作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

线性代数第二章

作者 刘国华

东南大学 数学系

November 1, 2019

目录

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

相关性

向量组的极力 线性无关组

石里亞河

内积与正交

① n维向量

- n维向量及其运算
- 线性组合和线性表示
- ② 向量组的线性相关性
- ③ 向量组的极大线性无关组
- 4 向量空间
 - R^n 的子空间
 - 三个向量空间
 - 基和维数
 - 坐标和坐标变换公式
- 5 内积与正交矩阵
 - 内积和正交性
 - 标准正交基和Schmidt正交化方法
 - 正交矩阵

向量的历史

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量 n维向量及共运算

向量组的线性 相关性

线性无关组

向重空川

- 古希腊的亚里士多德(Aristotle): 二力合成的平行四边形 法则
- 法国数学家笛卡尔(Ren é Descartes): 解析几何
- 1831年, 德国数学家高斯(Johann Carl Friedrich Gauss): 复平面的概念
- 1844年, 德国数学家格拉斯曼(Hermann Günter Grassmann): n 维向量
- 英国物理学家数学家亥维赛(Oliver Heaviside): 向量分析
- 1888年, 意大利数学家皮亚诺(Giuseppe Peano): 以公理的方式定义了有/无限维向量空间

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向量 1维向量及其运身

向量组的线性 相关性

向量组的极力

向量空间

内积与正交矩 阵 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量 n维向量及其运算

问里组的线》 相关性

向量组的极力

向量空间

内积与正交矩 阵 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



线性代数第二 章

目录

1年向量 11维向量及其运算 线性组合和线性表

向重组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交知阵

引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态, 需以下6个参数:

• 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$

线性代数第二章 章

目录

n维向量 n维向量及其运算 线性组合和线性表

向重组的线性 相关性

向量空间

内积与正交关 阵 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态, 需以下6个参数:

- 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
- 机翼的转角 $\psi := [-\pi, \pi];$

线性代数第二章 章

n 然 台景

11年 向重 n维向量及其运算 线性组合和线性表。

向量组的线性 相关性

向量空间

内积与正交关

引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态,需以下6个参数:

- 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
- 机翼的转角 $\psi := [-\pi, \pi];$
- 机身的水平转角 $\theta := [0, 2\pi];$

线性代数第二章 章 作者 刘国华

n维向量

n维向量及其运算 线性组合和线性表示 向量组的线性

相关性 白番组的极大

54 年 九 大 纽 向 量 空 间

内积与正交矩 阵 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态, 需以下6个参数:

- 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
- 机翼的转角 $\psi := [-\pi, \pi];$
- 机身的水平转角 $\theta := [0, 2\pi];$
- 飞机重心在空间的位置参数P(x,y,z).

所以,确定飞机的状态,需用6维向量

$$x, y, z, \varphi, \psi, \theta$$

n 维向量的定义

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向量 11维向量及其运算

向量组的线性 相关性

可里纽的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

定义

设 a_1,\ldots,a_n 是 R 或者 C 中的 n 个数,则称有序数组 (a_1,\ldots,a_n) 为 R 或者 C 上的 n 维行向量,称有序数

组
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$
 为 R 或者 C 上的 n 维列向量.

向量的线性运算

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向量 11维向量及其运算

向量组的线性 相关性

向量组的极; 线性无关组

向量空间

向重空间

内积与正交矩 阵

定义

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, 则定义向量的加法和数乘运算为$$

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b \end{pmatrix}, \quad k\alpha = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \dots \\ ka_n \end{pmatrix}, \forall k \in R.$$

八条基本运算性质

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向量 1维向量及其运算 ^{各性组会和终性表}

向量组的线性 相关性

向重组的极大 线性无关组 向量空间

内积与正交矩 阵 关于向量的加法,数乘.关于行(列)向量的加法和数乘,我们有下列八条性质成立.

$$i \mathbb{Z} R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in R, \ 1 \le i \le n \right\},$$

 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R^n, \forall \lambda, \mu \in R,$

- ① 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- ② 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- ③ "零元"存在性: 即存在 $0 \in \mathbb{R}^n$,使 $0 + \alpha = \alpha$;
- **①** "负元"存在性: 即∀ α ,存在 β ,使得 $\alpha + \beta = 0$;
- **⑤** 左分配律: $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
- **6** 右分配律: $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
- **②** 数乘结合律: $(\lambda \mu)\alpha = \lambda(\mu \alpha) = \mu(\lambda \alpha)$;
- **8** 幺等律: $1\alpha = \alpha$.

八条基本运算性质

- 刘国

<u> </u>

11年內里 11维向量及其近算 线性组合和线性表 向量组的线性

线性无关组向量空间

内积与正交知 阵 有下列八条性质成立. 记 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in R, \ 1 \le i \le n \right\},$

 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R^n, \forall \lambda, \mu \in R,$

① 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

② 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; ③ "零元"存在性: 即存在 $0 \in \mathbb{R}^n$,使 $0 + \alpha = \alpha$;

关于向量的加法.数乘.关于行(列)向量的加法和数乘.我们

③ "令元"存在性: 即存在 $0 \in R$ ",使 $0 + \alpha = \alpha$; **④** "负元"存在性: 即 $\forall \alpha$,存在 β ,使得 $\alpha + \beta = 0$;

5 左分配律: $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

⑤ 右分配律: $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;

③ 数乘结合律: $(\lambda \mu)\alpha = \lambda(\mu \alpha) = \mu(\lambda \alpha)$;

§ 幺等律: 1α = α.

此性质作为公理来定义抽象的线性空间.

线性组合和线性表示的定义

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量 n维向量及其选算 我性组合和我性表示 向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组 向量空间 定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 都是n 维向量, $k_1, k_2, \dots k_s$ 是数,则称 向量:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的线性组合, $k_1, k_2, \dots k_s$ 是这个线性组合的系数.如果n 维向量 η 可以写成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的线性组合,则称 η 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 线性表示.

作者 刘国华

目录

11年四里 11维向量及其选算 我性组合和线性表 今早如 46 86 48

相关性

线性无关组

向量空间

内积与止交矩 阵

例

作者 刘国华

目录

11年17日里 11维向量及其运算 线性组合和线性表示

相关性

向量组的极大 线性无关组 向量空间

内积与正交矩 阵 例

设
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
 试分别将 α, α' 用向量 β 和 γ 线性表示.

