线性代数第二章

作者 刘国华

东南大学 数学系

November 1, 2019

目 录

向量的历史

- 古希腊的亚里士多德(Aristotle): 二力合成的平行四边形法则
- 法国数学家笛卡尔(René Descartes): 解析几何
- 1831年, 德国数学家高斯(Johann Carl Friedrich Gauss): 复平面的概念
- 1844年, 德国数学家格拉斯曼(Hermann Günter Grassmann): n 维向量
- 英国物理学家数学家亥维赛(Oliver Heaviside): 向量分析
- 1888年, 意大利数学家皮亚诺(Giuseppe Peano): 以公理的方式定义了有/无限维向量空间

向量的定义

引例 $n>3$时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.

向量的定义

引例 $n > 3$时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.

向量的定义

引例 $n > 3$时, n 维向量没有直观的几何形象，却有广泛的实际意义.

确定飞机的状态，需以下6个参数:

- 机身的仰角$\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

向量的定义

引例 $n > 3$时, n 维向量没有直观的几何形象，却有广泛的实际意义.

确定飞机的状态，需以下6个参数：

- 机身的仰角$\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- 机翼的转角$\psi := [-\pi, \pi]$;

向量的定义

引例 $n > 3$时，n 维向量没有直观的几何形象，却有广泛的实际意义.

确定飞机的状态，需以下6个参数：

- 机身的仰角$\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- 机翼的转角$\psi := [-\pi, \pi]$;
- 机身的水平转角$\theta := [0, 2\pi]$;

向量的定义

引例 $n > 3$时, n 维向量没有直观的几何形象，却有广泛的实际意义.

确定飞机的状态，需以下6个参数:

- 机身的仰角$\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- 机翼的转角$\psi := [-\pi, \pi]$;
- 机身的水平转角$\theta := [0, 2\pi]$;
- 飞机重心在空间的位置参数$P(x, y, z)$.

所以,确定飞机的状态,需用6维向量

$$x, y, z, \varphi, \psi, \theta$$

n 维向量的定义

定义

设 $a_1, \ldots, a_n$ 是 R 或者 C 中的 n 个数,则称有序数组 $(a_1, \ldots, a_n)$ 为 R 或者 C 上的 n 维行向量,称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为 R 或者 C 上的 n 维列向量.

向量的线性运算

定义

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则定义向量的加法和数乘运算为

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad k\alpha = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \cdots \\ ka_n \end{pmatrix}, \forall k \in R.$$

八条基本运算性质

关于向量的加法,数乘.关于行（列）向量的加法和数乘,我们有下列八条性质成立.

记$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in R,\ 1 \le i \le n \right\}$,

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in R^n, \forall \lambda, \mu \in R$,

1. 加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在$0 \in R^n$,使$0 + \alpha = \alpha$;
4. “负元”存在性：即$\forall \alpha$,存在β,使得$\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
7. 数乘结合律：$(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha)$;
8. 幺等律：$1\alpha = \alpha$.

八条基本运算性质

关于向量的加法,数乘.关于行（列）向量的加法和数乘,我们有下列八条性质成立.

记$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in R,\ 1 \leq i \leq n \right\}$,

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in R^n, \forall \lambda, \mu \in R$,

1. 加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. "零元"存在性：即存在$0 \in R^n$,使$0 + \alpha = \alpha$;
4. "负元"存在性：即$\forall \alpha$,存在β,使得$\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
7. 数乘结合律：$(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha)$;
8. 幺等律：$1\alpha = \alpha$.

此性质作为公理来定义抽象的线性空间.

线性组合和线性表示的定义

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 都是n 维向量， $k_1, k_2, \cdots k_s$ 是数,则称向量:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的线性组合, $k_1, k_2, \cdots k_s$ 是这个线性组合的系数.如果n 维向量 η 可以写成$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的线性组合,则称 η 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示.

定义

例

设$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\alpha'=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，试分别将$\alpha,\alpha'$用向量$\beta$和$\gamma$线性表示.

定义

例

设$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，试分别将$\alpha$, α' 用向量β和γ线性表示.

例

设$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，试将$\eta$用向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots \varepsilon_n$（称为基本单位向量组）线性表示.

方程组与线性表示:

$$A_{mn}X = b \text{ 有解} \Leftrightarrow (A_1,\ A_2,\ \cdots A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = b \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow \text{存在实数} x_1, x_2, \cdots x_n, \text{使得} b = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

方程组与线性表示:

$$A_{mn}X = b \text{ 有解} \Leftrightarrow (A_1,\ A_2,\ \cdots A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \text{ 有解}$$

$\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = b$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在实数$x_1, x_2, \cdots x_n$, 使得$b = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$

$\Leftrightarrow$ 向量b 可以由$A_1,\ A_2,\ \cdots A_n$ 线性表示.

方程组与线性表示：

$$A_{mn}X=b \text{ 有解} \Leftrightarrow (A_1,\ A_2,\ \cdots A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=b \text{ 有解}$$

$\Leftrightarrow x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n=b$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在实数$x_1,x_2,\cdots x_n$，使得$b=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n$

$\Leftrightarrow$ 向量b 可以由$A_1,\ A_2,\ \cdots A_n$ 线性表示.

