二次型

作者 刘国华

东南大学 数学系

December 4, 2019

目录

1. 二次型及其矩阵表示
2. 化二次型为标准形
3. 正定二次型
4. 二次曲面

平面中二次曲线类型的判断

问题：$34x^2 + 32xy + 34y^2 = 450$ 表示什么曲线？

平面中二次曲线类型的判断

问题：$34x^2+32xy+34y^2=450$ 表示什么曲线？

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}34 & 16\\ 16 & 34\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, 则有

$$A^T=A,\ X^TAX=34x^2+32xy+34y^2,$$

平面中二次曲线类型的判断

目录

二次型及其矩阵表示

化二次型为标准形

正定二次型

二次曲面

问题：$34x^2+32xy+34y^2=450$ 表示什么曲线？

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}34 & 16\\ 16 & 34\end{pmatrix}$， $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，则有

$$A^T=A,\ X^TAX=34x^2+32xy+34y^2,$$

取正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}50 & 0\\ 0 & 18\end{pmatrix}$，$X'=Q^TX$，则有

$$34x^2+32xy+34y^2=X^TAX=X^TQ\Lambda Q^TX=X'^T\Lambda X',$$

平面中二次曲线类型的判断

问题：$34x^2+32xy+34y^2=450$ 表示什么曲线？

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}34 & 16\\ 16 & 34\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, 则有

$$A^T=A,\ X^TAX=34x^2+32xy+34y^2,$$

取正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}50 & 0\\ 0 & 18\end{pmatrix}$, $X'=Q^TX$, 则有

$$34x^2+32xy+34y^2=X^TAX=X^TQ\Lambda Q^TX=X'^T\Lambda X',$$

所以有

$$34x^2+32xy+34y^2=450\leftrightarrow 50x'^2+18y'^2=450\leftrightarrow \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{25}=1.$$

二次曲线及其矩阵表示

二次曲线 $ax^2+2bxy+cy^2=1 \rightarrow mx'^2+ny'^2=1$, 用矩阵表示即为

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow (x',y')\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

二次型

定义

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \; & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为一个 n 元二次型.

设 $a_{ij} = a_{ji}$,则有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

由于

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= \quad & x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
& + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
& \qquad \qquad \cdots\cdots \\
& + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\
= \quad & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
= \quad & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

利用矩阵的乘法，二次型可写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^{\mathrm{T}} A x$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$, 即 A 是对称矩阵.

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

利用矩阵的乘法，二次型可写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^{\mathrm{T}} A x$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$, 即 A 是对称矩阵.
任给一个二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$, 就唯一地确定一个对称矩阵$A$; 反之, 任给一个对称矩阵 A, 也可以唯一地确定一个二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$. 这样, 二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系.

目录

二次型及其矩阵表示

化二次型为标准形

正定二次型

二次曲面

例如，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

例如，二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

如果给定对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则它的二次型为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

注：只有当 A 为对称矩阵时, 才称 A 为二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = x^T A x$ 的矩阵.

注：只有当 A 为对称矩阵时, 才称 A 为二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$ 的矩阵.
例如, 二元二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$ 可以写成

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

注：只有当 A 为对称矩阵时，才称 A 为二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$ 的矩阵.
例如，二元二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$ 可以写成

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

该二次型矩阵不是$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，而是$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

二次型的变量替换

设有线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

其矩阵形式为

$$x = Cy$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

当线性变换的系数矩阵的行列式 $|C| \neq 0$, 则称线性变换

$$x = Cy$$

为**可逆线性变换**.

当线性变换的系数矩阵的行列式 $|C| \neq 0$, 则称线性变换

$$x = Cy$$

为可逆线性变换.

把 $x = Cy$ 代入二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$, 得到

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax = (Cy)^T ACy = y^T (C^T AC)y,$$

记 $B = C^T AC$, 由于 A 是对称矩阵, 所以

$$B^T = (C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC = B,$$

即 B 也是对称矩阵.

