作者 刘国华

目录

8<u>4</u> 76

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

11阶行列式的概

矩阵的秩

# 线性代数第1章

作者 刘国华

东南大学 数学系

October 16, 2019

# 基本信息

线性代数第1章 作者 刘国华

目录绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运 tt

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

教材:线性代数(第二版)周建华 陈建龙 张小向等

线性代数, 北京大学

 参考书: 几何与代数,东南大学;
 Linear Algebras, Kenneth Hoffman Ray Kunze;
 线性代数,同济大学;

# 基本信息

线性代数第1章

教材:线性代数(第二版)周建华 陈建龙 张小向等

• 参考书:

几何与代数,东南大学;

Linear Algebras, Kenneth Hoffman Ray Kunze; 线性代数. 同济大学:

线性代数, 北京大学

• 教师: 刘国华

办公地点: 图书馆北门,五楼数学系508 联系方式: liuguohua@seu.edu.cn, QQ: 345820856

考核方式:课程总成绩由平时成绩、期中考试成绩和期 末考试成绩三部分组成。

• 答疑: 1-16周,周四中午12点-1点半,地点: 图书馆508.

● 大学之道,在明德,在亲民,在止于至善。 知止而后有定,定而后能静,静而后能安,安而后 能虑,虑而后能得。物有本末,事有终始。知所先后, 则近道矣。

# 2010年国家精品课程

线性代数第1章

#### 课程的重要性

- 工科基础
   很多专业课要用到矩阵,方程组等.另外,各种程序设计中广泛涉及矩阵计算,
- 考研基础 考研高数一中线性代数占22.5%,高数占55%, 概率统计 占22.5%,
- 思维训练培养化繁为简的思考模式培养分析问题的能力培养发散思维

多角度看问题,探讨变换问题的条件,转换思考角度,训练 思维的求异性,转化思维,训练思维的联想性.

# 2010年国家精品课程

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数i

分块矩阵 初等变换与初

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

大学与中学的区别

- 综合考评
- 应试型学习转为应用型学习, 被动学习转为主动学习
- 要善于运用新学的知识和方法

# 目录

线性代数第1章

- 矩阵的代数运算
  - 矩阵的乘法 • 矩阵的转置

矩阵的定义

△ 分块矩阵

绪论

5 初等变换与初等矩阵

• 矩阵的线性运算

- 6 方阵的逆矩阵
- 7 方阵的行列式
- 图 n阶行列式的概念
  - 行列式的应用
  - Gramer 法则
- 矩阵的秩

《九章算术》(距今已有 1800 多年,秦汉时期)

- "今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗; 上禾二秉, 中禾三秉, 下禾一秉, 实三十四斗; 上禾一 秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗。问上、中、下 禾实一秉各几何?答曰:上禾一秉九斗四分斗之一:中 禾一秉四斗四分斗之一:下禾一秉二斗四分斗之三."
- 化成方程组为  $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$  答案为:  $x = \frac{37}{4} =$  $9\frac{1}{4}, y = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}, z = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}.$
- 负数理论历史上的第一次也是出现在我国的《九章算 术》中.

# 线性代数——背景知识

线性代数第1章 作者 刘国华

目录 緒**论** 矩阵的定义 矩阵的代数运算

77块矩件 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的利

再看看刘徽(约公元 225年—295 年,魏晋期间)对方程的注释:程,课程也。群物总杂,各列有数,总言其实,令每行为率。二物者再程,三物者三程,皆如物数程之。并列为行,故谓之方程。行之左右无所同存,且为有所据而言耳。

方程就是方盘中的程, 如

# 线性代数——背景知识

线性代数第1章 作者 刘国华

目录 绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运算 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的科

再看看刘徽(约公元 225年—295 年, 魏晋期间)对方程的注释:程,课程也。群物总杂,各列有数,总言其实,令每行为率。二物者再程,三物者三程,皆如物数程之。并列为行,故谓之方程。行之左右无所同存,且为有所据而言耳。



方程就是方盘中的程, 如

# 矩阵的历史

线性代数第1章 作者 刘国华

目求緒论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列=

n阶行列式的概念

矩阵的秩

- "矩阵(matrix)"这个词首先是英国数学家西尔维斯特(James Joseph Sylvester) 使用的. 他为了将数字的矩形阵列区别于行列式(determinant)而发明了这个述语.
- 英国数学家凯莱(Arthur Cayley)被公认为是矩阵论的创立者. 他首先把矩阵作为一个独立的数学概念, 并发表了一系列关于这个题目的文章.

线性代数第1章 作者 刘国华

*社* :人

红肱丛白》

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初

√ >FIT

方阵的行列さ

n阶行列式的概

巨阵的秩

引例1: 某生产厂家每月向两个商场配送三种产品, 按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

线性代数第1章 作者 刘国华

緒论 矩阵的定义

矩阵的代数运 算

初等变换与衫 等矩阵

万件的更知! 士昉 40 年列 -

n阶行列式的标念

矩阵的秩

引例1: 某生产厂家每月向两个商场配送三种产品, 按双月结算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

#### 11月份

产品 (箱) 商场	<i>B</i> <sub>1</sub>	$B_2$	$B_3$
A,	97	80	72
A2	45	96	70

#### 12月份

$B_1$	$B_2$	$B_3$
88	82	75
47	92	68
	88	88 82

引例1: 某生产厂家每月向两个商场配送三种产品, 按双月结 算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 97 & 80 & 72 \\ 45 & 96 & 70 \end{pmatrix},$ 

 $B_{\gamma}$ 

80

96

 $B_3$ 

72

70

12月份 产品(箱)  $B_{2}$  $B_3$  $B_1$ 商场 75 88 82  $A_1$ 

47

92

68

 $A_{\gamma}$ 

用矩阵表示为

产品(箱)

A

 $A_{\gamma}$ 

商场

11月份

B,

97

45

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & 82 & 75 \\ 47 & 92 & 68 \end{pmatrix}.$$

->01-1 4>>>>>--

作者 刘国华

目录

9d 10

邓仟的人人

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初

√ >FIT

方阵的行列式

n阶行列式的概

巨阵的秩

引例2: 四个城市间的直达航线的数目. 如下图所示.

线性代数第1草

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数 重

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

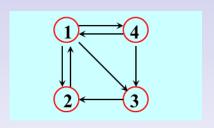
方阵的逆矩阵

W 14 HJ KC /F 17

n阶行列式的概念

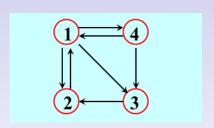
巨阵的秩

引例2: 四个城市间的直达航线的数目. 如下图所示.



线性代数第1章

引例2: 四个城市间的直达航线的数目. 如下图所示.



三阵的代数运

等矩阵 方阵的逆矩阵 方阵的行列式

♪ 除行列式的概 ☆

若用  $a_{i,j}$  表示从 i 市到 j 市的直达航线的条数,则上图信息可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根

矩阵的和

#### 定义

mn 个数  $a_{ij}$   $(i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots ,n)$  排成 m 行 n 列 的矩形阵列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个  $m \times n$  矩阵 (matrix), 简记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $m \times n$  称为矩阵的型, 矩阵的横排称为行, 竖排称为列,  $a_{ij}$  就是矩阵的第 i 行第 j 列的元素 (element/entry), 我们称之为(i,j)-项. 通常用大写的A, B, C来表示矩阵.

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初寺发挟与初 等矩阵

5阵的逆矩阵

n阶行列式的概

矩阵的和

### 定义

mn 个数  $a_{ij}$   $(i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots ,n)$  排成 m 行 n 列 的矩形阵列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个  $m \times n$  矩阵 (matrix),简记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , $m \times n$  称为矩阵的型,矩阵的横排称为行,竖排称为列, $a_{ij}$  就是矩阵的第 i 行第 j 列的元素 (element/entry),我们称之为(i,j)-项. 通常用大写的A,B,C来表示矩阵.元素都是实数——实矩阵 (real),元素都是复数——复矩阵 (complex).

### 定义

1 行 n 列的矩阵, 称为 n 维行向量, 如 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

n 行1 列的矩阵, 称为 n 维列向量, 如  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ .

所有项均为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记为  $0_{m \times n}$ , 简记为0.

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

#### 定义

1 行 n 列的矩阵, 称为 n 维行向量, 如 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

$$n$$
 行1 列的矩阵, 称为  $n$  维列向量, 如  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ .

所有项均为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记为  $0_{m \times n}$ , 简记为0. 方阵, 三角矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵, 同型矩阵, 相等矩阵,对称阵, 反对称阵.

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

#### 定义

1 行 n 列的矩阵, 称为 n 维行向量, 如 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

$$n$$
 行1 列的矩阵, 称为  $n$  维列向量, 如  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ .

所有项均为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记为  $0_{m \times n}$ , 简记为0. 方阵, 三角矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵, 同型矩阵, 相等矩阵,对称阵, 反对称阵.

# 线性方程组的系数矩阵与增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

的系数矩阵和增广矩阵.

线性代数第1章

 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$ 

### 阶梯形矩阵

```
作者 刘国华
```

目录

**約 1**6

矩件时足义

矩阵的代数这 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩队

- # 14 14 17 Til

n阶行列式的概念

巨阵的秩

#### 定义

如下形状的矩阵称为阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,j_{1}} & * & * & a_{1\,j_{2}} & * & * & a_{1\,j_{r}} & * & a_{1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_{2}} & * & * & a_{2\,j_{r}} & * & a_{2\,n} \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_{r}}1 & * & a_{r\,n} \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

# 阶梯形矩阵

```
先来 刘国化
```

1F在 对图等

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

#### 定义

如下形状的矩阵称为阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,j_{1}} & * & * & a_{1\,j_{2}} & * & * & a_{1\,j_{r}} & * & a_{1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_{2}} & * & * & a_{2\,j_{r}} & * & a_{2\,n} \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_{r}} 1 & * & a_{r\,n} \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 全零行位于非零行的下方;
- 非零行的非零首元(自左至右第一个不为零的元, 称为主元) 列标随行标的递增而递增.

线性代数第1章

者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数道

笲

矩阵的我性运 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万件的更矩件

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

引例:某生产厂家每月向两个商场配送三种产品,按双月结算.假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

4.11以外1十二

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

初等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

引例:某生产厂家每月向两个商场配送三种产品,按双月结算.假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

	11月份	<b>j</b>	
产品 (箱) 商场	<i>B</i> <sub>1</sub>	$B_2$	$B_3$
Ą	97	80	72
A <sub>2</sub>	45	96	70

产品(箱)商场	<i>B</i> <sub>1</sub>	$B_2$	$B_3$
$A_1$	88	82	75
$A_2$	47	92	68

12月份

线性代数第1章

引例:某生产厂家每月向两个商场配送三种产品,按双月结算.假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

11 11 23 11 1

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运算 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概 念

# 11月份

产品 (箱) 商场	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	$B_3$
A,	97	80	72
A <sub>2</sub>	45	96	70

#### 12月份

产品 (箱) 商场	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	88	82	75
$A_2$	47	92	68

用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 97 & 80 & 72 \\ 45 & 96 & 70 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & 82 & 75 \\ 47 & 92 & 68 \end{pmatrix}.$$

线性代数第1章

引例: 某生产厂家每月向两个商场配送三种产品, 按双月结 算. 假设2018年11月、12月配送情况如表2.1和表2.2所示.

产品(箱)商场	B <sub>1</sub>	$B_2$	$B_3$
A <sub>1</sub>	97	80	72
A <sub>2</sub>	45	96	70

10	) F	111
12	4)	

产品(箱)商场	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	88	82	75
$A_2$	47	92	68

用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 97 & 80 & 72 \\ 45 & 96 & 70 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & 82 & 75 \\ 47 & 92 & 68 \end{pmatrix}.$$

问该厂家11月、12月向这两个商场总的配送情况如何?

线性代数第1章 作者 刘国华

日求

%d ≯C

7/L11 117 /C/C

矩阵的代数: 算

矩阵的线性运, 矩阵的乘法 矩阵的转置

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

**解:** 这显然是个求和问题,我们只要将该厂两次配送的产品数量相加即可. 用矩阵表示即为

线性代数第1章 作者 刘国华

日来

矩阵的代数运

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的经胃

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

**解:** 这显然是个求和问题,我们只要将该厂两次配送的产品数量相加即可. 用矩阵表示即为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 97 + 88 & 80 + 82 & 72 + 75 \\ 45 + 47 & 96 + 92 & 70 + 68 \end{pmatrix}.$$

线性代数第1章 作者 刘国华

结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

矩阵的栽性运算 矩阵的象法 矩阵的转置 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

**解:** 这显然是个求和问题,我们只要将该厂两次配送的产品数量相加即可. 用矩阵表示即为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 97 + 88 & 80 + 82 & 72 + 75 \\ 45 + 47 & 96 + 92 & 70 + 68 \end{pmatrix}.$$

矩阵C称为矩阵A与矩阵B的和.

# 线性代数第1章

日录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运 <sup>66</sup>

矩阵的线性运算 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩

方阵的行列:

n阶行列式的构念

矩阵的秩

#### 定义

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是 $m \times n$ 形矩阵,它们的和记作A + B,规定

线性代数第1章 作者 刘国华

结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

**矩阵的线性运算** 矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万件的更知性 方阵的行列*主* 

n阶行列式的标

矩阵的秩

### 定义

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是 $m \times n$ 形矩阵,它们的和记作A + B,规定

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

也就是说A + B的(i, j) 位置上元素为A与B的(i, j) 位置上元素之和,即 $a_{ij} + b_{ij}$ .

```
线性代数第1草
```

作者 刘国华

目录

- NG FG

矩件的代数2 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法

矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与衫

方阵的逆矩阵

20 11 NO ~ 21L1

n阶行列式的标

矩阵的秩

### Example

求

$$\left(\begin{array}{rrr}-1 & 5 & 4\\2 & 1 & 3\end{array}\right)+\left(\begin{array}{rrr}3 & 1 & 4\\4 & 1 & 2\end{array}\right).$$

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

45 11th AA 12 34 25

矩件的代数亚 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与补

方阵的逆矩

方阵的行列

n阶行列式的标念

矩阵的秩

### Example

求

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

我们把求矩阵和的运算叫做加法运算.

