概率统计 20-21-2(A)标准答案及评分标准

一、选择题

1)C　2) B　3)B,　4) B,　5) B

二、填空题

1) 0.3;

2)0.0486

3) 180

4)0.1587

5)2.65

6) 14

7) 2

8) 27

9) $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.3 & 1\le x<2\\ 0.8 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

10) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{32}(y^2+2y-3) & -5<y<-3\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}0.09375(y^2+2y-3) & -5<y<-3\\ 0 & 其它\end{cases}$

11) 8

12) 小于 0.95

13) 2.4

三、 (1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$;

$a\int_0^1\int_0^{2-2x}xydydx=1$;

$a=6.$

(2)$f_X(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$..

当 0<x<1 时　　$f_X(x)=\int_0^{2-2x}axydy=12x(1-\mathrm{x})^2.$

当$x\le 0$，或 $\mathrm{x}\ge 1$ 时　$f_X(x)=0.$

(3)$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{y}{2(1-x)^2} & 0<y<2(1-x)\\ 0 & 其它\end{cases}\quad(0<x<1).$

$f_{Y|X}(y|0.5)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$P(Y<0.5|X=0.5)=\int_{-\infty}^{0.5}f_{Y|X}(y|0.5)dy=\int_0^{0.5}2y\,dy=0.25$

四、A1,A2,A3 分别表示 产品由甲、乙、丙厂家生产；

B 表示抽到两件均为次品．则

$P(A_1)=0.6$　;$P(A_2)=0.2$;　$P(A_3)0.2$;.

$P(B|A_1)=0.05^2;P(B|A_2)=0.1^2;P(B|A_3)=0.1^2;$

(1) $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$
$= 0.6 * 0.05^2 + 0.2 * 0.1^2 + 0.2 * 0.1^2 = 0.0055$
(2)
$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3).}{P(B)}$$
$$= \frac{0.2 * 0.1^2}{0.0055} = \frac{4}{11} \approx 0.364$$

五、 *X* 和 *Y* 的概率密度为：
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}，f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 1 < y < 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$
X 和 *Y* 的联合密度为：
$$f(x，y) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0, 1 < y < 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

Z 的分布函数 $F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$
当 $z < 1$ 时，$F_Z(z) = 0$；
当 $1 \le z \le 2$ 时，$F_Z(z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$
$$= \int_1^z \int_0^{z-y} e^{-x}dxdy = z + e^{1-z} - 2$$
当 $z > 2$ 时
$$F_Z(z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy = \int_1^2 \int_0^{z-y} e^{-x}dxdy = 1 - e^{-z}(e^2 - e)$$
Z 的概率密度为
$$f_Z(z) = [F_Z(z)]' = \begin{cases} 1 - e^{1-z} & 1 < z < 2 \\ e^{-z}(e^2 - e) & z \ge 2 \\ 0 & z < 1 \end{cases}$$

或者：
X 和 *Y* 的概率密度为：
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}，f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 1 < y < 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$
当 $1 < z < 2$ 时
$$f_z(z) = \int_0^{z-1} e^{-x}dx$$
$$= 1 - e^{-(z-1)}$$
当 $z \ge 2$ 时，　$f_z(z) = \int_{z-2}^{z-1} e^{-x}dx = e^{-z}(e^2 - e)$

当$z \le 1, f_Z(z) = 0$

六、X_i表示第i次出现的点数;$P(X_i = k) = \frac{1}{6}, k = 1,2,3,4,5,6;$

$$\mu = EX_i = 3.5; \sigma^2 = DX_i = \frac{35}{12}; \text{n=100};$$

所求概率为:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 370\right) \approx \Phi\left(\frac{370 - n\mu}{\sqrt{n} \quad \sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{35}}\right) = \Phi(1.171)$$

七、(1)*似然函数为:* $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{-\frac{X_i - 2}{3}} (1-\theta)^{\frac{X_i + 1}{3}}$

$$= \theta^{-\sum \frac{X_i - 2}{3}} (1-\theta)^{\sum \frac{X_i + 1}{3}}$$

$$\ln L(\theta) = -\sum \frac{X_i - 2}{3} \ln\theta + \sum \frac{X_i + 1}{3} \ln(1-\theta)$$

$$[\ln L(\theta)]' = -\frac{1}{\theta} \sum \frac{X_i - 2}{3} - \frac{1}{1-\theta} \sum \frac{X_i + 1}{3} = 0$$

$$\widehat{\theta} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\bar{X}; \bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$$

(2) $E\hat{\theta} = E\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\bar{X}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} EX_1$

$$EX_1 = (-1)\theta + 2(1-\theta) = 2 - 3\theta$$

$$E\hat{\theta} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2 - 3\theta) = \theta$$

$\hat{\theta}$是θ的无偏估计

八、(1)$n = 25, \alpha = 0.05,$

检验统计量 $T = \frac{\bar{X} + 4}{S_n}\sqrt{n} | H_0 \sim t(n-1)$

拒绝域: $D = \{T < -t_\alpha(n-1)\} = \{T < -1.7113\}$

$\bar{x} = -5, s_n = 2$

T的观测值: $T = \frac{-5 + 4}{2}\sqrt{25} = -2.5$

$$-2.5 < -1.7113,$$

所以,拒绝原假设。

(2)σ^2*的置信度为*95%*的置信区间为:* $[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.025}(24)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.975}(24)}]$

$$= [\frac{24 \times 2^2}{39.36}, \frac{24 \times 2^2}{12.4}] = [2.439, \quad 7.742]$$