当线性变换的系数矩阵的行列式 $|C| \neq 0$, 则称线性变换

$$x = Cy$$

为可逆线性变换.

把 $x = Cy$ 代入二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$, 得到

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax = (Cy)^T ACy = y^T (C^T AC)y,$$

记 $B = C^T AC$, 由于 A 是对称矩阵, 所以

$$B^T = (C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC = B,$$

即 B 也是对称矩阵.

这表明, 二次型经过可逆的线性变换仍为二次型, 且秩不变, 变换前后的两个二次型的矩阵之间的关系是

$$B = C^T AC.$$

矩阵的合同

定义

设 A 和 B 是两个 n 阶矩阵，如果存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $B = C^T AC$，则称矩阵 A 与 B 合同，记为 $A \simeq B$.

矩阵的合同

定义

设 A 和 B 是两个 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 C, 使得 $B = C^T AC$, 则称矩阵 A 与 B 合同, 记为 $A \simeq B$.

容易验证, 矩阵的合同关系具有下述性质:

(1) 自反性 $A \simeq A$;

(2) 对称性 如果 $A \simeq B$, 则 $B \simeq A$;

(3) 传递性 如果 $A \simeq B$, $B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.

矩阵的合同

定义

设 A 和 B 是两个 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 C, 使得 $B = C^T AC$, 则称矩阵 A 与 B 合同, 记为 $A \simeq B$.

容易验证, 矩阵的合同关系具有下述性质:
(1) 自反性 $A \simeq A$;
(2) 对称性 如果 $A \simeq B$, 则 $B \simeq A$;
(3) 传递性 如果 $A \simeq B$, $B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.
我们对二次型进行可逆线性变换的目的是为了将其化简, 目标是为了化为只含平方项的二次型. 这个目标是否可以实现呢?

Theorem

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶实对称矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 C，使得

$$C^T AC = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}.$$

即每一个 n 阶实对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

定理

实数域上的任意 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$ 都可以经过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为只含平方项的形式

$$g(y_1, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

称此平方和为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个标准形.

定理

实数域上的任意 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$ 都可以经过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为只含平方项的形式

$$g(y_1, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

称此平方和为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个**标准形**.

定理

(主轴定理) 对于任何一个 n 元实二次型 $f = x^T Ax$, 都有正交变换 $x = Qy$, 使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, Q 的列向量是对应特征值的 n 个标准正交特征向量.

实二次型$\rightarrow$标准形 $\Leftrightarrow$ 实对称阵的正交相似对角化问题.
标准形不唯一, 与特征值的顺序有关;
正交矩阵不唯一, 与选取的正交特征向量有关.

实二次型→标准形 $\Leftrightarrow$ 实对称阵的正交相似对角化问题.
标准形不唯一, 与特征值的顺序有关;
正交矩阵不唯一, 与选取的正交特征向量有关.

例

用正交变换把将二次型化为标准形 $f(x) = 3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3 - 4x_2x_3$, 并求该二次型在条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 下的最大, 最小值.

实二次型$\rightarrow$标准形 $\Leftrightarrow$ 实对称阵的正交相似对角化问题.
标准形不唯一, 与特征值的顺序有关;
正交矩阵不唯一, 与选取的正交特征向量有关.

例

用正交变换把将二次型化为标准形 $f(x)=3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$, 并求该二次型在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下的最大, 最小值. $(-2,4,4)$

正交变换的优点在于它能保持向量的长度与夹角不变, 从而不改变几何图形的大小和形状, 有时候, 只要用一个可逆线性变换把一个二次型化为标准型就可以了, 可以采用简单的拉格朗日配方法:

正交变换的优点在于它能保持向量的长度与夹角不变, 从而不改变几何图形的大小和形状, 有时候, 只要用一个可逆线性变换把一个二次型化为标准型就可以了, 可以采用简单的拉格朗日配方法:

例

(1) 用配方法化 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$ 为标准形.