# 矩阵的减法

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

日水

ALIT NI C. A.

矩阵的代数运

矩阵的线性3 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万件的更矩件

n阶行列式的概念

矩阵的秩

设矩阵 $A=(a_{ij})$ , 记

$$-A = (-a_{ij}),$$

称-A为矩阵A的**负矩阵**,

# 矩阵的减法

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

74 75

矩件时足义

矩阵的代数运

矩阵的线性适

矩阵的表法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

力件的行列式

矩阵的秩

设矩阵 $A=(a_{ij})$ , 记

$$-A = (-a_{ij}),$$

称-A为矩阵A的**负矩阵**,由此规定矩阵的减法运算为

$$A - B = A + (-B),$$

# 矩阵的减法

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的尺数运

丹 矩阵的线性运算 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩队

n阶行列式的概念

矩阵的秩

设矩阵 $A=(a_{ij})$ , 记

$$-A = (-a_{ij}),$$

称-A为矩阵A的负矩阵,由此规定矩阵的减法运算为

$$A - B = A + (-B),$$

也就是说A - B为矩阵A中的元素减去矩阵B中对应元素形成的矩阵.

# 矩阵的减法

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

知 矩阵的线性运算 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩門

n阶行列式的标

矩阵的秩

设矩阵 $A=(a_{ij})$ , 记

$$-A = (-a_{ij}),$$

称-A为矩阵A的负矩阵,由此规定矩阵的减法运算为

$$A - B = A + (-B),$$

也就是说A - B为矩阵A中的元素减去矩阵B中对应元素形成的矩阵. 如

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right)$$

佐孝 刘国化

绪论

矩阵的足义 矩阵的代数运 ti

**矩阵的线性运算** 矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

对于矩阵的加法运算有

#### Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵,则有

• 交换律: A + B = B + A;

作者 刘国华

论

矩阵的代数运 草

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩!

n阶行列式的标念

矩阵的秩

对于矩阵的加法运算有

#### Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵, 则有

- 交換律: A + B = B + A;
- 结合律: (A+B)+C=A+(B+C);

作者 刘国华

对于矩阵的加法运算有

Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵,则有

- 交換律: A + B = B + A;
- 结合律: (A+B)+C=A+(B+C);
- $\bullet \ A + O = A;$

绪论

矩件的尺爻 矩阵的代数运 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

が块矩件 初等変换与求

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

作者 刘国华

对于矩阵的加法运算有

#### Proposition

设A, B, C, O均为同型矩阵,则有

- 交換律: A + B = B + A;
- 结合律: (A+B)+C=A+(B+C);
- A + O = A;
- A A = O.

结论

矩阵的足义 矩阵的代数运 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的标

矩阵的秩

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

算 矩阵的线性运算 矩阵的乘法

起阵的转置

初等变换与初 等矩阵

5件的迎矩件 5阵的行列式

n阶行列式的概 念

矩阵的秩

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , k为一个正整数, k个A相加记为kA, 由矩阵的加法可知

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

kA称为整数k与矩阵A的乘积.

线性代数第1章

目录

绪论

ルルリルル

**并** 

矩阵的我性还。 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩

n阶行列式的标

矩阵的秩

#### 定义

数k与矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的 乘积记作kA或Ak, 规定

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

线性代数第1章

目录

86 1C

矩件时足义

矩阵的代数运

矩阵的线性运息 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

- 11 / 12 12 1- 11

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

矩阵的秩

例如,设

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

则

$$\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

线性代数第1章

.....

矩阵的定义

**矩阵的代数**运

算

矩阵的线性运身 矩阵的乘法 知阵的禁留

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

例如,设

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

则

$$\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

显然

$$(-1)A = -A$$

线性代数第1章

绪论 矩阵的定义

算 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的参署

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**. 矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**. 对于数乘运算,有以下命题:

#### Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

• 结合律: (kl)A = k(lA);

#### 线性代数第1星 作务 刘国化

绪论 矩阵的定义

在件的线性运算 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

0 失处什 初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵

方阵的行列式 1阶行列式的概

矩阵的秩

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**. 矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**. 对于数乘运算,有以下命题:

#### Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

- 结合律: (kl)A = k(lA);
- 分配律: (k+l)A = kA + lA, k(A+B) = kA + kB;

线性代数第1章

審论 矩阵的定义 矩阵的代数运 算

升 超降的线性运算 矩阵的裁法 矩阵的转置 分块矩阵

7等变换与初 序矩阵 方阵的逆矩阵

n阶行列式的概 念

矩阵的秩

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**. 矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**. 对于数乘运算,有以下命题:

#### Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

- 结合律: (kl)A = k(lA);
- 分配律: (k+l)A = kA + lA, k(A+B) = kA + kB;
- 1A = A(左边"1"为数1);

线性代数第1章 作者 刘围化

> 数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**. 矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**. 对于数乘运算,有以下命题:

#### Proposition

设A, B 为同型矩阵, k, l 为数, 则有

- 结合律: (kl)A = k(lA);
- 分配律: (k+l)A = kA + lA, k(A+B) = kA + kB;
- 1A = A(左边"1"为数1);
- 0A = O(左边 "0" 为数0).

线性代数第1章

作者 刘国华

14 240

20 11 to 22 22 1

40 mt 44 /0 44 15

起件的代級还

矩阵的线性选事 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

根据矩阵线性运算的性质, 可以把线性方程组

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

#### 线性代数第1早

作者 刘国华

目录

. .

算 45.00 44.00 14.5.00

矩阵的乘法 七件以及

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

根据矩阵线性运算的性质, 可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成向量方程的形式

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b.$$

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

to the fit is a

矩阵的代数运

矩阵的线性运算

矩阵的乘法 4年的转署

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根

矩阵的秩

根据矩阵线性运算的性质, 可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成向量方程的形式

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = b.$$

这里
$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \ (i=1,2,\cdots,n), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的代数运 6

矩阵的线性运 矩阵的乘法

公址拓陈

初等变换与补

等矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 引例

发注10.数第1点

作者 刘国华

目录

结论

矩阵的定义

矩阵的代数运

算

矩阵的乘法

地件的专业

力大和什

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

力件时行列式 n阶行列式的标

矩阵的秩

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂, 全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

#### 线性代数第1章 作者 刘围华

目录

**矩阵的**定、

矩阵的代数运

矩阵的线性运 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与\* 等矩阵

方阵的逆矩队

n阶行列式的构

矩阵的税

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂, 全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{F} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元, 表示为矩阵

#### 线性代数第1章 作者 刘围华

目录

**矩阵的**定、

矩阵的代数运

矩阵的线性运 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与\* 等矩阵

方阵的逆矩队

n阶行列式的构

矩阵的税

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂, 全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{F} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元, 表示为矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂, 全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元, 表示为矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6\\10\\4\\2 \end{pmatrix}$$

那么该公司甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额矩阵为

绪论

EI件的尺叉 矩阵的代数运 tit

矩阵的线性运 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

1. 某公司下属甲、乙、丙三个工厂,全年消耗四种原材料数量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元, 表示为矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6\\10\\4\\2 \end{pmatrix}$$

那么该公司甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 \times 6 + 2 \times 10 + 0 \times 4 + 8 \times 2 \\ 7 \times 6 + 1 \times 10 + 4 \times 4 + 3 \times 2 \\ 3 \times 6 + 4 \times 10 + 1 \times 4 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 74 \\ 64 \end{pmatrix} = C$$

# 引例

某公司下属甲、乙、丙三个工厂,全年消耗四种原材料数 量用矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

而四种原材料的单价顺次为6万元、10万元、4万元和2万元、 表示为矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6\\10\\4\\2 \end{pmatrix}$$

那么该公司甲、乙、丙三厂全年消耗原材料的总金额矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 \times 6 + 2 \times 10 + 0 \times 4 + 8 \times 2 \\ 7 \times 6 + 1 \times 10 + 4 \times 4 + 3 \times 2 \\ 3 \times 6 + 4 \times 10 + 1 \times 4 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 74 \\ 64 \end{pmatrix} = C$$

这里66万元,74万元,64万元分别表示甲、乙、丙三厂全年消 耗原材料的总金额.

# 矩阵的乘积

线性代数第1章

作者 刘国华

矩阵的定义

矩阵的代数运 阵

矩阵的线性运算 **矩阵的乘法** 

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩!

n阶行列式的构

矩阵的秩

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$
 甲 乙 丙 单位单位 总收入总利润 价格利润

# 矩阵的乘积

2. 某地区有四个工厂 1、 Ⅱ、 Ⅲ、 Ⅳ, 生产甲、乙、丙三 种产品, 矩阵A表示一年中各工厂生产各种产品的数量, 矩 阵B表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元), 矩阵C表 示各工厂的总收入及总利润.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

甲 乙 丙 单位单位 总收入总利润 价格 利润

其中,  $a_{ik}$  是第i 个工厂生产第k 种产品的数量,  $b_{k1}$  及 $b_{k2}$  分别是第k 种产品的单位价格及单位利润,  $c_{i1}$ 及 $c_{i2}$  分别是第i 个工厂生产三种产品的总收入及总利润 (i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3).

#### 线性代数第1早

作者 刘国华

目录

矩阵的定义

界 矩阵的线性运算

矩阵的乘法 矩阵的转置

初等变换与初

下阵的逆矩阵

n阶行列式的标 念

矩阵的秩

则矩阵A,B,C 的元素之间有下列关系:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2).$$

## 矩阵的乘积

# 作者 刘国华

日求

**拓陇的宝**》

矩阵的代数运

矩阵的线性运身 **矩阵的乘法** 

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的逆矩阵

n阶行列式的构

矩阵的秩

#### (3) 假设变量 $x_i, y_i, z_i$ 之间有关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1s}y_s \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2s}y_n \\ & \dots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{ms}y_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \dots + b_{2n}z_n \\ & \dots \\ y_s = b_{s1}z_1 + b_{s2}z_2 + \dots + b_{sn}z_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \dots + c_{1n}z_n \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \dots + c_{2n}z_n \\ & \dots \\ x_m = c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \dots + c_{mn}z_n \end{cases}$$

# 矩阵的乘积

线性代数第1章

(3) 假设变量
$$x_i, y_i, z_i$$
之间有关系 
$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1s}y_s \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2s}y_n \\ \dots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{ms}y_s \end{cases}$$
 
$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \dots + b_{2n}z_n \\ \dots \\ y_s = b_{s1}z_1 + b_{s2}z_2 + \dots + b_{sn}z_n \end{cases}$$
 
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \dots + c_{1n}z_n \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \dots + c_{2n}z_n \\ \dots \\ x_m = c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \dots + c_{mn}z_n \end{cases}$$

矩阵C称为矩阵A与B的乘积。

则有 $x_i = \sum_{k=1} a_{ik} y_k = \sum_{k=1} a_{ik} \sum_{j=1} b_{kj} z_j = \sum_{j=1} \sum_{k=1} (a_{ik} b_{kj}) z_j$ . 上述

```
线性代数第1章
```

```
目录
```

组队的企业

矩阵的代数运

**矩阵的乘法** 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与权 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根

**ふご けか ムム する** 

矩阵的秩

#### 定义

设矩阵A 是 $m \times s$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, A与B的乘积记作AB, AB 是 $m \times n$ 矩阵, AB的(i,j) 位置上的元素 $c_{ij}$  由下式给出:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$
$$(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

线性代数第1章

目录

緒论 矩阵的定义

矩阵的代数运

矩阵的线性运算 **矩阵的乘法** 

矩阵的转置 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根

矩阵的秩

#### 定义

设矩阵A 是 $m \times s$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, A与B的乘积记作AB, AB 是 $m \times n$ 矩阵, AB的(i,j) 位置上的元素 $c_{ij}$  由下式给出:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

即

$$AB = (c_{ij})_{m \times n}.$$

```
线性代数第1章
作者 刘国化
```

目录

缩论

矩阵的定义

矩阵的代数运 <sup>60</sup>

矩阵的线性运 **矩阵的乘法** 

矩阵的表法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

5-18-11-10-11-1

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 注

• A的列数等于B的行数的, 其乘积AB的行数与A的行数相同,与B的列数相同.

```
线性代数第1章
```

日求

矩阵的定义

矩阵的代数过算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 一件从从中

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

#### 注

- A的列数等于B的行数的,其乘积AB的行数与A的行数相同,与B的列数相同.
- AB的(i,j)位置上元素等于A的第i行元素和B的第j列对应元素乘积的和,即

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj},$$

$$(i=1,\cdots,m;j=1\cdots,n).$$

注1、效第1草

目录

84 TC

矩阵的定义

矩阵的代数运

矩阵的线性运算 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 图示如下

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \end{array} \right)$$

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

貓地

矩阵的定义

矩阵的代数运

矩阵的线性运

**矩阵的乘法** 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

容易知道: AB 的第i行就是A的第i行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 右乘B所得, 即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

线性代数第1章

容易知道: AB 的第i行就是A的第i行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 右乘B所得,即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

AB 的第j列就是

线性代数第1章 作者 刘国华

THE ATEL

日来

矩阵的定义

矩阵的代数运

矩阵的线性运算 **矩阵的乘法** 

分块矩阵

初等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的构

矩阵的秩

容易知道: AB 的第i行就是A的第i行( $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ )右乘B 所得, 即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

线性代数第1章

容易知道: AB 的第i行就是A的第i行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 右乘B所得,即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$$

$$AB$$
 的第 $j$ 列就是 $B$ 的第 $j$ 列 $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$ 左乘 $A$ 所得,即

$$A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix}.$$

#### **残性代**数弗1卓

作者 刘国华

目录

海 12

......

**并** 矩阵的线性运算

**矩阵的乘法** 矩阵的转置

**分块矩阵** 

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

根据矩阵乘法运算, 可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成:

$$Ax = b$$
.

### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运

. 矩阵的线性运算 矩阵的乘法

**入块矩阵** 

初等变换与补

方阵的逆矩阵

- 11+ 16 (- Til 1)

n阶行列式的概

矩阵的秩

根据矩阵乘法运算, 可以把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简洁地表示成:

$$Ax = b$$
.