问题：

唯一解和无数多解对应的线性表示应该是什么？

向量组的等价

Definition:

设两组向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$, 如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$中每一个向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示, 则称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示, 如果两组向量可以互相线性表示,则称这两组向量是等价的.

向量组的等价

Definition:

设两组向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$, 如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$中每一个向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示, 则称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示, 如果两组向量可以互相线性表示,则称这两组向量是等价的.

记矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$, 矩阵$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$, 则向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示当且仅当矩阵方程$AX = B$有解.

向量组的等价

Example:

验证下列两组向量等价

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remark:

- 等价关系满足自反性,对称性和传递性.

向量组的等价

Example:

验证下列两组向量等价

$$I:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$II:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Remark:

- 等价关系满足自反性,对称性和传递性.
- 若向量组I与II 等价,则I,II与$\{I,II\}$三组向量互相等价.

基本概念

$$\text{一组列向量组: } \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$$
$$\downarrow$$
$$\text{矩阵} A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$$
$$\downarrow$$
$$\text{矩阵} A \text{ 的秩.}$$
$$\downarrow$$
$$\text{向量组: } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \text{ 的秩.}$$

定义

向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 所对应的矩阵的秩称为称为这个向量组的秩, 记为$r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

向量组的等价与矩阵的等价

定理

如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示，则

$$r\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$$

向量组的等价与矩阵的等价

定理

如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示，则

$$r\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$$

记$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$,
则向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价
$\Leftrightarrow$ 矩阵方程$AX = B$, $BY = A$ 都有解$\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B)$.

向量组的等价与矩阵的等价

定理

如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示，则

$$r\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$$

记$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$,
则向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价
$\Leftrightarrow$ 矩阵方程$AX = B$, $BY = A$ 都有解$\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B)$.
矩阵A 和B 等价当且仅当$r(A) = r(B)$.
矩阵等价和向量组等价之间有关系吗？

Proposition:

如果向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价,则$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$等价. 反之不成立.

Proposition:

如果向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价,则$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$等价. 反之不成立.

反例: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition:

如果向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$和$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$等价,则$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$等价. 反之不成立.

反例: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remark:

两个矩阵行向量组等价与列向量组等价没有关系.

向量组的线性相关性的定义

定义

如果向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩小于向量组的个数, 则称这组向量是线性相关的, 否则称为线性无关的. $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

向量组的线性相关性

n维向量之间最简单的关系是比例关系，设$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$，$\beta = (b_1, \cdots, b_n)$，如果存在$k \in R$，使$\alpha = k\beta$ 或$\beta = k\alpha$，称α与β 成比例.

向量组的线性相关性

n维向量之间最简单的关系是比例关系，设$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$，$\beta = (b_1, \cdots, b_n)$，如果存在$k \in R$，使$\alpha = k\beta$ 或$\beta = k\alpha$，称α与β 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量，就是向量组的线性相关关系.

向量组的线性相关性

n维向量之间最简单的关系是比例关系，设$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$, 如果存在$k \in R$, 使$\alpha = k\beta$ 或$\beta = k\alpha$, 称α与β 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量，就是向量组的线性相关关系.

定义 (定理)

给定向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数$k_1$, k_2, $\cdots$, k_s, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \boldsymbol{0}$$

则称向量组I **线性相关**.

向量组的线性相关性

n维向量之间最简单的关系是比例关系, 设$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$, 如果存在$k \in R$, 使$\alpha = k\beta$ 或$\beta = k\alpha$, 称α与β 成比例.
把这种比例关系推广到更多的向量, 就是向量组的线性相关关系.

定义 (定理)

给定向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \boldsymbol{0}$$

则称向量组I **线性相关**.否则称向量组A **线性无关**. 也就是说, 当且仅当$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$时才能成立, 则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

线性相关与线性无关

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.

线性相关与线性无关

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow r(A) < s$.

线性相关与线性无关

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$
$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.
$\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理，有

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关
$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 只有零解.

线性相关与线性无关

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$
$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.
$\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理，有

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关
$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 只有零解.
$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 没有非零解.

线性相关与线性无关

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$
$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.
$\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理，有

Remark

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关
$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 只有零解.
$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$ 没有非零解.
$\Leftrightarrow r(A) = s$.

例

设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$，判断$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性相关性.

线性相关与线性无关

例

设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$，判断$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性相关性.

例

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$，$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$，证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

线性相关与线性无关

由定义，易知有以下结论：

线性相关与线性无关

由定义, 易知有以下结论:

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.

线性相关与线性无关

由定义, 易知有以下结论:

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.

线性相关与线性无关

由定义, 易知有以下结论:

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.

线性相关与线性无关

由定义, 易知有以下结论:

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1} \cdots$ 也线性相关.

线性相关与线性无关

由定义，易知有以下结论：

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1} \cdots$ 也线性相关.
- 当$m > n$时,任意m 个n维向量线性相关.

