第三章习题

7. 根据 X，Y 的取值，分布律画表格，每一个概率写出来，并不困难。如果要写一般的公式：

$$P(X=i,Y=j)=\begin{cases}0, i<j \\ \dfrac{1}{4^3}, i=j \\ \dfrac{2C_3^2+A_3^2(i-j-1)}{4^3}, i>j\end{cases} \quad , i,j=1,2,3,4$$

8.(1)由密度函数性质：

$\iint f(x,y)dxdy=\int_0^1 kxdx\int_0^1 ydy=1$，所以 $k=4$。

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}0,\ \ x<0\text{或}y<0 \\ \int_0^y\int_0^x 4xydxdy=x^2y^2, 0\le x<1, 0\le y<1 \\ \int_0^1\int_0^x 4xydxdy=x^2, 0\le x<1, y\ge 1 \\ \int_0^y\int_0^1 4xydxdy=y^2, x\ge 1, 0\le y<1 \\ \int_0^1\int_0^1 4xydxdy=1, x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

(3) $P(Y\le X)=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_y^1 4xydxdy=\dfrac{1}{2}$

12.(1)

$$P(X=i)=\sum_j p_{ij}=\frac{e^{-14}}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}(7.14)^j(6.86)^{i-j}=\frac{14^i}{i!}e^{-14}, i=0,1,2,\cdots$$

$$P(Y=j)=\sum_i p_{ij}=\frac{(7.14)^j e^{-14}}{j!}\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14}, j=0,1,2,\cdots$$

15.（1）

$$P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ \ n=0,1,2,\cdots$$

$$P(Y=m\,|\,X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\ \ m=0,1,2,\cdots,n$$

（2）$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m\,|\,X=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\times C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

$$n=0,1,2,\cdots,m=0,1,2,\cdots,n$$

（3）

$$P(Y=m)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\times C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda p},m=0,1,2,\cdots$$

18. 设 A，B 是两个随机变量。P(A)>0,P(B)>0.定义

$$X=\begin{cases}1 & A发生\\ 0 & A不发生\end{cases};\qquad Y=\begin{cases}1 & B发生\\ 0 & B不发生\end{cases}.$$

证明：X，Y 相互独立的充要条件是事件 A，B 相互独立。

证明：$\Leftarrow$(充分性)

$\because A,B$相互独立，$\therefore \overline{A},B;A,\overline{B};\overline{A},\overline{B}$都相互独立。从而有

$$P(X=1;Y=1)=P(AB)=P(A)P(B)=P(X=1)P(Y=1);$$

$$P(X=1;Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(X=1)P(Y=0);$$

$$P(X=0;Y=1)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=P(X=0)P(Y=1);$$

$$P(X=0;Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=P(X=0)P(Y=0);$$

所以，X，Y 相互独立。

$\Rightarrow$(必要性)

$\because X,Y$相互独立，$\therefore P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$,所以，$A,B$相互独立。

这里只要注意到：$P(A)=P(X=1);P(\overline{A})=P(X=0).$

22.（1）

$$P(Z_1=k)=P(\min\{X,Y\}=k)$$

$$=P(X=k,Y\ge k\bigcup X\ge k,Y=k)$$

$$=P(X=k,Y\ge k)+P(X\ge k,Y=k)-P(X=k,Y=k)$$

$$=2pq^{k-1}\sum_{i=k}^{+\infty}pq^{i-1}-(pq^{k-1})^2$$

（2）

$$
\begin{aligned}
P(Z_2=k) &= P(X+Y=k) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=k-i) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} pq^{i-1}pq^{(k-i)-1} = (k-1)p^2q^{k-2}
\end{aligned}
$$

24.

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \\
&= \frac{1}{2h}\int_{z-h}^{z+h} f_X(x)dx = \frac{1}{2h}\int_{z-h}^{z+h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} dx
\end{aligned}
$$

令 $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

所以： $f_Z(z) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{\frac{z-h-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+h-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2h}\left[\Phi(\frac{z+h-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{z-h-\mu}{\sigma})\right]$

25.

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{z} f_X(x)e^{x-z}dx
$$

$$
= \begin{cases} 0, \ z \le 0 \\ \int_0^z e^{x-z}dx = 1-e^{-z}, 0 < z \le 1 \\ \int_0^1 e^{x-z}dx = e^{1-z} - e^{-z}, z > 1 \end{cases}
$$

所以先求$F_Z(z)$、二重积分
再求导得到$f_Z(z)$.

26.令 $T = X + Y$,则

$$
f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(t-x)dx
$$

$Y=aX+b$, $f_Y(y)$

$Z = \dfrac{T}{2}$， 则 $f_Z(z) = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(2z-x)dx$ （第二章，线性函数的分布） $= \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

$$=\begin{cases} 0,\ z\le 0 \\ 2\int_0^{2z} e^{-x}e^{-(2z-x)}dx = 4ze^{-2z},\ z>0 \end{cases}$$

二、使用分布函数法

$$z>0 \quad F_Z(z)=P(Z\le z)=P((X+Y)/2\le z)=P(X+Y\le 2z)$$

$$=\iint\limits_{x+y\le 2z} f(x,y)dxdy == \iint\limits_{x+y\le 2z} f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_0^{2z}\int_0^{2z-y} e^{-x}dxe^{-y}dy$$

$$=\int_0^{2z} e^{-y}[1-e^{-(2z-y)}]dy=\int_0^{2z}[e^{-y}-e^{-2z}]dy=1-e^{-2z}-2ze^{-2z}.$$

$f_Z(z)=4ze^{-2z},z>0;\ f_Z(z)=0,z\le 0;$

27.

令 $T=X+Y$,则

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(t-x)dx=\begin{cases} 0,\ t\le 0 \\ \int_0^t xe^{-x}\cdot(t-x)e^{-(t-x)}dx=\dfrac{t^3}{6}e^{-t},t>0 \end{cases}$$

$U=T+Z$，则

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)f_Z(u-t)dt=\begin{cases} 0,\ u\le 0 \\ \int_0^u \dfrac{t^3}{6}e^{-t}\cdot(u-t)e^{-(u-t)}d\mathrm{t}=\dfrac{u^5}{120}e^{-u},u>0 \end{cases}$$

这里如果先计算分布函数，二重积分比较繁琐、