这里 A 指方程组的系数矩阵,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (i = 1, 2, \dots, n), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

#### 10903014

作者 刘国华

目录

绪 化

起阵的走义

矩阵的代数:i

矩阵的线性的 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的

矩阵的秩

#### 例

## 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

some state

**新陸的代数**运

算

矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与权 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列之

n阶行列式的标

矩阵的秩

#### 例

• 
$$i \not t A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sharp AB.\ CD,\ DC.$$

线性代数第1章

目录

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

矩阵的线性运 **矩阵的乘法** 

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的科

例

• 
$$i \xi A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1, & 1, & 0 \\ *AB, & CD, & DC.$$

• 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

xAB, AC.

线性代数第1章

日录

矩阵的定义 矩阵的代数运 萆

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置 产块矩阵

初等变换与初等矩阵

5件的行列式

的有列式的表 金 矩阵的秩

矩阵的秩

例

• 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

求AB, AC.

### 性质

矩阵的乘法不满足消去律和交换律.

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运

矩阵的线性: **矩阵的乘法** 

地區的假直

分块矩阵

初等变换与权 等矩阵

**一比码溢红肽** 

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律, 但有下面命题.

(F + 기타(F

作者 刘国华

目录

新院的空·

矩阵的代数运 算

矩阵的线性送 矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩门

n阶行列式的概念

矩阵的秩

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律, 但有下面命题.

### 性质

设A,B,C 为矩阵, k 为数, 且下列运算都是可行的, 则有

- 结合律: (AB)C = A(BC);
- $\bullet \ k(AB) = (kA)B = A(kB);$

线性代数第1章

作者 刘国华

目录结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

矩阵的线性运真 **矩阵的乘法** 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩队

n阶行列式的概念

矩阵的秩

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律, 但有下面命题.

#### 性质

设A, B, C 为矩阵, k 为数, 且下列运算都是可行的, 则有

- 结合律: (AB)C = A(BC);
- $\bullet \ k(AB) = (kA)B = A(kB);$
- 左右分配律: A(B+C) = AB + AC, (B+C)A = BA + CA;

线性代数第1章

作者 刘国华

细比 矩阵的定义 矩阵的代数运 覧

大 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式 n阶行列式的

矩阵的秩

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律, 但有下面命题.

#### 性质

设A, B, C 为矩阵, k 为数, 且下列运算都是可行的, 则有

- 结合律: (AB)C = A(BC);
- $\bullet \ k(AB) = (kA)B = A(kB);$
- 左右分配律: A(B+C) = AB + AC, (B+C)A = BA + CA;
- $E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}$ , 简写为EA = AE = A.

え性代数第1章 ル⇒ 対国化

矩阵的乘法虽不满足消去律和交换律,但有下面命题.

### 性质

设A, B, C 为矩阵, k 为数, 且下列运算都是可行的, 则有

- 结合律: (AB)C = A(BC);
- $\bullet \ k(AB) = (kA)B = A(kB);$
- 左右分配律: A(B+C) = AB + AC, (B+C)A = BA + CA;
- $E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}$ , 简写为EA = AE = A.

#### 注

单位矩阵E的作用等同于数1.

当A不是方阵时, 左右单位矩阵的阶数是不同的.

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

矩阵的线性: **矩阵的乘法** 

**}**块矩阵

初等变换与初 等矩阵

5阵的行列式

n阶行列式的概 念

矩阵的秩

2. 方阵的幂

如果A, B, C依次可相乘,由于乘法满足结合律,那么记法ABC合理. 即

ABC = (AB)C = A(BC)

线性代数第1章 作者 刘国华

连阵的定义连阵的代数运

起降的线性运算 **矩阵的乘法** 矩阵的转置

勿等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

2. 方阵的幂

如果A,B,C依次可相乘,由于乘法满足结合律,那么记法ABC合理.即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地,如果A是一个n阶方阵,则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E$$
,  $A^n = \overbrace{AA \cdots A}^{n \uparrow}$ ,  $n$  为正整数

也就是说,  $A^n$ 就是n个A连乘,  $称 A^n$ 为矩阵A的n次幂.

线性代数第1章

2. 方阵的幂

如果A,B,C依次可相乘,由于乘法满足结合律,那么记法ABC合理.即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地,如果A是一个n阶方阵,则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA \cdots A}^{n \uparrow}, \quad n$$
 为正整数

也就是说,  $A^n$ 就是n个A连乘,  $称 A^n$ 为矩阵A的n次幂.

#### 注

对任何非负整数n, m 有 $A^m A^n = A^{m+n}$  以及 $(A^m)^n = A^{mn}$ .

#### 线性代数第1章

2. 方阵的幂

如果A,B,C依次可相乘,由于乘法满足结合律,那么记法ABC合理.即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地,如果A是一个n阶方阵,则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA \cdots A}^{n \uparrow}, \quad n$$
 为正整数

也就是说,  $A^n$ 就是n个A连乘,  $称 A^n$ 为矩阵A的n次幂.

#### 注

对任何非负整数n, m 有 $A^m A^n = A^{m+n}$  以及 $(A^m)^n = A^{mn}$ .  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 当且仅当AB = BA.

线性代数第1章

2. 方阵的幂

如果A,B,C依次可相乘,由于乘法满足结合律,那么记法ABC合理.即

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

特别地,如果A是一个n阶方阵,则可定义A的非负指数方幂

$$A^0 = E, \quad A^n = \overbrace{AA \cdots A}^{n \uparrow}, \quad n$$
 为正整数

也就是说,  $A^n$ 就是n个A连乘,  $称 A^n$ 为矩阵A的n次幂.

#### 注

对任何非负整数n,m 有 $A^mA^n=A^{m+n}$  以及 $(A^m)^n=A^{mn}$ .  $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 当且仅当AB=BA.

$$A^{2} - B^{2} = (A + B)(A - B)$$
 当且仅当 $AB = BA$ .

# 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的定义

巨阵的代数运 军 <sup>起阵的线性运算</sup>

E阵的乘法 E阵的转置 块矩阵

刃等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

3. 方阵的多项式

设A为一个方阵, f(x) 为一个多项式

$$f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

则称

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$$

为方阵A的一个多项式.

#### 例

已知方阵
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 和多项式 $f(x) = x^2 + x + 3$ , 求 $f(A)$ .

性代数第1章

目录

绪论

ルーナリスス

矩阵的代数 算

矩阵的线性运. **矩阵的乘法** 

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩队

方阵的行列台

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 例

• (1) 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,计算  $\alpha\beta$ , $\beta\alpha$ , $(\beta\alpha)^{2017}$ .

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

缩论

矩阵的代数运 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩队

n 阶 行 列 式 的

矩阵的秩

例

• (1) 已知
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
,计算  $\alpha\beta$ , $\beta\alpha$ , $(\beta\alpha)^{2017}$ .

### 矩阵转置的定义

```
线性代数第1章
```

作者 刘国华

目录

E阵的定义 E阵的代数运

矩阵的线性运算 矩阵的乘法

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

巨阵的秩

#### 定义

设A是 $m \times n$ 矩阵,把A的第i行第j列元素 $a_{ij}$ 放到新矩阵的第j行第i列的位置, $i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$ ,得到的矩阵称为矩阵A的**转置矩阵**,记为 $A^{T}$ .

$$A^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## 矩阵转置的定义

# 线性代数第1章

### 定义

设 $A \not\in m \times n$ 矩阵, 把A的第i行第j列元素 $a_{ij}$ 放到新矩阵的 第j行第i列的位置,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ , 得到的矩 阵称为矩阵A的**转置矩阵**, 记为 $A^{T}$ .

$$A^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

易知 $A^{T}$  是 $n \times m$ 形矩阵.

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

----

矩阵的定义

矩阵的代数运

**并** 

矩阵的线性运 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

20 11 NO ~ 20-11

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 性质

设A, B, 则有

•  $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A;$ 

#### 汉注10. 奴东1早

作者 刘国华

目录

-5Q FG

矩阵的代数运 筐

矩阵的线性运 矩阵的乘法

矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

刀件的近郊门

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 性质

设A, B, 则有

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A;$
- $(A+B)^{T} = A^{T} + B^{T};$

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

ルーナリスス

矩阵的代数运

矩阵的线性运引 知味が表は

矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与

等矩阵

方阵的逆矩阵

n 阶 行 列 式 的 都

矩阵的秩

### 性质

设A, B, 则有

• 
$$(A^{T})^{T} = A;$$

$$\bullet \ (A+B)^{\rm T} = A^{\rm T} + B^{\rm T};$$

$$\bullet \ (kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}};$$

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

緒化

矩阵的代数运 算

矩阵的线性运身 矩阵的乘法 矩阵的转置

X 11 2- 114

万块龙件

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 性质

设A, B, 则有

• 
$$(A^{T})^{T} = A;$$

• 
$$(A+B)^{T} = A^{T} + B^{T};$$

• 
$$(kA)^{T} = kA^{T}$$
;

$$\bullet \ (AB)^{\rm T} = B^{\rm T}A^{\rm T}.$$

线性代数第1章

性质

设A, B, 则有

•  $(A^{T})^{T} = A;$ •  $(A+B)^{T} = A^{T} + B^{T}$ ;

•  $(kA)^{T} = kA^{T}$ :

•  $(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$ .

例

已知

 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

求 $(AB)^{\mathrm{T}}$ .

### 对称矩阵

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

矩阵的线性运算 矩阵的乘法 矩阵的转置

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

力件的更短的

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 定义

对于任意方阵 $A = (a_{ij})$ , 如果 $A = A^{T}$ , 即 $a_{ij} = a_{ji}$ , 则称矩阵A为**对称矩阵**.如果 $A = -A^{T}$ , 即 $a_{ij} = -a_{ji}$ , 则称矩阵A为**反对称矩阵**.

# 线性代数第1章

#### 定义

对于任意方阵 $A = (a_{ij})$ , 如果 $A = A^{\mathrm{T}}$ , 即 $a_{ij} = a_{ji}$ , 则称矩阵A为**对称矩阵**.如果 $A = -A^{\mathrm{T}}$ , 即 $a_{ij} = -a_{ji}$ , 则称矩阵A为**反对称矩阵**.

如矩阵 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
 为对称矩阵.

#### 例

任何一个方阵可以表示为一个对称阵与反对称阵之和.

### 分块矩阵的定义

线性代数第1章 作者 刘国华

目录 绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

在进行矩阵的运算时,尤其是在处理行数或列数都很大的矩阵时,我们经常把矩阵中的行,列进行分组,把一个大矩阵看成是由一些小矩阵(子矩阵)构成的,参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理. 这样把一个矩阵看成是(子)矩阵的矩阵, 称为分块矩阵.

### 分块矩阵的定义

#### 线性代数第1章 作者 刘围佬

緒论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

等矩阵 方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

在进行矩阵的运算时,尤其是在处理行数或列数都很大的矩阵时,我们经常把矩阵中的行,列进行分组,把一个大矩阵看成是由一些小矩阵(子矩阵)构成的,参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理.这样把一个矩阵看成是(子)矩阵的矩阵,称为分块矩阵.

#### 定义

设 A 是一个  $m \times n$  矩阵, 在 A 的行间,列间用一些(贯穿整行和整列的)虚构的线将 A 分隔成若干块,这种视 A 为若干小矩阵的矩阵的方式称为分块矩阵.

### 分块矩阵的定义

#### 线性代数第1章 作者 刘围佬

緒论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

等矩阵 方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

在进行矩阵的运算时,尤其是在处理行数或列数都很大的矩阵时,我们经常把矩阵中的行,列进行分组,把一个大矩阵看成是由一些小矩阵(子矩阵)构成的,参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理.这样把一个矩阵看成是(子)矩阵的矩阵,称为分块矩阵.

#### 定义

设 A 是一个  $m \times n$  矩阵, 在 A 的行间,列间用一些(贯穿整行和整列的)虚构的线将 A 分隔成若干块,这种视 A 为若干小矩阵的矩阵的方式称为分块矩阵.

## 几种特殊的分块-分出特殊矩阵

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数i

公址拓陈

77 - 7071-11

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

1- 10 11 10 ml 11

n阶行列式的概念

矩阵的秩

例如, 将如下 4×5 矩阵用横线和纵线将它分为 4块, 构成一个分块矩阵

### 几种特殊的分块-分出特殊矩阵

线性10数第1单

目录

**酒化** 

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

例如, 将如下  $4 \times 5$  矩阵用横线和纵线将它分为 4 块, 构成一个分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{2} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

## 几种特殊的分块-分出特殊矩阵

作者 刘国华

例如, 将如下  $4 \times 5$  矩阵用横线和纵线将它分为 4 块, 构成一个分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{2} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的框

矩阵的秩

其中,  $E_2$ 为2阶单位阵, O为2 × 3的零矩阵,  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

### 几种特殊的分块-分出特殊矩阵

例如, 将如下 4×5 矩阵用横线和纵线将它分为 4块, 构成一 个分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

其中,  $E_2$ 为2阶单位阵, O为2 × 3的零矩阵,  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

 $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$ 

• 在分块矩阵中,处于同一行块上的小矩阵的行数相同,处 干同一列块上的小矩阵的列数相同.

### 几种特殊的分块-分块对角阵

性代数第1章

作者 刘国华

目录

39 TE

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

### 几种特殊的分块-分块对角阵

线性代数第1章

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

$$O O \cdots A_s$$

阵(semi-diagonal matrix), 其中  $A_1, A_2, \dots, A_s$  都是方阵.