正交变换的优点在于它能保持向量的长度与夹角不变，从而不改变几何图形的大小和形状，有时候，只要用一个可逆线性变换把一个二次型化为标准型就可以了，可以采用简单的拉格朗日配方法:

例

(1) 用配方法化 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$ 为标准形.

(2) 用配方法化 $f = 2x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并求所用的变换矩阵.

正交变换的优点在于它能保持向量的长度与夹角不变，从而不改变几何图形的大小和形状，有时候，只要用一个可逆线性变换把一个二次型化为标准型就可以了，可以采用简单的拉格朗日配方法:

例

(1) 用配方法化 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$ 为标准形.
(2) 用配方法化 $f = 2x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并求所用的变换矩阵.
若用正交变换法化 f 为标准形非常麻烦，$(\lambda = 3,\ \lambda = \pm\frac{1}{2}(3+\sqrt{17}))$.

正交变换与一般可逆变换的标准形的不同点:
对于二次型 $f = 2x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$
正交变换法: $f = 3y_1^2 - \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})y_2^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})y_3^2$, 正交变换得到的实二次型的标准形, 对角线元素是实对称阵的特征值; 且标准形在不计特征值顺序时是唯一的.

正交变换与一般可逆变换的标准形的不同点：
对于二次型 $f = 2x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$
正交变换法：$f = 3y_1^2 - \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})y_2^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})y_3^2$, 正交变换得到的实二次型的标准形, 对角线元素是实对称阵的特征值; 且标准形在不计特征值顺序时是唯一的.
配方法(可逆线性变换)：$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$, 可逆线性变换得到的实二次型的标准形, 对角线元素不一定是实对称阵的特征值, 也不唯一.

正交变换与一般可逆变换的标准形的不同点：
对于二次型 $f = 2x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$
正交变换法：$f = 3y_1^2 - \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})y_2^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})y_3^2$, 正交变换得到的实二次型的标准形, 对角线元素是实对称阵的特征值; 且标准形在不计特征值顺序时是唯一的.
配方法(可逆线性变换)：$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$, 可逆线性变换得到的实二次型的标准形, 对角线元素不一定是实对称阵的特征值, 也不唯一.
正交变换与一般可逆变换得标准形的相同点：平方项中非零项的个数相同, 平方项中正(负)项的个数相同.

定理

(惯性定理) 实二次型 $f(x) = x^T Ax$ 总可以通过 R^n 中的可逆线性变换将其化为标准形

$$f = k_1 y_1^1 + \cdots + k_n y^2,$$

其中 $k_1, \cdots k_n$ 中非零的个数 $r =$秩(f), 且正项的个数 p 与负项的个数 $q(p+q=r)$ 都是在可逆线性变换下的不变量.

p 称为 f (或 A)的正惯性指数, q 称为 f (或 A)的负惯性指数.

定理

(惯性定理) 实二次型 $f(x)=x^TAx$ 总可以通过 R^n 中的可逆线性变换将其化为标准形 $f=k_1y_1^1+\cdots+k_ny^2$, 其中 $k_1,\cdots k_n$ 中非零的个数 $r=$秩(f), 且正项的个数 p 与负项的个数 $q(p+q=r)$ 都是在可逆线性变换下的不变量.

推论

实二次型 $f(x)=x^TAx$ 总可以通过 R^n 中的可逆线性变换将其化为规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2+0y_{r+1}^2+\cdots 0y_n^2.$$

且规范形是唯一的.

推论

设 n 阶实对称矩阵 A 的秩为 r, 正惯性指数为 p, 则存在可逆阵 P, 使

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \cdots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

推论

n 阶实对称阵 A 可逆 $\Leftrightarrow p+q=n \Leftrightarrow$ 实对称阵 A 的特征值均不为0.

目录

二次型及其矩阵表示

化二次型为标准形

正定二次型

二次曲面

推论

n 阶实对称阵 A 可逆 $\Leftrightarrow p+q=n \Leftrightarrow$ 实对称阵 A 的特征值均不为0.