例

作者 刘国华

目录

119年101里 11維向量及其近算 线性组合和线性表示

向量组的线性 相关性

向量组的极大

线性无关组

内积与止交矩阵

方程组与线性表示:

 $\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \notin A$

 \Leftrightarrow 存在实数 $x_1, x_2, \dots x_n$, 使得 $b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$

作者 刘国华

目录

11/年四 里 11維向量及其延算 銭性组合和銭性表示

向量组的线性 相关性

向量组的极大

线性无关组

向量空间

方程组与线性表示:

- $\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \not\uparrow M$
- \Leftrightarrow 存在实数 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 使得 $b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$
- \Leftrightarrow 向量b 可以由 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 线性表示.

作者 刘国华

目录

14年17日 聖 11維向量及其延算 銭性組含和銭性表示

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

方程组与线性表示:

- $\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \text{ fix}$
- \Leftrightarrow 存在实数 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 使得 $b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$
- \Leftrightarrow 向量b 可以由 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 线性表示.

问题:

唯一解和无数多解对应的线性表示应该是什么?

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量 n维向量及其近界 我性组合和我性表示 向量组的线性 和兰姆

相关性 向量组的极大 线性无关组

内积与正交矩 阵

Definition:

设 两 组 向 量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$, 如 果 向 量 组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 中每一个向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,则称向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,如果两组向量可以互相线性表示,则称这两组向量是等价的.

线性代数第二 章

作者 刘国华

Definition:

设两组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$, 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 中每一个向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,则称向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,如果两组向量可以互相线性表示,则称这两组向量是等价的.

记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$,矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t)$,则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性表示当且仅当矩阵方程AX=B有解.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量 n维向量及其运算 我性组合和我性表; 向量组的线性

相关性

线性无关组

向量空间 内积与正方

内积与正交知阵

Example:

验证下列两组向量等价

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remark:

• 等价关系满足自反性,对称性和传递性.

Example:

验证下列两组向量等价

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remark:

- 等价关系满足自反性,对称性和传递性.
- 若向量组I与II 等价,则I,II与{I,II}三组向量互相等价.

基本概念

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1 维 向 董 n維向量及其近算 线性组合和线性表示

向量组的线性

相关性

向量组的极力 线性五半组

白量空间

内和ちょう

一组列向量组: $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ \downarrow 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ \downarrow 矩阵A 的秩. \downarrow 向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩.

定义

向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 所对应的矩阵的秩称为称为这个向量组的秩, 记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$.

向量组的等价与矩阵的等价

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

□準回重 □維向量及其近算 現性組合和銭性表 向量组的线性 相差性

内积与正交矩 阵

定理

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,则

$$r\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$$

向量组的等价与矩阵的等价

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向量 11维向量及其选算 线性组合和线性表示 句量组的线性

向量组的极大 线性无关组 向量空间

内积与正交矩阵

定理

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示, 则

$$r\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$$

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\}$ 等价 ⇔ 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解 $\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B).$

向量组的等价与矩阵的等价

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量 n维向量及其运算

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组 向量空间

内积与正交矩阵

定理

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,则

$$r\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$$

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\}$ 等价 ⇔ 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解⇒ r(A) = r(A, B) = r(B).

矩阵A 和B 等价当且仅当r(A) = r(B).

矩阵等价和向量组等价之间有关系吗?

作者 刘国华

目录

11班回重及共运并 线性组合和线性表示 向量组的线性

向量组的极大

白量空间

内积与正交^组

Proposition:

如果向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\}$ 等价,则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t)$ 等价. 反之不成立.

作者 刘国华

目录

11维向量及其运算 线性组合和线性表示

向量组的线性 相关性

线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

Proposition:

如果向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价,则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$ 等价. 反之不成立.

反例:
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition:

如果向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价,则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$ 等价. 反之不成立.

反例:
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remark:

两个矩阵行向量组等价与列向量组等价没有关系.

向量组的线性相关性的定义

线性代数第二 章

作者 刘国华

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正刻

定义

如果向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩小于向量组的个数,则称这组向量是线性相关的,否则称为线性无关的. $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向重

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

向量空间

阵

n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 α 与 β 成比例.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

向童组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵 n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 α 与 β 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量,就是向量组的线性相关关系.

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

向量组的线性

线性无关组

回重空ド 力和 に a

内积与正交知 阵 n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 $\alpha=\beta$ 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量,就是向量组的线性相关关系.

定义 (定理)

给定向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

则称向量组I 线性相关.

线性代数第二 章

作者 刘国华

日求

句量组的线性

相大性 向量组的极力

向重组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交矩

n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 α 与 β 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量,就是向量组的线性相关关系.

定义 (定理)

给定向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

则称向量组I 线性相关.否则称向量组A 线性无关. 也就是说,当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才能成立,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

线性相关与线性无关

线性代数第二 章

作者 刘国华

日水 n维向量

向量组的线性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交知 阵

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

线性代数第二 章

作者 刘国华

口水 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与止父矩 阵

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0 \text{ }$ 有非零解.

线性代数第二 章

作者 刘国华

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与止炎矩 阵

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

 $\Leftrightarrow r(A) < s$.

线性代数第二 章

作者 刘国华

日求 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

A 是 会 间

7 王工门 内积与正交矩

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

 $\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理,有

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \ \text{只有零解}.$

线性代数第二 章

作者 刘国华

日录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

文任儿天纽 句量空间

·一一、 内积与正交织 阵

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0 \text{ }$ 有非零解.

 $\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理,有

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \ \mathsf{R} \ \mathsf{f} \ \mathsf{s} \mathsf{f}.$

 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 没有非零解.

线性代数第二 章

作者 刘国华

日录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

线性尤天组 向量空间

可里至问 为积与正交矩 阵

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

 $\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理,有

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \ \mathsf{R} \ \mathsf{f} \ \mathsf{s} \mathsf{f}.$

 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 没有非零解.

 $\Leftrightarrow r(A) = s$.

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

do soo be to

例

$$i \xi \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$
from an analytic field ξ left $\xi \in X$.

断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交组

例

断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

例

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

11年内里

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 ^阵

线性代数第二 章

作者 刘国华

日求

11 N 1-1 37

向量组的线性 相关性

向童组的极大 线性无关组

向量空间

内积与止交矩 阵 由定义, 易知有以下结论:

• 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

112年四里

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.

