第 2 章 命题逻辑等值演算

2.1 等 值 式

设公式 A,B 共同含有 n 个命题变项,A 或 B 可能有哑元. 若 A 与 B 有相同的真值表,则说明在所有 2^n 个赋值下,A 与 B 的真值都相同,因而等价式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式.

定义 2.1 设 A,B 是两个命题公式,若 A,B 构成的等价式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式,则称 A 与 B 是等值的,记作 $A\Leftrightarrow B$.

定义中的符号$\Leftrightarrow$不是联结符,它是用来说明 A 与 B 等值($A\leftrightarrow B$ 是重言式)的一种记法,因而$\Leftrightarrow$是元语言符号. 不要将$\Leftrightarrow$与$\leftrightarrow$混为一谈,同时也要注意它与一般等号"="的区别.

下面讨论判断两个公式 A 与 B 是否等值的方法,其中最直接的方法是用真值表法判断 $A\leftrightarrow B$ 是否为重言式.

例 2.1 判断下面两个公式是否等值.

$$\neg(p\vee q) \text{ 与 } \neg p\wedge\neg q$$

解 用真值表法判断$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$是否为重言式. 此等价式的真值表如表 2.1 所示,从表 2.1 可知它是重言式,因而$\neg(p\vee q)$与$\neg p\wedge\neg q$ 等值,即$\neg(p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$.

表 2.1　$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 的真值表

p　q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0　0	1	1	0	1	1	1
0　1	1	0	1	0	0	1
1　0	0	1	1	0	0	1
1　1	0	0	1	0	0	1

其实,在用真值表法判断 $A \leftrightarrow B$ 是否为重言式时,真值表的最后一列(即 $A \leftrightarrow B$ 的真值表的最后结果)可以省略.若 A 与 B 的真值表相同,则 $A \Leftrightarrow B$;否则,$A \not\Leftrightarrow B$(用来表示 A 与 B 不等值,$\not\Leftrightarrow$ 也是常用的元语言符号).

例 2.2　判断下列各组公式是否等值.

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

(2) $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$

解　表 2.2 中列出了 $p \to (q \to r)$,$(p \wedge q) \to r$ 和 $(p \to q) \to r$ 的真值表.不难看出 $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$ 等值,即

$$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$$

而 $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$ 的真值表不同,因而它们不等值,即

$$(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$$

表 2.2　3 个公式的真值表

p　q　r	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \to q) \to r$
0　0　0	1	1	0
0　0　1	1	1	1
0　1　0	1	1	0
0　1　1	1	1	1
1　0　0	1	1	1
1　0　1	1	1	1
1　1　0	0	0	0
1　1　1	1	1	1

虽然用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等值,但当命题变项较多时,工作量是很大的.证明公式等值的另一个方法是利用已知的等值式通过代换得到新的等值式.例如,用真值表很容易验证 $p \leftrightarrow \neg\neg p$ 是重言式.如果用任意一个命题公式替换式子中的 p,如用 $p \wedge q$ 替换 p 得

到 $p\wedge q\leftrightarrow\neg\neg(p\wedge q)$，直觉上所得到的新式子也是重言式. 事实上，有下述命题：

设 A 是一个命题公式，含有命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，又设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意的命题公式. 对每一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$，把 p_i 在 A 中的所有出现都替换成 A_i，所得到的新命题公式记作 B. 那么，如果 A 是重言式，则 B 也是重言式.

这是显然的. 事实上，对任意的真值赋值，把在这个真值赋值下 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的真值代入 A 中的命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，与把这个真值赋值直接代入 B 是一回事. 如果 A 是重言式，A 必为 1，B 也必为 1. 从而，B 也是重言式.

根据这个命题和 $p\leftrightarrow\neg\neg p$ 是重言式，得到 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$，其中 A 是任意的命题公式，称这个式子为等值式模式. 下面给出 16 组常用的重要等值式模式，以它们为基础进行演算，可以证明公式等值.

1. 双重否定律

$$A\Leftrightarrow\neg\neg A \tag{2.1}$$

2. 幂等律

$$A\Leftrightarrow A\vee A,\quad A\Leftrightarrow A\wedge A \tag{2.2}$$

3. 交换律

$$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A,\quad A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A \tag{2.3}$$

4. 结合律

$$\begin{gathered}(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)\\(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)\end{gathered} \tag{2.4}$$

5. 分配律

$$\begin{gathered}A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)\quad(\vee\text{ 对 }\wedge\text{ 的分配律})\\A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\quad(\wedge\text{ 对 }\vee\text{ 的分配律})\end{gathered} \tag{2.5}$$

6. 德摩根律

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg \mathrm{B},\quad\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B \tag{2.6}$$

7. 吸收律

$$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A,\quad A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A \tag{2.7}$$

8. 零律

$$A\vee 1\Leftrightarrow 1,\quad A\wedge 0\Leftrightarrow 0 \tag{2.8}$$

9. 同一律

$$A\vee 0\Leftrightarrow A,\quad A\wedge 1\Leftrightarrow A \tag{2.9}$$

10. 排中律

$$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1 \tag{2.10}$$

11. 矛盾律

$$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0 \tag{2.11}$$

12. 蕴涵等值式

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \tag{2.12}$$

13. 等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \tag{2.13}$$

14. 假言易位

$$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A \tag{2.14}$$

15. 等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B \tag{2.15}$$

16. 归谬论

$$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A \tag{2.16}$$

以上16组等值式模式共包含了24个重要等值式，它们都是用元语言符号书写的. 等值式模式中的 A,B,C 可以替换成任意的公式，每个等值式模式都可以给出无穷多个同类型的具体的等值式. 例如，在蕴涵等值式(2.12)中，取 $A=p,B=q$ 时，得到等值式

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

当取 $A=p \vee q \vee r, B=p \wedge q$ 时，得到等值式

$$(p \vee q \vee r) \to (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q \vee r) \vee (p \wedge q)$$

这些具体的等值式称为等值式模式的代入实例.

由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称作等值演算. 等值演算是布尔代数或逻辑代数的重要组成部分.

在等值演算过程中，要使用下述重要规则.

置换规则 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中 A 的所有出现后得到的命题公式. 若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

这也是显然的，因为如果 $B \Leftrightarrow A$，那么在任意的真值赋值下 B 和 A 的真值相同，把它们代入 $\Phi(\cdot)$ 得到的结果当然也相同，从而 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

例如，在公式 $(p \to q) \to r$ 中，可以用 $\neg p \vee q$ 置换其中的 $p \to q$，由蕴涵等值式可知，$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$，所以，有

$$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r$$

在这里，使用了置换规则. 如果再一次地用蕴涵等值式及置换规则，又会得到

$$(\neg p \vee q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$$

再用德摩根律及置换规则，又会得到

$$\neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$$

再用分配律及置换规则，又会得到

$$(p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

将以上过程连在一起，得到

$$
\begin{aligned}
&(p\rightarrow q)\rightarrow r\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee q)\rightarrow r &&（蕴涵等值式、置换规则）\\
\Leftrightarrow&\neg(\neg p\vee q)\vee r &&（蕴涵等值式、置换规则）\\
\Leftrightarrow&(p\wedge\neg q)\vee r &&（德摩根律、置换规则）\\
\Leftrightarrow&(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r) &&（分配律、置换规则）
\end{aligned}
$$

公式之间的等值关系具有自反性、对称性和传递性，所以上述演算中得到的 5 个公式彼此之间都是等值的. 在演算的每一步都用到了置换规则，因而在以后的演算中，置换规则均不必写出.