### 几种特殊的分块-按列分块

线性代数第1章

目录

矩阵的代数运 <sup>6</sup>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

读 
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

### 几种特殊的分块-按列分块

线性代数第1章 作者 刘国华

目录经论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

矩阵的科

称为按列分块, 类似的, 可以有按行分块。

# 线性代数第1章

### 加减法和数乘

由分块矩阵的定义和矩阵的加法,数乘的定义,若矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$
 和 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$  分块方式相同,则有

分块方式相同,则有

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{pmatrix}$$

# 线性代数第1章

### 加减法和数乘

由分块矩阵的定义和矩阵的加法,数乘的定义,若矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$
 和 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$  分块方式相同,则有

分块方式相同,则有

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{pmatrix}$$

加减法和数乘

线性代数第1章

由分块矩阵的定义和矩阵的加法,数乘的定义,若矩阵 
$$A_{11}$$
  $A_{12}$   $A_{1s}$   $B_{11}$   $B_{12}$   $B_{12}$   $B_{12}$   $A_{13}$ 

 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$  和 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$  分块方式相同.则有 分块方式相同,则有

 $A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{pmatrix}$   $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{pmatrix}$ 

线性代数第1章

• 矩阵乘法:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

 $egin{aligned} \mathcal{H}$  开来法:  $\partial_t A_{m \times n}, B_{n \times k}$  矩阵,现设  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$  和  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}, \quad \text{$ \exists $A$ 的 $\mathcal{Y}$}$  为  $\mathcal{H}$  的  $\mathcal{H}$  行分块方式相同时,我们有 $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$   $C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}.$ 

例

现设 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
 试用分

块矩阵法求AB.

线性代数第1早 作者 刘围佬

经论

**矩阵的定义** 

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

设  $A_{m\times n}, B_{n\times p}$ :

• 取 B 的各列  $B_1, \ldots, B_p$  作为块矩阵, 则

$$AB = A(B_1, ..., B_p) = (AB_1, ..., AB_p);$$

线性代数第1章

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

设  $A_{m\times n}, B_{n\times p}$ :

• 取 B 的各列  $B_1, \ldots, B_p$  作为块矩阵,则

$$AB = A(B_1, ..., B_p) = (AB_1, ..., AB_p);$$

• 取 A 的各行  $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 作为块, B整体作为一块, 则

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B; \end{pmatrix}$$

线性代数第1章 **投** A

设 
$$A_{m\times n}, B_{n\times p}$$
:

• 取 
$$B$$
 的各列  $B_1, ..., B_p$  作为块矩阵,则 
$$AB = A(B_1, ..., B_p) = (AB_1, ..., AB_p);$$

• 取 A 的各行  $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 作为块, B整体作为一块, 则

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B; \end{pmatrix}$$

• 取 A 的各行  $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 作为块, B 的各列  $B_1, \ldots, B_p$  作 为块矩阵, 则

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} (B_1, \dots, B_p) = \begin{pmatrix} \alpha_1 B_1 & \cdots & \alpha_1 B_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m B_1 & \cdots & \alpha_m B_n \end{pmatrix}$$

目录绪论

たけ的代数巡算 分块矩阵 初等空揺与初

等矩阵 方阵的逆矩阵 方阵的行列式 1阶行列式的根

矩阵的

性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初

寺矩件

方阵的行列式

n阶行列式的概

巨阵的秩

$$AB = A(B_1, \dots, B_p) = (AB_1, \dots, AB_p)$$

线性代数第1章 作者 刘国华

山水

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万件的更矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

$$AB = A(B_1, \dots, B_p) = (AB_1, \dots, AB_p)$$

矩阵方程 AX = B 可看成 t 个线性方程组

$$Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \cdots, Ax_t = b_t,$$

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

E件的尺爻 E阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的根

矩阵的秩

$$AB = A(B_1, \dots, B_p) = (AB_1, \dots, AB_p)$$

矩阵方程 AX = B 可看成 t 个线性方程组

$$Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \cdots, Ax_t = b_t,$$

例

现设 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$ , 问当参数 $\lambda$  取何值时,矩阵

方程AX = B 有解? 当AX = B 有解时, 求其解.

# 线性代数第1章

• 矩阵分块转置:

$$\mathbb{A} A^T = egin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \ dots & dots & dots \ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$$

#### 注

分块转置中,每个子块一方面作为分块阵元素要转置;另一方 面作为矩阵本身也要转置,

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

例

假设A 是二阶方阵, x 是二维非零列向量,  $\overline{A}^2x + Ax = 6x$ , B = (x, Ax), 求一矩阵C, 使得AB = BC.

### 矩阵分块

次性代数第1早 - 佐老 対団化

目录

86 FC

矩阵的代数i 算

分块矩阵

初等变换与初

等矩阵

万阵的逆矩阵

n阶行列式的概

矩阵的秩

#### 矩阵分块的三个原则:

• 体现原矩阵特点.

### 矩阵分块

目录

L- 114 1.2 1.24 1

矩阵的代数; 算

分址矩阵

初等变换与剂

等矩阵

万阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

### 矩阵分块的三个原则:

- 体现原矩阵特点.
- 根据问题需要.

### 矩阵分块

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的尺数 矩阵的代数 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 矩阵分块的三个原则:

- 体现原矩阵特点.
- 根据问题需要.
- 能够把子块看作元素进行运算.

### 初等变换历史

线性代数第1章 作者 刘国华

目录

祖は仏やく

矩阵的代数法

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

矩阵的秩

- 公元前1世纪,《九章算术》
- 初等变换,相当于高斯消元法(高斯-若当方法)
   高斯[德] (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 1855)
   若当[法] (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838 1922)

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解: 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$ ,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

#### 线性代数第1章 作者 刘国华

作者 刘国华

绪论

矩阵的代数运

初等变换与初

**予矩件** 方阵的逆矩阵

万件的行列式 n阶行列式的概

矩阵的科

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解: 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$ ,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程,第一个方程的(-1)倍加到第三个方程,即得

线性代数第1章

刘国华

绪论 矩阵的定义

分块矩阵初等变换与初

**矩阵** 阵的逆矩阵 阵的行列式

所行列式的标 除行列式的标 连阵的秩 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解: 第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$ ,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程,第一个方程的(-1)倍加到第三个方程,即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$
 再将..., 即得 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

线性代数第1章 作者 刘国华 目录 结论 矩阵的定义 矩阵的代数运 并 分块矩阵

初等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

从上述的消元法求解过程可以看出,其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数,(如例1中变量从三个减少到两个,再减少到一个)然后再利用回代的方法求出线性方程组的解.这种求解的方法,称为高斯消元法.

从上述的消元法求解过程可以看出, 其目的是为了使原 方程组通过变换尽可能地减少变量的个数, (如例1中变量从 三个减少到两个, 再减少到一个) 然后再利用回代的方法求出 线性方程组的解. 这种求解的方法, 称为高斯消元法.

综合上述求解过程, 我们对方程组作了如下三种变换:

```
线性代数第1章
作者 刘国华
目录
緒论
矩阵的定义
矩阵的代数运
并
```

型件的代数还算 分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

「阵的逆矩阵 「阵的行列式

n阶行列式的标念

矩阵的秩

从上述的消元法求解过程可以看出,其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数,(如例1中变量从三个减少到两个,再减少到一个)然后再利用回代的方法求出线性方程组的解.这种求解的方法,称为高斯消元法.

综合上述求解过程, 我们对方程组作了如下三种变换: (1) 换位变换: 互换两个方程的位置(对调第i, 第j两个方程, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ).

线性代数第1章 作者 刘国华

海北 矩阵的定义 矩阵的代数运算

初等变换与初 等矩阵

5件的迎矩件5阵的行列式1阶行列式的根

台陸的社

巨阵的秩

从上述的消元法求解过程可以看出,其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数,(如例1中变量从三个减少到两个,再减少到一个)然后再利用回代的方法求出线性方程组的解.这种求解的方法,称为**高斯消元法**.

综合上述求解过程, 我们对方程组作了如下三种变换:

- (1) **换位变换**: 互换两个方程的位置(对调第i, 第j两个方程, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ).
- (2) 倍乘变换: 用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端(第i个方程乘以k, 记为 $r_i \times k$ ).

线性代数第1章

从上述的消元法求解过程可以看出,其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数,(如例1中变量从三个减少到两个,再减少到一个)然后再利用回代的方法求出线性方程组的解.这种求解的方法,称为高斯消元法.

综合上述求解过程, 我们对方程组作了如下三种变换:

- (1) **换位变换**: 互换两个方程的位置(对调第i, 第j两个方程, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ).
- (2) **信乘变换**: 用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端(第i个方程乘以k, 记为 $r_i \times k$ ).
- (3) 消去变换: 把一个方程的等号两端同乘以k倍, 分别加到另一个方程的等号两端(第j个方程两端乘以k加到第i个方程的两端, 记为 $r_i + kr_i$ ).

线性代数第1章 作者 刘国华

日来

矩阵的定义

矩阵的代数运 tr

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

**士肱丛公司**书

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

线性代数第1章 作者 刘国化

目录绪论

巨阵的定义 巨阵的代数运 E

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

#### Remark

• 把不改变线性方程组解的变换称为同解变换.

线性代数第1章 作者 刘围化

绪论 矩阵的定

E件的足义 E阵的代数运 草

分块矩件 初等变换与衫

奇矩阵 方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

矩阵的秩

#### Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变换**.

#### Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为同解变换。
- 同解的方程组也称为等价的方程组.

线性代数第1章

目求绪论

巨阵的定义 巨阵的代数运 草

分块矩阵 初等变换与衫 塞知時

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

#### Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为**线性方程组的初等变** 换.

#### Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为同解变换.
- 同解的方程组也称为等价的方程组.
- 线性方程组的初等变换是同解变换.

线性代数第1章

#### Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为线性方程组的初等变换.

#### Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为同解变换.
- 同解的方程组也称为等价的方程组.
- 线性方程组的初等变换是同解变换.
- 任意方程组都可以经过若干次初等变换化成阶梯形方程组.

7 分块矩阵 初等亦扬与初

初等变换与初 等矩阵

方阵的行列式 1阶行列式的概 ☆

矩阵的秩

# 初等变换

线性代数第1章

#### Definition

称(换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 为线性方程组的初等变换.

#### Remark

- 把不改变线性方程组解的变换称为同解变换.
- 同解的方程组也称为等价的方程组.
- 线性方程组的初等变换是同解变换.
- 任意方程组都可以经过若干次初等变换化成阶梯形方程组.
- Gauss消元法的过程中只是对系数和常数变换,变量没有变.

初等变换与初 等矩阵

5件的建矩件 5阵的行列式 1阶行列式的概念

线性代数第1章 作者 刘国华

#### 定义

- 互换矩阵的两行;
- 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行;
- 用一个非零数 k 乘矩阵某一行.

这三种变换称为矩阵的**初等行变换**.相应地,如果把上面三种变换中的行都变为列,则这样的变换称为矩阵的**初等列变换**.初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**.

线性代数第1章 作者 刘国华

#### 定义

- 互换矩阵的两行;
- 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行;
- 用一个非零数 k 乘矩阵某一行.

这三种变换称为矩阵的初等行变换.相应地,如果把上面三种变换中的行都变为列,则这样的变换称为矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

将这三种初等变换应用到单位矩阵上,得到的矩阵称为初等矩阵.

作者 刘国华

目录

- NG 7G

**州中的人人** 

**第** 

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 定义

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则称 A 与 B 等价(equivalent). 记为  $A \cong B$ .

# 作者 刘国华

目录绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩门

n阶行列式的标

矩阵的秩

#### 定义

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则称 A 与 B 等价(equivalent). 记为  $A \cong B$ .

容易验证矩阵之间的等价关系具有如下性质:

- 反身性(reflexivity)  $A \cong A$ ,
- 对称性(symmetry)  $A \cong B \Rightarrow B \cong A$ ,
- 传递性(transitivity)  $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$ .

线性代数第1章 作者 刘围化

定义

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则称 A 与 B 等价(equivalent). 记为  $A \cong B$ .

容易验证矩阵之间的等价关系具有如下性质:

- 反身性(reflexivity)  $A \cong A$ ,
- 对称性(symmetry)  $A \cong B \Rightarrow B \cong A$ ,
- 传递性(transitivity)  $A \cong B$ ,  $B \cong C \Rightarrow A \cong C$ .

一般地,设矩阵 $A_{m \times n}$ ,则经过一系列初等变换,可以得到与矩阵A等价的,最简单的矩阵:

$$A \cong \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等变换与初 等矩阵

5阵的行列式 阶行列式的概

## 初等矩阵定义

目录

缩论 矩阵的定义

矩阵的代数运 <sup>質</sup>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

2 45 11 12 - 1 12

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Question:

矩阵在初等变换前后,是不相等的,所以用箭头表示.能否将初等变换,用矩阵乘法描述?

## 初等矩阵定义

线性代数第1章 作者 刘围化

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的程

#### Question:

矩阵在初等变换前后,是不相等的,所以用箭头表示.能否将初等变换,用矩阵乘法描述?

### 定义 (初等矩阵)

对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

### 初等矩阵定义

线性代数第1章

绪论 矩阵的定义

分块矩阵 初等变换与初

方阵的逆矩阵 方阵的行列式 1阶行列式的机

矩阵的秩

#### Question:

矩阵在初等变换前后,是不相等的,所以用箭头表示.能否将初等变换,用矩阵乘法描述?

#### 定义 (初等矩阵)

对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- $E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j), E \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} E(i,j);$
- $E \stackrel{kr_i}{\to} E(i(k)), E \stackrel{kc_i}{\to} E(i(k));$
- $E \xrightarrow{r_i + kr_j} E(i, j(k)), E \xrightarrow{c_j + kc_i} E(j, i(k)).$

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

緒论

矩阵的定义

矩阵的代数运

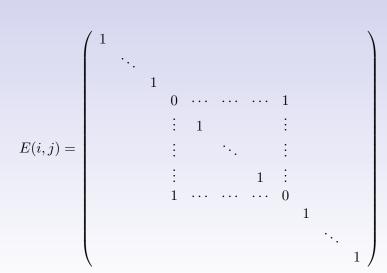
分址拓陸

初等变换与初

一时从兴和时

方阵的行列式

n阶行列式的概念



# 初等矩阵E(i(k)

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

**缩**论

矩阵的定义

矩阵的代数运

公抽细阵

初等变换与初

**予**矩件

方阵的行列式

n阶行列式的概念

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

**绪论** 

矩阵的定义

矩阵的代数运

八山石紅坑

初等弈换与初

等矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

```
E(i, j(k)) =
```

```
线性代数第1章
```

```
目录
```

绪论

算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

かいたかけがれ

矩阵的和

#### Example

计算

$$\left(\begin{array}{ccc}
0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc}
a & b & c \\
x & y & z \\
1 & 2 & 3
\end{array}\right)$$

和

$$\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

佐老 加国化

....

de JA

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的和

#### 一般的, 我们有

$$E(i,j)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$AE(i,j) = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# 初等矩阵E(i,j)一般的, 我们有

$$(i,j)A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

 $AE(i,j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$ 

矩阵A左乘E(i,j), 其效果为交换A的i、j行; 矩阵A右乘E(i,j), 其效果为交换A的i、j列.

```
线性代数第1章
```

```
目录
```

结论

矩阵的尺义 矩阵的代数运

并

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的和

#### Example

计算

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

和

$$\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

# 初等矩阵E(i,j(k))

一般的,我们有

$$E(i, j(k))A =$$

$$a_j$$

$$\vdots$$
  $a_{m1}$ 

 $a_{11}$ 

$$a_{m2}$$

$$a_{1i} \quad \cdots \quad a_{1i}$$
 $a_{2i} \quad \cdots \quad a_{2i}$ 

 $a_{mn}$ 

$$AE(j, i(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots \end{pmatrix}$$

# 初等矩阵E(i,j(k))一般的,我们有

 $a_{11}$ 

 $a_{m1}$ 

E(i, j(k))A =

 $AE(j, i(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots \end{pmatrix}$ 

 $a_{m2}$  ...