章

作者 刘国华

目录

112年17月里

向童组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 车

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

112年17年

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

句量空间

h so to T

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 当m > n时,任意m 个n维向量线性相关.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维问重

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

句量空间

内积与正

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 当m > n时,任意m 个n维向量线性相关.
- n+1 个n维向量线性相关.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

11年四里

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 当m > n时,任意m 个n维向量线性相关.
- n+1 个n维向量线性相关.
- 如果n维向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关,那么在每个向量中都任意去掉同一个序号的分量,得到的n-1维向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 也线性相关.

线性代数第二 章

作者 对国华

n维向重

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

阵

例

设n 维向量 η 和 $n \times n$ 矩阵A 满足 $A^{k-1}\eta \neq 0$, 但 $A^k\eta = 0$, 证明向量组 η , $A\eta$, $A^2\eta$, $\cdots A^{k-1}\eta$ 线性无关.

线性相关性的判定定理

线性代数第二 章

作者 刘国华

口水

向量组的线性

向量组的极为

向量空间

内积与正交矩 阵

定理

向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)\}$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

线性相关性的判定定理

线性代数第二 章

作者 刘国华

日求 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

句量空间

内积与正交织

定理

向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)\}$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理

设向量组I: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 线性无关,而向量组II: $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 线性相关,则向量 β 一定能用向量组I线性表示,且表示式是唯一的.

线性相关性的判定定理

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

句量组的极大 线性无关组 句量空间

向量空间 内积与正

定理

向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)\}$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理

设向量组I: $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关,而向量组II: $\{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 线性相关,则向量 β 一定能用向量组I线性表示,且表示式是唯一的.

性质

如果 n 个n 维向量 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 线性无关,则任意 n 维向量 η 都可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 线性表示. 反之也成立.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

定理

设 $I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的秩为r,则在 $I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 中存在部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$,满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中每一个向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交织

定理

设 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 的秩为r,则在 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 中存在部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$,满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中每一个向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

定义

设向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的部分向量组. 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中每一个向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

则称 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$ 为向量组I的一个极大线性无关组,简称极大无关组。

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间 内积与正交

阵

例

求向量组I:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的极大无关组.

例

求向量组I:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的极大无关组.

例

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,求向量组 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$ 的一个极大无关组.

线性代数第二章

作者 刘国华

日来

向里班的线性 相关性

向童组的极大 线性无关组

向量空间

内积与止父矩 阵 为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交

为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的部分向量组,且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\{lpha_{i_1},lpha_{i_2},\cdots,lpha_{i_r}\}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

石县公间

内积与正交射 阵 为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\{lpha_{i_1},lpha_{i_2},\cdots,lpha_{i_r}\}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

定理

• 任何向量组1与它自身的极大无关组等价.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交 阵 为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\{lpha_{i_1},lpha_{i_2},\cdots,lpha_{i_r}\}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

定理

- 任何向量组1与它自身的极大无关组等价.
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向童组的极为 线性无关组

四里至问 内积与正交矩 阵 为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\{lpha_{i_1},lpha_{i_2},\cdots,lpha_{i_r}\}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

定理

- 任何向量组1与它自身的极大无关组等价.
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.个数一样吗?
- 秩为r的向量组I中任意r个线性无关的向量,均为该向量组的一个极大无关组.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向i

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩

remark

• $0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$

线性代数第二 章

作者 刘国华

日水

向童组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

- $\bullet \ 0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$

线性代数第二 章

作者 刘国华

M MC

n维向童

向重组的线性 相关性

向童组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

- $\bullet \ 0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow \text{\underline{x}} \neq 0;$

线性代数第二 章

作者 刘国华

日永

12/2-11/4-35

向重组的线》 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 车

- $\bullet \ 0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow 至少存在一个<math>\alpha_i \neq 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维问重

向童组的线》 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正:

- $0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} < s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性相关;

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

向重组的线型 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正3

- $0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow \text{\mathbb{Z}}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} < s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性相关;
- 在几何空间中, $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 1 \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} + \xi L \sharp z = 0$

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维向重

向量组的线点 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正

- $\bullet \ 0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow \text{\mathbb{Z}}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$ $\phi \text{$\mathbb{Z}$}$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} < s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性相关;
- 在几何空间中, $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}=1\Leftrightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\} \ \text{共线且非零向量};$ $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}=2\Leftrightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\} \ \text{共面但不共线}.$

向量组的秩与矩阵的秩

线性代数第二 章

作者 刘国华

口水 n维白量

向量组的线

向量组的极大

线性无关组

向重空间

内积与正义矩 阵

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

向量组的秩与矩阵的秩

线性代数第二 章

作者 刘国华

日求 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极; 线性无关组

向量空间

内积与正交

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试写出A 的行向量组的极大无关组和行秩,以及A 的列向量组的极大无关组和列秩.

向量组的秩与矩阵的秩

线性代数第二 章

作者 刘国华

日录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极; 线性无关组

白量分间

内积与正交织

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的f秩; 列向量组的秩为矩阵A的f0,

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试写出A 的行向量组的极大无关组和行秩,以及A 的列向量组的极大无关组和列秩.

任意矩阵的行秩和列秩之间的关系?

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维白哥

向量组的约

相关性

向重组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

向量组的线

向量组的极为

线性无大组

四里至四

内积与正3 阵

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极; 线性无关组

白量空间

内积与正交矩 阵

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

引理

阶梯形矩阵行(列)向量租的秩都等于矩阵的秩.

线性代数第二 章

作者 刘国华

日录 n维向量

相关性 向量组的极力

线性无关组

向重空川

内积与正交矩 阵

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

引理

阶梯形矩阵行(列)向量租的秩都等于矩阵的秩.

定理

矩阵的行秩和列秩相等, 都等于矩阵的秩.

线性代数第二

求一个向量组的极大无关组的方法:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

- 行最简形的主列是其列向量 组的极大无关组
- 初等行变换不改变列向量间 的线性关系

按列向量组构成矩阵A 初等行变换 A. (阶梯阵)

- 阶梯阵的主列对应的原矩阵的列也是原矩阵 列向量组的极大无关组;
- •若要将非主列用极大无关组线性表示,则要化成 行简化阶梯阵.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

白量分

内积与正交矩

例

求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩和一个极大无关组,并将其余的向量(如果有的话)用此极大无关组线性表出.