下面用实例说明等值演算的用途.

例 2.3　用等值演算法验证等值式

$$(p\vee q)\rightarrow r\Leftrightarrow(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$$

证　可以从左边开始演算，也可以从右边开始演算. 现在从右边开始演算.

$$
\begin{aligned}
&(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r) &&（蕴涵等值式）\\
\Leftrightarrow&(\neg p\wedge\neg q)\vee r &&（分配律）\\
\Leftrightarrow&\neg(p\vee q)\vee r &&（德摩根律）\\
\Leftrightarrow&(p\vee q)\rightarrow r &&（蕴涵等值式）
\end{aligned}
$$

所以，原等值式成立. 读者亦可从左边开始演算验证之.

例 2.3 说明，用等值演算法可以验证两个公式等值. 但一般情况下，不能用等值演算法直接验证两个公式不等值.

例 2.4　证明：

$$(p\rightarrow q)\rightarrow r\not\Leftrightarrow p\rightarrow(q\rightarrow r)$$

证　方法一：真值表法. 读者自己证明.

方法二：观察法. 只要给出一个赋值使得这两个命题公式的真值不同，就表明它们不等值. 容易看出，010 是 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 的成假赋值，是 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 的成真赋值，两个公式不等值得证.

方法三：当两个公式比较复杂，一时看不出使它们一个成真另一个成假的赋值时，可以先通过等值演算将它们化成容易观察真值的情况，再进行判断.

$$
\begin{aligned}
&A=(p\rightarrow q)\rightarrow r\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee q)\rightarrow r &&（蕴涵等值式）\\
\Leftrightarrow&\neg(\neg p\vee q)\vee r &&（蕴涵等值式）\\
\Leftrightarrow&(p\wedge\neg q)\vee r &&（德摩根律）\\
&B=p\rightarrow(q\rightarrow r)\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee(\neg q\vee r) &&（蕴涵等值式）\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee\neg q\vee r &&（结合律）
\end{aligned}
$$

容易观察到，000，010 是 A 的成假赋值，B 的成真赋值.

例 2.5　用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $(p \to q) \land p \to q$

(2) $\neg(p \to (p \lor q)) \land r$

(3) $p \land (((p \lor q) \land \neg p) \to q)$

解 在以下的演算中没有写出所用的基本等值式,请读者自己填上.

(1) $(p \to q) \land p \to q$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor q) \land p \to q$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \lor q) \land p) \lor q$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \lor q) \lor \neg p) \lor q$

$\Leftrightarrow ((p \land \neg q) \lor \neg p) \lor q$

$\Leftrightarrow ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor q$

$\Leftrightarrow (1 \land (\neg q \lor \neg p)) \lor q$

$\Leftrightarrow (\neg q \lor \neg p) \lor q$

$\Leftrightarrow (\neg q \lor q) \lor \neg p$

$\Leftrightarrow 1 \lor \neg p$

$\Leftrightarrow 1$

最后结果说明(1)是重言式.

(2) $\neg(p \to (p \lor q)) \land r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \lor p \lor q) \land r$

$\Leftrightarrow (p \land \neg p \land \neg q) \land r$

$\Leftrightarrow (0 \land \neg q) \land r$

$\Leftrightarrow 0 \land r$

$\Leftrightarrow 0$

最后结果说明(2)是矛盾式.

(3) $p \land (((p \lor q) \land \neg p) \to q)$

$\Leftrightarrow p \land (((p \land \neg p) \lor (q \land \neg p)) \to q)$

$\Leftrightarrow p \land ((0 \lor (q \land \neg p)) \to q)$

$\Leftrightarrow p \land ((q \land \neg p) \to q)$

$\Leftrightarrow p \land (\neg(q \land \neg p) \lor q)$

$\Leftrightarrow p \land (\neg q \lor p \lor q)$

$\Leftrightarrow p \land 1$

$\Leftrightarrow p$

最后结果说明(3)不是重言式,00,01 是成假赋值;也不是矛盾式,10,11 是成真赋值.

等值演算中各步得出的等值式所含命题变项可能不一样多,如(3)中最后一步不含 q,此时将 q 看成它的哑元,考虑赋值时应将哑元也算在内,因而赋值的长度为 2. 这样,可以将(3)中各步的公式都看成含命题变项 p,q 的公式,在写真值表时已经讨论过类似的问题.

下面举一个如何利用等值演算解决实际问题的例子.

例 2.6　在某次研讨会的中间休息时间,3 名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下:

甲:王教授不是苏州人,是上海人.

乙:王教授不是上海人,是苏州人.

丙:王教授既不是上海人,也不是杭州人.

听完这 3 人的判断后,王教授笑着说,你们 3 人中有一人说得全对,有一人说对了一半,另一人说得全不对.试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人.

解　设命题

p:王教授是苏州人.

q:王教授是上海人.

r:王教授是杭州人.

p,q,r 中必有一个真命题,两个假命题,要通过逻辑演算将真命题找出来.

甲的判断为 $\neg p \wedge q$

乙的判断为 $p \wedge \neg q$

丙的判断为 $\neg q \wedge \neg r$

于是

甲的判断全对为　　$B_1 = \neg p \wedge q$

甲的判断一半对为　　$B_2 = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

甲的判断全错为　　$B_3 = p \wedge \neg q$

乙的判断全对为　　$C_1 = p \wedge \neg q$

乙的判断一半对为　　$C_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

乙的判断全错为　　$C_3 = \neg p \wedge q$

丙的判断全对为　　$D_1 = \neg q \wedge \neg r$

丙的判断一半对为　　$D_2 = (\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

丙的判断全错为　　$D_3 = q \wedge r$

由王教授所说

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \vee$$
$$(B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

为真命题.而

$$\begin{aligned}
B_1 \wedge C_2 \wedge D_3 &= (\neg p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((p \wedge q \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((p \wedge q \wedge r) \vee 0) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 &= (\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))\\&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge q \wedge \neg r)\\&\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r\\B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 &= ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge r)\\&\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \wedge (p \wedge \neg q \wedge q \wedge r)\\&\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \wedge 0\\&\Leftrightarrow 0\end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned}&B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0\\&B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r\\&B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0\end{aligned}$$

于是,由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

但因为王教授不能既是苏州人,又是杭州人,因而 p,r 必有一个假命题,即 $p \wedge r \Leftrightarrow 0$. 于是

$$E \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

为真命题,因而必有 p,r 为假命题,q 为真命题,即王教授是上海人. 甲说得全对,丙说对了一半,而乙全说错了.

2.2 析取范式与合取范式

本节给出命题公式的两种规范表示方法,这种规范的表达式能表达真值表所能提供的一切信息.

定义 2.2 命题变项及其否定统称作文字. 仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式. 仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式.

$p,\neg q;p \vee \neg p,\neg p \vee q$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee r,p \vee \neg p \vee r$ 都是简单析取式,分别由 1 个文字,2 个文字和 3 个文字构成.

$\neg p,q;p \wedge \neg p,p \wedge \neg q$ 和 $p \wedge q \wedge \neg r,\neg p \wedge p \wedge q$ 都是简单合取式,分别由 1 个文字,2 个文字和 3 个文字构成. 注意,一个文字既是简单析取式,又是简单合取式.