 $a_{i1} + ka_{j1}$   $a_{i2} + ka_{j2}$   $\cdots$   $a_{in} + ka_{jn}$ 

矩阵A左乘E(i,j(k)),其效果为把A的第j行的k倍加到第i行; 矩阵A右乘E(i,j(k)),其效果为把A的第i列的k倍加到第i列.

 $a_{mn}$ 

```
次注10.数第1早
```

目录

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Theorem

设 $A_{m \times n}$ ,

- (1) 对A 作一次初等行变换,相当于用相应初等矩阵左乘A;
- (2) 对A 作一次初等列变换,相当于用相应初等矩阵右乘A.

线性代数第1章

#### Theorem

设 $A_{m \times n}$ ,

- (1) 对A 作一次初等行变换,相当于用相应初等矩阵左乘A;
- (2) 对A 作一次初等列变换,相当于用相应初等矩阵右乘A.

#### Remark

对A 作初等行变换,等于用初等矩阵左乘A,且所乘的初等矩阵 是对E作同样的初等行变换得到的.

#### Remark

对A作初等列变换,等于用初等矩阵右乘A,且所乘的初等矩阵是对E作同样的初等列变换得到的.

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的 念

线性代数第1章

目录

20 10 2-11-11-21

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Theorem

设 $A_{m\times n}$ , 则存在 m 阶初等矩阵  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\cdots$ ,  $P_s$  s.t.  $P_1P_2\cdots P_sA$  为行最简形.

```
线性代数第1章
```

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Theorem

设 $A_{m \times n}$ , 则存在 m 阶初等矩阵  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\cdots$ ,  $P_s$  s.t.  $P_1P_2\cdots P_sA$  为行最简形.

#### Theorem

设 $A_{m\times n}$ , 则存在 m 阶初等矩阵 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\cdots$ ,  $P_s$  及n 阶初等矩阵  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $\cdots$ ,  $Q_t$  s.t.  $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=E^r_{m\times n}$ , 其中 r 为不超过  $min\{m,n\}$  的非负整数.

```
线性代数第1章
- 佐老 刘国化
```

日永

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

**六肽的公剂**书

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 例

• 设 A 是 3 阶方阵,将 A 的第一列与第二列交换得到 B,再把 B 的第二列加到第三列得到C,求满足AQ=C 的矩阵Q.

#### 例

• 设 A 是3 阶方阵,将 A 的第一列与第二列交换得到 B. 再把 B 的第二列加到第三列得到C, 求满足AQ = C 的 矩阵().

• ig 
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \stackrel{?}{\times} P^{2019} AQ^{2019}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
,  $\not x P^{2019} AQ^{2019}$ .

### スロハ双カェ字

作者 刘国华

目录

拓陈的学》

矩阵的代数运 質

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

11 / 2 T. 1 12 / L be

#### 定义

设A 是n 阶方阵, 如果存在n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称A为可逆的, 并称B 为A 的逆矩阵.记作 $B = A^{-1}$ .

# 线性代数第1章

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根

巨阵的秩

#### 定义

设A 是n 阶方阵, 如果存在n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称A为可逆的, 并称B 为A 的逆矩阵.记作 $B = A^{-1}$ .

#### 注

• 在定义中矩阵A 与B 地位相同,如果B 是A 的逆矩阵;则A 也是B 的逆矩阵;(互逆的)

# 线性代数第1章

定义

设A 是n 阶方阵, 如果存在n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称A为可逆的, 并称B 为A 的逆矩阵.记作 $B = A^{-1}$ .

#### 注

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同,如果B 是A 的逆矩阵;则A 也是B 的逆矩阵;(互逆的)
- 可逆矩阵A 的逆矩阵是唯一的;

# 线性代数第1章

设A 是n 阶方阵, 如果存在n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称A为可逆的, 并称B 为A 的逆矩阵.记作 $B = A^{-1}$ .

#### 注

定义

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同,如果B 是A 的逆矩阵;则A 也是B 的逆矩阵;(互逆的)
- 可逆矩阵A 的逆矩阵是唯一的;不是所有的矩阵都有逆矩阵.

作者 刘国华

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵 **方阵的逆矩阵** 

方阵的行列式 n阶行列式的概 念

# 定义

线性代数第1章

设 $A \neq n$  阶方阵, 如果存在n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称A为**可逆**的, 并称B 为A 的逆矩阵.记作 $B=A^{-1}$ .

#### 注

- 在定义中矩阵A 与B 地位相同,如果B 是A 的逆矩阵;则A 也是B 的逆矩阵;(互逆的)
- 可逆矩阵A的逆矩阵是唯一的;不是所有的矩阵都有逆矩阵。

# 例

用待定系数法求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = p \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

.....

作者 刘国华

目录

缩论

矩阵的定义

算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

**万件的**更矩件

n阶行列式的概念

巨阵的秩

根据定义有以下命题.

#### 性质

如果A可逆, 则

•  $A^{-1}$ 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ;

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

根据定义有以下命题.

#### 性质

如果A可逆,则

- $A^{-1}$ 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $A^{\mathrm{T}}$  可逆,  $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ ;

性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的定

矩阵的代数运 阵

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的构

巨阵的秩

根据定义有以下命题.

### 性质

如果A可逆, 则

- $A^{-1}$  可逆,且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $A^{\mathrm{T}}$  可逆,  $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ ;
- 当 $k \neq 0$ , 则kA也可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ;

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

根据定义有以下命题.

### 性质

如果A可逆, 则

- $A^{-1}$ 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $A^{\mathrm{T}}$  可逆,  $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ ;
- 当 $k \neq 0$ , 则kA也可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ;
- 对于同阶方阵A,B, 若A,B均可逆,则AB也可逆,  $\mathbb{E}(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ .

线性代数第1章

作者 刘国华

目录绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运 <sup>铍</sup>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万件的逆矩件 方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

根据定义有以下命题.

### 性质

如果A可逆,则

- $A^{-1}$ 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $A^{\mathrm{T}}$  可逆,  $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ ;
- 当 $k \neq 0$ , 则kA也可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ;
- 对于同阶方阵A,B, 若A,B均可逆, 则AB也可逆, 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ .

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

# 初等矩阵

作者 刘国华

目录

8d 10

矩阵的定义

矩阵的代数过

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

力件的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

容易验证

• 
$$E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$$
;

# 初等矩阵

/c v. 헤로/V

目录

- NE FG

**州的人人** 

矩件的代数25 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

すがけ

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

容易验证

• 
$$E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$$
;

$$\bullet \ E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), \ E(i(k))^T = E(i(k));$$

线性代数第1章

目录

86 1C

矩件时足义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与权 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的

矩阵的秩

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$ ;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(i(k))^T = E(i(k));$
- $E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k)), E(i, j(k))^T = E(j, i(k)).$

作者 刘国华

目录

45 life 44

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵 初等变换与7

等矩阵 方阵的逆矩阵

方阵的行列式

念 - 容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$ ;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(i(k))^T = E(i(k));$
- $E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k)), E(i, j(k))^T = E(j, i(k)).$

例

证明可逆的行最简形矩阵为单位矩阵.

线性代数第1章

容易验证

• 
$$E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$$
;

• 
$$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(i(k))^T = E(i(k));$$

• 
$$E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k)), E(i, j(k))^T = E(j, i(k)).$$

例

证明可逆的行最简形矩阵为单位矩阵.

#### Lemma

线性代数第1章

容易验证

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(i,j)^T$ ;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})), E(i(k))^T = E(i(k));$
- $E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k)), E(i, j(k))^{T} = E(j, i(k)).$

### 例

证明可逆的行最简形矩阵为单位矩阵.

#### Lemma

单位阵  $E_n$ .

### Theorem

方阵 A 可逆当且仅当 A 可以写成一系列初等矩阵的乘积.

作者 刘国华

日 水 结 论

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

初等变换与初

等矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Remark

• 设 $A, B \not\in m \times n$  阶矩阵, 则存在 m 阶可逆阵  $P \cap n$  阶可逆阵 Q, 使得  $A = PE^rQ$ .

作者 刘国华

緒论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

**方阵的逆矩阵** 方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### Remark

- 设 $A, B \not\in m \times n$  阶矩阵, 则存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q, 使得  $A = PE^rQ$ .
- 设 $A, B \not = m \times n$  阶矩阵,则A 和 B 等价当且仅当存在可逆矩阵P 和Q, 使得B = PAQ.

### 矩阵求逆矩阵

线性代数第1章

目录

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

念

矩阵的秩

设  $A \neq n$  阶可逆矩阵,则  $A^{-1}$  可逆,根据定理,存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots P_s$ ,使得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

### 矩阵求逆矩阵

线性代数第1章

作者 刘国华

目录结论

矩阵的定义

矩阵的代数 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

设  $A \neq n$  阶可逆矩阵,则  $A^{-1}$  可逆,根据定理,存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots P_s$ ,使得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

两边右乘 A 和 E,即得

$$E = P_s \cdots P_2 P_1 A, \ A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 E$$

### 矩阵求逆矩阵

### 线性代数第1章

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

巨阵的秩

设  $A \neq n$  阶可逆矩阵,则  $A^{-1}$  可逆,根据定理,存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots P_s$ ,使得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

两边右乘 A 和 E,即得

$$E = P_s \cdots P_2 P_1 A, \ A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 E$$

即

$$P_s \cdots P_2 P_1(AE) = (EA^{-1})$$

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

设A 为 n 阶可逆方阵,求  $A^{-1}$ 的过程可用下列的初等行变换来实现:

- ① 把 A 和E并排,构造一个 $n \times (2n)$ 的矩阵(A:E);
- ② 对(A:E)实施初等行变换(A,E 同步进行),根据前面定理,若干次以后,(A:E)  $\Rightarrow$   $\left(E_n:A^{-1}\right)$ .

III (WATE

目录

SQ 10

矩阵的定义

矩阵的代数主 算

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的标念

矩阵的秩

### 例

求下列矩阵的逆矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

### 线性代数第1章

例

求下列矩阵的逆矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

### 例

解矩阵方程

• 
$$\mathfrak{F}AX = B$$
,  $\mathfrak{F} PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathfrak{F}X$ .

例

线性代数第1章

求下列矩阵的逆矩阵

例

解矩阵方程

阵X,使得AXB = C.

 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

• 设
$$AX = B$$
, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求 $X$ .  
• 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , 求矩

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



### 可逆矩阵的存在性

```
线性代数第1章
```

日求

to the fit is a

矩阵的代数:

分块矩阵 初等变换与

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的构

拒阵的秩

### 问题

在什么条件下, n阶矩阵A是可逆的; 如果可逆,如何求出它的逆矩阵?

### 可逆矩阵的存在性

```
线性代数第1章
```

日求

to the fit is a

矩阵的代数:

分块矩阵 初等变换与

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的构

拒阵的秩

### 问题

在什么条件下, n阶矩阵A是可逆的; 如果可逆,如何求出它的逆矩阵?

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的尺数运 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的

矩阵的秩

设有两个二元一次方程组成的方程组(设  $a_{11}, a_{21}$  两个数不全为零):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

### 线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的积

设有两个二元一次方程组成的方程组(设  $a_{11}, a_{21}$  两个数不全为零):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

### Theorem

当 
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$
 时, 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$
.

线性代数第1章 作者 刘国华

设有两个二元一次方程组成的方程组(设  $a_{11}, a_{21}$  两个数不

全为零): 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$
,

### Theorem

当 
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$
 时, 
$$\begin{cases} x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$
.

当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$  时,

- 若  $a_{11}b_2 a_{21}b_1 \neq 0$  则方程组无解;
- 若  $a_{11}b_2 a_{21}b_1 = 0$  时,第二个方程是第一个方程的倍式,所以方程组有无穷组解.

线性代数第1章

方阵的行列式 n阶行列式的概

设有两个二元一次方程组成的方程组(设  $a_{11}, a_{21}$  两个数不全为零):  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ ,当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$  时,

- 若  $a_{11}b_2 a_{21}b_1 = 0$  时,第二个方程是第一个方程的倍式,所以方程组有无穷组解!

这说明  $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$  是否等于零能决定( determine )方程组是不是有唯一解! 是一个起决定意义的数,称为方程组系数列的 2 阶行列式(英文 determinant,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

目录

2- 11- 22 in 1

矩阵的代数运

**第** 

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列。

n阶行列式的概念

巨阵的秩

• 第1、2消得I 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

```
线性代数第1章 作者 刘国华
```

目录

矩阵的代数运 <sup>66</sup>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的私

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

- 第1、2消得I  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
- 第1、3消得II  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

• 第1、2消得I 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

• 第1、3消得II 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

• 第2、3消得III 
$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$
  $I \times a_{33} - II \times a_{23} + III \times a_{13} \Rightarrow$ 

$$\begin{vmatrix} a_{33} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2$$

$$= a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运 if

<sub>才</sub> 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的和

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \\ I \times a_{33} - II \times a_{23} + III \times a_{13} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & x_2 - a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2$$

$$= a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

线性代数第1章 Theorem

称

 $egin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \end{array}$ 

 $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix}$ 

为三阶行列式 (determinant).