矩阵可逆的等价命题

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交

remark

多角度看矩阵可逆

- 方阵A 可逆 $\Leftrightarrow AB = BA = E$;
- $\Leftrightarrow |A| \neq 0$; A非奇异、非退化
- $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ 的行最简形矩阵为 $E \Leftrightarrow A$ 与单位阵等价;
- \Leftrightarrow A 的列(行)向量组 $A_1 \cdots A_n$ 线性无关;
- \Leftrightarrow A 的列(行)向量组 $A_1 \cdots A_n$ 的极大无关组是它自身;
- ⇔ A 行(列)秩等于 n;
- ⇔ 任一n 维向量α 都可以由向量组 $A_1 \cdots A_n$ 线性表示.

练习题

- 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 线性无关的充要条件是:
 - ① $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意向量都不是零向量:
 - ② $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意两个向量的分量都不成比例:
 - ③ 由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 构成的矩阵中有一个s 阶子式≠ 0:
 - **●** 由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\}$ 构成的矩阵中任意s 阶子式≠ 0.
- 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 线性无关的充要条件是:
 - **①** 存在全为0的数 $k_1, k_2, \cdots k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ } = 0;
 - ② $\exists k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \} \neq 0$ 时, $k_1, k_2, \dots k_s$ 不全 为0:
 - **❸** $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示;
 - $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 中存在某向量不能由其余向量线性表示.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性

线性无关组

向量空间

内积与正交矩 阵

- 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 秩为r 的充要条件是:
 - ① $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意r 个向量线性无关;
 - ② $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中存在r 个线性无关的向量;
 - ③ 由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意r+1 个向量线性相关;
 - **4** 由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中存在r 个线性无关的向量, 但任意任 意r+1 个向量线性相关.
- 向量组 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 秩为r, 则以下说法错误的是:
 - 与I 等价的任意一个线性无关向量组均含有r 个向量;
 - ② I 中任意r 个向量都是其极大无关组;
 - ❸ I 中任意r 个线性无关的向量都是其极大无关组;
 - I 中任意极大无关组均含有r 个向量.

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正弦

• 设n 维向量组 $I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 线性无关,则n 维向量组 $II: \{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s\}$ 线性无关的充要条件是:

● I 可由II 线性表示;

II 可由I 线性表示;

I 与II 等价;

① 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s)$ 等价.

线性代数第二 章

作者 刘国华

向量组的线\ 相关性

向量组的极力 线性无关组

三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公

内积与正交矩 阵

Definition:

设
$$S \rightarrow R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$$
 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 $S \rightarrow R^n$ 的一个子空间.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

维向量

向重组的线· 相关性

向童组的极为 线性无关组

Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公 内积与正变矩

Definition:

设
$$S$$
 为 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 S 为 R^n 的一个子空间.

• 向量空间必包含零向量.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线。 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间 Rⁿ的子空间 三个向量空间 基和維数 坐标和坐标变换公 内积与正交知

Definition:

设
$$S$$
 为 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 S 为 R^n 的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n 和0 也是 R^n 的子空间,成为平凡子空间.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维回重 向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

可童 空 旧 R ⁿ 的子空间 三个向量空间 总和维数 坐标和坐标变换 Definition:

设
$$S \ \,$$
 为 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则

称S 为 R^n 的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n 和0 也是 R^n 的子空间,成为平凡子空间.

例

$$(1)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 0 \}$$
 是子空间吗?

线性代数第二 章

作者 刘国生

目录

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组 向量空间

三个向量空间 基和维数 坐标和坐标型 积 与 正

Definition:

设 $S \rightarrow R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 $S \rightarrow R^n$ 的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n 和0 也是 R^n 的子空间,成为平凡子空间.

例

$$(1)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 0 \}$$
 是子空间吗?

$$(2)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 1 \}$$
 是子空间吗?

核空间和列空间

线性代数第二 章

作者 刘国华

日 T T 作 向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

 R^n 的子空间 三个向量空间 基和维数

内积与正交矩 阵

定义

设 $A_{s \times n}$,则齐次线性方程组Ax = 0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵A 的核空间或者零空间.

核空间和列空间

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向重组的极为 线性无关组

内 里 王 四 R^n 的子空间
三个向量空间

基和维数 坐标和坐标变换

内积与正交矩 阵

定义

设 $A_{s \times n}$,则齐次线性方程组Ax = 0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵A的核空间或者零空间.

注

非齐次方程组的解集不是子空间.

核空间和列空间

定义

设 $A_{s\times n}$,则齐次线性方程组Ax=0 的解的全体所构成的集合

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵A的核空间或者零空间.

非齐次方程组的解集不是子空间,

注

定义

设 $A_{s\times n}$,则集合

 $R(A)=\{\eta\in R^s|\exists\ x\in R^n,\ \eta=Ax\}$ 是 R^s 的子空间,称为矩阵A 的值域或者列空间.

 $K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$

. .

线性代数第二

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1维同重 句量组的线点

相关性

向量组的极大 线性无关组

句量空间

五八一的寸空即 三个向量空间 基和维新

基和维数

内积与正交知 阵

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$, 用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合, 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 1维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组 向量空间

Rⁿ 的子空间 **三个向量空间** 基和维数

坐标和坐标变 内积与正:

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$, 用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合, 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

• $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \ \mathbb{N} L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 1维向量

句量组的线性 相关性

句量组的极大 践性无关组 句量空间

Rⁿ 的子空间 三**个向量空间** 基和维数 坐标和坐标旁接/

坐标和坐标变衫 内积与正交

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$, 用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合. 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \ \mathbb{M}L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$.

线性代数第二 章

作者 刘国华

1维向量

(1) 向量组的极大 线性无关组 向量空间

R¹¹ 的子空间 三**个向量空间** 基和维数 坐标和坐标变换

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$, 用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合, 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

则 称 $L(lpha_1,\,lpha_2,\,\cdotslpha_s)$ 为 由 $lpha_1,\,lpha_2,\,\cdotslpha_s$ 生 成 的 子 空 间, $lphalpha_1,\,lpha_2,\,\cdotslpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \ \mathbb{N}L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$.
- 生成的子空间是包含 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的所有向量空间中最小的.