推论

两个 n 阶实对称阵 A 和 B 合同的充分必要条件是它们具有相同的秩和正惯性指数.

推论

n 阶实对称阵 A 可逆 $\Leftrightarrow p+q=n \Leftrightarrow$ 实对称阵 A 的特征值均不为0.

推论

两个 n 阶实对称阵 A 和 B 合同的充分必要条件是它们具有相同的秩和正惯性指数.

例

设$A=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ & -2 & -1\\ & & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$, 问 A,B,C 哪些等价? 哪些相似? 哪些合同?

二次型的正定性

定义

设实二次型 $f(x) = x^T Ax$ 满足对 R^n 中任何非零向量 x, 有 $f(x) > 0$, 则称之为正定二次型, 称 A 为正定矩阵. 若对 R^n 中任何非零向量 x, 有 $f(x) < 0$, 则称之为负定二次型, 称 A 为负定矩阵.

二次型的正定性

定义

设实二次型 $f(x) = x^T Ax$ 满足对 R^n 中任何非零向量 x, 有 $f(x) > 0$, 则称之为正定二次型, 称 A 为正定矩阵. 若对 R^n 中任何非零向量 x, 有 $f(x) < 0$, 则称之为负定二次型, 称 A 为负定矩阵.

例

判断下列二次型的正定性

(1) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

(2) $g = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$;

(3) $h = 2x_1^2 + x_3^2$.

二次型的正定性

目录

二次型及其矩阵表示

化二次型为标准形

正定二次型

二次曲面

定义

设实二次型 $f(x)=x^TAx$ 满足对 R^n 中任何非零向量 x，有 $f(x)>0$，则称之为正定二次型，称 A 为正定矩阵. 若对 R^n 中任何非零向量 x，有 $f(x)<0$，则称之为负定二次型，称 A 为负定矩阵.

例

判断下列二次型的正定性

(1) $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2$;

(2) $g=2x_1^2+x_2^2-x_3^2$;

(3) $h=2x_1^2+x_3^2$.

注

1. 正定(负定)矩阵必为实对称矩阵.
2. $f(x)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$ 正定$\Leftrightarrow$ $a_{ii}>0,\ \forall i$.
3. 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

二次型的正定性

定理

设 A 为 n 阶实对称阵, 则下列命题等价:

1. A 是正定矩阵;
2. A 的特征值均大于零;
3. A 的正惯性指数为 n;
4. A 与 E 相合;
5. 存在可逆阵 P, 使得 $A = P^T P$.

二次型的正定性

定理

设 A 为 n 阶实对称阵, 则下列命题等价:

1. A 是正定矩阵;
2. A 的特征值均大于零;
3. A 的正惯性指数为 n;
4. A 与 E 相合;
5. 存在可逆阵 P, 使得 $A = P^T P$.

推论

设 A 是正定矩阵, 则 $|A| > 0$, $tr\, A > 0$.

例

设实对称矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 证明 A 是正定的.

例

设实对称矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$, 证明 A 是正定的.

例

设 A 是正定的 n 阶实对称矩阵, 证明 $tr(A+E)$ 大于 n.

例

设实对称矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 证明 A 是正定的.

例

设 A 是正定的 n 阶实对称矩阵, 证明 $tr(A+E)$ 大于 n.

性质

1. 可逆线性变换不改变二次型的正定性.
2. 相合的实对称矩阵的正定性也相同.
3. 同阶正定矩阵的和仍为正定矩阵.

例

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 正定，则

1. $a_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0.$

例

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 正定，则

1. $a_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}>0.$
2. $\forall \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\neq 0,$

$$(x_1,\,x_2,\,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}>0$$

$$=(x_1,\,x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}>0.$$

例

若 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 正定,则

1. $a_{11} > 0$.
2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$.
3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$.

目录
二次型及其矩阵表示
化二次型为标准形
正定二次型
二次曲面

定理

对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定的充要条件是顺序主子式都大于零，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

定理

对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定的充要条件是顺序主子式都大于零，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

实对称阵 A 负定 $\Leftrightarrow$ 各阶顺序主子式负正相间.

