线性方程组

作者 刘国华

目录

齐次方程组的

主 本 次 线 性 ブ

程组

最佳近似解

线性方程组

作者 刘国华

东南大学 数学系

November 18, 2019

目录

性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组 齐次方程组的

非齐次线性力 程组

线性方程组的 最佳近似解

- 1 线性方程组
- ② 齐次方程组的解
- ③ 非齐次线性方程组
- 4 线性方程组的最佳近似解

向量的历史

作者 刘国华

大性方程组 ・次方程组 ・

非齐次线性万 程组 线性方程组的

- 公元前1世纪,《九章算术》初等行变换,相当于高斯消元法.
 - 17 世纪后期, 德国数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz), 含两个未知量三个方程的线性组.
- 18 世纪上半叶, 英国数学家麦克劳林(Colin Maclaurin): 具有二、三、四个未知量的线性方程组得到了现在称为 克拉默法则的结果.
- 瑞士数学家克拉默不久也发表了这个法则
- 18世纪下半叶, 法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究证明了n元齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零.
- 19世纪,英国数学家史密斯(Henry John Stephen Smith)和 道奇森(Charles Lutwidge Dodgson): 前者引进了方程组 的增广矩阵的概念后者证明了n个未知数m个方程的方程 组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同。

线性方程组 作者 刘围化

^{国求} 线性方程组

齐次方程组的 解

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

线性方程组 作者 刘国华

3 K 浅性方程组

解业业业

非介及致性力 程组

线性方程组的 最佳近似解

Definition

设含n个变量、由s个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

• 齐次、非齐次

作名 刘围化

^{国家} 浅性方程组

齐次方程组的 解

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

Definition

设含n个变量、由s个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次
- 相容、不相容

佐孝 刘国化

^{国 求} 浅性方程组

齐次方程组的 解

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次
- 相容、不相容
- 解集

作去 刘国化

1录

线性方程组 \$次方程组的

非齐次线性方

程组

线性方程组的 最佳近似解

Definition

设含n个变量、由s个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次
- 相容、不相容
- 解集
- 两个方程组同解

线性方程组的系数矩阵与增广矩阵

和

 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

 $(A,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

分别成为方程组

 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵.

性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组 文 4 *- + 22 4*0

呼 ab ->t va w い ニ

线性方程组的 最佳近似解 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

生万程组

作者 刘国华

目录

线性方程组

齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组6 最佳近似解 **解:** 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

佐本 利用化

|录 |性方程组

齐次方程组的 军

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解 解: 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程,第一个方程的(-1)倍加到第三个方程,即得

线性方程组 作者 刘国华

浅性方程组

非齐次线性方 程组

生生 线性方程组的 最佳近似解 **解:** 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程,第一个方程的(-1)倍加到第三个方程,即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_2 - x_3 = 2\\ 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

线性方程组 作者 刘国华

> ^水 性方程组

" 非齐次线性方 程组

在组 线性方程组的 品件近似解 **解:** 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程,第一个方程的(-1)倍加到第三个方程,即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_2 - x_3 = 2\\ 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

这时方程组中第二、三个方程是含有变量 x_2, x_3 的方程组,变量已经从三个减少到两个,由二元一次方程组的解法,可以求出 x_2, x_3 的值.

佐老 刘围化

目录 浅性方程组

非齐次线性方 程组

性 址 线性方程组的

线性万程组形 最佳近似解 或者继续进行消元变换,将第三个方程的(-2)倍加到第二个方程,再把第二、第三两个方程的次序互换,即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 2x_2 - x_3 = 4\\ x_3 = -6 \end{cases}$$

线性方程组 作者 刘国华

线性方程组 齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解 或者继续进行消元变换,将第三个方程的(-2)倍加到第二个方程,再把第二、第三两个方程的次序互换,即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 2x_2 - x_3 = 4\\ x_3 = -6 \end{cases}$$

这样, 把第三个方程 $x_3 = -6$ 回代入第二个方程中, 解出 $x_2 = -1$, 再把 $x_2 = -1$, $x_3 = -6$ 回代入第一个方程中, 就可以解出 $x_1 = 9$, 即求得有序数组 $x_1, x_2, x_3 = (9, -1, -6)$ 为方程组的唯一解.