 $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ 

 $+ a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ 

Remark

 $a_{31}$ 

 $a_{32}$ 

 $a_{33}$ 

### n阶行列式定义

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

### 结论

E1件的尺爻 E阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

<sup>行列式的应用</sup> Gramer 法判 矩阵的秩

### 递推定义:

设n-1阶行列式已被定义,则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} (-1)^{i+1} M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

其中  $M_{kl}$  为矩阵  $(a_{ij})_{n\times n}$  划去第 k 行与第 l 列后剩下的元素按原来的相对位置排成的 n-1 阶行列式,称  $M_{kl}$  为  $a_{kl}$  的余子式,称  $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}$  为  $a_{kl}$  的代数余子式. (每个都是 n-1 阶行列式).p

### 行列式的按行展开

Example

设行列式A=

$$\begin{vmatrix}
3 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 3 & 1
\end{vmatrix}$$

, 试写出 $M_{23}$ ,  $A_{34}$ .

### n阶行列式定义

### 递推定义:

设 n-1 阶行列式已被定义.则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} (-1)^{i+1} M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

其中  $M_{kl}$  为矩阵  $(a_{ij})_{n\times n}$  划去第 k 行与第 l 列后剩下的元 素按原来的相对位置排成的 n-1 阶行列式,称  $M_{kl}$  为  $a_{kl}$  的 余子式,称  $A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$  为  $a_{kl}$  的代数余子式. (每个都 是 n-1 阶行列式).

### n阶行列式定义

线性代数第1章

递推定义:

设 n-1 阶行列式已被定义.则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} (-1)^{i+1} M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

其中  $M_{kl}$  为矩阵  $(a_{ij})_{n\times n}$  划去第 k 行与第 l 列后剩下的元 素按原来的相对位置排成的 n-1 阶行列式, 称  $M_{kl}$  为  $a_{kl}$  的 余子式,称  $A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$  为  $a_{kl}$  的代数余子式. (每个都 是 n-1 阶行列式).

### Remark:

- (1)n! 项,不在同行,不在同列的 n 个数之积.
- (2) 行列式是  $n \times n$  阶矩阵对应的一个数值.

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运 算

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法判 矩阵的秩 (1) 二阶、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

线性代数第1章 作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

知件的代数X 算

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法判

矩阵的和

### (2) 对角行列式

线性代数第1章 作者 刘国华

目录

3百16

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法集

巨阵的秩

### (2) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

#### 线性代数第1章 作者 刘国华

目录

酒化

矩阵的代数法

公执红阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

行列式的应用 Gramer 法判 (2) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

### 线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法则 矩阵的秩

### (3)上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

### (4)下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

线性代数第1章 作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的代数i

公拉红胨

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法判

巨阵的形

练习:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

### 行列式的性质

### 线性代数第1章 作者 刘国华

目录

矩阵的定:

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩

n阶行列式的概念

Gramer 法判 **矩阵的**称 • 性质1.1 行列式行列对换,行列式的值不变.

$$D_{n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_{n}^{2}$$

### 行列式的性质

#### 线性代数第1章 作者 刘围化

- 结论 矩阵的定义
- 分块矩阵 初等变换与初 <sup>等</sup>矩阵
- 方阵的逆矩阵
- n阶行列式的概
- 行列式的应用 Gramer 法判 运体 紛 独

- 性质1.1 行列式行列对换, 行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行(列)乘常数 k, 其行列式等于原行列式乘 k.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地, 若行列式某行(或某列)的元素全为零,则行列式为零.

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

```
结论
```

矩阵的尺爻 矩阵的代数运 質

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法判

```
ka_{11} \quad ka_{12} \quad \cdots \quad ka_{1n}
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
ka_{i1} \quad ka_{i2} \quad \cdots \quad ka_{in}
\vdots \quad \vdots \quad \vdots
ka_{n1} \quad ka_{n2} \quad \cdots \quad ka_{nn}
```

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

```
绪论
矩阵的定义
```

矩阵的足义 矩阵的代数运 覧

分块矩阵 初等变换与初

等矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法则 矩阵 60 辞

```
\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
```

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵 初等变换与7

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

行列式的应用 Gramer 法则 矩阵的秩

- 性质1.1. 行列式行列对换, 行列式的值不变.
- 性质1.2. 行列式某一行(列)乘常数k,其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3. 行列式两行(列)互换, 行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

```
线性代数第1章
```

结论

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩

**大阵的行列**目

n阶行列式的标念

行列式的应用 Gramer 法约

矩阵的系

#### Example:

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

```
线性代数第1章
```

作者 刘国华

日求

绪论

矩阵的代数过

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

力件的处处!·

n阶行列式的概

行列式的应用 Gramer 法则

巨阵的君

#### Example:

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

#### Corollary:

若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.

作者 刘国华

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的标

行列式的应用 Gramer 法则 • 性质1.1 行列式行列对换, 行列式的值不变.

• 性质1.2 行列式某一行(列)乘常数k,其行列式等于原行列式乘k.

• 性质1.3 行列式两行(列)互换,行列式变号.

• 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.

**ダ性代数第1章** 作者 刘国华

日 水 緒论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的标

行列式的应用 Gramer 法判

- 性质1.1 行列式行列对换, 行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行(列)乘常数k,其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3 行列式两行(列)互换,行列式变号.
- 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.2 行列式某两行(列)的元素成比例,则行列式的值为零.

- 国华
- 目录
- 矩阵的定义 矩阵的代数运
- 初等变换与初
- 方阵的逆矩阵
- 方阵的行列式 1阶行列式的概
- 行列式的应用 Gramer 法判 百阵的辞

- 性质1.1 行列式行列对换, 行列式的值不变.
- 性质1.2 行列式某一行(列)乘常数k, 其行列式等于原行列式乘k.
- 性质1.3 行列式两行(列)互换, 行列式变号.
- 推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.2 行列式某两行(列)的元素成比例,则行列式的值为零.
- 性质1.4. 行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数 之和,则此行列式等于两个行列式之和.
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 
  - $a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}$   $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

```
线性代数第1章
```

日来

拓陈的空心

矩阵的代数运

分址拓陸

分块矩件

初寺受换与衣 等矩阵

万阵的逆矩

n阶行列式的 念

行列式的应用 Gramer 法则

矩阵的私

#### Example:

求

$$\left| \begin{array}{cc} a+b & x+y \\ c+d & m+n \end{array} \right| =$$

 $a_{i1}$ 

线性代数第1章

- 性质1.1. 行列式行列对换,行列式的值不变.
  - 性质1.2. 行列式某一行(列)乘常数k,其行列式等于原
  - 行列式乘*k*.
     性质1.3. 行列式两行(列)互换,行列式变号.
  - 性质1.3. 行列式两行(列)互换,行列式变亏.推论1. 若行列式中有两行(列)完全相同,行列式值为0.
    - 推论2. 行列式某两行(列)的元素成比例,则行列式的值为零. • 性质1.4. 行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数
- 之和,则此行列式等于两个行列式之和.
   性质1.5. 行列式的某一行(列)的k 倍加到另一行
- 性质1.5. 行列式的某一行(列)的k 倍加到另一行(列),行列式不变.  $a_{11}$   $a_{12}$   $\cdots$   $a_{1n}$   $a_{11}$   $a_{12}$   $\cdots$   $a_{1n}$

 $a_{i1} + ka_{i1}$   $a_{i2} + ka_{i2}$  ···  $a_{in} + k$ 

```
线性代数第1章
```

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法判 矩阵的秩

#### Example

设行列式
$$\begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{vmatrix} = d,$$

求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 2a_{2\,1} & -4a_{2\,2} & 2a_{2\,3} \\ 3a_{3\,1} & -6a_{3\,2} & 3a_{3\,3} \\ -1a_{1\,1} & 2a_{1\,2} & -1a_{1\,3} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} - 3a_{13} & a_{13} \\ -a_{21} & 3a_{23} - a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} - 3a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

```
线性代数第1章
```

```
目录
```

----矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩队

カ件的行列式

Gramer 法判 毎阵的秩

#### Example:

Vandermonde行列式

```
线性代数第1章
作者 刘围化
```

#### 目录

巨阵的定义

并

分状矩阵

等矩阵

万阵的逆矩阵

n阶行列式的概

行列式的应用 Gramer 法则 Example:

Vandermonde行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

从上式可以看出,Vandermonde行列式等于零当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有两个相同.

# 线性代数第1章

作者 刘国华

日水

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与权 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的

**念** 行列式的应用 Gramer 法刑

矩阵的科

#### Vandermonde行列式的应用

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$  为 互 不 相 同 的n个 数, 则 对 任 意 的 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ,存在唯一的一个次数小于n的多项式f(x),使 得

$$f(a_i) = b_i, \quad 1 \le i \le n.$$

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

结论 矩阵的定义

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的概

1111 11 71 天 11 1960 金 公司 F M A B B

### Vandermonde行列式的应用

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$  为 互 不 相 同 的n个 数, 则 对 任 意 的 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ,存在唯一的一个次数小于n的多项式f(x),使

$$f(a_i) = b_i, \quad 1 \le i \le n.$$

#### Proof.

待定系数,设 $f(x) = c_n x^{n-1} + \dots + c_2 x + c_1$ , 代入 $f(a_i) = b_i$ ;

$$\begin{cases} c_1 + a_1 c_2 + \dots + a_1^{n-1} c_n = b_1 \\ \dots \\ c_1 + a_n c_2 + \dots + a_n^{n-1} c_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式非零, 待定的系数有唯一解.

得

线性代数第1章

 $\partial_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$  为 互 不 相 同 的n个 数, 则 对 任 意 的 $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 存在唯一的一个次数小于n的多项式f(x), 使  $f(a_i) = b_i, 1 < i < n.$ 

Vandermonde行列式的应用

Proof.

待定系数, 设 $f(x) = c_n x^{n-1} + \cdots + c_2 x + c_1$ , 代入 $f(a_i) = b_i$ ;

 $\begin{cases} c_1 + a_1 c_2 + \dots + a_1^{n-1} c_n = b_1 \\ \dots \\ c_1 + a_n c_2 + \dots + a_n^{n-1} c_n = b_n \end{cases}$ 

和为I acrongo 抵估名项式

系数行列式非零, 待定的系数有唯一解.

实际上,  $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{i+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_i)\cdots(a_i-a$ 

```
线性代数第1章
```

作者 刘国华

```
目录
```

绪论

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

- nt 11 1- -1 15

n阶行列式的概

行列式的应用 Gramer 法则

```
a_{11} ... a_{1n} * ... *
\vdots ... \vdots ... \vdots
a_{n1} ... a_{nn} * ... *
b_{11} ... b_{1m}
\vdots ... \vdots
b_{m1} ... b_{mm}
```

```
线性代数第1章
```

```
TEAL ALEA
```

```
結论
矩阵的定义
```

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法则 矩阵的辞

$$= \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \right|$$

```
线性代数第1章
```

```
目录
```

绪论

ルドの人へ 矩阵的代数运

第 第

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概

行列式的应用 Gramer 法判

巨阵的秩

#### Example:

 $a_{n1}$ 

```
线性代数第1章
```

```
日 水
緒论
矩阵的定义
矩阵的代数运算
分块矩阵
```

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法则 矩阵的辞

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

缩论

矩阵的定义

**郑件时代效**逐算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法第

#### Example:

(1) 已知,

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -x \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求  $x^3$  的系数.

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

日录

绪论

担件的足义 拒阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概 念

Gramer 法则 **矩阵的**辞

#### Example:

(1) 已知,

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -x \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求  $x^3$  的系数.

(2) 设,

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明:  $f(\lambda)$  是 $\lambda$  的n 次多项式, 并求 $\lambda^n$ ,  $\lambda^{n-1}$  的系数.

### 乘法定理

线性代数第1章

目录

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与补

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

行列式的应用 Gramer 法》

巨阵的利

#### 定理

(行列式乘积法则) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是n 阶方阵, 则

$$|AB| = |A||B|.$$

#### 线性代数第1章 作者 刘围化

### 目录

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的延矩[

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法判 场际 45-34

#### 定理

(行列式乘积法则) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是n 阶方阵, 则

$$|AB| = |A||B|.$$

#### 推论

设n 阶方阵 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ , 则有

$$|A_1 A_2 \cdots A_s| = |A_1||A_2| \cdots |A_s|.$$

线性代数第1章

作者 刘国华

日 家 结 论

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的

行列式的应用 Gramer 法判

#### 行列式按行展开定理

n 阶行列式 $|A|=det(a_{ij})$  等于它任意行(列)的各元素与其相应的代数余子式的乘积之和, 即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = |A|, \ \forall \ 1 \le i \le n,$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = |A|, \ \forall \ 1 \le j \le n$$

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数法

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的行列式 n阶行列式的概

<sup>行列式的应用</sup> Gramer 法判 矩阵的秩

#### 行列式按行展开定理

n 阶行列式 $|A| = det(a_{ij})$  等于它任意行(M)的各元素与其相应的代数余子式的乘积之和,即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = |A|, \ \forall \ 1 \le i \le n,$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = |A|, \ \forall \ 1 \le j \le n$$

当行列式中一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余 子式乘积之和一定是于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0, \ 1 \le i \ne j \le n,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0, \ 1 \le i \ne j \le n.$$

```
线性代数第1章
```

目录

30 TE

矩阵的代数运

分块矩阵

....

初寺叟换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法》

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

#### 线性代数第1章 作者 刘国华

- 緒论 矩阵的定义
- 矩阵的代数运 算
- 初等变换与初 等矩阵
- 为件的之外付 方阵的行列式 n阶行列式的标
- 行列式的应用 Gramer 法则 矩阵的秩

#### 一般数字行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 的计算步骤:

- 检查第一列是否有非零元, 若无, 行列式为零;
- 若有, 必要时可交换两行(行列式变号),使(1,1)位置非 零:
- 把第一行的适当倍数加到其它行,使第一列上其它位置 均为零;
- 再对得到的 n-1 阶行列式的(1,1)子式重复前面三步,最后得到一个上三角行列式,对角元乘在一起就得到该行列式.

