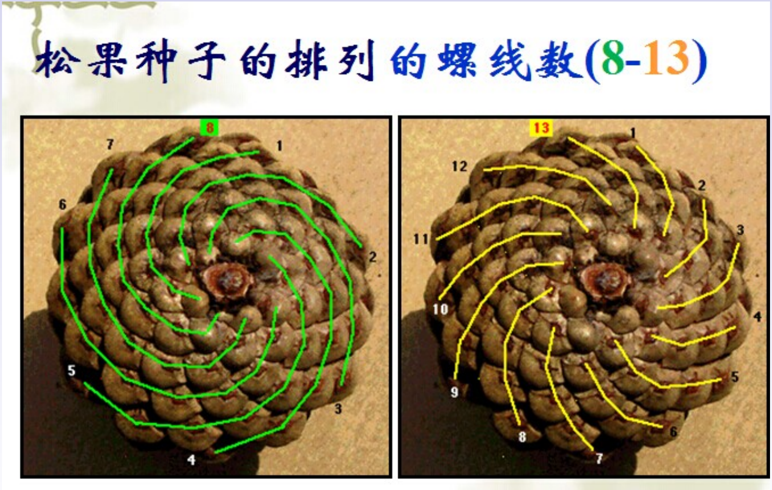


种子按顺、逆时针的螺线排列，两组螺线的条数往往成**相继**的两个斐波那契数，一般是**34**和**55**; **89**和**144**; **144**和**233**条螺线。

生活中的斐波那契数


菜花表面排列的螺线数（5-8）
植物生长的动力学特性造成的：相邻器官原基之间的夹角是黄金角——137.50776度；这使种子的堆集效率达到最高。

生活中的斐波那契数



复矩阵的共轭矩阵

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$, 则称$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵的性质:

- $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$;
- $\overline{A^T}=(\overline{A})^T$;
- $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

复矩阵的共轭矩阵

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$, 则称 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵的性质:

- $\overline{kA}=\overline{k}\overline{A}$;
- $\overline{A^T}=(\overline{A})^T$;
- $\overline{AB}=\overline{A}\overline{B}$.

实对称: $\overline{A}=A,\ A^T=A\Rightarrow\overline{A}^T=A$.

实对称矩阵的性质

性质

实对称矩阵的特征值都是实数.

实对称矩阵的性质

性质

实对称矩阵的特征值都是实数.

若矩阵 A 满足 $\overline{A}^T = A$, $A\eta = \lambda\eta$, 则有

- $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $(\lambda E - A)x = 0$ 有实的基础解系;
- A 对应于 λ 有实的特征向量.

实对称矩阵的性质

性质

实对称矩阵的特征值都是实数.

若矩阵 A 满足 $\overline{A}^T = A$, $A\eta = \lambda\eta$, 则有

- $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $(\lambda E - A)x = 0$ 有实的基础解系;
- A 对应于 λ 有实的特征向量.

性质

实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交.

实对称矩阵的正交相似对角化

定理

对于任意 n 阶实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q，使得$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值，$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 的列向量组是 A 的对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量组.

实对称矩阵的正交相似对角化

定理

对于任意 n 阶实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q，使得$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值，$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 的列向量组是 A 的对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量组.

推论

n 阶实对称矩阵 A 的 n_i 重特征值都有 n_i 个线性无关的特征向量，再由$Schmit$正交化方法知，必有 n_i 个标准正交的特征向量.

实对称矩阵的正交相似对角化

- 求$|\lambda E - A|$的根，得到所有的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s$.
- 对每一个特征值λ_p，求$(\lambda_i E - A)x = 0$的一个非零解η_i，由正交性求得正交的特征向量组$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{it_i}$.
- 将$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{it_i}$单位化得标准正交特征向量组$\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \cdots$
- 令$Q = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{1t_1}, \cdots, \gamma_{s1}, \gamma_{s2}, \cdots, \gamma_{st_s})$.
- $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_s, \cdots, \lambda_s)$.

则得到

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda.$$

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

把 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda=10$ 的特征向量, 求 A.

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3 = (1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda = 10$ 的特征向量, 求 A.