线性相关与线性无关

由定义，易知有以下结论：

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1} \cdots$ 也线性相关.
- 当$m > n$时,任意m 个n维向量线性相关.
- $n+1$ 个n维向量线性相关.

线性相关与线性无关

由定义, 易知有以下结论:

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1} \cdots$ 也线性相关.
- 当$m > n$时,任意m 个n维向量线性相关.
- $n+1$ 个n维向量线性相关.
- 如果n维向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$线性相关, 那么在每个向量中都任意去掉同一个序号的分量, 得到的$n-1$维向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 也线性相关.

例

设n 维向量η 和$n\times n$ 矩阵A 满足$A^{k-1}\eta\neq 0$, 但$A^k\eta=0$, 证明向量组$\eta, A\eta, A^2\eta, \cdots A^{k-1}\eta$ 线性无关.

线性相关性的判定定理

定理

向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)\}$线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

线性相关性的判定定理

定理

向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)\}$线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理

设向量组I : $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$线性无关, 而向量组$II$: $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 线性相关, 则向量β一定能用向量组I线性表示, 且表示式是唯一的.

线性相关性的判定定理

定理

向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)\}$线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理

设向量组I : $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$线性无关, 而向量组$II$: $\{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 线性相关, 则向量β一定能用向量组I线性表示, 且表示式是唯一的.

性质

如果 n 个n 维向量$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关,则任意 n 维向量 η 都可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性表示. 反之也成立.

极大线性无关组

定理

设$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的秩为$r$，则在$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 中存在部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ ，满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关；
- I中每一个向量都可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示，

极大线性无关组

定理

设$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的秩为$r$，则在$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 中存在部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ ，满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关;
- I中每一个向量都可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示,

定义

设向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的部分向量组，且满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关;
- I中每一个向量都可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示,

则称$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$为向量组$I$的一个**极大线性无关组**，简称**极大无关组**.

例

求向量组I:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的极大无关组.

例

求向量组I:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

的极大无关组.

例

已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,求向量组$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_3-\alpha_1$的一个极大无关组.

极大线性无关组

为了应用的方便，给出极大无关组的等价定义.

极大线性无关组

为了应用的方便, 给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意$r+1$个向量都线性相关,

则$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$为向量组$A$的一个**极大线性无关组**.

极大线性无关组

为了应用的方便，给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的部分向量组，且满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意$r+1$个向量都线性相关,

则$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$为向量组$A$的一个**极大线性无关组**.

定理

- 任何向量组I与它自身的极大无关组等价.

极大线性无关组

为了应用的方便，给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的部分向量组，且满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意$r+1$个向量都线性相关,

则$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$为向量组$A$的一个**极大线性无关组**.

定理

- 任何向量组I与它自身的极大无关组等价.
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.

极大线性无关组

为了应用的方便，给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$的部分向量组，且满足

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意$r+1$个向量都线性相关,

则$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$为向量组$A$的一个**极大线性无关组**.

定理

- 任何向量组I与它自身的极大无关组等价.
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.个数一样吗？
- 秩为r的向量组I中任意r个线性无关的向量，均为该向量组的一个极大无关组.

向量组的秩

remark

- $0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s$;

向量组的秩

remark

- $0 \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \leq s$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$;

向量组的秩

remark

- $0 \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \leq s;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow$至少存在一个$\alpha_i \neq 0;$

向量组的秩

remark

- $0 \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \leq s$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow$至少存在一个$\alpha_i \neq 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;

向量组的秩

remark

- $0 \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \leq s$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow$至少存在一个$\alpha_i \neq 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} < s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性相关;

向量组的秩

remark

- $0 \leq r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \leq s$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow$至少存在一个$\alpha_i \neq 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} < s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性相关;
- 在几何空间中，
  $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 1 \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 共线且非零向量;

向量组的秩

remark

- $0 \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} \le s$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} > 0 \Leftrightarrow$至少存在一个$\alpha_i \neq 0$;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性无关;
- $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} < s \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 相性相关;
- 在几何空间中,
  $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 1 \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 共线且非零向量;
  $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\} = 2 \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 共面但不共线.

向量组的秩与矩阵的秩

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

向量组的秩与矩阵的秩

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试写出A 的行向量组的极大无关组和行秩,以及A 的列向量组的极大无关组和列秩.

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试写出A 的行向量组的极大无关组和行秩,以及A 的列向量组的极大无关组和列秩.

任意矩阵的行秩和列秩之间的关系?

矩阵的行秩与列秩

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

矩阵的行秩与列秩

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

矩阵的行秩与列秩

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

引理

阶梯形矩阵行（列）向量租的秩都等于矩阵的秩.

矩阵的行秩与列秩

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

引理

阶梯形矩阵行（列）向量租的秩都等于矩阵的秩.

定理

矩阵的行秩和列秩相等，都等于矩阵的秩.