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

**缩**化

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

77 IT 113 ~C 74 IT

n阶行列式的标

行列式的应用 Gramer 法规

矩阵的科



```
线性代数第1章
```

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与剂

NIT BY VENT

n阶行列式的概

**念** 行列式的应用

行列式的应用 Gramer 法则

巨阵的秩

#### Example:

**2** | 1 1 3 ··· 1 | ₌

 $1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad \vdots$ 

作者 刘国华

目录

od vo

和干的人人

矩阵的代数i

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法规

巨阵的科

• 化为上三角或者下三角行列式.

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

海水

矩阵的定义

矩阵的代数:i

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

1阶行列式的框 念

行列式的应用 Gramer 法则 45 阵 45-34 • 化为上三角或者下三角行列式.

#### Example

计算下列行列式

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

• 化为上三角或者下三角行列式.

#### Example

线性代数第1章

计算下列行列式

 $D_n =$ 

 $\begin{vmatrix} 1 + a_1 \end{vmatrix}$ 

 $1 + a_2$ 

 $1 + a_3$ 

 $D_n =$ 

- 线性代数第1草
- 作者 刘国华
- 目录
- 缩化
- **矩阵的尺**叉
- <del>/</del>F
- 分块矩阵
- 初等变换与剂 等矩阵
- 方阵的逆矩阵
- **士肱奶红剂**」
- n阶行列式的概念
- 行列式的应用 Gramer 法判 标 ttt 44.54

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

- 线性代数第1章
- 化为上三角或者下三角行列式.

 $= \left(\sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} a_i\right) + \prod_{i=1}^n a_i.$ 

• 分解行列式,递推法.

#### Example

$$D_{n} = \begin{vmatrix} 1 + a_{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_{2} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_{3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + a_{n} \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1} a_{i} + a_{n} D_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{i} + a_{n} \left( \prod_{i=1}^{n-2} a_{i} + a_{n-1} D_{n-2} \right)$$

念 <sup>行列式的应用</sup> Gramer 法判 矩阵的秩

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.
- 按行或者按列展开.

#### 工厂级为工品

作者 刘国华

目录

新 化

红阵的尺人

笄

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法则

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.
- 按行或者按列展开.

### Example

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a & b \\ & & c & d \\ & & \ddots & & \ddots \\ c & & & d \end{vmatrix}$$

# 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

8**6** 10

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概 念

行列式的应用 Gramer 法则 矩阵的秩

- 化为上三角或者下三角行列式.
- 分解行列式,递推法.
- 按行或者按列展开.

### Example

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & a & b \\ & c & d \\ & \ddots & & \ddots \\ c & & d \end{vmatrix}$$
$$= (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad - bc)^{n}.$$

### Example

$$\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$$

ab

$$\begin{array}{ccc} \cdot \cdot & a+b & ab \\ & 1 & a+b \end{array}$$

$$1 \qquad a+b$$

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

```
緒论
矩阵的定义
矩阵的代数运
```

分块矩阵 初等变换与补

等矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法则 **E阵的秩** 

### Example

$$D_{n} = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b & ab \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & a+b & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$
$$= b^{n} + b^{n-1}a + b^{n-2}a^{2} + \dots + ba^{n-1} + a^{n}$$

本题有5种解法,包括两种递推方法、方程组方法、完全拆项 法和归纳证明法.

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运算

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

大阵的行列式

n阶行列式的标念

行列式的应用 Gramer 法则 • 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式 n 阶行列式的

行列式的应用 Gramer 法》 • 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

• 拆开第一列,得到 $D_n = b^n + aD_{n-1}$ .

### 线性代数第1章 作者 刘国华

矩阵的定义

并 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的行列之

n阶行列式的概念

可列式的应用 Gramer 法则 矩阵的秩 • 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

- 拆开第一列, 得到 $D_n = b^n + aD_{n-1}$ .
- 方程组解法由 $D_n = b^n + aD_{n-1}$  可得 $D_n = a^n + bD_{n-1}$  (两个未知数对称), 解方程组可得 $D_n = \frac{b^{n+1} a^{n+1}}{b a}$ .

### 线性代数第1章 作者 刘国华

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法判 距**阵的**秩 • 行列式按第一行展开,得到递推关系式

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^{n-2}(D_2 - aD_1).$$

- 拆开第一列, 得到 $D_n = b^n + aD_{n-1}$ .
- 方程组解法由 $D_n = b^n + aD_{n-1}$  可得 $D_n = a^n + bD_{n-1}$  (两个未知数对称), 解方程组可得 $D_n = \frac{b^{n+1} a^{n+1}}{b-a}$ .
- 完全拆项,将每一列都拆成两列.

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法》

巨阵的科

### 问题

在什么条件下, n 阶矩阵A 是可逆的; 如果可逆,如何求出它的逆矩阵?

## 伴随矩阵

```
线性代数第1章
作者 刘国化
```

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

5阵的逆矩阵

n阶行列式的标念

行列式的应用 Gramer 法判 ☞ 134 44 44

### 定义

设n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ ,行列式 $\det A$  的每个元素的代数余子式 $A_{ij}$  所构成的如下矩阵:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的**伴随矩阵**.

# 伴随矩阵

线性代数第1章

定义

设n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ , 行列式det A 的每个元素的代数余子

式 $A_{ij}$  所构成的如下矩阵:

 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 

(1) 计算矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  和矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  的伴随矩阵.

例

称为矩阵A的伴随矩阵.

# 伴随矩阵

# 定义

线性代数第1章

设n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ ,行列式 $\det A$  的每个元素的代数余子式 $A_{ij}$  所构成的如下矩阵:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴**随矩阵**.

## 例

- (1) 计算矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  和矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  的伴随矩阵.
- (2) 计算AA\* 和A\*A.

#### 注代数第1早

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运 <sup>6</sup>

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列主

念

行列式的应用 Gramer 法

七 11会 五人 工品

巨阵的秩

### 性质

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F}),$  则

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

#### 线性代数第1章

作者 刘国华

目录

绪论

巨阵的尺数运

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列主

n阶行列式的概念

行列式的应用 Gramer 法制

巨阵的秩

### 性质

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F}),$  则

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

### 定理

方阵A可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ . 当 $|A| \neq 0$ 时,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

其中A\*为A的伴随矩阵.

# 性质

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ ,则

 $AA^* = A^*A = |A|E.$ 

## 定理

方阵A可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ . 当 $|A| \neq 0$ 时,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

其中A\*为A的伴随矩阵.

### 推论

n 阶方阵A可逆的充要条件是存在B,使得AB=E(或BA=E), 且 $B=A^{-1}$ .

作者 刘国华目录

线性代数第1章

矩阵的定义 矩阵的代数运

算 分块矩阵

等矩阵 方阵的逆矩阵

1阶行列式的概念 合 行列式的应用

Gramer <sub>法则</sub> 矩阵的秩

加 th th th th th th

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

**士肱的红剂**半

n阶行列式的概 念

念 行列式的应用

Gramer ##

矩件的积

例

设A是3阶 方 阵,且 | A|=3,计 算: |  $A^{-1}|,\ |A^*|,\ |(A^{-1})^*|,\ |(A^*)^{-1}|,\ |(A^*)^*|$  ,|  $|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|.$ 

行列式的应用 Gramer 法》 细路 45 24

#### 例

设A是3阶 方 阵, 且 |A|=3,计 算:  $|A^{-1}|,\ |A^*|,\ |(A^{-1})^*|,\ |(A^*)^{-1}|,\ |(A^*)^*|$  ,  $|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|.$ 

### 例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

线性代数第1章

作者 刘国华

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与: 等矩阵

方阵的逆矩阵方阵的行列式

n阶行列式的机 念 行列式的应用 Gramer 注册

-<del>行列式的应用</del> Gramer 法》 拒阵的秩 例

设A是3阶 方 阵,且|A|=3,计 算: $|A^{-1}|$ , $|A^*|$ , $|(A^{-1})^*|$ , $|(A^*)^{-1}|$ , $|(A^*)^*|$ , $|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|$ .

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

例

• n阶矩阵A满足 $A^2-2A+3E=O,$  求 $(A+E)^{-1},(A-E)^{-1}.$ 

线性代数第1章

例

设A是 3 阶 方 阵, 且 | A| = 3, 计 算: | A^{-1}|, | A\*|, | (A^{-1})\*|, | (A\*)^{-1}|, | (A\*)\*|, | 2A^{-1} - \frac{1}{2}A\*|.

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

例

- n阶矩阵A满足 $A^2-2A+3E=O, \bar{x}(A+E)^{-1}, (A-E)^{-1}.$
- n阶矩阵A, B满足A + B = AB. 证明A E 可逆, 并求 逆矩阵.

1章

例

设A是3阶 方 阵,且|A|=3,计 算: $|A^{-1}|,\ |A^*|,\ |(A^{-1})^*|,\ |(A^*)^{-1}|,\ |(A^*)^*|,\ |2A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|.$ 

例

判别下列矩阵是否可逆,如果可逆求其逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

例

- n阶矩阵A满足A<sup>2</sup>-2A+3E = O, 求(A+E)<sup>-1</sup>, (A-E)<sup>-1</sup>.
- n阶矩阵A, B满足A + B = AB. 证明A E 可逆, 并求 逆矩阵.
- 矩阵A, B, A + B 均可逆, 则求 $A^{-1} + B^{-1}$ 的逆.

作者 刘国华

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式 n阶行列式的。 念

念 ffilsoigh Gramer # 矩阵的秩

# 分块对角阵的逆矩阵

```
线性代数第1章
作者 刘围化
```

目录绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与:

等矩阵

方阵的征忆而言

n阶行列式的标

可列氏的应用 Gramer 法》 运动 44.44 例

 $1,2,\cdots,s$ )分别为 $n_i$ 阶方阵,则重复利用Laplace定理,有 $|A|=\prod_{k=1}^{s}|A_k|$ ,所以A是可逆阵的充分必要条件为每个 $A_i$ 都是可逆矩阵.

# 分块对角阵的逆矩阵

例

设
$$n$$
阶 方 阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&&&&\\&A_2&&&\\&&\ddots&&\\&&&A_s\end{pmatrix}$ ,其中每个 $A_i$   $(i=1,2,\ldots)$  入別 为 股 下 队 无 气 划 图  $I_1$  之 中  $I_2$ 

 $1, 2, \dots, s$ )分别为 $n_i$ 阶方阵,则重复利用Laplace定理,有|A|= $\prod_{k=1}^{s} |A_k|$ , 所以A是可逆阵的充分必要条件为每个A;都是可 逆矩阵.

此时由分块矩阵的乘法可知

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1}. \end{pmatrix}$$

# 分块矩阵的计算

例

设
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
为分块矩阵,其中 $A_{n \times n}$ 及 $D_{m \times m}$ . 若 $A$ 可逆,则

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式,并利用行列式乘积法则及Laplace定理

得: 
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|;$$

# 分块矩阵的计算

例

设
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
为分块矩阵,其中 $A_{n \times n}$ 及 $D_{m \times m}$ . 若 $A$ 可逆,则

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式并利用行列式乘积法则及Laplace定理 得:  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|;$ 

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|;$$

同理, 若D可逆, 则有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$ ;

# 分块矩阵的计算

线性代数第1章

设
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
为分块矩阵,其中 $A_{n \times n} \not A D_{m \times m}$ . 若 $A$ 可逆,则

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式,并利用行列式乘积法则及Laplace定理得:  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ ;

同理, 若D可逆, 则有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$ ; 进一步, 当A、B、C、D均为同阶方阵时, 若AC

进一步,当A、B、C、D均为同阶方阵时,若AC = CA,则有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$ ;若AB = BA,则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - CB|$ ,等等.

线性代数第1章

Cramer法则 当线性方程组

 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 

方程组有唯一解:  $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D};$ 

的系数行列式

 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ 

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与和 等矩阵

万阵的逆矩

n阶行列式的标念

行列式的無用 Gramer 法則 其中 $D_j$ 是将系数矩阵中的第j列换成常数列后得到的行列式,即

$$D_{j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1 j-1} & b_{1} & a_{1 j+1} & \cdots & a_{1 n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2 j-1} & b_{2} & a_{2 j+1} & \cdots & a_{2 n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n j-1} & b_{n} & a_{n j+1} & \cdots & a_{n n} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的代数运 算

初等变换与衫 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

Gramer 法判 矩阵的秩 其中 $D_j$ 是将系数矩阵中的第j列换成常数列后得到的行列式,即

$$D_{j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1 \ j-1} & b_{1} & a_{1 \ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2 \ j-1} & b_{2} & a_{2 \ j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n \ j-1} & b_{n} & a_{n \ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

定理蕴含三个部分: 在 $D \neq 0$ 时,

- 方程组有解;
- 解是唯一的;
- 解的表达式.

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

结论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

Gramer 法制

### Example

用Cramer法则求解方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 <sup>篚</sup>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

Gramer 法则

### Example

用Cramer法则求解方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

D = 27,  $D_1 = 81$ ,  $D_2 = -108$ ,  $D_3 = -27$ ,  $D_4 = 27$ .

```
线性代数第1章
```

### Example

用Cramer法则求解方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$D = 27$$
,  $D_1 = 81$ ,  $D_2 = -108$ ,  $D_3 = -27$ ,  $D_4 = 27$ .

#### Remark

• 齐次方程组有非零解当且仅当系数行列式为零.

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

4 论

矩阵的定义 矩阵的代数:i

<del>升</del>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的

Gramer ##

### Example

当参数λ取何值时,下列方程组有非零解:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

日求结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 <sup>笕</sup>

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的逆矩!

n阶行列式的

行列式的应用 Gramer 法!

### Example

当参数 $\lambda$  取何值时,下列方程组有非零解:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

 $\lambda = 0, 2, 3.$ 

```
线性代数第1星
```

日求

矩阵的定义

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的

Gramer 法统

#### Remark

Cramer法则建立了线性方程组的解和它的系数与常数项之间的关系.对于阶数较大的线性方程组,它需要很大的计算量,故Cramer法则主要用于理论推导.