定义

线性代数第二

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$,用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合, 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s | k_i \in R\},$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \text{ NI} L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t$ 等价当且仅当 $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = I(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$
- $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t).$ 生成的子空间是包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的所有向量空间中最小的.
- 线性方程组AX = b 有解当且仅当 $b \in R(A)$.

线性代数第二 章

作者 对国华

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间 Rⁿ的子空间 三个向量空间 基和维数

坐标和坐标变换公式 内积与正交矩 阵

例

假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$,分别求A的值域R(A)和核

空间K(A)的一组基以及它们的维数.

章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线\ 相关性

向量组的极力 线性无关组

句量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数

内积与正交矩 阵 以下涉及的向量空间V均指 R^n 的子空间.

定义

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 是向量空间V中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 为V的一个基.

章

作者 刘国华

n维向量 向量组的线性

阳大性 向量组的极大 线性无关组 向量空间

11. の寸室門 三个向量室间 基和维数 坐标和坐标変換 以下涉及的向量空间V均指 \mathbb{R}^n 的子空间.

定义

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 是向量空间V中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 为V的一个基.

如果将向量空间看成一个向量组时,向量空间的一个基 其实就是该向量组的一个极大无关组,所以向量空间的任意 两个基所含向量的个数相等.

线性代数第二 章

作者 刘国华

1、小 n维向量 向量组的线性 相关性

四大任 句量组的极大 线性无关组 句量空间 R^{n} 的子空间

句量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公 以下涉及的向量空间V均指 R^n 的子空间.

定义

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 是向量空间V中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 为V的一个基.

如果将向量空间看成一个向量组时,向量空间的一个基 其实就是该向量组的一个极大无关组,所以向量空间的任意 两个基所含向量的个数相等.

定义

把基所含向量的个数s称为V的**维数**,记作 $\dim V = s$.

线性代数第二 章

作者 刘国华

II AC

6 12 m 46 m 1

相关性

向童组的极为 线性无关组

向量空间 Rⁿ的子空间 三个向量空间 基和维数

坐标和坐标变换公立

例

求 \mathbb{R}^n 的一组基及其维数.

向量组的极力 线性无关组

向量空间 Rⁿ的子空间 三个向量空间 基和维数

生标和坐标变换公司

例

求 R^n 的一组基及其维数.

$$\varepsilon_{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \varepsilon_{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{N} \varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \dots \dots \varepsilon_{n}$$

是 R^n 的一组基(称为基本单位向量组)

内积与正交矩 阵

例

$$\varepsilon_{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \varepsilon_{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{N}\varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \dots \varepsilon_{n}$$

是 R^n 的一组基(称为基本单位向量组).

例

线性代数第二 章

作者 刘国华

日求 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

回 重 空 四 R n 的子空间 三个向量空间 基和维数

内积与正交矩

值得一提的是,数域上的向量空间V如果是非零向量空间,那么它有无穷多个基(请读者自己思考).

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量 向量组的线h

向量组的极大 线性无关组

向量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 **基和维数** 坐标和坐标变换公

内积与正交矩 阵 值得一提的是,数域上的向量空间V如果是非零向量空间,那么它有无穷多个基(请读者自己思考).

由定义可直接推出: n维向量空间中任意n个线性无关的向量都是它的一个基.零空间的维数定义为0.

生成子空间的基和维数

章

作者 刘国华

n维向重

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

二个回重至问 **基和维数** 坐标和坐标变换公

内积与正交矩 车 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,$ 记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},\$$

则有生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

生成子空间的基和维数

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

相关性

向量组的极大 线性无关组

向童空间 R^n 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,$ 记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},\$$

则有生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

Theorem

设 $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关组就是V 的一组基,因此, $dimV = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

生成子空间的基和维数

线性代数第二 章

作者 刘国华

n维向量

向量组的线\ 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间 R^n 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},\$$

则有生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

Theorem

设
$$V = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$
, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关组就是 V 的一组基,因此, $dimV = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

注

矩阵A的列空间的基就是其列向量组的极大无关组.

$$dim L(A_1, A_2, \dots, A_s) = r(A_1, A_2, \dots, A_s) = r(A).$$

生成子空间的基和维数

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标查接/

坐标和坐标变换公》 内积与正交知

例

设矩阵
$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
, 求 $L(A) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 的一组基.

生成子空间的基和维数

例

设矩阵
$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求
$$L(A) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$$
的一组基.

按列向量组构成矩阵经过初等行变换变成阶梯阵,则有阶梯 阵的主列对应的原矩阵的列是生成子空间的基。

作者 刘国华

目录

1年问重

向量组的线性

向量组的极为 线性无关组

向量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换

内积与正交矩 阵

定理

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是向量空间V的一个基,那么V中每一个向量都可以唯一地表示成 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

向量空间 Rⁿ的子空间 三个向量空间 基和推数 坐标和坐标变换处

内积与正交矩

定理

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是向量空间V的一个基,那么V中每一个向量都可以唯一地表示成 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

这个定理告诉我们: 在向量空间V中,如果选定了一个基,并且规定了基向量的顺序之后,对于V中每一个向量,就有唯一的n元有序数组与之对应.

定理

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是向量空间V的一个基,那么V中每一个向量都可以唯一地表示成 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

这个定理告诉我们: 在向量空间V中,如果选定了一个基,并且规定了基向量的顺序之后,对于V中每一个向量,就有唯一的n元有序数组与之对应.

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为向量空间V的一个基, 对任意向量 $\beta \in V$, 如果

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

则称n元数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为 β 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**坐标**,数 x_i 叫做向量 β 关于基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的第i个坐标分量 $(i = 1, \dots, n)$.

例

向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 下的坐标是?

作者 刘国华

日水

白量组的线点

相关性

向童组的极大 线性无关组

向董空间 Rⁿ 的子空间 三个向董空间 基和维数

内积与正交矩

例

向量
$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$$
 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 下的坐标是?
在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_3$ 下的坐标是?

日求

可量组的线性

向量组的极大 线性无关组

线性无关组 向量空间

Rⁿ 前子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公式 内 积 与 正 安 知 例

向量
$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$$
 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 下的坐标是?

在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_3$ 下的坐标是?

在基 $2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 3\epsilon_3, 4\epsilon_4$ 下的坐标是?

线性代数第二

 $\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{n2}\alpha_n, \\ \dots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \dots + c_{nn}\alpha_n. \end{cases}$

将其形式上记为

定义

 $\hbar C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过 渡矩阵.