设 A_i 是含 n 个文字的简单析取式,若 A_i 中既含某个命题变项 p_j,又含它的否定式 $\neg p_j$,则由交换律、排中律和零律可知,A_i 为重言式. 反之,若 A_i 为重言式,则它必同时含某个命题变项及它的否定式. 否则,若将 A_i 中的不带否定符的命题变项都取 0 值,带否定符的命题变项都取 1 值,此赋值为 A_i 的成假赋值,这与 A_i 是重言式相矛盾. 类似地,设 A_i 是含 n 个命题变项的简单合取式,若 A_i 中既含某个命题变项 p_j,又含它的否定式 $\neg p_j$,则 A_i 为矛盾式. 反之,若 A_i 为矛盾式,则 A_i 中必同时含某个命题变项及它的否定式. 于是,得到下面的定理.

定理 2.1　(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.

定义 2.3　由有限个简单合取式的析取构成的命题公式称作*析取范式*. 由有限个简单析取式的合取构成的命题公式称作*合取范式*. 析取范式与合取范式统称作*范式*.

析取范式的一般形式为 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_s$,其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为简单合取式;合取范式的一般形式为 $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_t$,其中 $B_j(j=1,2,\cdots,t)$ 为简单析取式. 例如,$(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p$ 为析取范式,$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$ 为合取范式. $\neg p \wedge q \wedge r$ 既是由一个简单合取式构成的析取范式,又是由 3 个简单析取式构成的合取范式;类似地,$p \vee \neg q \vee r$ 既是由 3 个简单合取式构成的析取范式,又是由一个简单析取式构成的合取范式.

析取范式和合取范式具有下述性质.

定理 2.2　(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

到现在为止,我们研究的命题公式中含有 5 个联结词 $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,如何把这样的命题公式化成等值的析取范式和合取范式?

首先,可以利用蕴涵等值式与等价等值式

$$\left.\begin{aligned} &A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \\ &A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

消去任何公式中的联结词→和↔.

其次,在范式中不出现如下形式.

$$\neg\neg A, \neg(A \wedge B), \neg(A \vee B)$$

对其利用双重否定律和德摩根律,可得

$$\left.\begin{aligned} &\neg\neg A \Leftrightarrow A \\ &\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ &\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

再次,在析取范式中不出现如下形式.

$$A \wedge (B \vee C)$$

在合取范式中不出现如下形式:

$$A \vee (B \wedge C)$$

利用分配律,可得

$$\left.\begin{aligned} &A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ &A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

由上述 3 步,可将任一公式化成与之等值的析取范式和合取范式. 于是,得到下述定理.

定理 2.3(范式存在定理)　任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

求给定公式范式的步骤为:

1. 消去联结词→,↔.

2. 用双重否定律消去双重否定符，用德摩根律内移否定符.

3. 使用分配律：求析取范式时使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律，求合取范式时使用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律.

例 2.7 求下面公式的析取范式与合取范式.

$$(p\to q)\leftrightarrow r$$

解 为了清晰和无误，利用交换律使每个简单析取式和简单合取式中命题变项都按照字典顺序出现.

(1) 先求合取范式

$$
\begin{aligned}
&(p\to q)\leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ &(\neg p\vee q)\leftrightarrow r && (\text{消去}\to) \\
\Leftrightarrow\ &((\neg p\vee q)\to r)\wedge(r\to(\neg p\vee q)) && (\text{消去}\leftrightarrow) \\
\Leftrightarrow\ &(\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q) && (\text{消去}\to) \\
\Leftrightarrow\ &((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) && (\text{否定符内移}) \\
\Leftrightarrow\ &(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) && (\vee\text{对}\wedge\text{的分配律})
\end{aligned}
$$

这是含 3 个简单析取式的合取范式.

(2) 求析取范式

求析取范式与求合取范式的前两步是相同的，只是在利用分配律时有所不同，因而前 4 步与(1)相同，接着使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律.

$$
\begin{aligned}
&(p\to q)\leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ &((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \\
\Leftrightarrow\ &(p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r) \\
&\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r) && (\wedge\text{对}\vee\text{的分配律}) \\
\Leftrightarrow\ &(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r) && (\text{矛盾律和同一律})
\end{aligned}
$$

最后两步的结果都是析取范式. 一般地，命题公式的析取范式是不唯一的. 同样，合取范式也是不唯一的. 为了使命题公式的范式唯一，进一步将简单合取式和简单析取式规范化，定义如下.

定义 2.4 在含有 n 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项).

由于每个命题变项在极小项中以原形或否定形式出现且仅出现一次，因而 n 个命题变项共可以产生 2^n 个不同的极小项. 每个极小项都有且仅有一个成真赋值. 若极小项的成真赋值所对应的二进制数等于十进制数 i，就将这个极小项记作 m_i. 类似地，n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极大项，每个极大项只有一个成假赋值，将其对应的十进制数 i 做极大项的角标，记作 M_i.

表 2.3 和表 2.4 分别列出含 p,q 与 p,q,r 的全部极小项和极大项.

表 2.3　含 p,q 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公　式	成真赋值	名　称	公　式	成假赋值	名　称
$\neg p\wedge\neg q$	0　0	m_0	$p\vee q$	0　0	M_0
$\neg p\wedge q$	0　1	m_1	$p\vee\neg q$	0　1	M_1
$p\wedge\neg q$	1　0	m_2	$\neg p\vee q$	1　0	M_2
$p\wedge q$	1　1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1　1	M_3

表 2.4　含 p,q,r 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公　式	成真赋值	名　称	公　式	成假赋值	名　称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0　0　0	m_0	$p\vee q\vee r$	0　0　0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0　0　1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0　0　1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0　1　0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0　1　0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0　1　1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0　1　1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1　0　0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1　0　0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1　0　1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1　0　1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1　1　0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1　1　0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1　1　1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1　1　1	M_7

根据表 2.3 和表 2.4 可以直接验证极小项与极大项之间有下述关系.

定理 2.4　设 m_i 与 M_i 是命题变项含 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的极小项和极大项,则

$$\neg m_i\Leftrightarrow M_i,\ \neg M_i\Leftrightarrow m_i$$

定义 2.5　所有简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项)的析取范式(合取范式)称为主析取范式(主合取范式).

下面讨论如何求出与给定公式等值的主析取范式和主合取范式.首先证明它的存在性和唯一性,再给出它的求法.

定理 2.5　任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是唯一的.

证　这里只证主析取范式的存在性和唯一性.

首先证明存在性.设 A 是任一含 n 个命题变项的公式.由定理 2.3 可以知道,存在与 A 等值的析取范式 A',即 $A\Leftrightarrow A'$.若 A'的某个简单合取式 A_i 中既不含命题变项 p_j,也不含它的否定式 $\neg p_j$,则将 A_i 展开成如下等值的形式:

$$A_i\wedge(p_j\vee\neg p_j)\Leftrightarrow(A_i\wedge p_j)\vee(A_i\wedge\neg p_j)$$

继续这个过程,直到所有的简单合取式都含有所有的命题变项或它的否定式.

若在演算过程中出现重复出现的命题变项以及极小项和矛盾式,就应“消去”. 例如,用 p 代替 $p\wedge p$,用 m_i 代替 $m_i\vee m_i$,用 0 代替矛盾式等. 最后就将 A 化成与之等值的主析取范式 A''.

下面再证明唯一性. 假设命题公式 A 等值于两个不同的主析取范式 B 和 C,那么必有 $B\Leftrightarrow C$. 由于 B 和 C 是不同的主析取范式,不妨设极小项 m_i 只出现在 B 中而不出现在 C 中. 于是,角标 i 的二进制表示为 B 的成真赋值,C 的成假赋值,这与 $B\Leftrightarrow C$ 矛盾.

