实验四　定积分的近似计算

东南大学

求函数的积分

积分主要包括不定积分、定积分。在 **Mathematica** 中，积分主要通过命令“**Integrate**”来完成，主要操作格式见下表：

函数名称	函数功能说明
Integrate[f,x]	计算不定积分$\int f(x)dx$
Integrate[f,x,y]	计算不定积分$\int dx\int f(x)dy$
Integrate[f,{xmin,xmax}]	计算定积分$\int_{x\min}^{x\max} f(x)dx$
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]	计算定积分的近似值

注意：对于分段函数或分区域函数，不能求其积分的精确值，但可求近似值，即再用“**N**”命令或用“**NIntegrate**”命令；可以通过基本输入模版来输入积分命令。

定积分的近似计算

我们已经学习了定积分的基本概念和定积分的计算方法，那里所谓的计算方法，是基于原函数的牛顿-莱布尼兹公式。

但在许多实际问题中遇到的定积分，被积函数往往不用算式给出，而通过图形或表格给出；或虽然可用一个算式给出，但是要计算它的原函数却很困难，甚至于原函数可能是非初等函数。

本实验的目的，就是为了解决这些问题，介绍定积分的“数值积分”，即定积分的近似计算。

所谓定积分的近似计算，就是找到一个适当的计算公式，利用被积函数在积分区间上若干个点处的函数值，来计算定积分的近似值，并作出误差估计。

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积。

定积分近似计算的思想，就是将积分区间分割成许多小区间，然后在小区间上近似计算小曲边梯形的面积，最后将小曲边梯形的面积求和，就得到了定积分的近似值。

1、 观察黎曼和式的收敛性

由定积分的定义知道，定积分就是黎曼和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限，

因此可以用黎曼和式来近似计算定积分。

为计算方便，在这里，将积分区间等分为 n 段，并以小区间中点处的函数值作近似，于是黎曼和式为：

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+((k-1)+0.5)\frac{b-a}{n})$$

从而： $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+((k-1)+0.5)\frac{b-a}{n})$$

——此公式称为中点积分公式

例1　计算$\int_2^3 \frac{1}{\ln x}dx$ 的黎曼和。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+((k-1)+0.5)\frac{b-a}{n})$$

输入如下命令：

```
In[1]:= f[x_] := 1 / Log[x]; a = 2; b = 3; n = 200;
        s = NSum[f[a + ((k - 1) + 0.5) (b - a)/n] * (b - a)/n, {k, 1, n}]
```

上述命令是将区间[2, 3]等分为 200 段来计算的。

运行求得黎曼和为：1.11842。

2、梯形法

黎曼和式进行的近似计算，是对小曲边梯形的面积用矩形面积来近似。

如果不用矩形而改用梯形来近似,就可以得到定积分的一个较好的近似方法——梯形积分法。 具体方法如下:

（1）将区间$[a,b]$用$a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$等分为 n 个小区间，小区间的长度为$\dfrac{b-a}{n}$ 。

（2）设$y_i=f(x_i)=f(a+i\dfrac{b-a}{n})$ $(i=0,1,\cdots,n)$，则每个小梯形的面积为:

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n}=\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

（2）设 $y_i = f(x_i) = f(a + i\dfrac{b-a}{n})\ (i = 0,1,\cdots,n)$，则每个小梯形的面积为：

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n}=\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

（3）从而梯形法的公式为：

$$\int_a^b f(x)dx \approx [\frac{1}{2}(y_0+y_1)+\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)]\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\Lambda+y_{n-1}]$$

$$=\frac{b-a}{n}[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})]$$

（4）估计梯形法的误差：

第 i 个小曲边梯形的面积为 $\Delta A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$

作变换 $x = x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}) = x_{i-1} + \frac{b-a}{n}t$

$$\Delta A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^1 f(x_{i-1} + \frac{b-a}{n}t) \cdot \frac{b-a}{n}dt$$

当 $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，利用分部积分法可以证明：

$$\Delta A_i = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{(b-a)^3}{2n^3}\int_0^1 t(1-t)f''(x_{i-1} + \frac{b-a}{n}t)dt$$

第 i 个小曲边梯形的面积为

$$\Delta A_i = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i-1})+f(x_i)] - \frac{(b-a)^3}{2n^3}\int_0^1 t(1-t)f''(x_{i-1}+\frac{b-a}{n}t)dt$$

第 i 个小梯形的面积为：$\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$

设 M_2 为 $|f''(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值，则第 i 个小曲边梯形与相应的梯形面积之差的绝对值估计如下：

$$|\Delta A_i - \frac{b-a}{2n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]| = \frac{(b-a)^3}{2n^3}\left|\int_0^1 t(1-t)f''(x_{i-1}+\frac{b-a}{n}t)dt\right|$$

$$\le \frac{(b-a)^3}{2n^3}\int_0^1 t(1-t)|f''(x_{i-1}+\frac{b-a}{n}t)|dt \le \frac{(b-a)^3}{2n^3}\cdot M_2\int_0^1 t(1-t)|dt$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12n^3}M_2$$

于是，梯形公式的绝对误差为：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)^3}{12n^3}M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$$