 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$

 $\partial_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是V 中两组基,如果有

线性代数第二

若一个向量
$$\eta \in V$$
,在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

即
$$\eta = \sum_{k=1}^{n} x_i \beta_i$$
,则有

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} x_k \beta_k = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{1k} x_k\right) \alpha_1 + \dots + \left(\sum_{k=1}^{n} c_{nk} x_k\right) \alpha_n$$

性质

设 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 过渡矩阵,向量 $\eta \alpha \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量 为 x,则 η 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标向量为 Cx.

线性代数第二 章

作者 刘国4

目前

非问里

向量组的线 相关性

向量组的极; 线性无关组

向量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 4 好和 4 好意

内积与正交矩 ^车 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

线性代数第二 章

作者 刘国华

日录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间 R^n 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公

内积与正交矩 阵 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的 **过 渡 矩 阵**,向量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下 的 坐 标 向 量 为 x,则 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下 的 坐标向量为 Cx.

线性代数第二 章

作者 刈国等 日录 1维向量

向量组的线性 相关性 向量组的极为 线性无关组

向量空间 Rⁿ 的子 三个向量空 基和维数

坐标和坐标页 内积与正: 阵 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的 **过渡矩阵**,向量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量为 x,则 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标向量为 x

所以, α_j 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 CQ_j ,于是从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 $(CQ_1 \cdots CQ_n) = CQ$; 但另一方面,从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 E_n ,我们得到 $CQ = E_n$.

线性代数第二 章 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的 **过 渡 矩 阵**,向 量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下 的 坐 标 向 量 为 x,则 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下 的 坐标向量为 Cx.

所以, α_j 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 CQ_j ,于是从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 $(CQ_1 \cdots CQ_n) = CQ$; 但另一方面,从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 E_n ,我们得到 $CQ = E_n$.

性质

设矩阵 C 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡 矩阵,则从基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵 为 C^{-1} .

作者 刘国红

n#回里 向量组的线, 相关性 的量组的极 的线性无关组

内积与』阵

作者 刘国华

目录

n维向重

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

线性无关组 向量空间

Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公

内积与正交矩 阵

例

设
$$R^3$$
 中的两组基 $I:$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

$$II:, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

求:

- 从向量组I到II的过渡矩阵.
- $x\xi = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$ 在基I 和II, ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 下的坐标.

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间 Rⁿ め子空间 三个向量空间 基和維数 4455-4457-840

^{基和维数} 坐标和坐标变换公司 内积与正交矩 从杜勒魔方到向量空间

4阶Dürer魔方:

行和=列和=对角线(或次对 角线)之和=每个小方块之和 =四个角之和.

B=	8	22	7	13
	5	15	14	16
	17	3	18	12
	20	10	11	9

你想构造Dürer魔方吗? Dürer魔方有多少个? 如何构造所有的Dürer魔方? Albrecht Dürer's Magic Square

	16	3	2	13
	5	10	11	8
4=[9	6	7	12
	4	15	14	1

设A,B是任意两个 Dürer 魔方,

A+B是Dürer魔方吗?√

对任意实数k, kA 是Dürer魔方吗? √。

作者 刘国华

日求 n维向量 向量组的线点

四大性 句量组的极大 线性无关组 句量空间

句量空间 Rⁿ 的子空间 三个向量空间 基和维数 坐标和坐标变换公式

^{基和维数} 坐标和坐标变换公式 内积与正交矩 链

求Dürer魔方空间的基

——培养化繁为简的思考模式

令R为行和,C为列和,D为对角线和,S为小方块和

凭空构造魔方空间的一组基是很难的

类似于n维空间的基本单位向量组,利用0和1来构造一些 R=C=D=S=1的最简单的方阵。

Q₁=

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0



1在第一行中有4种取法,第二行中的1还有两种取法。当第二行的1也取定后,第三、四行的1就完全定位了,故共有8个不同的最简方阵,称为基本魔方 $Q_1,...,Q_8$

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

スピルス 向量空间 Rn marga

尺… 的子室间 三个向量室间 基和维数

内积与正交组

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1在第一行中有4种取法,第二行中的1还有两种取法。当第二行的1也取定后,第三、四行的1就完全定位了,故共有8个不同的最简方阵,称为基本魔方Q1,...,Q8

作者 刘国华

目录

n维问重

向量组的线性 相关性

向量组的极; 线性无关组

与景旁间

 R^n 的子空间 三个向量空间

基和维数 坐标和坐标变换公

内积与正交矩

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 $\therefore Q_1 + Q_4 + Q_5 + Q_8 - Q_2 - Q_3 - Q_6 - Q_7 = 0Q_1,...,Q_8$ 线性相关



显然, $\underline{Dürer}$ 空间中任何一个魔方都可以用 $Q_1,Q_2,...,Q_8$ 来线性表示,但它们能否构成 \underline{D} 空间的一组基呢?

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

Rⁿ的子空间 三个向量空间

基和维数 坐标和坐标变换公.

内积与正交矩

→→ 求Dürer魔方空间的基

$$Q_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Q_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_{6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_{7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Q_1 + Q_4 + Q_5 + Q_8 - Q_2 - Q_3 - Q_6 - Q_7 = 0 Q_1, \dots, Q_8$$
线性相关

可得 $\forall r_i = 0 : Q_1, Q_2, \dots, Q_7$ 线性无关。

 $Q_1,...,Q_7$ 构成D空间的一组基,任意Dürer 魔方都可由其线性表示.

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

句量空间 R^n 的子空间三个向量空间基和维数

基和维数 坐标和坐标变换公. 内积与正交矩

构造Albrecht Dürer的数字魔方

$$D = r_1 Q_1 + r_2 Q_2 + r_3 Q_3 + r_4 Q_4 + r_5 Q_5 + r_6 Q_6 + r_7 Q_7$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & r_6 & r_5 + r_7 & r_3 + r_4 \\ r_3 + r_5 & r_4 + r_7 & r_1 + r_6 & r_2 \\ r_4 + r_6 & r_2 + r_5 & r_3 & r_1 + r_7 \\ r_7 & r_1 + r_3 & r_2 + r_4 & r_5 + r_6 \end{vmatrix} =$$

 $Q_1,...,Q_7$ 构成D空间的一组基,任意Dürer 魔方都可由其线性表示.

