概率统计 19-20-2(A)标准答案及评分标准

一、选择题

1)D 2) A 3)D, 4) D, 5) A

二、填空题

1) 3/4=0.75;

2)2/3

3) 16

4)0.8413

5)-0.4

6) 2.8

7) 0.5

8) $\chi^2(10)$

9) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0.4 & 1\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$

10) $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{3-y}{2} & 1<y<3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

11) 1/2=0.5

12) 0.95

13) $\sqrt{17/5}=1.844$.

三、(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1;$

$$a\int_0^1\int_0^{1-y} x(x+y)dxdy = 1;$$

$$a = 8$$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

当0<y<1时 $f_Y(y)=\int_0^{1-y} ax(x+y)dx = \frac{4}{3}(y^3 - 3y + 2)$

当$y \le 0$，或 $y \ge 1$时 $f_Y(y) = 0$

(3) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{6x(x+y)}{(y^3-3y+2)} & 0 < x < 1-y \\ 0 & 其它 \end{cases} \quad (0 < y < 1)$$

$$f_{X|Y}(x|0.4) = \begin{cases} \dfrac{6x(x+0.4)}{(0.4^3 - 3\times 0.4 + 2)} & 0 < x < 0.6 \\ 0 & 其它 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{0.144}x(x+0.4) & 0 < x < 0.6 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$P(X < 0.5 | Y = 0.4) = \int_{-\infty}^{0.5} f_{X|Y}(x|0.4)dx = \int_0^{0.5} \frac{1}{0.144} x(x+0.4)dx = 0.6366$$

四、A1,A2,A3 分别表示 灯管由甲、乙、丙厂家生产；

B 表示抽到的灯管为合格品。则

$$P(A_1) = 0.6; P(A_2) = 0.3; P(A_3) = 0.1;$$
$$P(B|A_1) = 0.95; P(B|A_2) = 0.9; P(B|A_3) = 0.85;$$

(1) $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$

$= 0.6*0.95 + 0.3*0.9 + 0.1*0.85 = 0.925$

(2)

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3).}{P(B)}$$

$$= \frac{0.1*0.85}{0.925} =\approx 0.0919$$

五、 X和Y的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

X和Y的联合密度为：

$$f(x，y)=\begin{cases} 2e^{-x-2y} & x>0, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

Z的分布函数$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

当 $z<0$时，$F_Z(z)=0$;

当 $z>0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

$=\int_0^z\int_0^{z-x} 2e^{-x-2y}dydx$

$=1-2e^{-z}+e^{-2z}$

Z的概率密度为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases} 2e^{-z}-2e^{-2z} & z>0 \\ 0 & z<0 \end{cases}$$

或者：

X和Y的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

当$z>0$时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_0^z e^{-x}\times 2e^{-2(z-z)}dx$$

$$=2e^{-2z}(e^z-1)$$

当$z\le 0$时， $f_Z(z)=0$

六、设甲厅需要m个座位。设听众选择甲厅的人数为X。

由题意可得：X~ b(n,p). n=100;p=0.5,

m需要满足：

$P(\mathrm{X}>m)<2.5\%$

$P(\mathrm{X}>m)\approx 1-\Phi(\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}})=1-\Phi(\frac{m-50}{5})$

由$1-\Phi(\frac{m-50}{5})<0.025$;得：$\Phi(\frac{m-50}{5})>0.975$

$\frac{m-50}{5}>1.96$

$m>59.8$,故甲厅至少需要准备60个座位才能满足要求。

七、(1)似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(X_i-\theta)}=2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}X_i}e^{2n\theta}$

$\theta\le X_1,....,\theta\le X_n$;即：$\theta\le\min(X_1,....,X_n)$

显然$L(\theta)$是θ的单调增函数，且$\theta\le\min(X_1,....,X_n)$,

所以当$\theta=\min(X_1,....,X_n)$时，$L(\theta)$取得最大值

根据最大似然估计的定义，$\hat{\theta}=\min(X_1,....,X_n)$是参数$\theta$的最大似然估计。

(2)$E\hat{\theta}=E\min(X_1,....,X_n)$

因为$X_i\ge\theta$,所以$\min(X_1,....,X_n)\ge\theta$.；故$E\hat{\theta}=E\min(X_1,....,X_n)\ge\theta$

所以$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计。

总体的分布函数；

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)} & x\ge\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases}$$

记Z=$\hat{\theta}$=min($\mathrm{X}_1,...,X_n$)的密度函数

$f_Z(z)=n[1-F_X(z)]^{n-1}f(z)$

$$=\begin{cases}2ne^{-2n(z-\theta)} & z\ge\theta\\ 0 & z<\theta\end{cases}$$

$E\hat{\theta}=EZ=\int_{\theta}^{\infty}z2ne^{-2n(z-\theta)}dz$

$=\theta+\frac{1}{2n}\ne\theta$,所以，$\hat{\theta}$=min($\mathrm{X}_1,...,X_n$)不是$\theta$的无偏估计

八、(1) $n=25, \alpha=0.05,$

检验统计量　$T=\frac{\bar{X}-16}{S_n}\sqrt{n} \mid H_0 \sim t(n-1)$

拒绝域：$D=\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\{|T|>2.064\}$

$\bar{x}=15, s_n=3$

T的观测值：$T=\frac{15-16}{3}\sqrt{25}=-5/3$

$|-5/3|<2.064,$

所以，不能拒绝原假设。

(2) σ^2的置信度为95%的置信区间为：$[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.025}(24)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.975}(24)}]$.....2'

$=[\frac{24\times 3^2}{39.36}, \frac{24\times 3^2}{12.4}]=[5.49, 17.42]$