梯形积分法公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

绝对值误差为：

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$$

例 2 用梯形法近似计算$\int_2^3 \frac{1}{\ln x}dx$，要求误差不超过$10^{-5}$。

解：设 $f(x)=\frac{1}{\ln x}$，则 $f''(x)=\frac{2}{x^2(\ln x)^3}+\frac{1}{x^2(\ln x)^2}$，显然 $f''(x)$ 在区间$[2,3]$上的最大值为$M_2=f''(2)$。

```
In[3]:= f[x_] := 1 / Log[x];
        a = 2; b = 3; m2 = N[f''[2]]; dalta = 10^(-5); n0 = 100;
        t[n_] :=
          (b - a)/n * ((f[a] + f[b])/2 + Sum[f[a + i * (b - a)/n], {i, 1, n - 1}]);
        Do[Print[n, "        ", N[t[n], 8]];
         If[(b - a)^3/(12 n^2) * m2 < dalta, Break[],
          If[n == n0, Print["fail"]]], {n, n0}]
```

从运行结果看，循环到 100 次结束，最后输出“fail”，这表明没有达到精度要求，如把 n0 的值改为 200，再次运行，发现循环到 n=130 时结束，此时达到精度要求，积分的近似值为：1.1184326。

3、抛物线法

梯形法的近似过程是在每个小区间中用直线段来近似被积函数段，即逐段地用线性函数来近似被积函数。

为了进一步提高精确度，可以考虑在小范围内用二次函数来近似被积函数，这种方法称为抛物线法，也称为辛普森（Simpson）法。

具体方法如下：

（1）将区间$[a,b]$用$a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$等分为n个小区间，小区间的长度为$\frac{b-a}{n}$。

各分点对应的函数值为$y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$，即$y_i=f(x_i)=f(a+i\frac{b-a}{n})$。

（2）一平面上三点可以确定一条抛物线 $y=px^2+qx+r$，而相邻的两个小区间上经过曲线上的三个点，则由这三点做抛物线（因此抛物线法必须将区间等分为偶数个小区间），把这些抛物线构成的曲边梯形的面积相加，就得到了所求定积分的近似值。

首先，计算在区间 $[x_0,x_2]$ 上以抛物线为曲边的曲边梯形面积。

由于在区间 $[-h,h]$ 上，以过 $(-h,y_0),(0,y_1),(h,y_2)$ 三点的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 为曲边的曲边梯形面积 S 为：

$$S=\int_{-h}^{h}(px^2+qx+r)dx=2\int_0^h(px^2+r)dx=\frac{2}{3}ph^3+2rh$$

$$\because y_0=ph^2-qh+r,\ y_1=r,\ y_2=ph^2+qh+r \quad \therefore ph^2=y_0+y_2-2y_1$$

故 $S=\frac{1}{3}\left(2ph^3+6rh\right)=\frac{1}{3}h(2ph^2+6r)=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2)$

取 $h=\dfrac{b-a}{n}$，则上面所求的 S 等于区间 $[x_0,x_2]$ 上以抛物线为曲边的曲边梯形的面积，设为 S_1，则 $S_1=\dfrac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2)$

同理可得，区间 $[x_2,x_4],[x_4,x_6],\cdots,[x_{n-2},x_n]$ 上以抛物线为曲边的曲边梯形的面积依次为：$S_2=\dfrac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4)$

$S_3=\dfrac{1}{3}h(y_4+4y_5+y_6)$　……　$S_{\frac{n}{2}}=\dfrac{1}{3}h(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$

于是，$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}S_n$

$$=\frac{b-a}{3n}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\Lambda+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\Lambda+y_{n-2})]$$

$$=\frac{b-a}{6k}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{k}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{k-1}f(x_{2i})]\qquad(\text{设 } n=2k)$$

故抛物线法的公式为：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6k}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i})]$$

（3）抛物线法的绝对误差可以证明为 $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M_4$

其中 M_4 是 $|f^{(4)}(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值。

例 3 用抛物线法近似计算 $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}dx$，要求误差不超过 10^{-5}。

解：设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$，可由命令 D[f[x], {x, 4}]得到 $f(x)$ 的四阶导函数为：$f^{(4)}(x)=\dfrac{24}{x^4(\ln x)^5}+\dfrac{36}{x^4(\ln x)^4}+\dfrac{22}{x^4(\ln x)^3}+\dfrac{6}{x^4(\ln x)^2}$，显然 $f^{(4)}(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 $M_4=f^{(4)}(2)$。

```
f[x_] := 1 / Log[x];
a = 2; b = 3; m4 = D[f[x], {x, 4}] /. x → 2; delta = 10^(-5);
k0 = 100;
p[k_] :=
  (b - a)/(6 k) * (f[a] + f[b] + 2 Sum[f[a + i * (b - a)/(2 k)], {i, 2, 2 k - 2, 2}] +
      4 Sum[f[a + i * (b - a)/(2 k)], {i, 1, 2 k - 1, 2}]);
Do[Print[k, "      ", N[p[k]]];
  If[(b - a)^5/(180 * (2 k)^4) * m4 < delta, Break[],
   If[k == n0, Print["fail"]]], {k, k0}]
```

从运行结果看，循环到 $k=6$ 时因达到精度要求结束循环，并得到积分的近似值为：1.1184263。

从例 2、例 3 可以看出，抛物线法比梯形法收敛的要快，这与实际情况也是相符的。