定理

对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定的充要条件是顺序主子式都大于零，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

实对称阵 A 负定 $\Leftrightarrow$ 各阶顺序主子式负正相间.

例

判别二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2$ 的正定性.

解法一 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

各阶顺序主子式

$$a_{11}=2>0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&5\end{vmatrix}=15>0$$

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定二次型.

解法二 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

可求得 A 的特征值分别为1, 3, 5, 故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定二次型.

例

求参数 t 的范围，使下列二次型正定.

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2tx_1x_3 - 2tx_2x_3.$$

例

求参数 t 的范围, 使下列二次型正定.

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2tx_1x_3 - 2tx_2x_3.$$

例

设 $A \in R^{m\times n}$, 证明 A^TA 正定 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

例

求参数 t 的范围, 使下列二次型正定.

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2tx_1x_3 - 2tx_2x_3.$$

例

设 $A \in R^{m\times n}$, 证明 A^TA 正定 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

例

假设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, A 的特征值均大于 a, B 的特征值均大于 b, 证明: $A + B$ 的特征值均大于 $a + b$.

例

假设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, A 的特征值均大于 a, B 的特征值均大于 b, 证明: $A+B$ 的特征值均大于 $a+b$.

证明: A 是 n 阶实对称阵,则存在 n 阶正交阵 Q 使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$, 特征值 $\lambda_i > a$, 于是 $\lambda_i - a > 0$ 为 $A-aE$ 的特征值, 所以 $A-aE$ 是正定阵. 同理, $B-aE$ 是正定阵.
因为同阶正定矩阵的和仍为正定矩阵.
所以 $A+B-(a+b)E$ 也是正定阵, 其特征值均大于0.

一般方程表示的二次曲面

$$f(x_1,x_2,x_3)=$$
$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$
$$+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c=0,$$

一般方程表示的二次曲面

目录

二次型及其矩阵表示

化二次型为标准形

正定二次型

二次曲面

$$f(x_1,x_2,x_3)=$$
$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$
$$+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c=0,$$

$$x^TAx+B^Tx+c=0$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},$$

一般方程表示的二次曲面

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax + B^T x + c = 0$$

作直角系的旋转变换 $x = Qy$

$$g(y) = y^T \Lambda y + B'^T y + c = 0$$

及：

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1' y_1 + b_2' y_2 + b_3' y_3 + c = 0$$

一般方程表示的二次曲面

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x + B^T x + c = 0$$

作直角系的旋转变换 $x = Qy$

$$g(y) = y^T \Lambda y + B'^T y + c = 0$$

及：

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1' y_1 + b_2' y_2 + b_3' y_3 + c = 0$$

作坐标轴的平移 $y = z + a$

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = b z_i + d.$$

17中标准二次曲面$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=bz_i+d$.

- $r(g)=3,\ b=0$, 此时有六种曲面：

  1, 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 2, 虚椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$;

  3, 点$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 4, 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

  5, 双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

  6, 二次锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

目录

二次型及其矩阵表示

化二次型为标准形

正定二次型

二次曲面

17中标准二次曲面$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=bz_i+d.$

- $r(g)=3,\ b=0$, 此时有六种曲面：
  1, 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 2, 虚椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$;
  3, 点$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 4, 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;
  5, 双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;
  6, 二次锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$
- $r(g)=2,\ b\neq 0$, 此时有二种曲面：
  1, 椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; 2, 虚椭球面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$
- $r(g)=2,\ b=0$, 此时有五种曲面：
  1, 椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2, 虚椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$;
  3,直线z轴$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; 4, 双曲柱面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
  5, 一对相交平面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$

17中标准二次曲面$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=bz_i+d.$

- $r(g)=3,\ b=0$, 此时有六种曲面：

  1, 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 2, 虚椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$;
  3, 点$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 4, 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;
  5, 双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;
  6, 二次锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