线性代数第1章 作者 刘国华

#### Remark

- Cramer法则建立了线性方程组的解和它的系数与常数项之间的关系.对于阶数较大的线性方程组,它需要很大的计算量,故Cramer法则主要用于理论推导.
- Cramer法则用于求解满足
  - (1) 方程数= 变量数
  - (2) 系数行列式非零的线性方程组.如果上面有一个条件不能满足,就无法使用,对于一般的线性方程组问题,需要寻找新的求解方法.

Gramer 法则 矩阵的辞

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

结论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初等矩阵 方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 定义

在 $A_{m\times n}$ 中, 任取k行, k列( $k \le m$ ,  $k \le n$ ), 位于这些行列交叉处的  $k^2$  个元素, 按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式.

作者 刘国华

目录

緒伦 紅肱丛心》

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概 念

巨阵的秩

### 定义

在 $A_{m\times n}$ 中, 任取k行, k列( $k \le m$ ,  $k \le n$ ), 位于这些行列交叉处的  $k^2$  个元素, 按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式.共有 $C_m^k C_n^k$  个 k 阶子式.

#### 例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 定义

在 $A_{m\times n}$ 中, 任取k行, k列( $k \le m$ ,  $k \le n$ ), 位于这些行列交叉处的  $k^2$  个元素, 按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式.共有 $C_m^k$   $C_n^k$  个 k 阶子式.

#### 例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{ 5\% \ \text{$\mathbb{R}$} \ \ } \begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array},$$

### 定义

 $A_{m \times n}$ 中, 任取k行, k列( $k \le m$ ,  $k \le n$ ), 位于这些行列交 叉处的  $k^2$  个元素, 按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式.共有 $C_m^k C_n^k$  个 k 阶子式.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{array}{c|c} f3 \% & \$ \neq 3 \downarrow \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2 \% & \$ \neq 3 \downarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

```
线性代数第1章
作者 刘国华
```

目录

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

v 1 | ..v. C) -- 1

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数, 称为矩阵A 的秩, 记为r(A) = r 或rank(A) = r.

# 线性代数第1章

目录

绪论

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

巨阵的秩

### 定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数, 称为矩阵A 的秩, 记为r(A) = r 或rank(A) = r.

### 注

 $\bullet \ 0 \le r(A_{m \times n}) \le \min\{m, n\}.$ 

# 线性代数第1章

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算 分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数, 称为矩阵A 的秩, 记为r(A) = r 或rank(A) = r.

- $\bullet \ 0 \le r(A_{m \times n}) \le \min\{m, n\}.$
- 规定零矩阵的秩为0.

作者 刘国华

目录绪论

矩阵的代数运 阵

分块矩阵 初等变换与初

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数, 称为矩阵A 的秩, 记为r(A)=r 或rank(A)=r.

- $\bullet \ 0 \le r(A_{m \times n}) \le \min\{m, n\}.$
- 规定零矩阵的秩为0.
- 对于n 阶矩阵A,有: A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$ .

### 定义

矩阵A 的非零子式的最高阶数, 称为矩阵A 的秩, 记为r(A) = r 或rank(A) = r.

- $\bullet \ 0 \le r(A_{m \times n}) \le \min\{m, n\}.$
- 规定零矩阵的秩为0.
- 对于n 阶矩阵A,有: A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$ .
- 更一般地,如果 $m \times n$  阶矩阵A 满足 r(A) = m,则称A 为行满秩矩阵 r(A) = n,则称A 为列满秩矩阵.

作者 刘国华

目录

绪论

巨阵的定义

矩阵的代数运算

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

2-116-11 (c. +1 1)

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 例

• 求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
 的秩.

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

-- n+ 1.2.2- -- 1.1 1

n阶行列式的概念

巨阵的秩

#### 例

• 求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
 的秩.

• 讨论非零矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$  的秩.

作者 刈国等

目录

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

**一肽 46 红列** 4

n阶行列式的根

巨阵的秩

#### 例

• 求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
 的秩.

• 讨论非零矩阵
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$
 的秩.

• 讨论非零矩阵
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$
 的秩.

线性代数第1章

目录

og su

and the state of the state of

矩件的代数I

分块矩阵

初等变换与剂 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 注

 $\bullet \ r(A) = r(A^T);$ 

线性代数第1章

目录

8**€** ⊁**□** 

矩件的足义 矩阵的代数运

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与衣 等矩阵

方阵的逆矩阵

5-16-11 to -1 15

n阶行列式的概念

巨阵的秩

- $r(A) = r(A^T);$
- 如果A 的所有k 阶子式都为零, 则r(A) < k;

目求

矩阵的定义

矩阵的足义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

矩阵的秩

- $r(A) = r(A^T);$
- 如果A 的所有k 阶子式都为零, 则r(A) < k;
- 如果A 有一个k 阶子式不为零, 则 $r(A) \ge k$ .

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵

方阵的行列去

n阶行列式的标

矩阵的秩

#### 注

- $r(A) = r(A^T);$
- 如果A 的所有k 阶子式都为零, 则r(A) < k;
  - 如果A 有一个k 阶子式不为零, 则 $r(A) \ge k$ .

### 推论

 $r(A) = r \Leftrightarrow A$  至少存在一个r 阶非零子式,同时A 的所有r+1 阶子式为零.

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

....

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

代数第1章

作者 刘国华

目录

绪论

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

### 例

求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
的秩.

#### 例

求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
的秩.

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的定

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的构

巨阵的科

### 例

求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
的秩.

#### 例

求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
的秩.

#### 推论

阶梯形矩阵的秩等于它的阶梯数.

作者 刘国华

日来

1-12-11-11-11

矩阵的代数: 算

分块矩阵

初等变换与初

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

#### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则 $r(A) \leq r(B)$ .

作者 刘国华

目录

和 矩阵的定义

矩阵的代数这 質

分块矩阵 初等变换与>

等矩阵

万阵的更矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则 $r(A) \leq r(B)$ .

#### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则B 经过初等行变换也可变成A.

线性代数第1章

作者 刘国华

目录

矩阵的定义 矩阵的代数i

矩阵的代数运算 分址矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则 $r(A) \leq r(B)$ .

#### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则B 经过初等行变换也可变成A.

#### 定理

初等行变换不改变矩阵的秩.

线性代数第1章

作者 刘国华

结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

が块矩件 初等変換与初 い

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标

矩阵的秩

### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则 $r(A) \leq r(B)$ .

#### 引理

若矩阵A 经过初等行变换变成B,则B 经过初等行变换也可变成A.

#### 定理

初等行变换不改变矩阵的秩.

#### 注

矩阵秩的计算:先经初等行变换将矩阵变为阶梯形矩阵,再由阶梯数确定矩阵秩.

作者 刘国华

目录

**酒**化

矩阵的尺数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根

矩阵的秩

### 例

计算下面矩阵的秩,并求出一个最高阶非零子式.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

作者 刘国华

目录

**矩阵的代数**运

笲

分块矩阵

初等变换与初

イルド

方阵的行列式

n阶行列式的概

巨阵的秩

• 矩阵的初等变换(行变换和列变换).

作者 刘国华

目录

**地件**的足义

年 的 八 致 x

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系 如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B,则称这两个矩阵是等价的,记为 $A \to B$ .

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定

矩阵的代数运 算

刀 <del>灰</del>灰 初等变换与初

テカナムな は を また

刀干的坟死干

n阶行列式的概念

巨阵的秩

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系 如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B,则称这两个矩阵是等价的,记为 $A \to B$ .
- 等价关系满足: 反身性,对称性,传递性.

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系 如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B,则称这两 个矩阵是等价的, 记为 $A \rightarrow B$ .
- 等价关系满足: 反身性,对称性,传递性.

### 性质

如果矩阵 $A \to B$ , 则r(A) = r(B).

一般地, 设矩阵 $A_{m \times n}$  的秩为r(A) = r, 则经过一系列初等变 换, 可以得到与矩阵A 等价的, 最简单的矩阵:

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系 如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B,则称这两 个矩阵是等价的, 记为 $A \rightarrow B$ .
- 等价关系满足: 反身性,对称性,传递性.

### 性质

如果矩阵 $A \to B$ , 则r(A) = r(B).

一般地, 设矩阵 $A_{m \times n}$  的秩为r(A) = r, 则经过一系列初等变 换, 可以得到与矩阵A 等价的, 最简单的矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

作者 刘国华

- 绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运
- 分块矩阵 初等变换与初 等矩阵 方阵的逆矩阵
- 方阵的行列式 1阶行列式的概 &
- 矩阵的秩

- 矩阵的初等变换(行变换和列变换).
- 矩阵的等价关系 如果矩阵A 可以经过一些初等变换可以变成B,则称这两个矩阵是等价的,记为 $A \to B$ .
- 等价关系满足: 反身性,对称性,传递性.

### 性质

如果矩阵 $A \to B$ , 则r(A) = r(B).

一般地,设矩阵 $A_{m\times n}$  的秩为r(A)=r,则经过一系列初等变换,可以得到与矩阵A 等价的,最简单的矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 定理

两个矩阵等价当且仅当秩相等.

作者 刘国华

日来

89 TE

矩阵的定义

矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 <sup>等</sup> 新陈

方阵的行列主

n阶行列式的概念

巨阵的秩

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \le r\left(\frac{A}{B}\right) \le r(A) + r(B);$$

作者 刘国化

作者 刘国华

目录

86 TE

细维的投资

矩件的代数: 算

分块矩件

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

巨阵的秩

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \le r\left(\frac{A}{B}\right) \le r(A) + r(B);$$

设A, B 是 $m \times s$  阶矩阵,则

$$r(A+B) \le r(A) + r(B);$$

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵 士監仏送红胨

方阵的行列主

n阶行列式的概 念

巨阵的秩

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \le r\left(\frac{A}{B}\right) \le r(A) + r(B);$$

设A, B 是 $m \times s$  阶矩阵,则

$$r(A+B) \le r(A) + r(B);$$

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$r(AB) \le Min\{r(A), r(B)\};$$

线性代数第1章 作者 刘国华

目录

矩阵的定义

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的 更矩阵

n阶行列式的概 念

巨阵的秩

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \le r\binom{A}{B} \le r(A) + r(B);$$

设A, B 是 $m \times s$  阶矩阵,则

$$r(A+B) \le r(A) + r(B);$$

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$r(AB) \le Min\{r(A), r(B)\};$$

$$r(AB) + n \ge r(A) + r(B);$$

作者 刘国华

目录

矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概 念

巨阵的秩

 $\partial A, B \neq m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$Max\{r(A), r(B)\} \le r {A \choose B} \le r(A) + r(B);$$

设 $A, B \$ 是 $m \times s \$ 阶矩阵,则

$$r(A+B) \le r(A) + r(B);$$

设A, B 是 $m \times s$  和 $n \times s$  阶矩阵,则

$$r(AB) \le Min\{r(A), r(B)\};$$

$$r(AB) + n \ge r(A) + r(B);$$

如果AB = 0,则有

$$r(A) + r(B) \le n$$
.

### 矩阵的代数运算与秩

作者 刘围佬

目录

96 1C

矩阵的代数过

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

77 FT 47 ~ C/E/FT

n阶行列式的概念

巨阵的秩

例

设n 阶方阵 A 满足  $A^2 = A$ , 试证 r(A) + r(E - A) = n.

## 矩阵的代数运算与秩

作者 刘围化

目录

矩阵的定义

矩阵的代数i

分块矩阵 初等变换与衫

方阵的逆矩阵

n阶行列式的根 念

矩阵的秩

#### 例

设n 阶方阵 A 满足  $A^2 = A$ , 试证 r(A) + r(E - A) = n.

### 例

设 $A_{m \times n}$ , 则 $r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \xi \eta^T$ , 其中  $\xi$  和  $\eta$  分别为 m, n 维非零列向量.

线性代数第1章 作者 刘围化

目录

**循**化

**矩阵的代数**:

算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

万阵的行列式的 n阶行列式的

巨阵的秩

え性代数第1章 作者 刘国华

日水

矩阵的定义 
矩阵的代数;

矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万阵的逆矩阵

n阶行列式的概

巨阵的秩

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵,

作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的定义 矩阵的代数运算

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵,对角矩阵,数量矩阵,单位矩阵,初等矩阵;
- 行列式

线性代数第1章 作者 刘国华

日求
结论

矩阵的定义 矩阵的代数运 質

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

矩阵的秩

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵,对角矩阵,数量矩阵,单位矩阵,初等矩阵;
- 行列式;
- 伴随矩阵,

後性代数第1章 作者 刘国华

绪论

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵 初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵 方阵的行列式

n阶行列式的概念

巨阵的秩

- 方阵的正整数幂; 方阵的多项式运算;
- 对称矩阵,对角矩阵,数量矩阵,单位矩阵,初等矩阵;
- 行列式;
- 伴随矩阵,可逆矩阵.

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义

矩阵的定义 矩阵的代数运 算

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

方阵的行列式 - 坠行列之的:

矩阵的秩

2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

万件的更矩阵

n阶行列式的概念

- 2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A, B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.
  - 方阵的正整数幂;

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

- 2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A,B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.
  - 方阵的正整数幂;
  - 两个对角矩阵, 数量矩阵;

线性代数第1章 作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与衫

方阵的逆矩阵

n阶行列式的概念

- 2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A,B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.
  - 方阵的正整数幂;
  - 两个对角矩阵, 数量矩阵;
  - 单位阵与任何矩阵相乘;

作者 刘国华

绪论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵

初等变换与初 等矩阵

方阵的逆矩阵

n阶行列式的标念

- 2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况是成立的, 此时称A,B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.
  - 方阵的正整数幂;
  - 两个对角矩阵, 数量矩阵;
  - 单位阵与任何矩阵相乘;
  - $f M \preceq |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|;$

緒论 矩阵的定义 矩阵的代数运

分块矩阵 初等变换与补

方阵的逆矩阵

n阶行列式的构

- 2, 矩阵乘积的交换律一般情况下不成立, 但有一些特殊情况 是成立的, 此时称A,B 是可交换的. 请列举出矩阵乘积可交换的情况.
  - 方阵的正整数幂;
  - 两个对角矩阵, 数量矩阵;
  - 单位阵与任何矩阵相乘;

  - 伴随矩阵 $AA^* = A^*A$ , p可逆矩阵 $A^{-1}A = AA^{-1}$ .