向量内积的概念

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

1121-1-7-2

同重组的线¹ 相关性

向量组的极; 线性无关组

白量分值

可里工厂

内积与正交矩 ^车

内积和正文性 緑准正文基 和Schmidt正3 化方法 正文矩阵 推广数量积的概念到 R^n 空间中去, 给出如下定义:

定义

设
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, 称实数$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

为向量 α 与 β 的**内积**,记为 $<\alpha,\beta>$,即 $<\alpha,\beta>=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

向量内积的概念

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

石墨帝词

1 = -

] 积与正交矩

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正 化方法 正文矩阵 推广数量积的概念到 R^n 空间中去, 给出如下定义:

定义

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

为向量 α 与 β 的**内积**,记为 $<\alpha,\beta>$,即 $<\alpha,\beta>=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

如果 α 、 β 都是列向量,则利用矩阵乘法可将 α 与 β 的内积表示为

$$<\alpha, \beta> = \alpha^{T}\beta = \beta^{T}\alpha.$$

容易验证内积具有下列基本性质:

- (1) 对称性 $<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>$;
- (2) 线性性 $<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$

$$< k\alpha, \beta > = k < \alpha, \beta > (k 为实数);$$

• (3) 非负性 $<\alpha,\alpha>\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha=0$.

向量空间

内积与正交织 ^姑

标准正交基 和Schmidt正变 化方法

定义

向量 α 的长度(模). 当 $\parallel \alpha \parallel = 1$ 时, 则称 α 为单位向量.

定义

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

向量 α 的长度(模). 当|| α ||= 1时, 则称 α 为单位向量.

 $\sqrt{30}$.

例如,设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,则 $\parallel \alpha \parallel = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2} = 0$

而向量 $\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是一个三维单位向量.

作者 刘国华

日来

112/2-1-7

向童组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交

内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正文 化方法 若向量 $\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量 α 的单位化向量.

作者 刘国华

n 维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交**矢**

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正: 化方法 正交矩阵 若向量 $\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量 α 的单位化向量.

性质

设n维向量 α , β ,则有

$$\mid <\alpha,\beta>\mid \leqslant \parallel\alpha\parallel \parallel\beta\parallel$$

称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

作者 刘国华

日求 n维向量

向量组的线h 相关性

向量组的极大 线性无关组

石暴穴间

内积与正交组

年 内积和正交性 ^{転准正交基} ^{なCabyoid</sub>まる} 若向量 $\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量 α 的单位化向量.

性质

设n维向量 α, β ,则有

$$|<\alpha,\beta>|\leqslant \parallel\alpha\parallel\parallel\beta\parallel$$

称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

定义

设非零向量 α, β, α 与 β 的夹角 θ 由以下公式定义:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\parallel \alpha \parallel \parallel \beta \parallel}.$$

作者 刘国华

目录

1.非内里

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向重空间

内积与正交: 阵

内积和正文性 标准正交基 和Schmidt正文 化方法 正文矩阵 这里向量的长度与夹角是解析几何中长度与夹角的推广. 向量的长度有以下性质:

- (1) 非负性 $\|\alpha\| \ge 0$, 当且仅当 $\|\alpha\| = 0$ 时 $\alpha = 0$;
- (2) \hat{A} \hat
- (3) 三角不等式 $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$.

作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

<mark>内积和正文性</mark> 示准正文基 inSchmidt』 と方法 正文矩阵 这里向量的长度与夹角是解析几何中长度与夹角的推广. 向量的长度有以下性质:

- (1) 非负性 $\|\alpha\| \ge 0$, 当且仅当 $\|\alpha\| = 0$ 时 $\alpha = 0$;
- (2) \hat{A} \hat
- (3) 三角不等式 $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$.

有了角度的概念, 当两个非零向量夹角是 $\frac{\pi}{2}$ 时, 称它们是正交的. 为方便起见, 补充规定: 零向量与任何向量正交. 并给出以下定义:

定义

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 当 $<\alpha, \beta>=0$ 时, 称 α 与 β 正交.

正交向量组

单位正交组.

线性代数第二 章

作者 刘国华

口水 n维向量

向量组的线巾

向量组的极为 66世年24年

线性无关组

7. 五二. 内积与正交矩

ト **内积和正交性** ^{保准正交基 ^{GO} ab mid≠ =}

定义

两两正交的非零向量组称为正交向量组, 简称正交组.

例如,向量组
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 R^3 中的一个正交组。

如果一个正交组的每个向量都是单位向量, 称它是单位正交组.

例如,
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是 R^3 中的一个

作者 刘国华

- 44: 45:

向量组的线性

向量组的极; 线性无关组

石具穴间

内积与正交线

阵

标准正交基 和Schmidt正交 化方法 正交矩阵

性质

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 是一正交组,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极力 线性无关组

与显应词

内积与正交

阵

标准正交基 和Schmidt正交 化方法 正交却阵 向量空间V 中的基如果只一个标准正交向量组,则称此基是V 的标准正交基.

引理

如果向量 β 与向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每一个正交,那么 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意一个线性组合也正交.

作者 刘国华

目录

n维向量 向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组 向量空间

内积与正交矩 阵 内积和正交性 标准正交基

标准正交基 和Schmidt正多 化方法 正交矩阵 向量空间V 中的基如果只一个标准正交向量组,则称此基是V 的标准正交基.

引理

如果向量 β 与向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每一个正交,那么 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意一个线性组合也正交.

定理

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 是n维 向 量 空 间 R^n 的 一 组 线 性 无 关 的 向 量 组,则 存 在 一 个 正 交 组 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$,使 β_1, \cdots, β_m 可 由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表出.

定理

每个非零的向量空间都有标准正交基.