- $r(g)=2,\ b\neq 0$, 此时有二种曲面：

  1, 椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; 2, 虚椭球面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

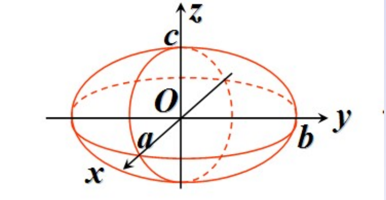
- $r(g)=2,\ b=0$, 此时有五种曲面：

  1, 椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2, 虚椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$;
  3,直线z轴$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; 4, 双曲柱面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
  5, 一对相交平面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

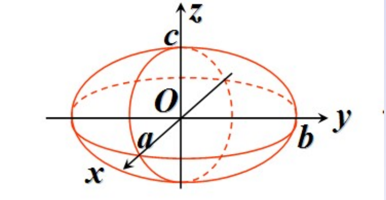
- $r(g)=1$, 此时有四种曲面：

  1, 一对平行平面$x^2=a^2$; 2, 一对虚平行平面$x^2=-a^2$;
  3, 一对平行平面$x^2=0$; 4, 抛物柱面$x^2=2py$.

1 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

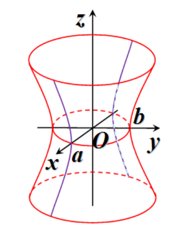


1 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

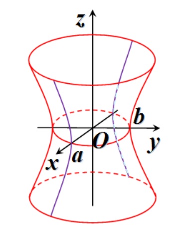


1. 当 a,b,c 中有两个相等时 – 旋转椭球面;
2. 当 $a=b=c=R$ 时 – 半径为 R 的球面;
3. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 椭球柱面.

2 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$

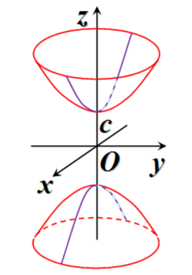


2 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$.

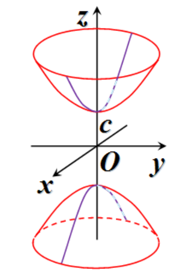


1. 当 $a=b$ 时 – 旋转单叶双曲面.

3 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

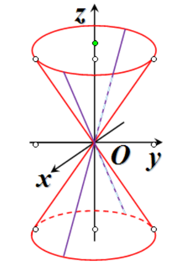


3 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

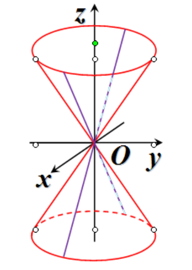


1. 当 $a=b$ 时 – 旋转双叶双曲面;
2. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 双曲柱面.

4 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$



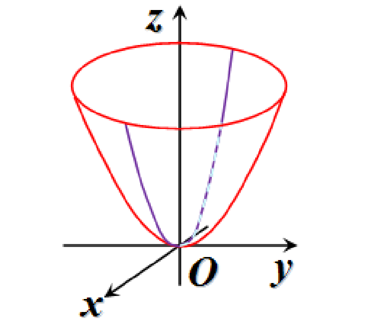
4 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$



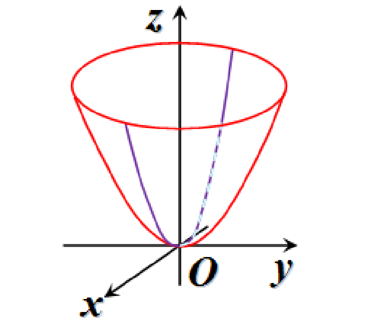
1. 当 $a=b$ 时 — 圆锥面;
2. 当 x 的系数为0时, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 即是: $y=\pm\frac{bz}{c}$ 平面.

   当 $z=k$ 时, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{C^2}$.

