线性方程组

作者 刘国华

东南大学 数学系

November 18, 2019

目录

向量的历史

- 公元前1世纪,《九章算术》初等行变换, 相当于高斯消元法.
- 17 世纪后期, 德国数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz), 含两个未知量三个方程的线性组.
- 18 世纪上半叶, 英国数学家麦克劳林(Colin Maclaurin): 具有二、三、四个未知量的线性方程组得到了现在称为克拉默法则的结果.
- 瑞士数学家克拉默不久也发表了这个法则
- 18世纪下半叶, 法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究证明了n元齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零.
- 19世纪, 英国数学家史密斯(Henry John Stephen Smith)和道奇森(Charles Lutwidge Dodgson): 前者引进了方程组的增广矩阵的概念后者证明了n个未知数m个方程的方程组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同。

线性方程组的基本概念

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

线性方程组的基本概念

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次

线性方程组的基本概念

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次
- 相容、不相容

线性方程组的基本概念

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次
- 相容、不相容
- 解集

线性方程组的基本概念

Definition

设含n 个变量、由s 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

- 齐次、非齐次
- 相容、不相容
- 解集
- 两个方程组同解

线性方程组的系数矩阵与增广矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

和

$$(A,b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

分别成为方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

的系数矩阵和增广矩阵.

Gauss 消元法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解： 第三个方程乘以$\dfrac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

解： 第三个方程乘以$\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程，第一个方程的(-1)倍加到第三个方程，即得

Gauss 消元法

解： 第三个方程乘以$\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程, 第一个方程的(-1)倍加到第三个方程, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

解： 第三个方程乘以$\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的(-2)倍加到第二个方程, 第一个方程的(-1)倍加到第三个方程, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad 4x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

这时方程组中第二、三个方程是含有变量x_2, x_3的方程组, 变量已经从三个减少到两个, 由二元一次方程组的解法, 可以求出x_2, x_3的值.

Gauss 消元法

或者继续进行消元变换, 将第三个方程的(-2)倍加到第二个方程, 再把第二、第三两个方程的次序互换, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

或者继续进行消元变换, 将第三个方程的(-2)倍加到第二个方程, 再把第二、第三两个方程的次序互换, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -6 \end{cases}$$

这样, 把第三个方程$x_3 = -6$回代入第二个方程中, 解出$x_2 = -1$, 再把$x_2 = -1, x_3 = -6$回代入第一个方程中, 就可以解出$x_1 = 9$, 即求得有序数组$(x_1, x_2, x_3) = (9, -1, -6)$为方程组的唯一解.

解方程组

Gauss消元法的求解过程, 与增广矩阵的初等行变换, 是完全对应的.

解方程组

Gauss消元法的求解过程，与增广矩阵的初等行变换，是完全对应的.
对增广矩阵的每一次初等行变换，都等于对方程组的一次初等变换，不改变方程组的解；当增广矩阵经过连续的初等行变换，化为阶梯形矩阵时，相应的方程组也成为阶梯形方程组.

解方程组

Gauss消元法的求解过程，与增广矩阵的初等行变换，是完全对应的.
对增广矩阵的每一次初等行变换，都等于对方程组的一次初等变换，不改变方程组的解；当增广矩阵经过连续的初等行变换，化为阶梯形矩阵时，相应的方程组也成为阶梯形方程组.
从阶梯形方程组的秩可以直接看出方程组解的情况.

- 无解 $r(A) < r(A, b)$;
- 有唯一解 $r(A) = r(A, b) = n$;
- 非无穷多解 $r(A) = r(A, b) < n$，自由未知量及其个数.

Example

(1)用Gauss 消元法求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

解方程组

Example

(1)用Gauss 消元法求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4=0 \end{cases}.$$

(2)讨论下述线性方程组的解的情况,有解时,求其解:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-2x_2+3x_3+x_4=-1 \\ 3x_1-3x_2+5x_3+\lambda x_4=0 \\ 4x_1-4x_2+7x_3+7x_4=\mu \end{cases}.$$

Example

已知线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 为何值时，此方程组(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

齐次方程组有非零解的充要条件

定理

含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组 $A_{m,n}X = 0$ 必有非零解当且仅当 $r(A) < n$.

齐次方程组有非零解的充要条件

定理

含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组 $A_{m,n}X = 0$ 必有非零解当且仅当 $r(A) < n$.

定理

当 $m < n$ 时，含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组必有非零解.

齐次方程组有非零解的充要条件

定理

含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组 $A_{m,n}X=0$ 必有非零解当且仅当 $r(A)<n$.

定理

当 $m<n$ 时，含 n 个变量、m 个方程的齐次线性方程组必有非零解.

