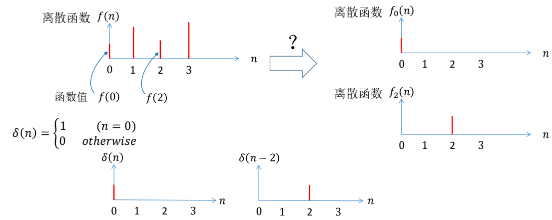
信号与(线性)系统

Signal and Linear System

核心知识点浏览

数学基础 – 函数与函数值，采样函数

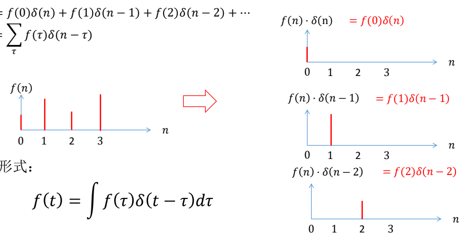


$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

数学基础 – 采样函数(单位冲激函数)

$$f(n)=f(0)\delta(n)+f(1)\delta(n-1)+f(2)\delta(n-2)+\cdots$$
$$=\sum_{\tau} f(\tau)\delta(n-\tau)$$

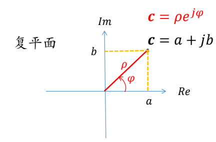
例：



连续形式：

$$f(t)=\int f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

数学基础 –复指数



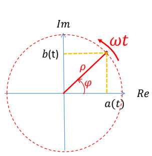
$$c=\rho e^{j\varphi}=\rho cos\varphi+j\rho sin\varphi$$

$$cos\varphi=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$$

$$sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2} \qquad a=\rho cos\varphi$$

$$\varphi=tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad b=\rho sin\varphi$$



$$c(t)=\rho e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$a(t)=\rho\cos(\omega t+\varphi)$$

$$b(t)=\rho\sin(\omega t+\varphi)$$

当在复平面上的点做在半径为 ρ 角速度为 ω 的圆周运动时

其实部呈余弦函数变化，虚部呈正弦函数变化

数学基础 – 内积

$f(t),g(t)$为复函数，定义内积

$$\langle f(t),g(t)\rangle=\int f(t)\cdot g^{*}(t)dt$$

$\langle f(t),g(t)\rangle=0 \;\Rightarrow\; f(t)$与$g(t)$正交

数学 基础 – 正交基和正交展开

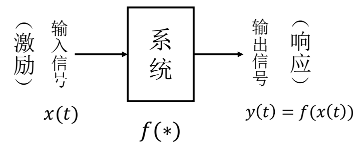
如果基函数$f_1(t), f_2(t), \ldots,$存在 $\langle f_m(t), f_n(t)\rangle = \begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$ $\Rightarrow$ 正交基

$f_k(t) = e^{jk\omega t}, (\mathrm{k} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $\langle f_m, f_n\rangle = \int e^{jm\omega t} e^{-jn\omega t} dt$

$g(t) = \sum_k A_k f_k(t)$ $g(t)$表示为正交基函数的线性叠加 => 正交展开（分解）

求展开系数 A_n ⇨ $\langle g(t), f_n(t)\rangle = \left\langle \sum_k A_k f_k(t),\ f_n(t)\right\rangle = \sum_k A_k \underbrace{\langle f_k(t), f_n(t)\rangle}_{k=n\ \to 1} = A_n$

系统是什么？



- 已知$f(*)$，估计$x(t) \to y(t)$
- 希望$x(t) \to y(t)$时，设计$f(*)$

线性系统核心知识点

线性系统定义 ⟶ 单位冲激响应/卷积 时间域方法

特征函数 ⟶ 系统传递函数 频率域方法

线性滤波器

线性时不变系统
Linear Time Invariant System

$x(t) \to f(*) \ \Rightarrow\ y(t) = f(x(t))$

线性 Linearity 【系统$f(*)$是线性函数】

$y_1(t) = f(x_1(t))$

$y_2(t) = f(x_2(t))$

⇨ $a\, y_1(t) + \mathrm{b}\, y_2(t) = f(a\, x_1(t) + b\, x_2(t))$

时不变Time Invariance

$y(t-\tau) = f(x(t-\tau))$

单位冲激响应(Unit Impulse Response)

如果可以知道采样函数（单位冲激）的响应（单位冲激响应）

$h(n) = f(\delta(n))$

任何函数都可以表达为采样函数（经过时间延迟）的线性叠加

$x(n) = \sum_\tau x(\tau)\delta(n-\tau)$

⇨ 线性时不变系统的响应即单位冲激响应（经过时间延迟）的线性叠加

$$y(n) = f(x(n)) = f\left(\sum_\tau x(\tau)\delta(n-\tau)\right)$$
$$= \sum_\tau x(\tau) f(\delta(n-\tau))$$
$$= \sum_\tau x(\tau) h(n-\tau)$$

