实验一　　观察数列的极限

东南大学

首先，介绍数学软件 Mathematica 中用于求数列和函数的极限的命令“**Limit**”及点图的绘制：

“**Limit**”格式有：

`Limit[an,n→∞]`　　　求数列 an 的极限

`Limit[expr,x→x0]`　　　求 x 趋向于 x0 时，expr 的极限

`Limit[expr,x→x0,Direction→1]`

求 expr 当 x 趋向于 x0 时的右极限

`Limit[expr,x→x0,Direction→-1]`

求 expr 当 x 趋向于 x0 时的左极限

点图的绘制

用一个表给出点列中各点的坐标，用函数“ListPlot”可以绘制这些点列的图形，其调用格式为：

ListPlot[{y1,y2, …}]　　画出点对(1,y1),(2,y2),…

ListPlot[{{x1,y1},{x2,y2}, …}]

画出点对(x1,y1),(x2,y2),…

其中“数集{y1,y2, …}”也可以由“Table”命令产生。如果要把相邻点用直线连接起来可加选项“PlotJoined→True”，其默认值是“False”，即不连接。

本实验主要的目的是利用数学软件 **Mathematica** 加深对数列极限概念的理解。

对于数列极限通俗的说法是：当 n 充分大时，a_n 充分接近数 A，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。我们通过利用 **Mathematica** 来计算数列 $\{a_n\}$ 足够多项的值，从而考察数列的极限。

例 1 用数、形结合的方法观察极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$。

解： 通过逐渐增加点并画点图，来观察当 n 越来越大时 $a_n = n\sin\frac{1}{n}$ 的变化趋势。

为此，我们先利用 **Mathematica** 构造数据表 **data**，其中包含了数列 $a_n = n\sin\frac{1}{n}$ 的前十项：

```
In[1]:= data = Table[i Sin[1 / i], {i, 10}]
```

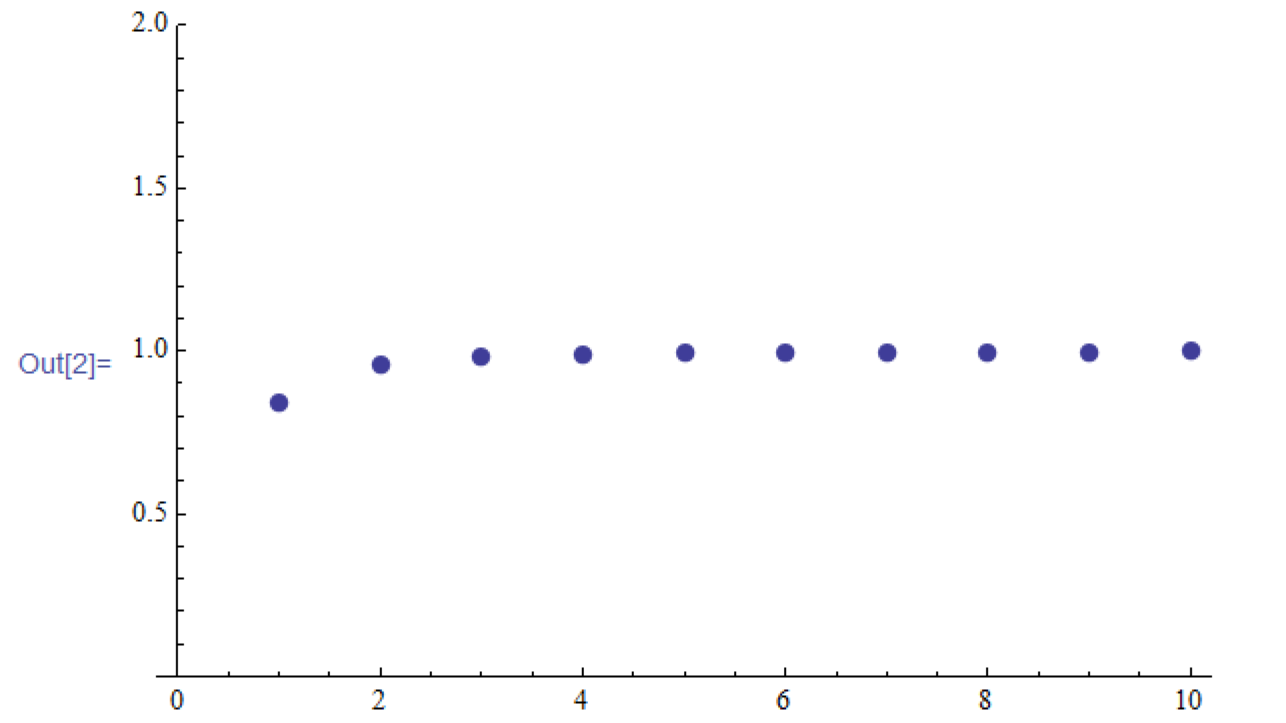
运行即可得到数据表：

Out[1]= $\left\{\text{Sin}[1],\ 2\,\text{Sin}\left[\frac{1}{2}\right],\ 3\,\text{Sin}\left[\frac{1}{3}\right],\ 4\,\text{Sin}\left[\frac{1}{4}\right],\ 5\,\text{Sin}\left[\frac{1}{5}\right],\ 6\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\right],\ 7\,\text{Sin}\left[\frac{1}{7}\right],\ 8\,\text{Sin}\left[\frac{1}{8}\right],\ 9\,\text{Sin}\left[\frac{1}{9}\right],\ 10\,\text{Sin}\left[\frac{1}{10}\right]\right\}$