定理

当 $m=n$ 时，含 n 个变量、n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于0.

线性方程组有解的条件

定义

设 $A_{s\times n}$,则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解的全体所构成的集合

$$K(A)=\{x\in R^n|Ax=0\}$$

是 R^n的子空间,称为齐次方程组的解空间，也成为矩阵 A 的核空间或者零空间.

线性方程组有解的条件

定义

设 $A_{s\times n}$,则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解的全体所构成的集合

$$K(A)=\{x\in R^n|Ax=0\}$$

是 R^n的子空间,称为齐次方程组的解空间，也成为矩阵 A 的核空间或者零空间.

性质

- 若 α, β 都是 $Ax=0$ 的解向量，则 $\alpha+\beta$ 也是 $Ax=0$ 的解向量.
- 若 α 是 $Ax=0$ 的解向量，则 $k\alpha$ 也是 $Ax=0$ 的解向量.

齐次方程组的基础解系

定理

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间 $K(A)$. 且当它系数矩阵A 的秩 $r(A) = r$ 时, $dim(K(A)) = n - r$.

齐次方程组的基础解系

定理

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间 $K(A)$. 且当它系数矩阵A 的秩 $r(A) = r$ 时, $dim(K(A)) = n - r$.

定义

齐次线性方程组 $Ax = 0$的解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 满足条件

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关.

(2) $Ax = 0$的任意解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性表示

称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 为线性方程组$Ax = 0$的**基础解系**.

齐次方程组的基础解系

定理

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间 $K(A)$. 且当它系数矩阵A 的秩 $r(A) = r$ 时, $dim(K(A)) = n - r$.

定义

齐次线性方程组 $Ax = 0$的解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 满足条件
(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关.
(2) $Ax = 0$的任意解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性表示
称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 为线性方程组$Ax = 0$的**基础解系**.
如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是 $Ax = 0$的基础解系, 则齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$的全部解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}, \quad c_i \in R, i = 1, \cdots, n-r.$$

称上式为齐次线性方程组 $Ax = 0$的**通解**.

齐次方程组的解

根据上面的讨论，对于齐次线性方程组只要求出基础解系，便可得通解，上述定理的证明过程为我们提供了一种求基础解系的方法．事实上，只要令自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 依次取下列$n-r$ 组数

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可求得一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

齐次方程组的解

例

求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ -x_1-x_2+x_5=0 \\ -2x_1-2x_2+3x_5=0 \\ x_3+x_4+3x_5=0 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=0 \end{cases}$$
的基础解系和通解.

齐次方程组的解

例

求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ -x_1-x_2+x_5=0 \\ -2x_1-2x_2+3x_5=0 \\ x_3+x_4+3x_5=0 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=0 \end{cases}$$
的基础解系和通解.

例

证明
$$r(A^TA)=r(A).$$

齐次方程组的解

定理

$A_{mn}x = 0$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是它的基础解析.

非齐次线性方程组解的条件

回顾线性方程组$Ax = b$ 的求解问题, 有

性质

下面三个条件等价

- $Ax = b$有解;
- 向量b可由向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表示;
- 向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, b\}$.

非齐次线性方程组解的条件

回顾线性方程组$Ax = b$ 的求解问题，有

性质

下面三个条件等价

- $Ax = b$有解;
- 向量b可由向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表示;
- 向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, b\}$.

以及进一步线性方程组有解的判别定理.

定理

如果线性方程组$Ax = b$有解，且设$r(A) = r(A, b) = r$，则

- 当$r = n$时，$Ax = b$有唯一解;
- 当$r < n$时，$Ax = b$有无穷多解.

非齐次方程组的一般解

非齐次方程组$Ax = b$的解与其对应的齐次线性方程组$Ax = 0$的解有着密切的关系.

非齐次方程组的一般解

非齐次方程组$Ax=b$的解与其对应的齐次线性方程组$Ax=0$的解有着密切的关系.

性质

设 η_1和 η_2是 $Ax=b$的解, 则 $\eta_1-\eta_2$是 $Ax=0$ 的解.

非齐次方程组的一般解

非齐次方程组$Ax=b$的解与其对应的齐次线性方程组$Ax=0$的解有着密切的关系.

性质

设 η_1和 η_2是 $Ax=b$的解, 则 $\eta_1-\eta_2$是 $Ax=0$ 的解.

性质

设 η为$Ax=b$的解, ξ为$Ax=0$的解, 则 $\eta+\xi$仍为 $Ax=b$的解.

非齐次方程组的一般解

非齐次方程组$Ax=b$的解与其对应的齐次线性方程组$Ax=0$的解有着密切的关系.