卷积（Convolution)

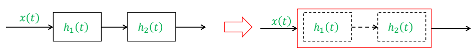
连续形式 $y(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$

离散形式 $y(n) = \sum_\tau x(\tau)h(n-\tau) = x(n) * h(n)$

☆ 单位冲激响应可以用于描述线性时不变系统

卷积的性质

- $h(t)*x(t)=x(t)*h(t)$ $\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- $h_2(t)*[h_1(t)*x(t)]=[h_1(t)*h_2(t)]*x(t)$



级联的线性系统可以等效为一个线性系统

$h(t)=[h_1(t)*h_2(t)]$

- $\frac{d}{dt}[h(t)*x(t)]=\frac{dh(t)}{dt}*x(t)=h(t)*\frac{dx(t)}{dt}$

特征函数 (Eigenfunction)

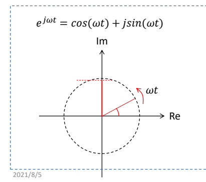
$\boxed{x(t)=e^{j\omega t}}$

⇩

$y(t)=\lambda x(t)$

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$
$$=\int e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau=e^{j\omega t}\int e^{-j\omega\tau}h(\tau)d\tau=\lambda x(t)$$
$$\lambda(\omega)=\int e^{-j\omega\tau}h(\tau)d\tau$$

$e^{j\omega t}=cos(\omega t)+jsin(\omega t)$



例：$x(t)=a_1\,e^{j\omega_1 t}+a_2\,e^{j\omega_2 t}+a_3\,e^{j\omega_3 t}$

只需要计算出 $\lambda(\omega_1),\lambda(\omega_2),\lambda(\omega_3)$

$y(t)=a_1\,\lambda(\omega_1)e^{j\omega_1 t}+a_2\,\lambda(\omega_2)e^{j\omega_2 t}+a_3\,\lambda(\omega_3)e^{j\omega_3 t}$

不再需要直接做卷积运算

$\lambda(\omega)$ **线性系统的传递函数**

线性系统的时域和频域方法

时域方法：

单位冲激响应$h(t)$ ⇨ $y(t)=h(t)*x(t)$

频域方法： ? $\lambda(\omega)=\int h(t)e^{-j\omega t}dt$

传递函数$\lambda(\omega)$: $x(t)=e^{j\omega t}\rightarrow y(t)=\lambda(\omega)e^{j\omega t}$

$x(t)=\sum_k a_k e^{j\omega_k t}$ ⇨ $y(t)=\sum_k a_k\lambda(\omega_k)e^{j\omega_k t}$

?

信号的线性分析方法

傅里叶级数 ⟶ 傅里叶变换 ⟶ 拉普拉斯变换

傅里叶变换 → 信号频域分析 → 线性滤波器设计

傅里叶变换 → 离散付里叶变换 ⟶ Z变换

离散付里叶变换 → 快速傅里叶变换

傅里叶级数（Fourier Series)

周期信号$x(t)$, 周期为T

定义一组基函数：$sinn\omega_0 t$, $(n=0,1,2,\dots)$

其中，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

那么，$x(t)$可以在此基上展开为：

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,\omega_0 t)$$

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,\omega_0 t)$$
$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$
$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2j}e^{jn\omega_0 t}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{-A_{-n}}{2j}e^{jn\omega_0 t}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A'_n\underbrace{e^{jn\omega_0 t}}_{\text{正交基}}$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A'_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\langle x(t),e^{jn\omega_0 t}\rangle=\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

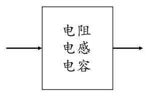
正交基性质

$$=\int_0^T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}A'_k e^{jk\omega_0 t}\right)e^{-jn\omega_0 t}dt=TA'_n$$

$$A'_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- A'_n是复数

傅里叶级数的物理意义



要求实验得出此线性电路的阻抗曲线$Z(f)$

方案1：每次输入一个单频率的正弦波电流，测量系统的输出电压波形，由此获得该频率点的阻抗幅度和相位

例：1kHz正弦波电流输入 $i_1 = \sin(2\pi * 1000t)$

记录输出电压 $u_1 = U_1 \sin(2\pi * 1000t + \varphi_1)$

得出$Z(f)$的一个测量点：Z(1kHz)

....

