教材上的两个说明

一、若 $AB=\bar{A}\bar{B}$，证明 A、B 相互对立。

证明：令 $AB=C, A\bigcup B=D$，则 $C=\bar{D},\bar{C}=D$

$$AB=AB(A\bigcup B)=C\bar{C}=\phi$$

$$A\bigcup B=AB\bigcup(A\bigcup B)=C\bigcup\bar{C}=\Omega$$

所以 A、B 相互对立。

二、把编号为 1,2,…,n 的 n 个球放到编号为 1,2,…,n 的 n 个盒子中，每个盒子放一个球。求球和盒子的号码都不相同的概率。

解：令 A_i 表示第 i 号球放入第 i 号盒子中，i=1,2,…,n，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i)=P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$$
$$=1-\left[\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)\right]$$

其中 $P(A_i)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n},P(A_iA_j)=\dfrac{(n-2)!}{n!},\cdots,P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\dfrac{1}{n!}$

所以 $P(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i)=1-\left[1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}\right]$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

这个结果，当 $n\to\infty$ 时，极限为 e^{-1}。

第一章部分习题

关于古典概率模型的题目，我们课上要求很低，大家如果感兴趣可以自己讨论。

11、mn 个球的全排列是(mn)!,因为红球是不计先后顺序的,所以实际的排列数是(mn)!/(mn-2)!同理，n 个小球的全排列是 n!，黑白小球在 n 个球内，可能的排列数是 n!/(n-2)!。因为有 m 个盒子，黑白小球同在一个盒子的情况有 m 种，所以总的概率为 P=m*[n!/(n-2)!]/[(mn)!/(mn-2)!]=(n-1)/(mn-1)

还可以有另一种考虑：mn 个球依次取出，黑球可能的位置为 mn 个，白球的可能位置为 mn－1 个，总排列数是 mn（mn－1）个。如果黑白两球在同一个盒子里，可能的排列数为 n （n－1）个，有 m 个盒子，总的排列数为 mn（n－1）个。所以概率为 mn（n－1）/mn（mn－1）＝（n－1）/（mn－1）

和抽签公平性的第四种解法类似，该题等价于随机地把 m*n 个球依次排列（例如第一个袋子中的 n 个球排在最初的 n 个位置上，接下来的 n 个位置排第二个袋子中的 n 个球等等），我们只观察黑球和白球的位置。设黑球已先放好，则白球有 mn-1 个位置，要白球和黑球放在同一个袋子里，只有 n-1 个位置可以放，所以所求概率为 $P(A)=\dfrac{n-1}{mn-1}$

15、错误的结果：$P(A)=\dfrac{C_n^k n! n^{k-n}}{n^k}$

出现这种错误的原因还是没有把样本空间的构成搞清楚。k 个不同的球随机的放到 n 各盒子中，球在 n 个盒子中的一种分布（放法）构成一个基本事件，与球放入盒子中的先后次序是无关的。
譬如，有 a,b,c 三个球随机的放到 1 号，2 号两个盒子，如果先从 a,b,c 三个球中取 2 个球放到 2 个盒子中，每个盒子放一个球，若取出的是 a,b 两个球，可以放成如下情况

a	b

剩下一个球 c 随机放入两个盒子中可能会放在 1 号盒子中，即出现下面的放法(*)

a　c	b

但是，若取出的是 c,b 两个球放入盒子宏，每个盒子放一个球，也可以放成如下情况

c	b

剩下一个球 a 随机放入两个盒子中当然也可能会房子 1 号盒子中，即出现下面的情况(＊＊)

c　a	b

(*)和(＊＊)是同一种放法，即同一个基本事件，但是在上述揭发中计算事件 A“每个盒子至少一个球”含有的基本事件数时却把他们看成了 2 个不同的基本事件，从而造成错误。

正确的解法：令 A_i 表示：没有一位旅客进去第 i 节车厢，i=1,2,…,n，则所求概率为

$$P(A)=P(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i)=P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$$

$$=1-\left[\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)\right]$$

$$=1-\left[C_n^1(1-\frac{1}{n})^k-C_n^2(1-\frac{2}{n})^k+\cdots+(-1)^{n-2}C_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k+0\right]$$

35、设 A_k 表示“在 k 此独立实验中事件 A 出现偶数次”这一随机事件，$p_k=P(A_k)$，则

$p_0=1$，对 k=1,2,$\cdots$，由全概率公式有

$$p_{k+1}=P(A_{k+1})=P(A_k)P(A_{k+1}\mid A_k)+P(\bar{A}_k)P(A_{k+1}\mid \bar{A}_k)$$

$$= p_k q + (1 - p_k) p = p + (q - p) p_k; \quad k = 1, 2, \cdots$$

由此递推公式得到

$$\begin{aligned} p_n &= p + p(q-p) + p(q-p)^2 + \cdots + (q-p)^{n-1}[p + (q-p)p_0] \\ &= p + p(q-p) + p(q-p)^2 + \cdots + p(q-p)^{n-1} + (q-p)^n \\ &= p\frac{1-(q-p)^n}{1-(q-p)} + (q-p)^n = \frac{1}{2}[1 + (q-p)^n] \end{aligned}$$

40、设 A_1 表示前两回射击甲胜，A_2 表示前两回甲乙各胜一回，A_3 表示前两回射击乙胜；B 表示甲最终获胜。由全概率公式：

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) \\ &= \alpha^2 \times 1 + 2\alpha\beta \times P(B) + \beta^2 \times 0 \end{aligned}$$

所以 $P(B) = \dfrac{\alpha^2}{1 - 2\alpha\beta}$.