求一个向量组的极大无关组的方法:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{array} \end{array}$$

- 行最简形的主列是其列向量组的极大无关组
- 初等行变换不改变列向量间的线性关系

按列向量组构成矩阵 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \tilde{A}$, (阶梯阵)

- 阶梯阵的主列对应的原矩阵的列也是原矩阵列向量组的极大无关组;
- 若要将非主列用极大无关组线性表示,则要化成行简化阶梯阵.

例

求向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

的秩和一个极大无关组，并将其余的向量(如果有的话)用此极大无关组线性表出.

矩阵可逆的等价命题

remark

多角度看矩阵可逆

- 方阵A 可逆$\Leftrightarrow AB = BA = E$;
- $\Leftrightarrow |A| \neq 0$; A非奇异、非退化
- $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ 的行最简形矩阵为$E \Leftrightarrow A$ 与单位阵等价;
- $\Leftrightarrow A$ 为一系列初等矩阵的乘积;
- $\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量组$A_1 \cdots A_n$ 线性无关;
- $\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量组$A_1 \cdots A_n$ 的极大无关组是它自身;
- $\Leftrightarrow A$ 行(列)秩等于 n;
- $\Leftrightarrow$ 任一n 维向量α 都可以由向量组$A_1 \cdots A_n$ 线性表示.

练习题

- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 线性无关的充要条件是:
  1. $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 中任意向量都不是零向量;
  2. $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 中任意两个向量的分量都不成比例;
  3. 由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 构成的矩阵中有一个s 阶子式$\neq 0$;
  4. 由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 构成的矩阵中任意s 阶子式$\neq 0$.
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 线性无关的充要条件是:
  1. 存在全为0的数$k_1,k_2,\cdots k_s$ 使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\} = 0$;
  2. 当$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\} \neq 0$ 时, $k_1,k_2,\cdots k_s$ 不全为0;
  3. $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示;
  4. $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 中存在某向量不能由其余向量线性表示.

- 向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 秩为r 的充要条件是:
  1. $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意r 个向量线性无关;
  2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中存在r 个线性无关的向量;
  3. 由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中任意$r+1$ 个向量线性相关;
  4. 由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 中存在r 个线性无关的向量, 但任意任意$r+1$ 个向量线性相关.
- 向量组$I: \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 秩为r, 则以下说法错误的是:
  1. 与I 等价的任意一个线性无关向量组均含有r 个向量;
  2. I 中任意r 个向量都是其极大无关组;
  3. I 中任意r 个线性无关的向量都是其极大无关组;
  4. I 中任意极大无关组均含有r 个向量.

- 设n 维向量组$I:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}$ 线性无关，则n 维向量组$II:\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s\}$ 线性无关的充要条件是:
  1. I 可由II 线性表示;
  2. II 可由I 线性表示;
  3. I 与II 等价;
  4. 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$ 与 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$ 等价.

R^n的子空间

Definition:

设S 为$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则称S 为R^n的一个子空间.

R^n的子空间

Definition:

设S 为$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$的非空子集且对加法和数乘封闭,则称$S$ 为R^n的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.

R^n的子空间

Definition:

设S 为$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则称S 为R^n的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n和0 也是R^n 的子空间,成为平凡子空间.

R^n的子空间

Definition:

设S 为$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则称S 为R^n的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n和0 也是R^n 的子空间,成为平凡子空间.

例

(1)$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 0\}$ 是子空间吗?

R^n的子空间

Definition:

设S 为$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则称S 为R^n的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n和0 也是R^n 的子空间,成为平凡子空间.

例

$$(1)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 0\}$$ 是子空间吗?

$$(2)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 1\}$$ 是子空间吗?

核空间和列空间

定义

设$A_{s\times n}$,则齐次线性方程组$Ax=0$ 的解的全体所构成的集合

$$K(A)=\{x\in R^n|Ax=0\}$$

是R^n的子空间,称为齐次方程组的解空间，也成为矩阵A 的核空间或者零空间.

核空间和列空间

定义

设$A_{s\times n}$,则齐次线性方程组$Ax=0$ 的解的全体所构成的集合

$$K(A)=\{x\in R^n|Ax=0\}$$

是R^n的子空间,称为齐次方程组的解空间, 也成为矩阵A 的核空间或者零空间.

注

非齐次方程组的解集不是子空间.

核空间和列空间

定义

设$A_{s\times n}$,则齐次线性方程组$Ax=0$ 的解的全体所构成的集合

$$K(A)=\{x\in R^n|Ax=0\}$$

是R^n的子空间,称为齐次方程组的解空间，也成为矩阵A 的核空间或者零空间.

注

非齐次方程组的解集不是子空间.

定义

设$A_{s\times n}$,则集合

$$R(A)=\{\eta\in R^s|\exists\ x\in R^n,\ \eta=Ax\}$$

是R^s的子空间,称为矩阵A 的值域或者列空间.

生成子空间

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in R^n$ ，用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合，即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},$$

则称$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生成的子空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

生成子空间

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in R^n$ ，用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合，即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},$$

则称$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生成的子空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t)$, 则$L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A)$.

生成子空间

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in R^n$ ，用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合，即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},$$

则称$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生成的子空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t)$, 则$L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A)$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$.