方案2：输入20个不同频率的正弦波线性叠加的电流 $i = \sum_{k=1}^{20} \sin(2\pi f_k t)$

记录系统的输出电压u（包含20个不同频率的正弦波形）

⇨ 付里叶级数分解获得20个不同频率电压正弦波的幅度和相位 ⇨ 20个测量点的阻抗

从傅里叶级数到傅里叶变换

定义连续函数 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ $\boxed{A'_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$

则A'_n是$X(\omega)$的采样 ⇨ $A'_n = \frac{1}{T}X(n\omega_0)$ 【$x(t)$仅在$[0,T]$上定义】

$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n e^{jn\omega_0 t}}$ ⇨ $x(t) = \sum_n \frac{1}{T}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} = \sum_n \frac{\omega_0}{2\pi}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$

$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$

当$T \to \infty$时，记$\omega_0 = \Delta\omega \to 0, n \to \infty$

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_n X(n\Delta\omega)e^{jn\Delta\omega t}\Delta\omega$ ⇨ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

傅里叶变换定义了时间域与频率域之间的转换 $\boxed{x(t) \leftrightarrow X(\omega)}$

时间域与频率域（傅里叶域）

$x(t) \leftrightarrow$	$X(\omega)$
时间域 ↔	频率域
周期连续	非周期离散
非周期连续	非周期连续
周期离散	周期离散

$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

$X(\omega)$ ：频率特性

$|X(\omega)|$： 幅频特性（频谱）

$\varphi(\omega)$： 相频特性

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n e^{jn\omega_0 t}$

$A'_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

傅里叶变换的性质

$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$

$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega)$

- 线性 $ax(t) + by(t) \to aX(\omega) + bY(\omega)$
- 时延 $x(t-\tau) \to X(\omega)e^{-j\omega\tau}$
- 相移 $x(t)e^{j\omega_0 t} \to X(\omega - \omega_0)$
- 微分 $\frac{dx(t)}{dt} \to j\omega X(\omega)$

  $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \to (j\omega)^n X(\omega)$
- 卷积 $x(t) * y(t) \to X(\omega)Y(\omega)$
- Parseval定理 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

$x(t) = \int X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$\frac{dx(t)}{dt} = \int X(\omega)\frac{de^{j\omega t}}{dt}d\omega$

$= \int [j\omega X(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$

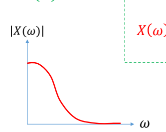
实信号的频谱

实信号：$x(t)$为实数

$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = X^*(\omega)$

$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$

实信号的频谱对称



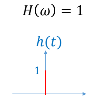
$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

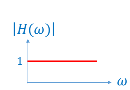
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

特殊函数的频谱

$$h(t) = \begin{cases} 1 & (t=0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

$H(\omega) = 1$

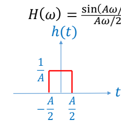


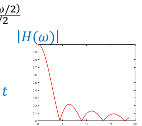


$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} & (-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

$H(\omega) = \int_{-A/2}^{A/2} \frac{1}{A}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{-jA\omega}[e^{-j\omega A/2} - e^{j\omega A/2}]$

$H(\omega) = \frac{\sin(A\omega/2)}{A\omega/2}$





传递函数（Transfer Function）

线性系统输入特征函数时

$x(t) = Ae^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = \lambda x(t)$

$Ae^{j\omega t} \rightarrow$ 线性系统 $\rightarrow H(\omega)Ae^{j\omega t}$

其中 $\lambda = \int h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

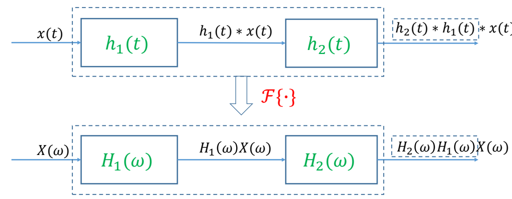
$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ 传递函数

- 线性系统就是线性滤波器
- 传递函数表达了滤波性能

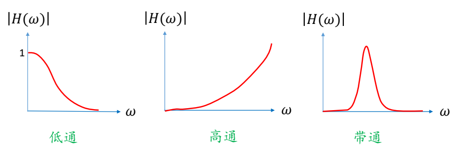
- 输入信号$x(t)$时，响应$y(t) = h(t) * x(t)$
- 输入$X(\omega) = Ae^{j\omega t}$时，响应$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

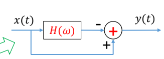
$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$
$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$

2021/8/5 LIST 25



线性滤波器分类





假设 $H(\omega)$为低通滤波器，$1 - H(w)$是什么滤波器？

低通滤波器是基本滤波器，由低通滤波器可以构建出其它种类的滤波器

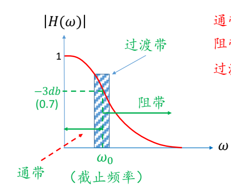
2021/8/5 LIST 27

滤波器指标

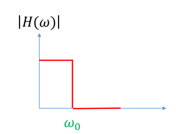
$20logG = -3db$

$G = 0.707$

通带：$|H(\omega)| \to 1$
阻带：$|H(\omega)| \to 0$
过渡带：窄



低通滤波器



理想低通滤波器

2021/8/5 LIST 28

离散信号的傅里叶变换 Discrete Fourier Transform (DFT)