解方程组

作者 刘国华

^{日 派} 线性方程组

齐次方程组的 解

非齐次线性力 程组

致性力程组 B 最佳近似解 Gauss消元法的求解过程,与增广矩阵的初等行变换,是完全对应的.

解方程组

作者 刘国华

非齐次线性方程组

最佳近似解

Gauss消元法的求解过程,与增广矩阵的初等行变换,是完全对应的.

对增广矩阵的每一次初等行变换, 都等于对方程组的一次初等变换, 不改变方程组的解; 当增广矩阵经过连续的初等行变换, 化为阶梯形矩阵时, 相应的方程组也成为阶梯形方程组.

程组 线性方:

致性力程 最佳近似 Gauss消元法的求解过程,与增广矩阵的初等行变换,是完全对应的.

对增广矩阵的每一次初等行变换, 都等于对方程组的一次初等变换, 不改变方程组的解; 当增广矩阵经过连续的初等行变换, 化为阶梯形矩阵时, 相应的方程组也成为阶梯形方程组. 从阶梯形方程组的秩可以直接看出方程组解的情况.

- \mathcal{L} \mathcal{L}
- 有唯一解 r(A) = r(A, b) = n;
- 非无穷多解 r(A) = r(A, b) < n, 自由未知量及其个数.

程组

线性方程组的 最佳近似解

Example

(1)用Gauss 消元法求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

程组

线性万程组的 最佳近似解

Example

(1)用Gauss 消元法求下列线性方程组的解:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

(2)讨论下述线性方程组的解的情况,有解时,求其解:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = \mu \end{cases}$$

Example

已知线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 此方程组(1)有唯一解; (2)无解; (3)有无穷多 解? 并在有无穷多解时求其通解.

齐次方程组有非零解的充要条件

7性力 柱组

作者 刘国华

目录

线性方程组 齐次方程组

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

定理

含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组 $A_{m,n}X=0$ 必有非零解当且仅当 r(A) < n.

齐次方程组有非零解的充要条件

次注力性组 作去 刘国化

日求 线性方程组 **齐次方程**组的

… 非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

定理

含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组 $A_{m,n}X=0$ 必有非零解当且仅当 r(A) < n.

定理

当 m < n 时,含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组必有非零解.

齐次方程组有非零解的充要条件

线性方程组 作者 刘国华

线性方程组 齐次方程组的 解

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

定理

含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组 $A_{m,n}X=0$ 必有非零解当且仅当 r(A) < n.

定理

当 m < n 时, 含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组必有非零解.

定理

当 m=n 时, 含 n 个变量、n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于0.

线性方程组有解的条件

作者 刘国华

以 线性方程组 文化二四位44

" 非齐次线性方

柱组 线性方程组的

线性方程组的 最佳近似解

定义

设 $A_{s\times n}$,则齐次线性方程组 Ax=0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵 A 的核空间或者零空间.

线性方程组有解的条件

线性方程组

作者 刘国华

日水 线性方程组 文公 六程细点

非齐次线性方 程组

线性方程组的

定义

设 $A_{s\times n}$,则齐次线性方程组 Ax=0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵 A 的核空间或者零空间.

性质

- 若 α 是 Ax = 0 的解向量,则 $k\alpha$ 也是 Ax = 0 的解向量.

齐次方程组的基础解系

线性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组

齐次方程组的 解

程组

最佳近似解

定理

齐次线性方程组 Ax=0 的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间 K(A). 且当它系数矩阵A 的秩 r(A)=r 时, dim(K(A))=n-r.

齐次方程组的基础解系

线性方程组 作者 刘围佬

口 水 线性方程组 **齐次方程组**的

非齐次线性方 呈组

线性方程组的 最佳近似解

定理

齐次线性方程组 Ax=0 的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间 K(A). 且当它系数矩阵A 的秩 r(A)=r 时, dim(K(A))=n-r.