生成子空间

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in R^n$ ，用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合，即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},$$

则称$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生成的子空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t)$, 则$L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A)$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$.
- 生成的子空间是包含$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$的所有向量空间中最小的.

生成子空间

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in R^n$，用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合，即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},$$

则称$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生成的子空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t)$，则$L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A)$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$.
- 生成的子空间是包含$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$的所有向量空间中最小的.
- 线性方程组$AX = b$ 有解当且仅当$b \in R(A)$.

例

假设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$,分别求$A$的值域$R(A)$和核空间$K(A)$的一组基以及它们的维数.

基、维数和坐标

以下涉及的向量空间V均指R^n的子空间.

定义

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$是向量空间$V$中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,

则称$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$为$V$的一个基.

基、维数和坐标

以下涉及的向量空间V均指R^n的子空间.

定义

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$是向量空间$V$中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,

则称$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$为$V$的一个基.

如果将向量空间看成一个向量组时, 向量空间的一个基其实就是该向量组的一个极大无关组, 所以向量空间的任意两个基所含向量的个数相等.

基、维数和坐标

以下涉及的向量空间V均指R^n的子空间.

定义

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$是向量空间$V$中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,

则称$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$为$V$的一个**基**.

如果将向量空间看成一个向量组时, 向量空间的一个基其实就是该向量组的一个极大无关组, 所以向量空间的任意两个基所含向量的个数相等.

定义

把基所含向量的个数s称为V的**维数**, 记作$\mathrm{dim}V = s$.

例

求 R^n 的一组基及其维数.

例

求R^n 的一组基及其维数.

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{则} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots \varepsilon_n$$

是R^n的一组基（称为基本单位向量组）.

例

求R^n 的一组基及其维数.

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$ 则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots \varepsilon_n$

是R^n的一组基（称为基本单位向量组）.

例

记$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + 2y - 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3z - 2y \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z \in R, \right\}$

求V 的一组基.

基、维数和坐标

值得一提的是, 数域上的向量空间V如果是非零向量空间, 那么它有无穷多个基(请读者自己思考).

值得一提的是，数域上的向量空间V如果是非零向量空间，那么它有无穷多个基(请读者自己思考).

由定义可直接推出：n维向量空间中任意n个线性无关的向量都是它的一个基.零空间的维数定义为0.

生成子空间的基和维数

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},$$

则有生成子空间$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

生成子空间的基和维数

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 记

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\cdots+k_s\alpha_s|k_i,i=1,\cdots,s\}$,

则有生成子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

Theorem

设$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组就是V 的一组基,因此, $dimV=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

生成子空间的基和维数

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 记

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\cdots+k_s\alpha_s|k_i,i=1,\cdots,s\}$,

则有生成子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

Theorem

设$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组就是V 的一组基,因此, $dimV=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

注

矩阵A的列空间的基就是其列向量组的极大无关组.

$$dimL(A_1,A_2,\cdots,A_s)=r(A_1,A_2,\cdots,A_s)=r(A).$$

生成子空间的基和维数

例

设矩阵$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

求$L(A) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 的一组基.

生成子空间的基和维数

例

设矩阵 $A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

求 $L(A) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 的一组基.

按列向量组构成矩阵经过初等行变换变成阶梯阵，则有阶梯阵的主列对应的原矩阵的列是生成子空间的基.

坐标

定理

如果$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是向量空间$V$的一个基，那么$V$中每一个向量都可以唯一地表示成$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的线性组合.

坐标

定理

如果$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是向量空间$V$的一个基，那么$V$中每一个向量都可以唯一地表示成$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的线性组合.

这个定理告诉我们：在向量空间V中，如果选定了一个基，并且规定了基向量的顺序之后，对于V中每一个向量，就有唯一的n元有序数组与之对应.

坐标

定理

如果$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是向量空间$V$的一个基，那么$V$中每一个向量都可以唯一地表示成$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的线性组合.

这个定理告诉我们：在向量空间V中，如果选定了一个基，并且规定了基向量的顺序之后，对于V中每一个向量，就有唯一的n元有序数组与之对应.

定义

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为向量空间V的一个基，对任意向量$\beta \in V$，如果

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则称n元数组$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$为$\beta$关于基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的**坐标**，数$x_i$叫做向量$\beta$关于基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的第$i$个坐标分量$(i = 1, \cdots, n)$.

坐标

例

向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$下的坐标是？

坐标

例

向量$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$在基$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$下的坐标是?

在基$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_4,\epsilon_3$下的坐标是?

坐标

例

向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$下的坐标是?

在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_3$下的坐标是?

在基$2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 3\epsilon_3, 4\epsilon_4$下的坐标是?