主合取范式的存在性和唯一性可类似证明.

在证明定理 2.5 的过程中,已经给出了求主析取范式的步骤. 为了醒目和便于记忆,求出某公式的主析取范式(主合取范式)后,将极小项(极大项)都用名称写出,并且按照极小项(极大项)名称的下标由小到大顺序排列.

例 2.8 求例 2.7 中公式的主析取范式和主合取范式.

解 (1) 求主析取范式.

在例 2.7 中已给出公式的析取范式,即

$$\begin{aligned}&(p\to q)\leftrightarrow r\\ \Leftrightarrow&(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\end{aligned}$$

在此析取范式中,第一项 $p\wedge\neg q\wedge\neg r$ 是极小项 m_4,另外两个简单合取式 $\neg p\wedge r$,$q\wedge r$ 都不是极小项. 下面先分别求出它们派生的极小项. 注意,因为公式含有 3 个命题变项,所以极小项均由 3 个文字组成.

$$\begin{aligned}&\neg p\wedge r\\ \Leftrightarrow&\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r\\ \Leftrightarrow&(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\vee r)\\ \Leftrightarrow&m_1\vee m_3\\ &q\wedge r\\ \Leftrightarrow&(\neg p\vee p)\wedge q\wedge r\\ \Leftrightarrow&(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\ \Leftrightarrow&m_3\vee m_7\end{aligned}$$

于是

$$(p\to q)\leftrightarrow r\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$$

(2) 求主合取范式.

由例 2.7 已求出公式的合取范式为

$$\begin{aligned}&(p\to q)\leftrightarrow r\\ \Leftrightarrow&(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\end{aligned}$$

其中$\neg p\vee q\vee\neg r$ 已是极大项 M_5. 利用矛盾律和同一律将另两个简单析取式化成极大项.

$$
\begin{aligned}
& p \vee r \\
\Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\
\Leftrightarrow & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\
\Leftrightarrow & M_0 \wedge M_2 \\
& \neg q \vee r \\
\Leftrightarrow & (p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r \\
\Leftrightarrow & (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
\Leftrightarrow & M_2 \wedge M_6
\end{aligned}
$$

于是

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6$$

例 2.9　求命题公式 $p \to q$ 的主析取范式与主合取范式.

解　本公式中含两个命题变项,所以极小项和极大项均含两个文字.

(1)　$p \to q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$

$\Leftrightarrow M_2$　　　　（主合取范式）

(2)　$p \to q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$　　　　（主析取范式）

由例 2.8 与例 2.9 可知,在求给定公式的主析取范式(主合取范式)时,一定要根据公式中命题变项的个数决定极小项(极大项)中文字的个数.

下面讨论主析取范式的用途(主合取范式可以进行类似讨论). 主析取范式像真值表一样,可以表达出公式以及公式之间关系的一切信息.

1. 求公式的成真赋值与成假赋值.

若公式 A 中含 n 个命题变项,A 的主析取范式含 $s(0 \leqslant s \leqslant 2^n)$ 个极小项,则 A 有 s 个成真赋值,它们是所含极小项角标的二进制表示,其余 $2^n - s$ 个赋值都是成假赋值. 例如,例 2.8 中,$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$. 这里有 3 个命题变项,将主析取范式中各极小项的角标 1,3,4,7 写成长为 3 的二进制数,它们分别为 001,011,100,111. 这 4 个赋值即为该公式的成真赋值. 而主析取范式中未出现的极小项 m_0, m_2, m_5, m_6 的角标的二进制表示 000,010,101,110 为该公式的成假赋值. 又如例 2.9 中,$p \to q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$,含两个命题变项,极小项的角标的二进制表示 00,01,11 为该公式的成真赋值,而 10 是它的成假赋值.

2. 判断公式的类型.

设公式 A 中含 n 个命题变项,容易看出:

(1) A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项.

(2) A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项. 此时,记 A 的主析取范式为 0.

(3) A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项.

例 2.10 用公式的主析取范式判断下述公式的类型.

(1) $\neg(p\to q)\wedge q$

(2) $p\to(p\vee q)$

(3) $(p\vee q)\to r$

解 注意,(1),(2)中公式含两个命题变项,极小项含两个文字,而(3)中公式含3个命题变项,因而极小项中应含3个文字.

(1) $\neg(p\to q)\wedge q$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\wedge q$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\wedge q$

$\Leftrightarrow 0$

这说明该公式是矛盾式.

(2) $p\to(p\vee q)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee p\vee q$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge(\neg q\vee q))\vee(p\wedge(\neg q\vee q))\vee((\neg p\vee p)\wedge q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$

由于主析取范式含两个命题变项的全部 $2^2=4$ 个极小项,故该公式为重言式.

其实,以上演算在第一步就已知该公式等值于1,因而它为重言式. 如果要写出它的主析取范式,由1可直接写出全部极小项.

$p\to(p\vee q)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee p\vee q$

$\Leftrightarrow 1$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$

(3) $(p\vee q)\to r$

$\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee r$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge(\neg r\vee r))\vee((\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

该公式是可满足的,但不是重言式,因为它的主析取范式没含全部8个极小项.

3. 判断两个命题公式是否等值.

设公式 A,B 共含有 n 个命题变项,按 n 个命题变项求出 A 与 B 的主析取范式 A'与 B'. 若 $A'=B'$,则 $A\Leftrightarrow B$,否则 $A\not\Leftrightarrow B$.

例 2.11 判断下面两组公式是否等值.

(1) p 与 $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

(2) $(p\to q)\to r$ 与 $(p\wedge q)\to r$

解 (1) 这里有 2 个命题变项,因而极小项含 2 个文字.

$$\begin{aligned}&p\\ \Leftrightarrow\ &p\wedge(\neg q\vee q)\\ \Leftrightarrow\ &(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\\ \Leftrightarrow\ &m_2\vee m_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\\ \Leftrightarrow\ &m_2\vee m_3\end{aligned}$$

所以

$$p\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$$

(2) 这里有 3 个命题变项,因而极小项含 3 个文字. 经过演算得到

$$\begin{aligned}&(p\to q)\to r\\ \Leftrightarrow\ &m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7\\ &(p\wedge q)\to r\\ \Leftrightarrow\ &m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7\end{aligned}$$

两者的主析取范式不同,所以

$$(p\to q)\to r\not\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$$

最后举一个应用主析取范式分析和解决实际问题的例子.

例 2.12 某科研所要从 3 名科研骨干 A,B,C 中挑选 1 ~ 2 名出国进修. 由于工作需要,选派时要满足以下条件:

(1) 若 A 去,则 C 同去.

(2) 若 B 去,则 C 不能去.

(3) 若 C 不去,则 A 或 B 可以去.

问所里有哪些选派方案?

解 设 p: 派 A 去.

q: 派 B 去.

r: 派 C 去.

由已知条件可得公式

$$(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to(p\vee q))$$

该公式的成真赋值即为可行的选派方案. 经过演算得到

$$(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to(p\vee q))$$
$$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$$
$$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$$

故有3种选派方案：

(a) C 去，A，B 都不去.

(b) B 去，A，C 都不去.

(c) A，C 同去，B 不去.

例 2.13 二进制半加器和二进制全加器.

