第五章

3、$EX_i = 0, DX_i = EX_i^2 = i^{2\lambda}$

$$0 \le P(|\bar{X}_n - E\bar{X}_n| \ge \varepsilon) \le \frac{D\bar{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} DX_i}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^{2\lambda}}{n^2\varepsilon^2} \le \frac{n \cdot n^{2\lambda}}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n^{2\lambda-1}}{\varepsilon^2}$$

当 $\lambda < \frac{1}{2}$ 时，$2\lambda - 1 < 0$

所以 $\lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X}_n - E\bar{X}_n| \ge \varepsilon) = 0$，即序列服从大数定律。

7、（1）X 表示 100 个产品中次品的个数，则服从二项分布 $b(100, 0.1)$，

且 $EX = 10, DX = 9$

$$P(X \le 16) = P(\frac{X-10}{3} \le 2) \approx \Phi(2)$$

（2）X 表示 100 个产品中次品的个数，则服从二项分布 $b(n, 0.1)$，

$$P(X \le 13) = P(\frac{X-0.1n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{13-0.1n}{0.3\sqrt{n}}) \approx \Phi(\frac{13-0.1n}{0.3\sqrt{n}}) \ge 0.8413 = \Phi(1)$$

$\frac{13-0.1n}{0.3\sqrt{n}} \ge 1,\ n \ge 100$（另外一个值不符合实际情况，去掉）

（3）X 表示 100 个产品中次品的个数，则服从二项分布 $b(100, 0.1)$，

$$P(X \le k) = P(\frac{X-10}{3} \le \frac{k-10}{3}) \approx \Phi(\frac{k-10}{3}) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$$

$\frac{k-10}{3} \ge 1.645,\ k \ge 14.935$，所以 k=15

8、X 表示取出球的号码，分布律如下：

X	1	2	3
P	1/6	2/6	3/6

则 $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.，$EX = \frac{7}{3}, DX = \frac{5}{9}$（期望和方差的结果，自己推）

$$P(|\bar{X} - \frac{7}{3}| < 0.1) = P(|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{7}{3}n}{\sqrt{5n/9}}| \le 0.3 \times \sqrt{\frac{n}{5}}) \approx 2\Phi(0.3 \times \sqrt{\frac{n}{5}}) - 1 \ge 0.6826$$

$\Phi(0.3 \times \sqrt{\frac{n}{5}}) \ge 0.8413 = \Phi(1)$，即：$0.3 \times \sqrt{\frac{n}{5}} \ge 1,\ n \ge 55.56$，所以 n=56

9、（1）X 表示取到三号球的次数，则服从二项分布 $b(100,0.5)$，$EX=50,,DX=25$

$$P(\frac{X}{100}\ge\frac{3}{5})=P(X\ge 60)=P(\frac{X-50}{5}\ge 2)\approx 1-\Phi(2)$$

（2）X 表示取到三号球的次数，则服从二项分布 $b(n,0.5)$，$EX=0.5n,,DX=0.25n$

$$P(\frac{X}{n}<0.51)=P(\frac{X-0.5n}{0.5\sqrt{n}}<\frac{0.51n-0.5n}{0.5\sqrt{n}})\approx\Phi(0.02\sqrt{n})\ge 0.8413=\Phi(1)$$

$$0.02\sqrt{n}\ge 1,\ \ n\ge 2500$$

（3）X 表示取到三号球的次数，则服从二项分布 $b(225,0.5)$，

$$P(|\frac{X}{225}-\frac{1}{2}|<\varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{225}{0.5\times 0.5}})-1\ge 0.95$$

$$\Phi(30\varepsilon)\ge 0.975=\Phi(1.96),\ \ 30\varepsilon\ge 1.96,\ \ \varepsilon\ge 0.065$$

第六章

5、（1）使用统计量 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ 服从 $N(0,1)$ 计算；

（2）使用统计量 $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ 服从 $t(n-1)$ 计算

6、使用统计量 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ 服从 $N(0,1)$ 计算

8、使用统计量 $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$ 服从 $N(0,1)$ 计算

注意，5,6,8 这三个题的计算，自己回去推导，常见的统计量表达式必须要牢记。

9、$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2),\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),i.d.\ \therefore X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

所以 $$\frac{\left.X_{n+1}-\bar{X}\right/\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}{\sqrt{\left.\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\right/(n-1)}}=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim t(n-1)$$

注意：这里不能直接使用定理 6.6（3）的结论，因为此时 X_{n+1} 只有一个样本，单样本是没有样本方差的。