性质

设 η_1和 η_2是 $Ax=b$的解, 则 $\eta_1-\eta_2$是 $Ax=0$ 的解.

性质

设 η为$Ax=b$的解, ξ为$Ax=0$的解, 则 $\eta+\xi$仍为 $Ax=b$的解.

定义

称齐次方程组$Ax=0$ 为非齐次方程组$Ax=b$ 的导出组.

非齐次方程组解的结构

定理

设 η为非齐次线性方程组 $Ax = b$的一个特解(即某一个给定的解), $\zeta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$是其对应方程组 $Ax = 0$的通解, 则方程组 $Ax = b$的通解(所有解)可表示为

$$x = \eta + \zeta$$

即

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是它对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$的一个基础解系, $r = r(A)$, $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r} \in R$.

非齐次方程组解的结构

例

求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -7 \end{cases}$$

的通解.

最小二乘解

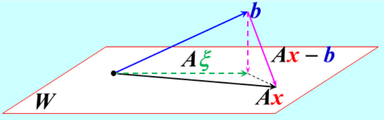
对于这样一个质点的运动轨迹，可以看到其方程随着参数的不同会有很大的改变. 在现实中，考虑到误差因素，需要测定更多点的坐标，测量的误差会导致上述线性方程组无解. 在其它实际问题中，还会遇到很多类似的情况.

最小二乘解

对于这样一个质点的运动轨迹，可以看到其方程随着参数的不同会有很大的改变. 在现实中，考虑到误差因素，需要测定更多点的坐标，测量的误差会导致上述线性方程组无解. 在其它实际问题中，还会遇到很多类似的情况. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\ \alpha_2),\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$

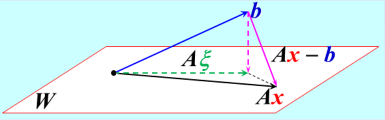
$$Ax=(\alpha_1,\ \alpha_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2.$$

则向量b 如果在由$\alpha_1,\ \alpha_2$ 决定的平面W 上时，意味着方程组$Ax=b$ 有解，如果不在，则需要找对于x 的所有可能的取值，满足$\|Ax-b\|$ 达到最小.



最小二乘解

当线性方程组 $Ax = b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax - b\|$ 最小?



定义

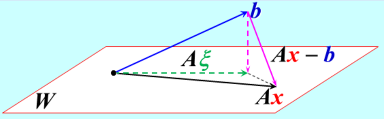
设 $A \in C^{s\times n}, x_0 \in C^n$，若

$$\|b - Ax_0\| = \min_{x\in C^n} \|b - Ax\|$$

则称 x_0 是线性方程组 $Ax = b$的最小二乘解，长度最小的最小二乘解称为极小最小二乘解。

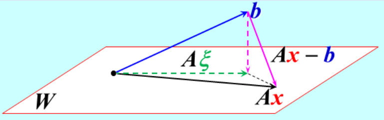
最小二乘解

当线性方程组 $Ax = b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax - b\|$ 最小?



最小二乘解

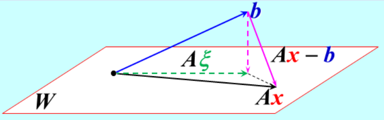
当线性方程组 $Ax = b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax - b\|$ 最小?



- $\|A\xi - b\|$ 最小$\Leftrightarrow$ $(A\xi - b) \perp W$
  $\Leftrightarrow$ $(A\xi - b)$ 与α_1，α_2 都正交
  $\Leftrightarrow A^T(A\xi - b) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (A\xi - b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
  $\Leftrightarrow A^T A\xi - A^T b = 0 \Leftrightarrow A^T A\xi = A^T b$
  $\Leftrightarrow \xi$ 是$A^T A\xi = A^T b$ 的解.

最小二乘解

当线性方程组 $Ax = b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax - b\|$ 最小？



- $\|A\xi - b\|$ 最小$\Leftrightarrow$ $(A\xi - b) \perp W$
  $\Leftrightarrow$ $(A\xi - b)$ 与α_1，α_2 都正交
  $\Leftrightarrow A^T(A\xi - b) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (A\xi - b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
  $\Leftrightarrow A^TA\xi - A^Tb = 0 \Leftrightarrow A^TA\xi = A^Tb$
  $\Leftrightarrow \xi$ 是$A^TA\xi = A^Tb$ 的解.

定理

ξ 是 $Ax = b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow \xi$ 是 $A^HAx = A^Hb$ 的解。

最小二乘解

例

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

的最小二乘解.

最小二乘解

例

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

的最小二乘解.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{13} \\ \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$