若已知 $\alpha_1 = (2,1,2)^T$ 是对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量, 能否唯一求出 A 呢?

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda=10$ 的特征向量, 求 A.

若已知 $\alpha_1=(2,1,2)^T$ 是对应于 $\lambda=1$ 的特征向量, 能否唯一求出 A 呢?

例

若 A,B 是实对称阵, $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, A, B 是否相似? 是否正交相似?

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3 = (1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda = 10$ 的特征向量, 求 A.

若已知 $\alpha_1 = (2,1,2)^T$ 是对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量, 能否唯一求出 A 呢?

例

若 A, B 是实对称阵, $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, A, B 是否相似? 是否正交相似? 若 A, B 是一般实方阵呢?

例

设 $\alpha \neq 0, \alpha \in R^n$, 求 $A = \alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量.

矩阵的特征值与特征向量

作者 刘国华

目录

相似矩阵

特征值与特征向量

矩阵可相似对角化的条件

实对称矩阵的相似对角化

Jordan 标准形

法一：不妨设$a_1\neq 0$, 则$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} a_1^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2-\lambda & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2-\lambda \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_1^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ \frac{a_2}{a_1}\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_i^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0\lambda & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$-\lambda^{n-1}(\alpha^T\alpha-\lambda)$, 所以$A$ 的全部特征值为$0(n-1)$ 重, $\alpha^T\alpha$.

求 $A=\alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量

法二：

$A^2=\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha^T\alpha A$，所以$A$ 的所有可能的特征值满足$\lambda^2-(\alpha^T\alpha)\lambda=0$，所以$A$ 的所有可能的特征值是0，$\alpha^T\alpha$，

又$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$，因此

$$tr(A)=\sum a_i^2=\alpha^T\alpha=\alpha^T\alpha+0+\cdots+0.$$

所以A 的全部特征值为$0(n-1)$ 重，$\alpha^T\alpha$.

求 $A=\alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量

法三：

因为$A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$，显然 $r(A)=r(\alpha\alpha^T)=1$，且$A^T=(\alpha\alpha^T)^T=(\alpha\alpha^T)=A$，所以实对称矩阵$A$ 可正交相似对角化，及存在正交矩阵Q 和对角阵$\Lambda,\mu\neq 0$ 使得$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix} \mu & & & \\ & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，且$\mu=tr\Lambda=trA=\sum a_i^2=\alpha^T\alpha$. 所以$A$ 的全部特征值为$0(n-1)$ 重，$\alpha^T\alpha$.

Cayley-Hamilton 定理和极小多项式

定理 (Cayley-Hamilton 定理)

设 A 是n 阶方阵, $f(\lambda) = |\lambda E_n - A|$, 则 $f(A) = 0$.

例

已知$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $f(\lambda)=2\lambda^4+3\lambda^3-3\lambda+1$，求$f(A)$.

例

已知$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}, f(\lambda)=2\lambda^4+3\lambda^3-3\lambda+1$，求$f(A)$.

例

已知$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$，求$A^{100}$.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

注

A 的化零多项式的根未必都是A 的特征值.
A 的化零多项式的根$\supset$ A 的特征值.
A 的化零多项式的根是A 的所有可能的特征值.

定理 (Cayley-Hamilton 定理)

设 A 是n 阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda E_n - A|$，则 $f(A)=0$.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

注

A 的化零多项式的根未必都是A 的特征值.

A 的化零多项式的根$\supset$ A 的特征值.

A 的化零多项式的根是A 的所有可能的特征值.

定理 (Cayley-Hamilton 定理)

设 A 是n 阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda E_n - A|$，则 $f(A)=0$.

所以 $|\lambda E_n - A|$ 是 A 的化零多项式，这样的多项式还有很多，这其中次数最低（为方便计，一般还要求首一）的多项式称为 A 的**最小多项式**.

定义

假设A 是方阵，$m(\lambda)$ 是多项式，若 $m(\lambda)$ 是方阵A 的次数最低、首项系数为*1*的化零多项式，则称 $m(\lambda)$ 为A 的最小多项式.