二进制半加器和二进制全加器是计算机运算器中的部件，实现二进制位的相加. 二进制半加器有2个输入 x 和 y，2个输出 h 和 d，其中 x 和 y 是被加数，h 是半和，d 是半进位. 半加器没有考虑上一位的进位，输出的不是最终的结果. h，d 与 x，y 的关系如表2.5所示. 二进制全加器有3个输入 x，y 和 c'，2个输出 s 和 c，其中 x 和 y 是被加数，c'是上一位的进位，s 是和，c 是进位. s，c 与 x，y，c'的关系如表2.6所示.

表 2.5

x	y	h	d
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

表 2.6

x	y	c'	s	c
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

根据表2.5，h 和 d 的主析取范式如下.

$$h=(\neg x\wedge y)\vee(x\wedge\neg y)$$
$$d=x\wedge y$$

根据表2.6，s 和 c 的主析取范式如下.

$$s=(\neg x\wedge\neg y\wedge c')\vee(\neg x\wedge y\wedge\neg c')\vee(x\wedge\neg y\wedge\neg c')\vee(x\wedge y\wedge c')$$
$$c=(\neg x\wedge y\wedge c')\vee(x\wedge\neg y\wedge c')\vee(x\wedge y\wedge\neg c')\vee(x\wedge y\wedge c')$$

化简如下：

$$s\Leftrightarrow(((\neg x\wedge y)\vee(x\wedge\neg y))\wedge\neg c')\vee(((\neg x\wedge\neg y)\vee(x\wedge y))\wedge c')$$
$$\Leftrightarrow(h\wedge\neg c')\vee(\neg((x\vee y)\wedge(\neg x\vee\neg y))\wedge c')$$
$$\Leftrightarrow(h\wedge\neg c')\vee(\neg((x\wedge\neg y)\vee(\neg x\wedge y))\wedge c')$$
$$\Leftrightarrow(h\wedge\neg c')\vee(\neg h\wedge c')$$

$$c \Leftrightarrow ((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \wedge c') \vee (x \wedge y)$$
$$\Leftrightarrow (h \wedge c') \vee d$$

根据以上两式可以用 2 个二进制半加器和一个或门实现二进制全加器,如图 2.1 所示.

以上讨论了主析取范式的求法与用途,也可以对主合取范式做类似的讨论. 关于主合取范式,还要说明以下两点.

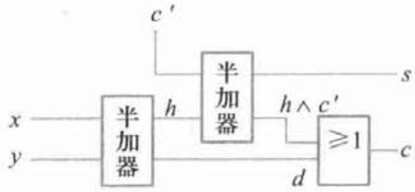

图 2.1

1. 由主析取范式求主合取范式.

设公式 A 含 n 个命题变项. A 的主析取范式含 $s(0<s<2^n)$ 个极小项,即

$$A = m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s}, \quad 0 \leqslant i_j \leqslant 2^n - 1, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

没出现的极小项为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_{2^n-s}}$,它们的角标的二进制表示为$\neg A$ 的成真赋值,因而$\neg A$ 的主析取范式为

$$\neg A = m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}$$

由定理 2.4 可知

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg\neg A \\ &\Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}) \\ &\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{j_{2^n-s}} \\ &\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-s}} \end{aligned}$$

这就由公式的主析取范式直接求出它的主合取范式.

例 2.14　利用公式的主析取范式,求主合取范式.

(1) $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_2$　(A 中含 2 个命题变项 p, q)

(2) $B \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3$　(B 中含 3 个命题变项 p, q, r)

解　(1) 由题可知,没出现在主析取范式中的极小项为 m_0 和 m_3,所以 A 的主合取范式中含 2 个极大项 M_0 与 M_3,故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_3$$

(2) B 的主析取范式中没出现的极小项为 m_0, m_4, m_5, m_6, m_7,因而

$$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$$

反之,也可由公式的主合取范式给出主析取范式.

2. 重言式与矛盾式的主合取范式.

矛盾式无成真赋值,因而矛盾式的主合取范式含全部 2^n(n 为公式中命题变项个数)个极大项. 而重言式无成假赋值,主合取范式不含任何极大项,规定重言式的主合取范式为 1. 至于可满足式,它的主合取范式中极大项的个数一定小于 2^n.

最后,要问:n 个命题变项的主析取范式(主合取范式)共有多少个? n 个命题变项共可产生 2^n个极小项(极大项),因而共可产生

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + \cdots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

个不同的主析取范式(主合取范式). 这与在 1.2 节中对真值表个数的讨论情况是一样的.

事实上,$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 有相同的真值表,又当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式(主合取范式).因而可以说,真值表与主析取范式(主合取范式)是描述命题公式的两种等价的不同标准形式,两者可以相互确定,由 A 的主析取范式(主合取范式)可以立刻确定 A 的真值表,由 A 的真值表也可以立刻确定 A 的主析取范式(主合取范式).

2.3 联结词的完备集

定义 2.6 称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

在这个定义中,F 的自变量为 n 个命题变项,定义域 $\{0,1\}^n=\{00\cdots0,00\cdots1,\cdots,11\cdots1\}$,即由0,1组成的长为 n 的符号串的全体,值域为 $\{0,1\}$. n 个命题变项共可构成 2^{2^n} 个不同的真值函数. 1元真值函数共有4个,如表2.7所示;2元真值函数共有16个,如表2.8所示;3元真值函数共有 $2^{2^3}=256$ 个.

表 2.7 1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

表 2.8 2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

每个真值函数都与唯一的一个主析取范式(主合取范式)等值.例如 $F_0^{(2)} \Leftrightarrow 0$(矛盾式),$F_1^{(2)}$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\Leftrightarrow m_3$，$F_2^{(2)}\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\Leftrightarrow m_2$，$F_3^{(2)}\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow m_2\vee m_3$，等等. 而每个主析取范式对应无穷多个等值的命题公式，每一个命题公式又都有唯一等值的主析取范式，所以每个真值函数对应无穷多个等值的命题公式，每个命题公式又都对应唯一的等值的真值函数.

定义 2.7　设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n\geqslant 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是联结词完备集.

定理 2.6　$S=\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集.

证　因为任何 $n(n\geqslant 1)$ 元真值函数都与唯一的一个主析取范式等值，而在主析取范式中仅含联结词 $\neg,\wedge,\vee$，所以 $S=\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集.

推论　以下联结词集都是联结词完备集.

(1) $S_1=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$

(2) $S_2=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

(3) $S_3=\{\neg,\wedge\}$

(4) $S_4=\{\neg,\vee\}$

(5) $S_5=\{\neg,\rightarrow\}$

证　(1)，(2)是显然的.

(3) 由于 $S=\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是联结词完备集，因而只需证 $\vee$ 可以用 $\neg$ 和 $\wedge$ 表示. 事实上，$p\vee q\Leftrightarrow\neg\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)$，所以 S_3 是联结词完备集.

(4)，(5)的证明留作习题.

可以证明恒取 0 值的真值函数(即与矛盾式等值的真值函数)不能用仅含 $\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ 的公式表示，因而 $\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ 不是联结词完备集，进而它的任何子集都不是联结词完备集，因此 $\{\wedge\}$，$\{\vee\}$，$\{\wedge,\rightarrow\}$，$\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$，$\{\wedge,\vee,\leftrightarrow\}$ 等也都不是联结词完备集.

在计算机硬件设计中，用与非门或者用或非门设计逻辑电路. 这是两个新的联结词，并且它们各自能构成联结词完备集.