过渡矩阵

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$V$ 中两组基，如果有

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{n2}\alpha_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \cdots + c_{nn}\alpha_n. \end{cases}$$

将其形式上记为

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

定义

称$C = (c_{ij})_{n\times n}$是从基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

过渡矩阵

若一个向量$\eta \in V$，在$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$下的坐标向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

即 $\eta = \sum_{k=1}^n x_i \beta_i$, 则有

$$\eta = \sum_{k=1}^n x_k \beta_k = \left(\sum_{k=1}^n c_{1k} x_k\right) \alpha_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n c_{nk} x_k\right) \alpha_n$$

性质

设 C 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的**过渡矩阵**,向量 η在$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量为 x,则 η在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标向量为 Cx.

过渡矩阵

设从基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **的过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量.

过渡矩阵

设从基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵**为 Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n\times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的**过渡矩阵**,向量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量为 x,则 η在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标向量为 Cx.

过渡矩阵

设从基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **的过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是α_j 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**过渡矩阵**,向量 η 在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标向量为 x,则 η在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标向量为 Cx.

所以,α_j 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 CQ_j,于是从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}CQ_1 & \cdots & CQ_n\end{pmatrix}=CQ$; 但另一方面,从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 E_n,我们得到 $CQ=E_n$.

过渡矩阵

设从基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵为 Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是α_j 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵,向量 η 在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标向量为 x,则 η在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标向量为 Cx.

所以,α_j 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 CQ_j,于是从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}CQ_1 & \cdots & CQ_n\end{pmatrix}=CQ$; 但另一方面,从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 E_n,我们得到 $CQ=E_n$.

性质

设矩阵 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵,则从基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵为 C^{-1}.

坐标变换

例

设R^3 中的两组基I :, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

II :, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

求：

- 从向量组I 到II的过渡矩阵.
- 求$\xi = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$ 在基I 和$II, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的坐标.

杜勒魔方

从杜勒魔方到向量空间
4阶Dürer魔方：
行和=列和=对角线（或次对角线）之和=每个小方块之和=四个角之和.
B=
8 22 7 13
5 15 14 16
17 3 18 12
20 10 11 9
Albrecht Dürer's Magic Square
A=
16 3 2 13
5 10 11 8
9 6 7 12
4 15 14 1
设A,B是任意两个Dürer 魔方，
A+B 是Dürer魔方吗？√
对任意实数k，kA是Dürer魔方吗？ √
你想构造Dürer魔方吗？
Dürer魔方有多少个？
如何构造所有的Dürer魔方？
8

杜勒魔方

求Dürer魔方空间的基

——培养化繁为简的思考模式

令R为行和，C为列和，D为对角线和，S为小方块和

凭空构造魔方空间的一组基是很难的

类似于n维空间的基本单位向量组，利用0和1来构造一些$R=C=D=S=1$的最简单的方阵。

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

1在第一行中有4种取法，第二行中的1还有两种取法。当第二行的1也取定后，第三、四行的1就完全定位了，故共有8个不同的最简方阵，称为基本魔方$Q_1,\dots,Q_8$

杜勒魔方

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad Q_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_6=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_7=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad Q_8=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

1在第一行中有4种取法，第二行中的1还有两种取法。当第二行的1也取定后，第三、四行的1就完全定位了，故共有8个不同的最简方阵，称为基本魔方$Q_1,\dots,Q_8$

杜勒魔方

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad Q_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_6=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_7=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad Q_8=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore Q_1+Q_4+Q_5+Q_8-Q_2-Q_3-Q_6-Q_7=0$ $Q_1,\dots,Q_8$ 线性相关

显然，Dürer空间中任何一个魔方都可以用$Q_1,Q_2,\dots,Q_8$来线性表示，但它们能否构成D空间的一组基呢？

杜勒魔方

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad Q_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_6=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_7=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad \boxed{Q_8=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}}$$

$\therefore Q_1+Q_4+Q_5+Q_8-Q_2-Q_3-Q_6-Q_7=0$ $Q_1,\ldots,Q_8$线性相关

由 $r_1Q_1+r_2Q_2+r_3Q_3+r_4Q_4+r_5Q_5+r_6Q_6+r_7Q_7=0$

可得 $\forall r_i=0$ $\therefore Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$ 线性无关。

$Q_1,\ldots,Q_7$构成D空间的一组基，任意Dürer魔方都可由其线性表示.

构造Albrecht Dürer的数字魔方

$$D = r_1Q_1 + r_2Q_2 + r_3Q_3 + r_4Q_4 + r_5Q_5 + r_6Q_6 + r_7Q_7$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_1+r_2 & r_6 & r_5+r_7 & r_3+r_4 \\ \hline r_3+r_5 & r_4+r_7 & r_1+r_6 & r_2 \\ \hline r_4+r_6 & r_2+r_5 & r_3 & r_1+r_7 \\ \hline r_7 & r_1+r_3 & r_2+r_4 & r_5+r_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 16 & 3 & 2 & 13 \\ \hline 5 & 10 & 11 & 8 \\ \hline 9 & 6 & 7 & 12 \\ \hline 4 & 15 & 14 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{r_1 = 8, r_2 = 8, r_3 = 7, r_4 = 6, r_5 = -2, r_6 = 3, r_7 = 4}$$

坐标

$$D = 8Q_1 + 8_2Q_2 + 7Q_3 + 6Q_4 - 2Q_5 + 3Q_6 + 4Q_7$$

$Q_1,\dots,Q_7$构成D空间的一组基，任意Dürer魔方都可由其线性表示.

