实验三　泰勒公式与函数逼近

东南大学

一个函数 $f(x)$ 若在点 x_0 的邻域内足够光滑，则在该邻域内有泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left(|x-x_0|^n\right)$$

当 $|x-x_0|$ 很小时，有 $f(x)\approx f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$，其中，

$T(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒多项式；$o\left(|x-x_0|^n\right)$ 为余项。

下面我们利用 **Mathematica** 计算函数 $f(x)$ 的各阶泰勒多项式，并通过绘制曲线图形，来进一步掌握泰勒展开与函数逼近的思想。

泰勒公式的格式为：

`Series[expr,{x,x0,n}]`（表示在 **x0** 点求，阶数为 **n**），

求函数的泰勒多项式格式为：

`Normal[Series[expr,{x,x0,n}]]`

注意：对泰勒多项式作图时可使用“**Evaluate**”命令把它转化为可运算的。

例 1 （泰勒公式的误差）利用泰勒多项式近似计算 e^x。

若 $|x|<1$，要求误差 $|R_n|<0.005$。

解：我们根据拉格朗日余项 $|R_n|=|\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}|<\frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{3}{(n+1)!}$ 可得，欲使 $|R_n|<0.005$，只要取 $n=5$ 即可。

下面的 Mathematica 语句利用函数 e^x 的 5 阶泰勒多项式来近似计算 e^{d0} 的值，并判断误差：

```
In[1]:= d0 = -1;
        While[d0 ≤ 1,
         a = N[Normal[Series[Exp[x], {x, 0, 6}]]] /. x → d0;
         Print[d0, "        ", a, "        ", N[Exp[d0]],
          "          ", N[Exp[d0]] - a]; d0 += 0.4]
```

输出结果为:

-1	0.368056	0.367879	-0.000176114
-0.6	0.548817	0.548812	-5.16391×10^{-6}
-0.2	0.818731	0.818731	-2.47757×10^{-9}
0.2	1.2214	1.2214	2.60461×10^{-9}
0.6	1.82211	1.82212	6.00039×10^{-6}
1.	2.71806	2.71828	0.000226273

输出结果每一行的最后一项表示误差，从结果中可以看出，当 $|x|<1$，其误差$|R_n|<0.005$。

例 2 （观察阶数 n 对误差的影响）利用函数 e^x 的 n 阶多项式计算 e 的值，并求误差。（n=5,6,7,8,9,10）

解：为此，输入 Mathematica 语言如下：

```
In[3]:= n = 5;
        While[n ≤ 10,
         a = N[Normal[Series[Exp[x], {x, 0, n}]] /. x → 1,
           17]; Print[n, "   ", a, "    ", N[Exp[1], 17],
          "    ", Exp[1] - a]; n += 1]
```

输出结果为：

5 2.716666666666667

2.718281828459452 0.001615161792378

6 2.718055555555556

2.718281828459452 0.000226272903489

7 2.718253968253968

2.718281828459452 0.000027860205077

8 2.718278769841269

2.718281828459452 $3.0586177754\times10^{-6}$

9 2.718281525573192

2.718281828459452 3.028858530×10^{-7}

10 2.718281801146384

2.718281828459452 2.73126608×10^{-8}

从结果中可知，阶数越高，误差越小。

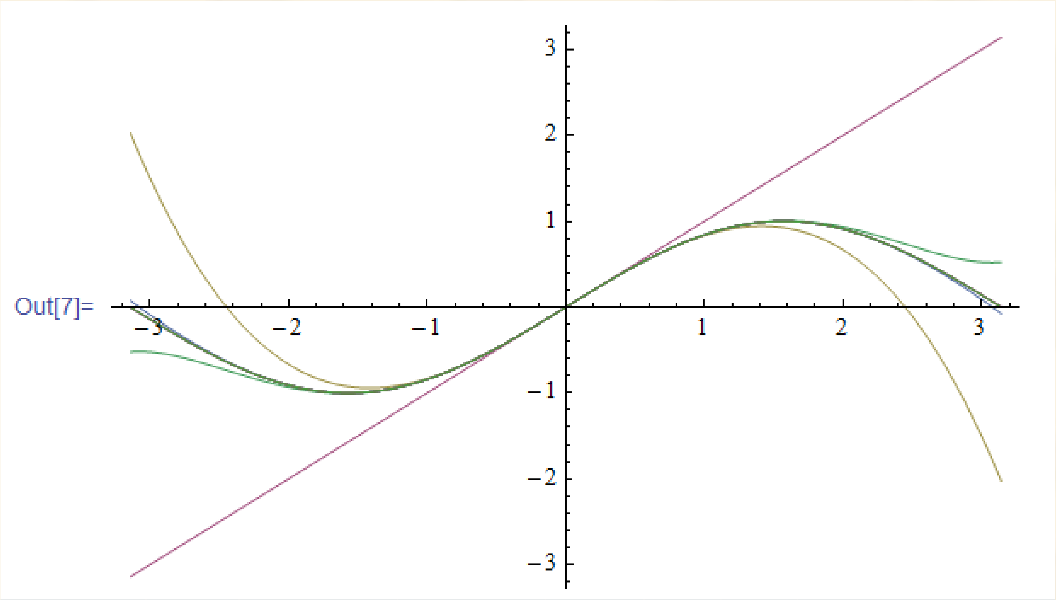
例 3（根据图形观察泰勒展开的误差）观察 $f(x)=\sin x$ 的各阶泰勒展开的图形。

