第四章习题

说明：证明期望是否存在，要说明绝对收敛；计算数学期望时，只要用定义的公式直接计算。关于积分、二重积分的计算，如果不熟练，一定要把高等数学书上的习题多做几个！

9.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$$ （奇函数在对称区间上的积分为 0）

$$DX=EX^2-(EX)^2=EX^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot e^{-x}dx=\Gamma(3)=2$$

10.

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{(\ln x-\mu)/\sigma=t}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\sigma t+\mu}dt[x=e^{\sigma t+\mu};dx=\sigma e^{\sigma t+\mu}dt]$$

$$=e^{\mu+\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}dt=e^{\mu+\sigma^2/2}.$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{\infty}x^2\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{(\ln x-\mu)/\sigma=t}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{2\sigma t+2\mu}dt[x=e^{\sigma t+\mu};dx=\sigma e^{\sigma t+\mu}dt]$$

$$=e^{2\mu+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}}dt=e^{2\mu+2\sigma^2}.$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-(e^{\mu+\sigma^2/2})^2=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

11.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

$$=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}\int_{0}^{+\infty}(\beta x)^\alpha e^{-\beta x}d(\beta x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$EX^2=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\beta^{\alpha+2}}\int_0^{+\infty}(\beta x)^{\alpha+1}e^{-\beta x}d(\beta x)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

13

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}x\frac{x^2}{\sigma^3}\sqrt{2/\pi}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\sigma^3}\sqrt{2/\pi}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{x/\sigma=t}{=}\sigma\sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt[dx=\sigma dt]$$

$$=\sigma\sqrt{2/\pi}[-t^2e^{-t^2/2}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt]=2\sigma\sqrt{2/\pi}.$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{x^2}{\sigma^3}\sqrt{2/\pi}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^4}{\sigma^3}\sqrt{2/\pi}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{x/\sigma=t}{=}\sigma^2\sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty}t^4e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2\sqrt{2/\pi}[-t^3e^{-t^2/2}\Big|_0^{\infty}+3\int_0^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt]$$

$$=3\sigma^2\sqrt{2/\pi}[-t^te^{-t^2/2}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt]=3\sigma^2.$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=3\sigma^2-\frac{8}{\pi}\sigma^2.$$

或者使用伽玛函数:

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\sigma^3}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2\sigma\cdot\int_0^{\infty}\frac{x^2}{2\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

$$=2\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\Gamma(2)=2\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x^4}{\sigma^3}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2\sqrt{2}\sigma^2\cdot\int_0^{\infty}(\frac{x^2}{2\sigma^2})^{3/2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

$$=\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{5}{2})=3\sigma^2$$

所以 $DX=EX^2-(EX)^2=3\sigma^2-\frac{8}{\pi}\sigma^2.$

17. $Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y, Y \le X \\ 500(X+Y), X < Y \end{cases}$

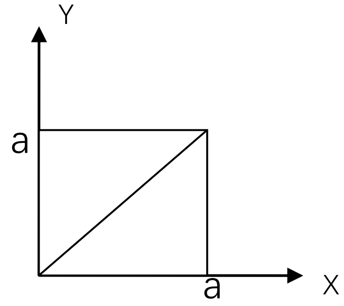
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}, 10 < x, y < 20 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EZ &= \iint g(x,y)\cdot f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{y\le x} 1000y\cdot f(x,y)dxdy + \iint_{y>x} 500(x+y)\cdot f(x,y)dxdy \\ &= \int_{10}^{20}(\int_{10}^{x} 10ydy)dx + \int_{10}^{20}(\int_{x}^{20} 5(x+y)dy)dx \end{aligned}$$

≈ 14166.67（如果累次积分的积分次序发生变化，积分上下限会有变化，自己注意）

20.在长为 a 的线段上随机地取两点 X,Y.求两点间距离的数学期望和方差。

解：以线段的左端点作为坐标轴的原点，以 X,Y 记两点的坐标。则 X~U[0,a],Y~U[0,a],且 X 和 Y 相互独立。两点的距离为|X-Y|。用 $f_X(x), f_Y(y), f(x,y)$ 分别表示随机变量 X,Y 的密度函数和他们的联合密度函数。



$$\begin{aligned} E|X-Y| &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\, f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\, f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{0}^{a}\int_{0}^{a}|x-y|\,\frac{1}{a^2}dxdy \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^x (x-y)dydx + \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^y (y-x)dxdy \\ &= a/3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E|X-Y|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)^2 f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)^2 f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{0}^{a}\int_{0}^{a}(x-y)^2\frac{1}{a^2}dxdy = a^2/6. \end{aligned}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = a^2/18.$$

22. 提示：用书上 109 页的结论可以得到，$Z=X-Y\sim N(0,1)$，再分别计算

$E|Z|, EZ^2, D|Z|$。

$$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d(\frac{z^2}{2})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E|Z|^2=EZ^2=E(X-Y)^2=EX^2-2EXEY+EY^2$$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$（如果用 Z 的密度函数计算，同样可以得到这个结论。）

$$D|Z|=EZ^2-(E|Z|)^2=1-\frac{2}{\pi}$$

如果直接用向量函数期望的计算公式（定理 4.2），就要计算二重积分，而且这个积分不管是使用直角坐标变成累次积分还是极坐标，计算量都比较大。

24. 令 $X_i=1$ 表示第 i 号球放在第 i 号盒子里，
$X_i=0$ 表示第 i 号球不在第 i 号盒子里；$i=1,2,\ldots,n$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$EX_i=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$

所以 $EX=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$

（注意：（1）这里的 $X_1,\ldots,X_n$ 同分布，但是并不是相互独立的，所以 X 不是二项分布；

2）这题用定义计算非常麻烦，因为 X 的分布律公式复杂，）

27.令 X_1 表示抽到第一种颜色球时的实验次数，X_i 表示抽到第 i-1 种颜色的球之后到抽到第 i 种颜色球的实验次数，i=1,2，⋯，n

则：$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$（抽到 n 种颜色球时的实验次数）

其中 X_i 服从几何分布，概率值 $p_i=\frac{N-i+1}{N}$，$EX_i=\frac{1}{p_i}$

所以：$EX=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)$

34、$D(X+Y+Z)=\operatorname{cov}(X+Y+Z,X+Y+Z)$

$$=DX+DY+DZ+2\operatorname{cov}(X,Y)+2\operatorname{cov}(X,Z)+2\operatorname{cov}(Y,Z)$$

$$=1+1+1+0+(-\frac{1}{2})\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=3$$

如果用方差的定义，去计算各种期望值，也可以，但是明显比使用协方差要繁琐，大家自己比较一下，然后想一想在不同的条件，采用什么方法更合适。

35、$\operatorname{cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)$

$$=\alpha^2DX-\beta^2DY+\alpha\beta\operatorname{cov}(X,Y)-\alpha\beta\operatorname{cov}(X,Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

$$D(\alpha X+\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,\ D(\alpha X-\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

所以 $\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

（X,Y 相互独立，所以协方差为 0，注意方差计算时，系数要平方。）