定义 2.8　设 p,q 是两个命题，复合命题"p 与 q 的否定式"称作 p,q 的与非式，记作 $p\uparrow q$. 即 $p\uparrow q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$. 符号 $\uparrow$ 称作与非联结词.

复合命题"p 或 q 的否定式"称作 p,q 的或非式，记作 $p\downarrow q$. 即 $p\downarrow q\Leftrightarrow\neg(p\vee q)$. 符号 $\downarrow$ 称作或非联结词.

由定义不难看出，$p\uparrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 不同时为真，$p\downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假.

定理 2.7　$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$ 都是联结词完备集.

证　已知 $\{\neg,\wedge\}$ 为联结词完备集，因而只需证明其中的每个联结词都可以由 $\uparrow$ 表示即可. 事实上

$$\begin{aligned}&\neg p\\ \Leftrightarrow&\neg(p\wedge p)\\ \Leftrightarrow&p\uparrow p\end{aligned}\tag{2.20}$$

$p\wedge q$

$\Leftrightarrow\neg\neg(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow\neg(p\uparrow q)$ （定义）

$\Leftrightarrow(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$ （由式(2.20)） (2.21)

得证$\{\uparrow\}$是联结词完备集，此外，

$p\vee q$

$\Leftrightarrow\neg\neg(p\vee q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(\neg p)\uparrow(\neg q)$ （定义）

$\Leftrightarrow(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$ （由式(2.20)） (2.22)

类似可证$\{\downarrow\}$是联结词完备集.

$\neg p\Leftrightarrow p\downarrow p$

$p\vee q\Leftrightarrow(p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$

$p\wedge q\Leftrightarrow(p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$

2.4 可满足性问题与消解法

命题公式的可满足性问题是算法理论的核心问题之一. 这个问题可以用真值表、主析取范式或主合取范式解决，但这两个方法的计算量都很大. 本节将介绍一个新的方法——消解法.

由于任一公式都能化成等值的合取范式，因而一般的命题公式的可满足性问题可以归结为合取范式的可满足性问题.

不失一般性，假设一个简单析取式中不同时出现某个命题变项和它的否定，否则它为永真式，可以把它从合取范式中消去. 称不含任何文字的简单析取式为空简单析取式，记作 λ. 规定空简单析取式是不可满足的.（因为对任何赋值，空简单析取式中都没有文字为真.）因而，含有空简单析取式的合取范式是不可满足的.

设 l 是一个文字，记

$$l^c=\begin{cases}\neg p, & 若\ l=p\\ p, & 若\ l=\neg p\end{cases}$$

称作文字 l 的补.

下面用 S 表示合取范式，用 C 表示简单析取式，用 l 表示文字. 设 α 是关于 S 中命题变项的赋值，用 $\alpha(l)$，$\alpha(C)$ 和 $\alpha(S)$ 分别表示在 α 下 l，C 和 S 的值. 又设 S 和 S' 是两个合取范式，用 $S\approx S'$ 表示 S 是可满足的当且仅当 S' 是可满足的.

下面给出消解规则及其性质.

定义 2.9 设 C_1，C_2 是两个简单析取式，C_1 含文字 l，C_2 含 l^c. 从 C_1 中删去 l，从 C_2 中删去 l^c，然后再将所得到的结果析取成一个简单析取式，称这样得到的简单析取式为 C_1，C_2 的（以 l 和

l^c 为消解文字的)消解式或消解结果，记为 $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$. 即设 $C_1 = C_1' \vee l$, $C_2 = C_2' \vee l^c$, $\mathrm{Res}(C_1, C_2) = C_1' \vee C_2'$.

根据上述定义由 C_1, C_2 得到 $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ 的规则称作消解规则.

可以证明，如果 C_1, C_2 可对多对文字消解，其消解结果都是等值的(见本章习题第 34 题). 例如，$C_1 = \neg p \vee q \vee r$, $C_2 = p \vee \neg r \vee \neg s \vee t$ 可以消解为 $q \vee r \vee \neg r \vee \neg s \vee t$(以 p 和 $\neg p$ 为消解文字)，或者消解为 $\neg p \vee q \vee p \vee \neg s \vee t$(以 r 和 $\neg r$ 为消解文字)，都是永真式.

定理 2.8　$C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

证　记 $C = \mathrm{Res}(C_1, C_2)$，设消解文字为 l, l^c. 不妨设 $C_1 = C_1' \vee l$, $C_2 = C_2' \vee l^c$，于是 $C = C_1' \vee C_2'$.

假设 $C_1 \wedge C_2$ 是可满足的，α 是满足它的赋值，不妨设 $\alpha(l) = 1$. 由于 α 满足 C_2, C_2 必含有文字 $l' \neq l$ 且 $\alpha(l') = 1$. 而 C 中含 l'，故 α 满足 C.

反之，假设 C 是可满足的，α 是满足它的赋值. 要把 α 扩张到 $l(l^c)$ 上. 若 α 满足 C_1'，则令 $\alpha(l^c) = 1$；否则令 $\alpha(l) = 1$. 扩张后的 α 满足 $C_1 \wedge C_2$.

注意：$C_1 \wedge C_2$ 与 $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ 具有相同的可满足性，但它们不一定等值. 任何满足 $C_1 \wedge C_2$ 的赋值都满足 $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$，但满足 $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ 的赋值不一定满足 $C_1 \wedge C_2$. 例如，$p \vee q \vee r$, $p \vee \neg r$ 可消解为 $p \vee q$, $\alpha = 011$ 满足 $p \vee q$，但不满足 $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$. $\alpha' = 010$ 是后者的满足赋值.

给定一个合取范式 S，从 S 的简单析取式开始，重复使用消解规则可以得到一个简单析取式序列. 根据定理 2.8，如果 S 是可满足的，得到的所有简单析取式都是可满足的. 如果最后得到空简单析取式 λ，则 S 不是可满足的.

定义 2.10　设 S 是一个合取范式，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是一个简单析取式序列. 如果对每一个 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, C_i 是 S 中的一个简单析取式或者 C_i 是它之前的某两个简单析取式 C_j, C_k $(1 \leqslant j < k < i)$ 的消解结果，则称此序列是由 S 导出 C_n 的消解序列. 当 $C_n = \lambda$ 时，称此序列是 S 的一个否证.

根据这个定义和定义上面的那一段话，有

推论　如果合取范式 S 有否证，则 S 不是可满足的.

现在的问题是，如果合取范式 S 不是可满足的，S 是否一定有否证？回答是肯定的.

引理 2.9　设 S 含有简单析取式 l，从 S 中删去所有包含 l 的简单析取式，再从剩下的简单析取式中删去 l^c，把这样得到的合取范式记作 S'，则 $S \approx S'$.

证　假设 S 是可满足的，α 是满足 S 的赋值，必有 $\alpha(l) = 1$, $\alpha(l^c) = 0$. 对 S' 中的任一简单析取式 C', S 中有一个简单析取式 C 使得 $C = C'$ 或 $C = C' \vee l^c$. 因为 α 使 C 为真且 $\alpha(l^c) = 0$，故 α 使 C' 为真. 得证 S' 是可满足的.

反之，假设 S' 是可满足的，α 是满足 S' 的赋值. 把 α 扩张到 S 上，令 $\alpha(l) = 1$ 且对除 l 之外 S' 中没有出现的变项任取一个值(如取 1). 于是，对 S 中的任一简单析取式 C，若 C 含 l，则扩张后的 α 满足 C；若 C 不含 l，则 S' 中有 C' 使得 $C = C'$ 或 $C = C' \vee l^c$. 而 α 满足 C'，扩张后仍满足 C'，从而满足 C. 得证 S 是可满足的.

