第七章 第 7 题

（1）矩估计：$EX=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot e^{-(x-\theta)}dx=\int_{0}^{+\infty}(t+\theta)\cdot e^{-t}dt=1+\theta=\bar{X}$

所以：$\hat{\theta}=\bar{X}-1$

（2）最大似然估计：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}e^{-(X_i-\theta)}, X_1\ge\theta,\cdots,X_n\ge\theta\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)}, \theta\le\min\{X_1,\cdots,X_n\}\\ 0, \quad \theta>\min\{X_1,\cdots,X_n\}\end{cases}$$

似然函数关于参数θ单调增，所以当取到$\min\{X_1,\cdots,X_n\}$是达到最大值

所以，$\hat{\theta}_L=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$

9.

（1）矩估计：$EX=1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)$

$$=3-2\theta=\bar{X}$$

所以$\hat{\theta}=\dfrac{3-\bar{X}}{2}=\dfrac{2N_1+N_2}{2n}$（这两种形式的答案都可以）

其中$\bar{X}=\dfrac{N_1+2N_2+3(n-N_1-N_2)}{n}$

（2）最大似然估计：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)=(P(X=1))^{N_1}(P(X=2))^{N_2}(P(X=3))^{N_3}$$

$$=\theta^{2N_1}(2\theta(1-\theta))^{N_2}(1-\theta)^{2(n-N_1-N_2)}$$

$$=2^{N_2}\theta^{2N_1+N_2}(1-\theta)^{N_2+2(n-N_1-N_2)}$$

$$\ln L(\theta)=N_2\ln 2+(2N_1+N_2)\ln\theta+(2n-2N_1-N_2)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2N_1+N_2}{\theta}-\frac{2n-2N_1-N_2}{1-\theta}=0$$

所以 $\hat{\theta}_{MLE}=\dfrac{2N_1+N_2}{2n}$

（3）是无偏估计量。

由于 $N_1 \sim b(n,\theta^2),\ N_2 \sim b(n,2\theta(1-\theta))$

$$EN_1=n\theta^2,\ EN_2=2n\theta(1-\theta)$$

所以：$E\hat{\theta}_{MLE}=E(\dfrac{2N_1+N_2}{2n})=\theta$

11.

$$E\hat{\sigma}^2=E(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2)=c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}[D(X_{i+1}-X_i)+(E(X_{i+1}-X_i))^2]$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}[2\sigma^2+0]=c\cdot 2(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

所以 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$

13.

（1） $X \sim e(1/\theta)$ $\quad EX=\theta \quad DX=\theta^2$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-x/\theta} & x>0\end{cases}$$

令 $T=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$

$$f_T(t)=n(1-F(t))^{n-1}f(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ n\cdot e^{-\frac{(n-1)t}{\theta}}\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}} & t>0\end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_1=E\overline{X}=EX=\theta$$

$$ET=\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{nt}{\theta}}\cdot\frac{nt}{\theta}dt=\frac{\theta}{n}$$

$$E\hat{\theta}_2=E(nT)=\theta$$

所以都是无偏估计量。

（2） $D\hat{\theta}_1=D\bar{X}=\dfrac{\theta^2}{n}$

$$ET^2=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{nt}{\theta}}\cdot\frac{nt^2}{\theta}dt=\frac{\theta^2}{n^2}\Gamma(3)=\frac{2\theta^2}{n^2}$$

$$D\hat{\theta}_2=D(nT)=n^2DT=n^2(\frac{2\theta^2}{n^2}-(\frac{\theta}{n})^2)=\theta^2$$

所以 $D\hat{\theta}_1\le D\hat{\theta}_2$

16.（1） $E(\hat{\sigma}^2)=E(c_1S_1^2+c_2S_2^2)=c_1\sigma^2+c_2\sigma^2=\sigma^2$

所以 $c_1+c_2=1$

（2） $\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$ ，所以 $\dfrac{(m-1)^2DS_1^2}{\sigma^4}=2(m-1)$

即：$DS_1^2=\dfrac{2\sigma^4}{m-1}$

同理：$DS_2^2=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

$$D(\hat{\sigma}^2)=D(c_1S_1^2+c_2S_2^2)=c_1^2DS_1^2+c_2^2DS_2^2=c_1^2\cdot\frac{2\sigma^4}{m-1}+c_2^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$=c_1^2\cdot\dfrac{2\sigma^4}{m-1}+(1-c_1)^2\cdot\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$达到最小值，对 c_1 求导得到唯一驻点（或者二次函数配方）。

所以：$c_1=\dfrac{m-1}{m+n-2},c_2=\dfrac{n-1}{m+n-2}$

17.（1）枢轴量为：$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$

区间估计为：$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$，再把具体的数值代入。

（2）枢轴量为：$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

区间估计为：$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$，再把具体的数值代入。

19.（1）枢轴量为：$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

区间估计为：$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$，再把具体的数值代入。

（2）枢轴量为：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

区间估计为：$[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}]$，再把具体的数值代入。