然后我们利用绘制点图的命令“**ListPlot**”来绘出这前 10 个点：

```
In[2]:= ListPlot[data, PlotRange → {0, 2},
          PlotStyle → PointSize[0.018]]
```

运行后得到点图。

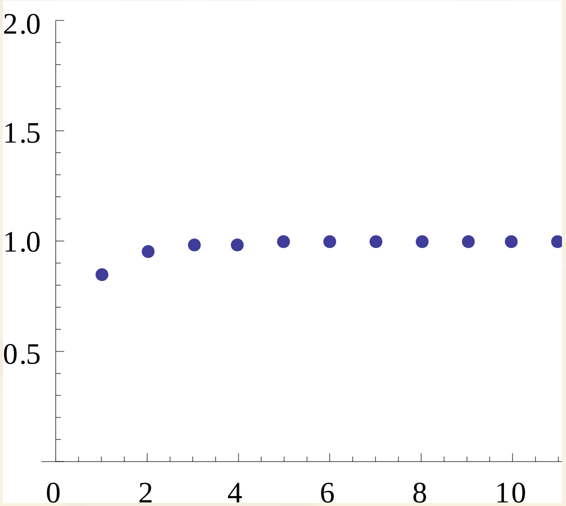


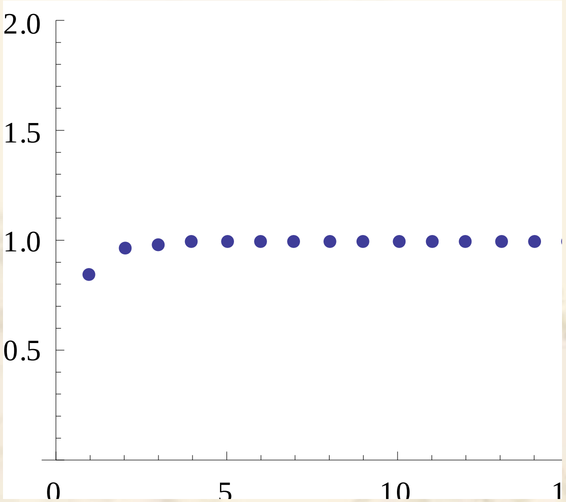
我们还可以改变 **Table** 命令，增加绘制的点数，从而根据点图来观察，当数列 $\{a_n\}$ 足够多项的值，该数列的极限。

另外，通过以下的循环语句，我们可以得到 16 幅图：

```
In[3]:= aa = {Sin[1], 2 Sin[1 / 2], 3 Sin[1 / 3]};
        Do[aa = Append[aa, i Sin[1 / i]];
         t = ListPlot[aa, PlotRange → {0, 2},
           PlotStyle → PointSize[0.018]]; Print[t],
         {i, 4, 20}
        ]
```

运行后可以得到 16 幅图，图中点数逐渐增多，并且从图中可以看出所画出的点逐渐接近于直线 $x=1$。





例 2 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$由下式确定：$\begin{cases} x_1 = 1, \quad y_1 = 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} & n = 1, 2, \cdots \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$，

观察数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$的极限是否存在。

解：输入以下语句可进行观察，此程序的功能是输出$\{x_n\}$与$\{y_n\}$的前 10 项数值。大家可改变 For 循环中终结语句（$n \le 10$）来改变输出项的项数。

In[5]:= f[x_ , y_] := $\sqrt{x\,y}$; g[x_, y_] := $\frac{x+y}{2}$; xn = 1; yn = 2;

```
For[n = 2, n ≤ 10, n++, xN = xn; yN = yn;
  xn = N[f[xN, yN]]; yn = N[g[xN, yN]];
  Print[xn, "          ", yn]];
Print["x10=     ", xn, "      y10=", yn]
```

运行该程序可得：

```
1.41421        1.5
1.45648        1.45711
1.45679        1.45679
1.45679        1.45679
1.45679        1.45679
1.45679        1.45679
1.45679        1.45679
1.45679        1.45679
1.45679        1.45679
x10=    1.45679     y10=1.45679
```

大家可以由运行结果可观察到，$\{x_n\}$与$\{y_n\}$均有极限，且这两极限值是相等的。