定理 2.10(消解的完全性) 如果合取范式 S 是不可满足的,则 S 有否证.

证 设 S 中含有 k 个命题变项,用数学归纳法证明.

当 $k=1$ 时,S 中只有一个命题变项,设为 p. 由于 S 是不可满足的,S 中必同时含有简单析取式 p 和 $\neg p$,从而 S 有否证.

假设当 $k<n(n\geqslant 2)$ 时定理成立,要证 $k=n$ 时定理也成立.

任意取定 S 中的一个命题变项 p,令 S_1 表示 S 中所有含 p 的简单析取式,S_2 表示 S 中所有含 $\neg p$ 的简单析取式,S_3 表示 S 中所有既不含 p 又不含 $\neg p$ 的简单析取式. S'是如下得到的合取范式:先删去 S 中所有含 p 的简单析取式,然后再从剩下的简单析取式中删去文字$\neg p$. S'是 2 个子合取范式 S_2' 和 S_3 的合取范式,其中 S_2' 是删去 S_2 的所有简单析取式中的$\neg p$ 后得到合取范式. 令 S''是如下得到的子句集:先删去 S 中所有含$\neg p$ 的简单析取式,然后再从剩下的简单析取式中删去文字 p. S''也是 2 个子合取范式 S_1' 和 S_3 的合取范式,其中 S_1' 是删去 S_1 的所有简单析取式中的 p 后得到合取范式. 由引理 2.9,$S\wedge p\approx S'$,$S\wedge(\neg p)\approx S''$. 由于 S 是不可满足的,$S\wedge p$ 和 $S\wedge(\neg p)$都是不可满足的,故 S'和 S''也是不可满足的. 而 S'和 S''中的命题变项个数都小于 n,根据归纳假设,存在从 S'和 S''导出 λ 的消解序列 $C_1,C_2,\cdots,C_i$ 和 $D_1,D_2,\cdots,D_j$,其中 $C_i=D_j=\lambda$. 如果 $C_t(1\leqslant t\leqslant i)$是仅由 S_3 中的简单析取式消解得到的,则称 C_t 是与S_2'无关的;否则称 C_t 是与 S_2'有关的. 可类似地定义 $D_t(1\leqslant t\leqslant j)$是与 S_1'无关的和是与 S_1'有关的. 分两种情况讨论如下.

(1) C_i 是与 S_2' 无关的,或者 D_j 是与 S_1' 无关的. 此时可以由 S_3 中的简单析取式消解得到 λ,这个消解序列也是 S 的一个否证.

(2) C_i 是与 S_2' 有关的且 D_j 是与 S_1' 有关的. 对每一个 $1\leqslant t\leqslant i$,令

$$C_t'=\begin{cases}C_t\vee(\neg p), & \text{若 } C_t \text{ 与 } S_2' \text{ 有关}\\ C_t, & \text{若 } C_t \text{ 与 } S_2' \text{ 无关}\end{cases}$$

对每一个 $1\leqslant t\leqslant j$,令

$$D_t'=\begin{cases}D_t\vee p, & \text{若 } D_t \text{ 与 } S_1' \text{ 有关}\\ D_t, & \text{若 } D_t \text{ 与 } S_1' \text{ 无关}\end{cases}$$

不难看出 $C_1',C_2',\cdots,C_i'$ 和 $D_1',D_2',\cdots,D_j'$ 都是 S 的消解序列,分别得到 $C_i'=\neg p$ 和 $D_j'=p$,而 $\mathrm{Res}(C_i',D_j')=\lambda$. 因此,$C_1',C_2',\cdots,C_i',D_1',D_2',\cdots,D_j',\lambda$ 是 S 的一个否证.

当 $k=n$ 时,定理成立得证.

根据定理 2.8 的推论与定理 2.10,可以得到下述结论.

推论 合取范式 S 是不可满足的当且仅当它有否证.

下面给出判断合式公式是否是可满足的消解算法.

消解算法:

输入:合式公式 A

输出:若 A 是可满足的,则回答"yes";否则回答"no".

1. 求 A 的合取范式 S

2. 令 S_0 和 S_2 为不含任何元素的集合，S_1 为 S 的所有简单析取式组成的集合
3. 对 S_0 中的每一个简单析取式 C_1 与 S_1 中的每一个简单析取式 C_2
4. 　如果 C_1, C_2 可以消解，则
5. 　　计算 $C=\mathrm{Res}(C_1, C_2)$
6. 　　如果 $C=\lambda$，则
7. 　　　输出"no"，计算结束
8. 　　如果 S_0 与 S_1 都不包含 C，则
9. 　　　把 C 加入 S_2
10. 对 S_1 中的每一对子句 C_1, C_2
11. 　如果 C_1, C_2 可以消解，则
12. 　　计算 $C=\mathrm{Res}(C_1, C_2)$
13. 　　如果 $C=\lambda$，则
14. 　　　输出"no"，计算结束
15. 　　如果 S_0 与 S_1 都不包含 C，则
16. 　　　把 C 加入 S_2
17. 如果 S_2 中没有任何元素，则
18. 　输出"yes"，计算结束
19. 否则把 S_1 加入 S_0，令 S_1 等于 S_2，清空 S_2，返回 3

由于 S 中只有有限个命题变项，有限个命题变项只能构成有限个不同的简单析取式，算法 3 ~ 19 的循环至多进行有限次，从而算法必在有限步内终止. 如果计算结束在步骤 7 或步骤 14，此时已得到一个空简单析取式. 根据定理 2.8 的推论，公式是不可满足的，算法回答正确；如果计算结束在步骤 18，此时已计算出 S 能够通过消解产生的所有简单析取式，这些简单析取式中没有空简单析取式，因而 S 没有否证. 根据定理 2.10，公式是可满足的，算法回答正确. 算法是正确的得证.

例 2.15　用消解法判断下列公式是否是可满足的.

(1) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q)$

(2) $p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$

解　(1) 这已经是合取范式，$S=(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q)$

第 1 次循环：$S_0=\varnothing$，$S_1=\{\neg p \vee q, p \vee q, \neg q\}$，$S_2=\varnothing$

$\neg p \vee q, p \vee q$ 消解得到 q

$\neg p \vee q, \neg q$ 消解得到 $\neg p$

$p \vee q, \neg q$ 消解得到 p

$S_2=\{p, \neg p, q\}$

第 2 次循环：$S_0=\{\neg p \vee q, p \vee q, \neg q\}$，$S_1=\{p, \neg p, q\}$，$S_2=\varnothing$

$\neg p \vee q, p$ 消解得到 q

$p \vee q, \neg p$ 消解得到 q

$\neg q, q$ 消解得到 λ

输出"no",计算结束

(2) $S = p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$

第1次循环:$S_0 = \varnothing, S_1 = \{p, p \vee q, p \vee \neg q, q \vee \neg r, q \vee r\}, S_2 = \varnothing$

$p \vee q, p \vee \neg q$ 消解得到 p

$p \vee \neg q, q \vee \neg r$ 消解得到 $p \vee \neg r$

$p \vee \neg q, q \vee r$ 消解得到 $p \vee r$

$q \vee \neg r, q \vee r$ 消解得到 q

$S_2 = \{p \vee r, p \vee \neg r, q\}$

第2次循环:$S_0 = \{p, p \vee q, p \vee \neg q, q \vee \neg r, q \vee r\}, S_1 = \{p \vee r, p \vee \neg r, q\}, S_2 = \varnothing$

$p \vee \neg q, q$ 消解得到 p

$q \vee \neg r, p \vee r$ 消解得到 $p \vee q$

$q \vee r, p \vee \neg r$ 消解得到 $p \vee q$

$p \vee r, p \vee \neg r$ 消解得到 p

$S_2 = \varnothing$

输出"yes",计算结束

习 题 2

1. 设公式 $A = p \to q, B = p \wedge \neg q$,用真值表验证公式 A 和 B 适合德摩根律:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

2. 公式 A 与 B 同第1题,用真值表验证公式 A 和 B 适合蕴涵等值式:

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

3. 用等值演算法判断下列公式的类型,对不是重言式的可满足式,再用真值表法求出成真赋值.