定义

齐次线性方程组 Ax = 0的解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 满足条件

- (1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关.
- (2) Ax = 0的任意解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表示称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 为线性方程组Ax = 0的基础解系.

齐次方程组的基础解系

定理

线性方程组

齐次线性方程组 Ax = 0 的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间 K(A). 且当它系数矩阵A 的秩 r(A) = r 时, dim(K(A)) = n - r.

定义

齐次线性方程组 Ax = 0的解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 满足条件 (1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关. (2) Ax = 0的任意解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表示 称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 为线性方程组Ax = 0的基础解系. 如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是 Ax = 0的基础解系,则齐次线性方程组Ax = 0的全部解为

 $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_{n-r} \xi_{n-r}, \quad c_i \in R, i = 1, \dots, n-r.$ 称上式为齐次线性方程组 Ax = 0的通解.

次取下列n-r 组数

可求得一个基础解系

根据上面的讨论, 对于齐次线性方程组只要求出基础解系, 便 可得通解, 上述定理的证明过程为我们提供了一种求基础解 系的方法. 事实上, 只要令自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 依

 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

 $\xi_{1} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{2} = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$



作者 刘国华

目录

齐次方程组的

*** 非齐次线性プ

程组

线性万程组的 最佳近似解

例

解系和通解.

线性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组

解

程组

线性方程组的 最佳近似解

例

求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0\\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 0 \text{ 的基础} \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 0\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

解系和通解.

例

证明

$$r(A^T A) = r(A).$$

性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组

齐次方程组的 解

非齐次线性力

线性方程组的 最佳近似解

定理

 $A_{mn}x = 0$ 的任意 n-r 个线性无关的解向量都是它的基础解析.

非齐次线性方程组解的条件

线性万程组

作者 刘国华

H X M M 子至

齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解 回顾线性方程组Ax = b 的求解问题, 有

性质

下面三个条件等价

- $Ax = b \neq m$;
- 向量b可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- 向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, b\}$.

非齐次线性方程组解的条件

线性方程组

作者 刘国华

齐次方程组的 解

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解 回顾线性方程组Ax = b 的求解问题, 有

性质

下面三个条件等价

- $Ax = b \neq m$;
- 向量b可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- 向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, b\}.$

以及进一步线性方程组有解的判别定理.

定理

如果线性方程组Ax = b有解,且设r(A) = r(A,b) = r,则

- $\exists r = n \text{ th}, Ax = b \text{ full } \text{mean};$
- 当r < n时, Ax = b有无穷多解.

(注力性组

作者 刘国华

目录

非齐次线性力

线性方程组的 最佳近似解 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

线性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组 齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

性质

设 η_1 和 η_2 是 Ax = b的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是 Ax = 0 的解.

线性方程组

作者 刘国华

出水

线性万柱组 齐次方程组的

非齐次线性プ 程组

线性方程组的 最佳近似解 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

性质

设 η_1 和 η_2 是 Ax = b的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是 Ax = 0 的解.

性质

设 $\eta \to Ax = b$ 的解, $\xi \to Ax = 0$ 的解,则 $\eta + \xi \to Ax = b$ 的解。

线性方程组

作者 刘国华

线性方程组

齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组6 最佳近似解 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

性质

设 η_1 和 η_2 是 Ax = b的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是 Ax = 0 的解.

性质

设 $\eta \beta Ax = b$ 的解, $\xi \beta Ax = 0$ 的解,则 $\eta + \xi \beta \beta Ax = b$ 的解.

定义

称齐次方程组Ax = 0 为非齐次方程组Ax = b 的导出组.

非齐次方程组解的结构

线性方程组 作者 刘国华

3 水 线性方程组 齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

定理

设 η 为非齐次线性方程组 Ax = b的一个特解(即某一个给定的解), $\zeta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ 是其对应方程组 Ax = 0的通解, 则方程组 Ax = b的通解(所有解)可表示为

$$x = \eta + \zeta$$

即

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_{n-r} \xi_{n-r}$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是它对应的齐次线性方程组 Ax = 0的一个基础解系, $r = r(A), c_1, c_2, \dots, c_{n-r} \in R$.