5 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,\quad (a>0,\ b>0).$

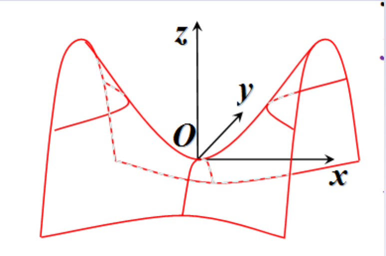


5 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,\quad (a>0,\ b>0).$

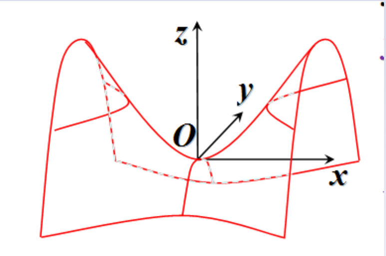


1. 当 x 的系数为0时, $z=\frac{y^2}{2b^2}-$ 柱面;
2. 当 z 时, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ 原点;
3. 当 $z=k>0$ 时, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2k$ 椭圆柱面.

6 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (a > 0, \ b > 0).$

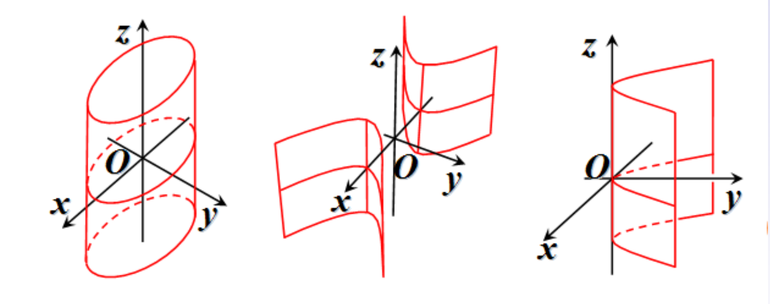


6 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (a > 0,\ b > 0).$



1. 当 x 的系数为0时, $y^2 = -2b^2 z$;
2. 当 $z = 0$ 时, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;
3. 当 $z = k > 0$ 时, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k$.

7 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (a>0,\ b>0)$;
双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (a>0,\ b>0)$;
抛物柱面 $x^2=2py,\quad (p>0)$.



例

请指出曲面 $z = xy$ 的类型.

例

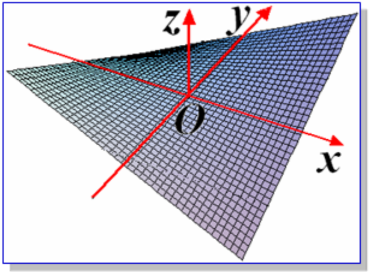
请指出曲面 $z = xy$ 的类型. $\lambda = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

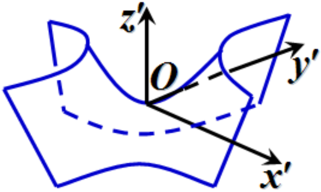
目录
二次型及其矩阵表示
化二次型为标准形
正定二次型
二次曲面

例

请指出曲面 $z=xy$ 的类型. $\lambda=0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$.

原方程化为 $x'^2-y'^2=2z'$, 表示一个双曲抛物面.





例

求 k 的值使下面的方程表示一个椭球面. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + kx_2x_3 = 1$.

例

求 k 的值使下面的方程表示一个椭球面. $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+kx_2x_3 = 1.$

例

试用直角坐标变换化简下面的方程. $x^2+y^2+z^2-2xz+4x+2y-4z-5=0.$

例

求 k 的值使下面的方程表示一个椭球面. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+kx_2x_3=1.$

例

试用直角坐标变换化简下面的方程. $x^2+y^2+z^2-2xz+4x+2y-4z-5=0.$

$\lambda=0,1,2,$令 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$, 可得

$$u^2+2w^2+2u+4\sqrt{2}w-5=0.$$

例

试用直角坐标变换化简下面的方程. $x^2+y+z-\sqrt{2}=0.$

例

试用直角坐标变换化简下面的方程. $x^2 + y + z - \sqrt{2} = 0.$

令 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$, 可得

$$u^2 + \sqrt{2}(v-1) = 0.$$