(1) $\neg(p \wedge q \to q)$

(2) $(p \to (p \vee q)) \vee (p \to r)$

(3) $(p \vee q) \to (p \wedge r)$

4. 用等值演算法证明下列等值式.

(1) $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

(2) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \Leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$

(3) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

(4) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

5. 求下列公式的主析取范式,并求成真赋值.

(1) $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

(2) $(\neg p \to q) \wedge (q \wedge r)$

(3) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$

6. 求下列公式的主合取范式，并求成假赋值.

(1) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$

(2) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$

(3) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee r$

7. 求下列公式的主析取范式，再用主析取范式求主合取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

8. 求下列公式的主合取范式，再用主合取范式求主析取范式.

(1) $(p \wedge q) \rightarrow q$

(2) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

(3) $\neg(r \rightarrow p) \wedge p \wedge q$

9. 用真值表求下列公式的主析取范式.

(1) $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge r)$

(2) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

10. 用真值表求下列公式的主合取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

11. 用真值表求下列公式的主析取范式和主合取范式.

(1) $(p \vee q) \wedge r$

(2) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$

(3) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$

12. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p,q,r，并且它的成真赋值为 000，011，110，求 A 的主合取范式和主析取范式.

13. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p,q,r，并且它的成假赋值为 010，011，110，111，求 A 的主析取范式和主合取范式.

14. 已知公式 A 含 n 个命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，并且无成假赋值，求 A 的主合取范式.

15. 用主析取范式判断下列公式是否等值.

(1) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 与 $q \rightarrow (p \rightarrow r)$

(2) $\neg(p \wedge q)$ 与 $\neg(p \vee q)$

16. 用主合取范式判断下列公式是否等值.

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $\neg(p \wedge q) \vee r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

17. 将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中联结词的公式.

(1) $\neg(p \rightarrow (q \leftrightarrow (q \wedge r)))$

(2) $(p \wedge q) \vee \neg r$

(3) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

18. 将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的公式.

(1) $p \vee \neg q \vee \neg r$

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge q$

(3) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \vee p$

19. 将下列公式化成与之等值且仅含$\{\neg, \vee\}$中联结词的公式.

(1) $(\neg p \vee \neg q) \wedge r$

(2) $(p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r$

(3) $p \wedge q \wedge \neg r$

20. 将下列公式化成与之等值且仅含$\{\neg, \rightarrow\}$中联结词的公式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$

(2) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r$

(3) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

21. 证明:

(1) $(p \uparrow q) \Leftrightarrow (q \uparrow p)$, $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (q \downarrow p)$

(2) $((p \uparrow q) \uparrow r) \not\Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow r))$, $((p \downarrow q) \downarrow r) \not\Leftrightarrow (p \downarrow (q \downarrow r))$

22. 从表 2.8 中找出与下列公式等值的真值函数.

(1) $p \uparrow q$

(2) $p \downarrow q$

(3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(4) $\neg(p \rightarrow q)$

23. 设 A,B,C 为任意的命题公式. 证明等值关系有

(1) 自反性:$A \Leftrightarrow A$

(2) 对称性:若 $A \Leftrightarrow B$,则 $B \Leftrightarrow A$.

(3) 传递性:若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$,则 $A \Leftrightarrow C$.

24. 设 A,B 为任意的命题公式,证明:

$$\neg A \Leftrightarrow \neg B \text{ 当且仅当 } A \Leftrightarrow B$$

25. 设 A,B,C 为任意的命题公式,有

(1) 若 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$,举例说明 $A \Leftrightarrow B$ 不一定成立.

(2) 若 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$,举例说明 $A \Leftrightarrow B$ 不一定成立.

由此可知,联结词$\vee$与$\wedge$不满足消去律.

26. 在上题中,若已知 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$,在什么条件下 $A \Leftrightarrow B$ 一定成立? 又若已知 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$,在什么条件下,$A \Leftrightarrow B$ 一定成立?

27. 要设计由一个灯泡和 3 个开关 A,B,C 组成的电路,要求在且仅在下述 4 种情况下灯亮:

(1) C 的扳键向上,A,B 的扳键向下.

(2) A 的扳键向上,B,C 的扳键向下.

(3) B,C 的扳键向上,A 的扳键向下.

(4) A,B 的扳键向上,C 的扳键向下.

设 F 为 1 表示灯亮,p,q,r 分别表示 A,B,C 的扳键向上.

(a) 求 F 的主析取范式.

(b) 在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 上构造 F.

(c) 在联结词完备集 $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 上构造 F.

28. 一个排队线路，输入为 A,B,C，输出为 F_A,F_B,F_C. 在同一时间只能输出一个信号；当同时有 2 个或 2 个以上信号申请输出时，按 A,B,C 的顺序输出. 试写出 F_A,F_B,F_C 在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 中的表达式.

29. 在某班班委成员的选举中，已知王小红、李强、丁金生三位同学被选进了班委会. 该班的甲，乙，丙三名学生预言如下.

甲说：王小红为班长，李强为生活委员.

乙说：丁金生为班长，王小红为生活委员.

丙说：李强为班长，王小红为学习委员.

班委会分工名单公布后发现，甲、乙、丙三人都恰好猜对了一半. 问：王小红、李强、丁金生各任何职（用等值等演求解）?

30. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件：

(1) 若赵去，则钱也去.

(2) 李、周两人中必有一人去.

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也同去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国.

31. 给出下述每一对 C_1,C_2 的消解结果.

(1) $C_1=\neg p \vee \neg q \vee r, C_2=\neg q \vee \neg r \vee s \vee \neg t$

(2) $C_1=p \vee \neg q \vee r \vee \neg s, C_2=s$

(3) $C_1=\neg p \vee q \vee r, C_2=p \vee \neg r \vee \neg s$

32. 用消解原理证明下列公式是矛盾式.

(1) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r) \wedge r$

(2) $\neg((p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q)$

33. 用消解法判断下列公式是否是可满足的.

(1) $p \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge q$

(2) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$

34. 如果 C_1,C_2 可对多对文字消解，则其消解结果都是等值的.

35. 设文字 l 在合取范式 S 中出现，而 l^c 不在 S 中出现. 把删去 S 中所有含 l 的简单析取式后得到的合取范式记作 S'，则 $S \approx S'$.

36. 设 S 是一个合取范式，U 是一个命题变项集合，$R_U(S)$ 表示如下得到的合取范式：对 S 中出现的每一个文字 l，如果 l 的命题变项属于 U，则将它换成 l^c. 证明：$R_U(S) \approx S$.