解：（1）固定 $x_0=0$，观察阶数 n 的影响。

因为 $f(x)=\sin x$ 在 $x_0=0$ 处的偶数阶导数为零，所以首先在同一坐标系内显示函数 $f(x)=\sin x$ 及它的 $n(n=1,3,5,\Lambda\ ,13)$ 阶泰勒多项式的图形。故输入命令如下：

```
In[5]:= t = Table[Normal[Series[Sin[x], {x, 0, i}]],
            {i, 1, 13, 2}];
        PrependTo[t, Sin[x]];
        Plot[Evaluate[t], {x, -Pi, Pi}]
```

上述语句中的函数“`PrependTo[t,Sin[x]]`”是表示把函数 $\sin x$ 添加到表 `t` 中。运行后得到下图。



为了使图形比较更加生动，下面作出 $\sin x$ 和它的某一阶泰勒多项式的同一坐标系下的比较图，并且在图中红色曲线表示函数 $f(x)=\sin x$ 的图形，蓝色曲线表示泰勒多项式的图形。命令如下：

```
In[8]:= For[i = 1, i ≤ 11,
         a = Normal[Series[Sin[x], {x, 0, i}]];
         b = Plot[{a, Sin[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi},
           PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1],
             RGBColor[1, 0, 0]}]; Print[b]; i = i + 2]
```

运行后得到了六幅图，从图中可以观察到泰勒多项式与函数图形的重合与分离情况，显然在$[-\pi,\pi]$范围内，第五幅图中两个函数的图形已经基本上吻合了，也就是说，$\sin x$ 的 9 次多项式与函数几乎无差别。

（2）扩大显示区间范围，以观察在偏离展开点 x_0 时泰勒多项式对函数的逼近情况。

显然，我们只要把上一个程序中的绘图命令中的 x 范围由$[-\pi,\pi]$分别改到$[-2\pi,2\pi]$，并相应增加阶数。故输入如下命令：

```
In[9]:= For[i = 7, i ≤ 17,
          a = Normal[Series[Sin[x], {x, 0, i}]];
          c = Plot[{a, Sin[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi},
            PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1],
              RGBColor[1, 0, 0]}], Print[c]; i = i + 2]
```

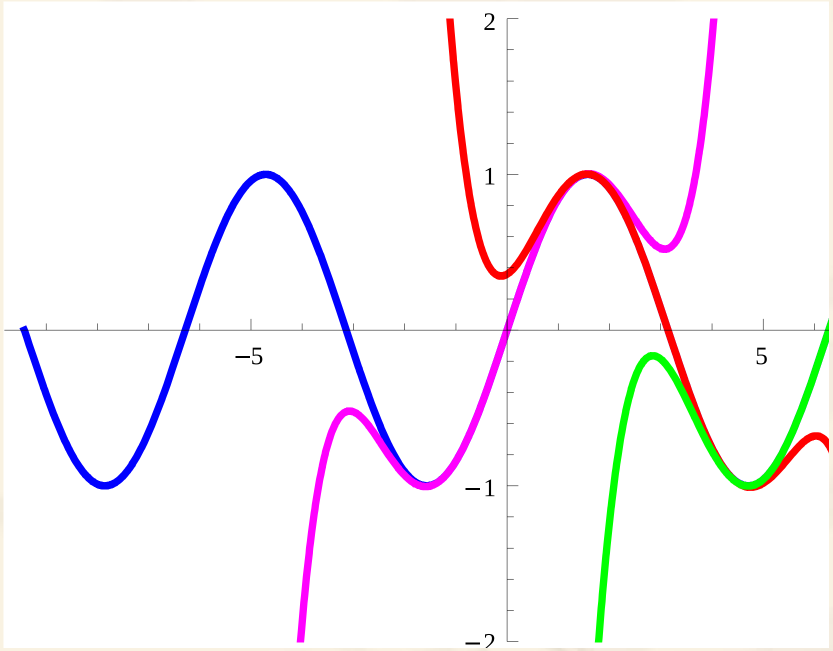
运行上面程序，绘出了从 7阶直至17阶的泰勒多项式与$\sin x$的比较图，观察图表可得，在区间 $[-2\pi,2\pi]$范围内，$\sin x$的17 次多项式与函数吻合得很好了。

（3）固定 $n=6$，观察 x_0 对函数逼近的影响。

在下面的语句中，为了方便调用 $\sin x$ 的泰勒多项式，首先定义了 $\sin x$ 的泰勒展开函数 tt，然后用不同的颜色在同一坐标系中画出了 $\sin x$ 及 $\sin x$ 的分别在 $x_0=0, x_0=3, x_0=6$ 处的 6 阶泰勒多项式的图形：

```
In[10]:= tt[x0_, n_] := Normal[Series[Sin[x], {x, x0, n}]];
gs0 = tt[0, 6]; gs3 = tt[3, 6]; gs6 = tt[6, 6];
Plot[{Sin[x], gs0, gs3, gs6}, {x, -3 Pi, 3 Pi},
 PlotRange → {-2, 2},
 PlotStyle →
  {{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0074]},
   {RGBColor[1, 0, 1], Thickness[0.0074]},
   {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.0074]},
   {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0074]}}]
```

运行后得到下图。



从本实验我们可以得到一些结论，函数的泰勒多项式对于函数的近似程度随着阶数的提高而提高，但是对于任一确定的次数的多项式，它只在展开点附近的一个局部范围内才有较好的近似精确度。