向量内积的概念

推广数量积的概念到R^n空间中去, 给出如下定义:

定义

设 $\alpha, \beta \in R^n, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, 称实数

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

为向量α与β的**内积**, 记为$< \alpha, \beta >$, 即$< \alpha, \beta >= a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

向量内积的概念

推广数量积的概念到R^n空间中去，给出如下定义：

定义

设 $\alpha, \beta \in R^n, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$，称实数

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

为向量α与β的**内积**，记为$< \alpha, \beta >$，即$< \alpha, \beta >= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

如果α、β都是列向量，则利用矩阵乘法可将α与β的内积表示为

$$< \alpha, \beta >= \alpha^{\mathrm{T}} \beta = \beta^{\mathrm{T}} \alpha.$$

容易验证内积具有下列基本性质：

- (1) 对称性$<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>$;
- (2) 线性性$<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$

$$<k\alpha,\beta>=k<\alpha,\beta> \quad (k \text{ 为实数});$$

- (3) 非负性 $<\alpha,\alpha>\geq 0$, 等号成立当且仅当$\alpha=0$.

定义

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, 称$\|\alpha\| = \sqrt{< \alpha, \alpha >} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$为向量$\alpha$的长度(模). 当$\| \alpha \| = 1$时, 则称$\alpha$为单位向量.

定义

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$，称$\|\alpha\| = \sqrt{<\alpha,\alpha>} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$为向量$\alpha$的长度(模). 当$\| \alpha \| = 1$时，则称$\alpha$为单位向量.

例如，设$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，则$\| \alpha \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{30}$.

而向量$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$是一个三维单位向量.

若向量$\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量α的单位化向量.

若向量$\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\| \alpha \|}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量α的单位化向量.

性质

设n维向量α, β, 则有

$$|< \alpha, \beta >| \leqslant \| \alpha \| \| \beta \|$$

称为柯西–施瓦茨(*Cauchy-Schwarz*)不等式.

若向量$\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\| \alpha \|}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量α的单位化向量.

性质

设n维向量α, β, 则有

$$|< \alpha, \beta >| \leqslant \| \alpha \| \| \beta \|$$

称为柯西–施瓦茨(*Cauchy-Schwarz*)不等式.

定义

设非零向量α, β, α 与β的夹角θ由以下公式定义:

$$\cos \theta = \frac{< \alpha, \beta >}{\| \alpha \| \| \beta \|}.$$

这里向量的长度与夹角是解析几何中长度与夹角的推广.
向量的长度有以下性质:

- (1)非负性 $\| \alpha \| \geq 0$, 当且仅当$\| \alpha \| = 0$ 时$\alpha = 0$;
- (2) 齐次性 $\| \lambda\alpha \| = | \lambda | \| \alpha \|$ (λ);
- (3) 三角不等式 $\| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$.

这里向量的长度与夹角是解析几何中长度与夹角的推广.
向量的长度有以下性质：

- (1)非负性 $\| \alpha \| \geq 0$, 当且仅当$\| \alpha \| = 0$ 时$\alpha = 0$;
- (2) 齐次性 $\| \lambda\alpha \| = | \lambda | \| \alpha \|$ (λ);
- (3) 三角不等式 $\| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$.

有了角度的概念, 当两个非零向量夹角是$\frac{\pi}{2}$ 时, 称它们是正交的. 为方便起见, 补充规定：零向量与任何向量正交. 并给出以下定义：

定义

设$\alpha, \beta \in R^n$, 当$< \alpha, \beta >= 0$时, 称α与β **正交**.

正交向量组

定义

两两正交的非零向量组称为**正交向量组**, 简称**正交组**.

例如, 向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是$R^3$中的一个正交组.

如果一个正交组的每个向量都是单位向量, 称它是**单位正交组**.

例如, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$是$R^3$中的一个单位正交组.

性质

设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是一正交组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

向量空间V中的基如果只一个标准正交向量组, 则称此基是V的标准正交基.

引理

如果向量β与向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中每一个正交, 那么$\beta$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的任意一个线性组合也正交.

向量空间V中的基如果只一个标准正交向量组, 则称此基是V的标准正交基.

引理

如果向量β与向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中每一个正交, 那么$\beta$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的任意一个线性组合也正交.

定理

设$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$是$n$维向量空间$R^n$的一组线性无关的向量组, 则存在一个正交组$\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$, 使$\beta_1,\cdots,\beta_m$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出.

定理

每个非零的向量空间都有标准正交基.

上述方法称为**Schmidt**正交化方法.