非齐次方程组解的结构

线性方程组

作者 刘国华

目录

线性方程组 齐次方程组的

非齐次线性方 程组

线性方程组的 最佳近似解

例

求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -7 \end{cases}$$

的通解.

作者 刘国华

线性方程组 齐次方程组

非齐次线性プ 程组

线性万程组的 最佳近似解 对于这样一个质点的运动轨迹,可以看到其方程随着参数的不同会有很大的改变.在现实中,考虑到误差因素,需要测定更多点的坐标,测量的误差会导致上述线性方程组无解.在其它实际问题中,还会遇到很多类似的情况.

线性方程组 作者 刘国华

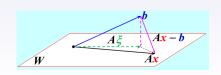
7、 线性方程组 齐次方程组的 解

线性方程组的 最佳近似解 对于这样一个质点的运动轨迹,可以看到其方程随着参数的不同会有很大的改变.在现实中,考虑到误差因素,需要测定更多点的坐标,测量的误差会导致上述线性方程组无解.在其它实际问题中,还会遇到很多类似的情况.设矩

$$\not\models A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ \alpha_2), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$Ax = (\alpha_1, \ \alpha_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2.$$

则向量b 如果在由 α_1 , α_2 决定的平面W 上时,意味着方程组Ax = b 有解,如果不在,则需要找对于x 的所有可能的取值,满足 $\|Ax - b\|$ 达到最小.



线性方程组

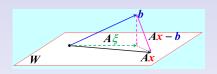
当线性方程组 Ax = b 无解时,如何求最好的近似解,即求 x 使得 ||Ax - b|| 最小?

作者 刘国华

线性方程组 齐次方程组的 解

程组 线性方程组的

线性方程组的 最佳近似解



定义

设 $A \in C^{s \times n}, x_0 \in C^n$, 若

$$||b - Ax_0|| = \min_{x \in C^n} ||b - Ax||$$

则称 x_0 是线性方程组 Ax = b的最小二乘解, 长度最小的最小二乘解称为极小最小二乘解。

线性万柱组

作者 刘国华

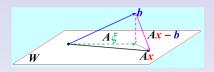
目录

线性方程组

齐次方程组 解

非齐次线性 程组

线性力程组 最佳近似解 当线性方程组 Ax = b 无解时,如何求最好的近似解,即求 x 使得 ||Ax - b|| 最小?



线性方程组

当线性方程组 Ax = b 无解时,如何求最好的近似解,即求 x 使得 ||Ax - b|| 最小?

1录 线性方程组 F次方程组的 ¥



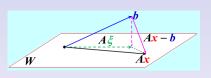
线性方程组的 最佳近似解 • $\|A\xi - b\|$ 最小⇔ $(A\xi - b) \perp W$ ⇔ $(A\xi - b)$ 与 α_1 , α_2 都正交 ⇔ $A^T(A\xi - b) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (A\xi - b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ⇔ $A^TA\xi - A^Tb = 0 \Leftrightarrow A^TA\xi = A^Tb$ ⇔ $\xi \not\in A^TA\xi = A^Tb$ 的解.

线性方程组 作者 刘国华

方程组 方程组

卡齐次线性; 呈组

线性方程组的 最佳近似解 当线性方程组 Ax = b 无解时,如何求最好的近似解,即求 x 使得 ||Ax - b|| 最小?



• $\|A\xi - b\|$ 最小会 $(A\xi - b) \perp W$ ⇔ $(A\xi - b)$ 与 α_1 , α_2 都正交 ⇔ $A^T(A\xi - b) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (A\xi - b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ⇔ $A^TA\xi - A^Tb = 0 \Leftrightarrow A^TA\xi = A^Tb$ ⇔ $\xi \not\in A^TA\xi = A^Tb$ 的解.

定理

性方程组

作者 刘国华

目录

线性 万 柱 组

解まななのはす

非介人改性力 程组

线性方程组的 最佳近似解

例

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

的最小二乘解.

性方程组

作者 刘国华

目录

农性力性组 齐次方程组。

非齐次线性方

性组 线性方程组的

线性万程组的 最佳近似解

例

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

的最小二乘解.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{13} \\ \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$