周期为T的离散信号$x(t)$记为$x(n) = x(\frac{nT}{N})$

N：一个周期中的采样点数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$A'_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$X(k) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{T}\frac{nT}{N}}\frac{T}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$$

离散的周期信号具有离散的周期频谱

$x(n), X(k)$以N为周期的周期信号

2021/8/5 LIST 29

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform)

记$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ $\quad W_N^N = e^{-j2\pi} = 1 \quad W_N^{n(k+N)} = W_N^{nk}$

$W_N^2 = e^{-j2\cdot\frac{2\pi}{N}} = W_{N/2}$

$W_N^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi(k+N/2)}{N}} = -W_N^k$

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$(k = 0,1,\ldots,N-1)$

当$N = 2^n$时（基2）

将$x(n)$拆分成奇数点和偶数点序列

$x_1(n) = x(2n)$

$x_2(n) = x(2n+1)$

$(n = 0,1,\ldots,N/2-1)$

$$X(k) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2nk} + \frac{1}{N/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)W_{N/2}^{nk} + W_N^k\frac{1}{N/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)W_{N/2}^{nk}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k)] \quad (k = 0,1,\ldots,N-1)$$

$X(k) = \frac{1}{2}[X_1(k) + W_N^k X_2(k)]$

$X(k+N/2) = \frac{1}{2}[X_1(k) - W_N^k X_2(k)] \quad (k = 0,1,\ldots,N/2-1)$

2021/8/5 LIST 30

例：$x(0), x(1), x(2), \dots, x(7)$

$x(0), x(2), x(4), x(6)$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n) W_4^{nk}$$

$$X(k) = \frac{1}{2}[X_1(k) + W_8^k X_2(k)]$$
$$X(k+4) = \frac{1}{2}[X_1(k) - W_8^k X_2(k)]$$
$$(k = 0,1,2,3)$$

$x(1), x(3), x(5), x(7)$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{3} x_2(n) W_4^{nk}$$

$x(0), x(4)$ $x(2), x(6)$ $x(1), x(3)$ $x(5), x(7)$

$X'_1(k)$ $X''_1(k)$ $X'_2(k)$ $X''_2(k)$

$$X_1(k) = \tfrac{1}{2}[X'_1(k) + W_4^k X''_1(k)]$$
$$X_1(k+2) = \tfrac{1}{2}[X'_1(k) + W_4^k X''_1(k)]$$
$$(k = 0,1)$$

$$X_2(k) = \tfrac{1}{2}[X'_2(k) + W_4^k X''_2(k)]$$
$$X_2(k+2) = \tfrac{1}{2}[X'_2(k) + W_4^k X''_2(k)]$$
$$(k = 0,1)$$

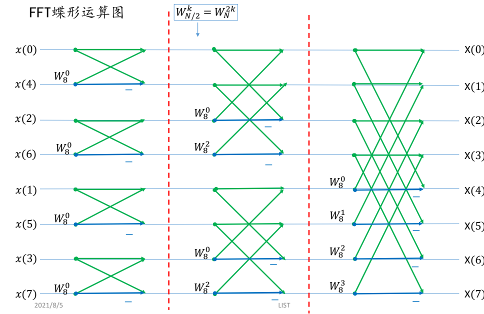
$x(0)$ $x(4)$ $x(2)$ $x(6)$

$$X'_1(0) = \tfrac{1}{2}[x(0) + W_2^0 x(4)]$$
$$X'_1(1) = \tfrac{1}{2}[x(0) - W_2^0 x(4)]$$

$$X''_1(0) = \tfrac{1}{2}[x(2) + W_2^0 x(6)]$$
$$X''_1(1) = \tfrac{1}{2}[x(2) - W_2^0 x(6)]$$

2021/8/5 LIST 31

FFT蝶形运算图



2021/8/5 LIST 32

拉普拉斯变换（Laplacian Transform）

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

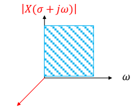
$$s = \sigma + j\omega$$

$|X(j\omega)| = |\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}|$

$\mathcal{L}\{*\}\ \ vs\ \ \mathcal{F}\{*\}$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{\sigma=0} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$



2021/8/5 LIST 33

Z变换（Z Transform)

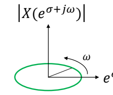
$$X(\sigma, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-\sigma n} e^{-j\omega n} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$z = e^{\sigma + j\omega}$$

$Z\{*\}\ \ vs\ \ \mathcal{F}\{*\}$

$$X(e^{\sigma + j\omega})\Big|_{\sigma=0} = X(\omega)$$

$$z = e^{\sigma} e^{j\omega}$$
$$\sigma = 0 \rightarrow e^{\sigma} = 1$$



2021/8/5 LIST 34