性质

定义

假设A 是方阵，$m(\lambda)$ 是多项式，若 $m(\lambda)$ 是方阵A 的次数最低、首项系数为*1*的化零多项式，则称 $m(\lambda)$ 为A 的最小多项式.

性质

- 方阵 A 的最小多项式是唯一的;
- 如果 $m(x)$ 是域 K 上方阵 A的最小多项式，且 $f(x) \in K[x]$，$f(A) = 0$，则 $m(x) \mid f(x)$;
- 方阵 A 的最小多项式 $m(x) \mid |xI_n - A|$.
- 如果矩阵 A, B 相似，则 A, B有相同的最小多项式.

例

- 数量阵 aE 的最小多项式为 $\lambda - a$; 反之, 若 A 的最小多项式是为 $\lambda - a$, 则 $A = aE$;
- $\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$ 的最小多项式为 $(\lambda - a)^2$;
- $\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$ 的最小多项式在$a \neq b$时为$(\lambda - a)^2(\lambda - b)$, 在 $a = b$ 时为 $(\lambda - a)^2$.

最小多项式的根集包含所有特征值, 所以有如下性质:

定理

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 为 A 的所有互异的特征值, $m(x)$为 A 的最小多项式, 则

$$(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k) \mid m(x) \mid \det(xI_n - A).$$

最小多项式的根集包含所有特征值, 所以有如下性质:

定理

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 为 A 的所有互异的特征值, $m(x)$为 A 的最小多项式, 则

$$(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k) \mid m(x) \mid \det(xI_n - A).$$

定理

n 阶矩阵 A 相似于对角阵当且仅当 A 的最小多项式无重根.

Jordan形矩阵

定义

1. 形如$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$的矩阵称为$Jordan$块
2. 形如$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$(其中，$J_i$均是$Jordan$块)的矩阵称为$Jordan$形矩阵.

Jordan形矩阵

定义

1. 形如$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$的矩阵称为$Jordan$块
2. 形如$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$(其中，$J_i$均是$Jordan$块)的矩阵称为$Jordan$形矩阵.

注

若矩阵A与$Jordan$形矩阵J相似，则称J是A的标准形.

例

下列矩阵是否为$Jordan$形矩阵?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例

$Jordan$ 块 $\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ 是幂零矩阵.

Jordan标准形的存在性、唯一性

若$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的Jordan标准形,

设 $K=\begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_s} \end{pmatrix}$, 其中, $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_s}$是$J_1, J_2, \cdots$

一个排列, 则K 也是A的Jordan标准形,

Jordan标准形的存在性、唯一性

若$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的Jordan标准形,

设 $K=\begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_s} \end{pmatrix}$, 其中, $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_s}$是$J_1, J_2, \cdots$一个排列, 则$K$ 也是A的Jordan标准形,除了相差Jordan块的次序外, 有下面重要定理

定理 (矩阵的Jordan标准形是存在的、唯一的)

设矩阵A 是任意的n 阶复矩阵, 则存在可你的n 阶复矩阵C, 使得$C^{-1}AC = J$ 为*Jordan* 形矩阵. 若不计*Jordan*块的次序, 则A 的*Jordan*标准形是唯一的.

定理 (矩阵的Jordan标准形是存在的、唯一的)

设矩阵A 是任意的n 阶复矩阵，则存在可你的n 阶复矩阵C，使得$C^{-1}AC = J$ 为$Jordan$ 形矩阵．若不计$Jordan$块的次序，则A 的$Jordan$标准形是唯一的．

定理

设A, B 为n阶复矩阵，则A 与B 相似的充要条件是A 与B 有相同的$Jordan$标准形．

例

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$, 且$r(2E-A)=4$,求$A$的$Jordan$标准形.

例

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$, 且$r(2E-A)=4, r(2E-A)^2=3$,求$A$的$Jordan$标准形.

例

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$, 且$r(E-A)=5, r(2E-A)=4, r(2E-A)^2=3$,求$A$的$Jordan$标准形.

例

求下列矩阵的Jordan标准形：

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, C_A(x) = (x-1)^3.$$

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, C_B(x) = (x+3)(x-1)^2$$