上述方法称为Schmidt正交化方法.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

112年147年

相关性

向重组的极大 线性无关组

向量空门

内积与正交组

标准正交基 和Schmidt正交 化方法 正交矩阵 用Schmidt正交化方法将给定的线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 正交化是指取:

$$\beta_{2} = \alpha_{2} - \frac{\langle \beta_{1}, \alpha_{2} \rangle}{\langle \beta_{1}, \beta_{1} \rangle} \beta_{1}$$

$$\beta_{3} = \alpha_{3} - \frac{\langle \beta_{1}, \alpha_{3} \rangle}{\langle \beta_{1}, \beta_{1} \rangle} \beta_{1} - \frac{\langle \beta_{2}, \alpha_{3} \rangle}{\langle \beta_{2}, \beta_{2} \rangle} \beta_{2}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{s} = \alpha_{s} - \frac{\langle \beta_{1}, \alpha_{s} \rangle}{\langle \beta_{1}, \beta_{1} \rangle} \beta_{1} - \frac{\langle \beta_{2}, \alpha_{s} \rangle}{\langle \beta_{2}, \beta_{2} \rangle} \beta_{2} - \cdots - \frac{\langle \beta_{s-1}, \alpha_{s} \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle} \beta_{s-1}.$$

则有 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是线性无关的正交向量组,且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价.

用Schmidt正交化方法将给定的线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 正交化是指取:

$$\beta_1 = \alpha$$

价.

单位化即可.

 $\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2$$

$$\alpha_{\circ} = \frac{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_2 \rangle}$$

$$\frac{\langle \beta_{s-1}, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle} \beta_{s-1}.$$

$$\overline{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle}^{\beta_{s-1}}$$
. 则有 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是线性无关的正交向量组,且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价.

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\langle \beta_1, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 - \dots - \frac{\langle \beta_{s-1}, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \alpha_s \rangle} \beta_1$$

要得到与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价的标准正交向量组,只要将 β_1, β_2, \cdots

$$\frac{\langle \beta_1, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 - \dots - \frac{1}{\langle \beta_2, \alpha_s \rangle} \beta_{s-1}.$$

向量组的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交为 阵

阿尔和亚义性 标准正交基 和Schmidt正交 化方法 正文年胜

例

设
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$
 利用 $Schmidt$ 正交化方法求出单位正交组 e_1, e_2, e_3 .

相关性

向量组的极力 线性无关组

向量空间

内积与正交织

阵 内积和正交性

标准正义基 和Schmidt正交 化方法 正交矩阵

例

设
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, 利用Schmidt正交化方法求出单位正交组 e_1, e_2, e_3 .$$

$$e_{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, e_{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, e_{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维白量

向量组的线小

相关性

向重组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩

内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正文 化方法 正交概念相联系的一个重要概念是正交矩阵.

定义

如果实方阵A满足

$$AA^T = A^T A = E \quad (A A^{-1} = A^T)$$

则称方阵A为正交矩阵.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩

内林が正文社 标准正文基 和Schmidt正文 化方法 正文矩阵 正交概念相联系的一个重要概念是正交矩阵.

定义

如果实方阵A满足

$$AA^T = A^T A = E \quad (\not \propto A^{-1} = A^T)$$

则称方阵A为正交矩阵.

下列矩阵和它们的转置矩阵均是正交的

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录

向童组的线》 相关性

向量组的极; 线性无关组

向量空间

内积与正交知

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正交 化方法 定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;

线性代数第二 章

作者 刘国华

M AC

向量组的线》

相关性

向重组的极为 线性无关组

向量空间

内积与正交知

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正交 化方法

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组; A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1}=A^{T}$;

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性相关性

向量组的极力 线性 无关组

以任儿大组

.

r] ハーエ × ル 阵 _{肉和和正文級}

标准正义基和Schmidt正文化方法

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组; A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1}=A^{T}$;

A为正交矩阵当且仅当 A^{-1} 是正交矩阵.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

向量空间

内积与正交矩

内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正文 化方法 正文矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(7)向量组为单位正交组;A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1}=A^{T}$;

A为正交矩阵当且仅当 A^{-1} 是正交矩阵.

注

- A为正交矩阵⇒ |A| = ±1;
- 若A和B都为正交矩阵,则有AB 为正交阵.

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线| 相关性

向量组的极大 线性无关组

为和与正方组

内积与止父矩 阵 _{内积和正交性}

标准正交基 和Schmidt。 化方法 正交矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(7)向量组为单位正交组; A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1}=A^{T}$;

A为正交矩阵当且仅当 A^{-1} 是正交矩阵.

注

- A为正交矩阵⇒ |A| = ±1;
- 若A和B都为正交矩阵,则有AB 为正交阵.

侈

- (1) 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, 是正交矩阵, 则a, b, c 满足什么条件?
- (2) 若A 是正交矩阵, 则 $|A^3A^T|=$.

练习题

线性代数第二 章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组 白母空间

引积与正交矩 F

标准正交基 和Schmidt正: 化方法 正文矩阵 • 1, 与向量 $\alpha = (1,0,1), \beta = (1,1,1)$ 均正交的单位向量为?

- 2, 空间 R^2 中向量 $\eta = (2,3)$ 在 R^2 的基: $\alpha = (1,1), \beta = (0,1)$ 下的坐标为
- 3, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 是向量空间 R^n 的一组标准正交基, n维向量 α, β 在该基下的坐标分别为 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots y_n)^T$,则有:
 - (A): $\langle x, y \rangle \neq \langle \alpha, \beta \rangle$, (B): $||x y|| \neq ||\alpha \beta||$
 - (C): $\parallel \alpha \parallel = \parallel \beta \parallel$ 当且仅当x = y
 - (D): $\alpha n \beta$ 正交当且仅当x n y正交.
- 4, 设A 是正交矩阵, |A| = -1, $A_{i,j}$ 是 $a_{i,j}$ 的代数余子式,则
 - (A): $a_{i,j} = A_{i,j}$, (B): $a_{i,j} = A_{j,i}$,
 - (C): $a_{i,j} = -A_{i,j}$, (D) $a_{i,j} = -A_{j,i}$

章

作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量组的极大 线性无关组

可量空间

内积与正交矩 *

标准正交基 和Schmidt正交 化方法 **正交矩阵** • 1, 设 α 是单位向量.(1) 证明: 矩阵 $A = E - 2\alpha\alpha^T$ 是正交矩阵; (2) 当 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时, 求出矩阵A.

• 2,
$$\c \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$,

 $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的子空间,已知 $dim(V) = 2, \beta \in V, 求$: (1), a, b. (2) 求V 的一组基,以及 β 在这组基下的坐标. (3) 求V 的一个标准正交基.

• 3,设向量空间V 有两组基: I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 和II: $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 且由I 到II 的过渡矩阵为C,证明 (1)如果I 和II 都是标准正交基,则有C是正交矩阵. (2)如果I 都是标准正交基,C是正交矩阵,则有II 也是标准正交基.