用Schmidt正交化方法将给定的线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$正交化是指取：

$$\begin{aligned}
\beta_1 = & \ \alpha_1 \\
\beta_2 = & \ \alpha_2 - \frac{<\beta_1,\alpha_2>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1 \\
\beta_3 = & \ \alpha_3 - \frac{<\beta_1,\alpha_3>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1 - \frac{<\beta_2,\alpha_3>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2 \\
\cdots & \\
\beta_s = & \ \alpha_s - \frac{<\beta_1,\alpha_s>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1 - \frac{<\beta_2,\alpha_s>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2 - \cdots - \\
& \frac{<\beta_{s-1},\alpha_s>}{<\beta_{s-1},\beta_{s-1}>}\beta_{s-1}.
\end{aligned}$$

则有$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$是线性无关的正交向量组,且与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价.

用Schmidt正交化方法将给定的线性无关向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$正交化是指取:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{<\beta_1, \alpha_2>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{<\beta_1, \alpha_3>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 - \frac{<\beta_2, \alpha_3>}{<\beta_2, \beta_2>}\beta_2 \\
&\cdots \\
\beta_s &= \alpha_s - \frac{<\beta_1, \alpha_s>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 - \frac{<\beta_2, \alpha_s>}{<\beta_2, \beta_2>}\beta_2 - \cdots - \\
&\quad \frac{<\beta_{s-1}, \alpha_s>}{<\beta_{s-1}, \beta_{s-1}>}\beta_{s-1}.
\end{aligned}
$$

则有$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s$是线性无关的正交向量组,且与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$等价.

要得到与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$等价的标准正交向量组,只要将$\beta_1, \beta_2, \cdots$单位化即可.

例

设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, 利用$Schmidt$正交化方法求出单位正交组$e_1, e_2, e_3$.

例

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, 利用$Schmidt$正交化方法求出单位正交组$e_1,e_2,e_3$.

$$e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

正交矩阵

正交概念相联系的一个重要概念是正交矩阵.

定义

如果实方阵A满足

$$AA^T = A^TA = E \quad (\text{或 } A^{-1} = A^T)$$

则称方阵A为正交矩阵.

正交矩阵

正交概念相联系的一个重要概念是正交矩阵.

定义

如果实方阵A满足

$$AA^T = A^TA = E \quad (\text{或 } A^{-1} = A^T)$$

则称方阵A为正交矩阵.

下列矩阵和它们的转置矩阵均是正交的

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;

正交矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;
A为正交矩阵当且仅当$A^{-1}=A^T$;

正交矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;
A为正交矩阵当且仅当$A^{-1} = A^T$;
A为正交矩阵当且仅当A^{-1} 是正交矩阵.

正交矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;
A为正交矩阵当且仅当$A^{-1}=A^T$;
A为正交矩阵当且仅当A^{-1} 是正交矩阵.

注

- A为正交矩阵$\Rightarrow |A|=\pm 1$;
- 若A和B都为正交矩阵,则有AB 为正交阵.

正交矩阵

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;
A为正交矩阵当且仅当$A^{-1}=A^T$;
A为正交矩阵当且仅当A^{-1} 是正交矩阵.

注

- A为正交矩阵$\Rightarrow |A|=\pm 1$;
- 若A和B都为正交矩阵,则有AB 为正交阵.

例

(1) 若$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, 是正交矩阵, 则$a, b, c$ 满足什么条件?
(2) 若A 是正交矩阵, 则$|A^3A^T|=$.

练习题

- 1, 与向量$\alpha = (1,0,1), \beta = (1,1,1)$ 均正交的单位向量为?
- 2, 空间R^2 中向量$\eta = (2,3)$ 在R^2的基: $\alpha = (1,1), \beta = (0,1)$下的坐标为
- 3, 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 是向量空间R^n 的一组标准正交基, n维向量α, β 在该基下的坐标分别为$x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ 和$y = (y_1, y_2, \cdots y_n)^T$, 则有:
  (A): $\langle x,\ y\rangle \neq \langle \alpha,\ \beta\rangle$, (B): $\| x - y \| \neq \| \alpha - \beta \|$
  (C): $\| \alpha \| = \| \beta \|$ 当且仅当$x = y$
  (D): α和β正交当且仅当x和y正交.
- 4, 设A 是正交矩阵, $| A | = -1$, $A_{i,j}$ 是$a_{i,j}$ 的代数余子式,则
  (A): $a_{i,j} = A_{i,j}$, (B):$a_{i,j} = A_{j,i}$,
  (C):$a_{i,j} = -A_{i,j}$, (D)$a_{i,j} = -A_{j,i}$

练习题

- 1, 设α 是单位向量.(1) 证明：矩阵$A=E-2\alpha\alpha^T$ 是正交矩阵；(2) 当$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时，求出矩阵A.
- 2, 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\a\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\\b\end{pmatrix}$, $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间，已知$dim(V)=2, \beta\in V$,求：(1), a, b. (2) 求V 的一组基，以及β 在这组基下的坐标. (3) 求V 的一个标准正交基.
- 3, 设向量空间V 有两组基：$I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 和$II:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 且由I 到II 的过渡矩阵为C,证明
(1)如果I 和II 都是标准正交基, 则有C是正交矩阵.
(2)如果I 都是标准正交基, C是正交矩阵,则有II 也是标准正交基.