习题二

12、令 A 表示每次投篮甲投中，B 表示乙投中，则：

(1)

$$P(X=n)=\begin{cases}P(\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{A}\overline{B})=0.6^k\times0.4^{k-1}\times0.6, n=2k, k=1,2,\cdots\\ P(\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{A}\overline{B}A)=0.6^k\times0.4^k\times0.4, n=2k+1, k=1,2,\cdots\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0.24^{\frac{n}{2}-1}\times0.36, n=2k, k=1,2,\cdots\\ 0.24^{\frac{n-1}{2}}\times0.4, n=2k+1, k=1,2,\cdots\end{cases}$$

(2)

$$P(Y=k)=P(\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{A}\overline{B}\underset{k}{A}\cup\overline{A}\overline{B}\cdots\underset{k}{\overline{A}}B)$$

$$=0.6^{k-1}\times0.4^{k-1}\times0.4+0.6^k\times0.4^{k-1}\times0.6=0.24^{k-1}\times0.76, k=1,2,\cdots$$

(3)

$$P(Z=k)=\begin{cases}0, k=0\\ P(\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{A}\underset{k}{B}\cup\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{A}\underset{k}{\overline{B}}A), k=1,2,\cdots\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, k=0\\ 0.6^k\times0.4^{k-1}\times0.6+0.6^k\times0.4^k\times0.4=0.24^{k-1}\times0.456, k=1,2,\cdots\end{cases}$$

13、要进行到成功（A）和失败（$\overline{A}$）都出现起码要进行两次实验，故 X 可能取的值是大于等于 2 的自然数。事件 $\{X=k\}=\{A\cdots A\overline{A}\cup\overline{A}\cdots\overline{A}A\}$，故 X 的分布律为：

$P\{X=k\}=P(A\cdots A\overline{A}\cup\overline{A}\cdots\overline{A}A)=p^{k-1}q+q^{k-1}p,\ k=2,3,\cdots$，其中 $q=1-p$

14、X 可能取的一切值为 1,2,…

$$P(X=k)=P(A\cdots\underset{k}{A}\overline{A}\cup\overline{A}\cdots\underset{k}{\overline{A}}A)=p^kq+q^kp,\ k=1,2,3,\cdots$$

25、分布函数 $F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<0\\ P(X\le x), & 0\le x\le1\\ 1, & x>1\end{cases}$

当 $0\le x\le1$ 时，取 $x, x+\Delta x\in[0,1]$

$$P(x<X\le x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)=k\cdot\Delta x$$

所以 $F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=k$

而 $\int_0^1 kdx = 1$，所以 k=1。

密度函数为：$f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1\\ 0, \text{其它}\end{cases}$

26、请参考 287 页。

41、$X \sim e(2)$，$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x\ge 0\\ 0 \quad ,x<0\end{cases}$

则 $f_Y(y)=\frac{1}{2}f\left(\frac{y-1}{2}\right)=\begin{cases}0, y<1\\ e^{1-y}, y\ge 1\end{cases}$

42-2、

这里就要进行分段！！

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=\begin{cases}0 \quad y\le 0\\ P(-y\le X\le y) \quad y>0\end{cases}=\begin{cases}0 \quad y\le 0\\ F_X(y)-F_X(-y) \quad y>0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 \quad y\le 0\\ f_X(y)+f_X(-y) \quad y>0\end{cases}=\begin{cases}2y \quad 0<y\le 1\\ 0 \quad \text{其它}\end{cases}$$

（$Y=g(X)$，函数的分布不能用 X 的取值范围进行分情况讨论!!）

43、$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=\begin{cases}0, y\le 0\text{（不可能事件）}\\ P(X\le \ln y), y>0\end{cases}=\begin{cases}0, y\le 0\\ F_X(\ln y), y>0\end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}0 \quad ,y\le 0\\ \frac{1}{y}f_X(\ln y), y>0\end{cases}=\begin{cases}0, y\le 0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, y>0\end{cases}$$

45、$X \sim U(-1,2), Y=2X^2-1$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X^2-1\le y)=\begin{cases}0, y<-1\\ P\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right), y\ge -1\end{cases}$$

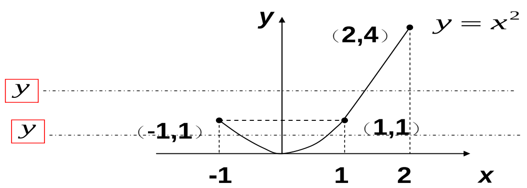
可以画图，对分段就比较直观

(这里可以不求积分，用$F_X(x)$表示，然后求导，再代入$f_X(x)$.)

$$
=\begin{cases}0, y<-1\\ \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y+1}{2}}, -1\le y\le 1\\ \int_{-1}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{y+1}{2}}+\frac{1}{3}, 1<y\le 7\\ \int_{-1}^{2}\frac{1}{3}dx=1, y>7\end{cases}
$$

$$
所以\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{2(y+1)}}, -1\le y\le 1\\ \frac{1}{6\sqrt{2(y+1)}}, 1<y\le 7\\ 0, 其它\end{cases}
$$

47、



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y);$$

$y<0$时，$F_Y(y)=0;$

$0<y<1$时，$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y})$

$=P(-\sqrt{y}<X<0)+P(0<X<\sqrt{y})$

$=0.5\sqrt{y}+0.25\sqrt{y}=0.75\sqrt{y}.$

$1<y<4$时，

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y);$

$F_Y(y)=P(-1<X<\sqrt{y});$

$=P(-1<X<0)+P(0<X<\sqrt{y})$

$=0.5+0.25\sqrt{y}$

$y>4$时，$F_Y(y)=1.$

$$
综上可得：f_Y(y)=\begin{cases}0.375y^{-1/2} & 0<y<1\\ 0.125y^{-1/2} & 1<y<4.\\ 0 & 其它\end{cases}
$$

48、$X \sim U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), Y=\cos X$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\cos X\le y)=\begin{cases}0, y<-1\\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}P(2k\pi+\arccos y\le X\le 2k\pi+2\pi-\arccos y),-1\le y\le 1\\ 1, y>1\end{cases}$$

这个步骤可以不写

$$=\begin{cases}0, y<0\\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y}\frac{1}{\pi}dx+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}dx=1-\frac{2}{\pi}\arccos y, 0\le y\le 1\\ 1, y>1\end{cases}$$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, 0\le y\le 1\\ 0, \text{其它}\end{cases}$

39、$F(x)$严格单调上升且连续，则其反函数也严格单调上升且连续，并且$0\le F(X)\le 1$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=\begin{cases}0 \quad y\le 0\\ P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y \quad 0<y\le 1\\ P(-\infty<X<+\infty)=1 \quad y>1\end{cases}$$

40、$U \sim U(0,1)$，则 $F_U(u)=\begin{cases}0 \quad u<0\\ u \quad 0\le u\le 1\\ 1 \quad u>1\end{cases}$

而 $F(x)$为分布函数，则$0\le F(x)\le 1$。

所以 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F^{-1}(U)\le y)=P(U\le F(y))=F(y)$

即 Y 的分布函数为 F。