实验二　一元函数图形及其性态

东南大学

本实验的目的是让同学熟悉数学软件 **Mathematica** 所具有的良好的作图功能，并通过函数图形来认识函数，运用函数的图形来观察和分析函数的有关性态，建立数形结合的思想。

首先介绍一下平面图形的描绘：

一元显函数图形的绘制

在平面直角坐标系中绘制函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图形是函数“**Plot**”，其调用格式为：**Plot[f(x),{x,a,b},选项]**。

同时绘制多个函数的调用格式为：

Plot[{f_1(x),f_2(x),⋯},{x,a,b},选项]。

作图命令“Plot”可带很多选项，现对常用的一些选项介绍如下：

PlotRange 作图区域，格式为：

PlotRange→{因变量最小值,因变量最大值}；

PlotRange→{{自变量最小值,自变量最大值},{因变量最小值,因变量最大值}}

PlotRange→All （表示显示所有点）

PlotPoints 采样点数（默认值为 25），格式为：

PlotPoints→点数

PlotLabel 用于在图形上方居中加注释

Axes 用于指定是否显示坐标轴

Axes→False 不画出坐标轴（默认为 **True**）

Axes→{True,False}(或{False,True}) 只画一个坐标轴

AxesLabel 指定坐标轴的名称，格式为：

AxesLabel→{横轴名称,纵轴名称}

AxesOrigin 用于指定两坐标轴的交点的位置

格式为：**AxesOrigin→{x,y}**

Ticks 用于给坐标轴加上刻度或给坐标轴上的点加标记，

格式为：**Ticks→Automatic** 自动加刻度；

Ticks→{{x1,x2,…},{y1,y2,…}}；

Ticks→{{{x1,"字符串 1"},{x2,"字符串 2"},…},

{{y1,"字符串 1"}，{y2,"字符串 2"},…}}。

GirdLines 在图形上画横竖线，格式为：

GirdLines→Automatic (表示在每个记号处画线)

GirdLines→{{横轴方向画线处,纵轴方向画线处}}

Frame 用于给图形加边框(默认值为 **False**)

AspectRatio 指定图形显示的高与宽的比例，格式为：

AspectRatio→值；

AspectRatio→Automatic

表示高宽比由计算机根据图形实际尺寸确定

PlotStyle 作图风格，主要是指选择显示图形的颜色和线型，格式主要有：PlotStyle→RGBColor[a,b,c]

其中 a,b,c 为介于[0，1]之间的数，若 a,b,c 选择[1,0,0]、[0,1,0]、[0,0,1]，则分别表示的是三元色：红、绿、蓝。

PlotStyle→Dashing[{r1,r2,…}]

指交替使用数 r1,r2,…作为线段和空白的相对长度画虚线(其中这些数应是远小于 1 的数)

例1　给定函数（1）$f(x)=\dfrac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2+x+1}$

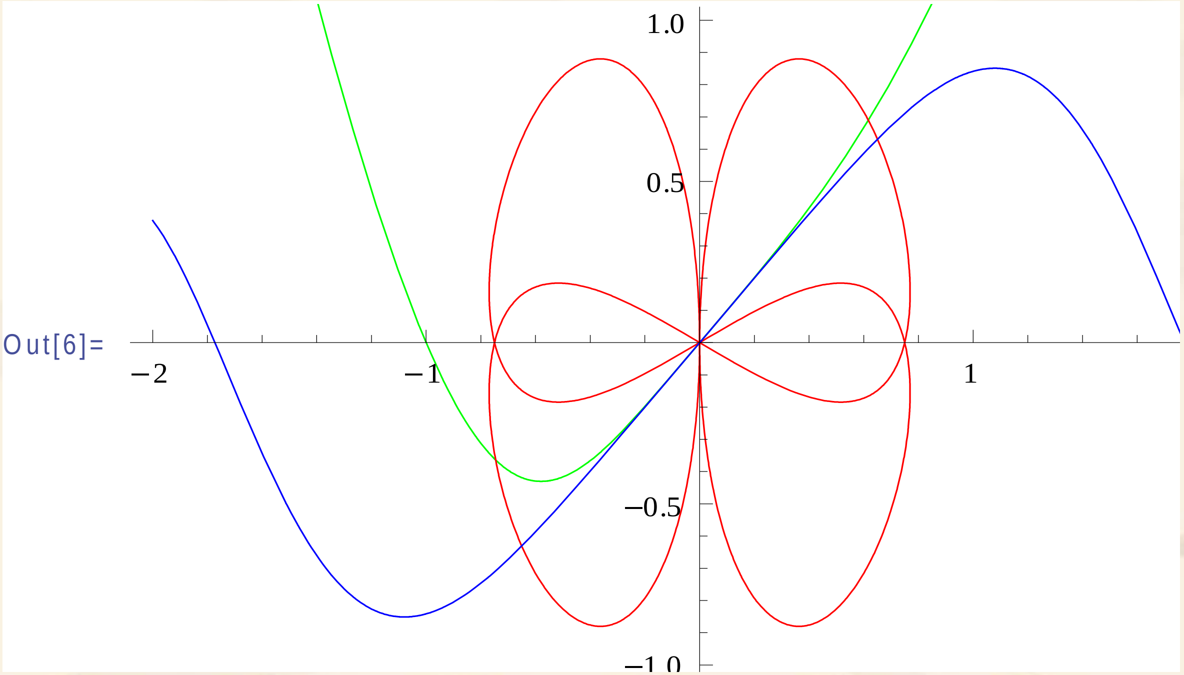
（2）$\begin{cases} x(t)=\cos t\sin 2t \\ y(t)=\sin t\cos 3t \end{cases}$　　（3）$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x^2, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，

在同一坐标系下画出以上三个函数的图形。

解：输入命令如下：

```
In[1]:= f[x_] := (x^4 + x^3 + x^2 + x)/(x^2 + x + 1);
        t1 = Plot[f[x], {x, -2, 2}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]];
        t2 = ParametricPlot[{Cos[t] Sin[2 t], Sin[t] Cos[3 t]},
           {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]];
        g[x_] := If[x ≠ 0, 1 / x Sin[x^2] , 0];
        t3 = Plot[g[x], {x, -2, 2}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]];
        Show[t1, t2, t3, PlotRange → {-1, 1}]
```

在上面的程序中，命令“Plot”的选项“PlotStyle→RGBColor[a,b,c]”是指选用颜色绘图，其中a,b,c为介于[0,1]之间的数，若a,b,c选择[1,0,0]、[0,1,0]、[0,0,1]，则分别表示的是三元色：红、绿、蓝。运行后的图形为：



例2　制作函数 $y = x^p$ 的图形动画，并观察参数 p 对函数图形的影响。

解：输入命令如下：

```
In[7]:= Do[tt = Plot[x^p, {x, 0, 3}, PlotRange → {0, 10}];
  Print[tt], {p, 1, 3, 1/2}]
```

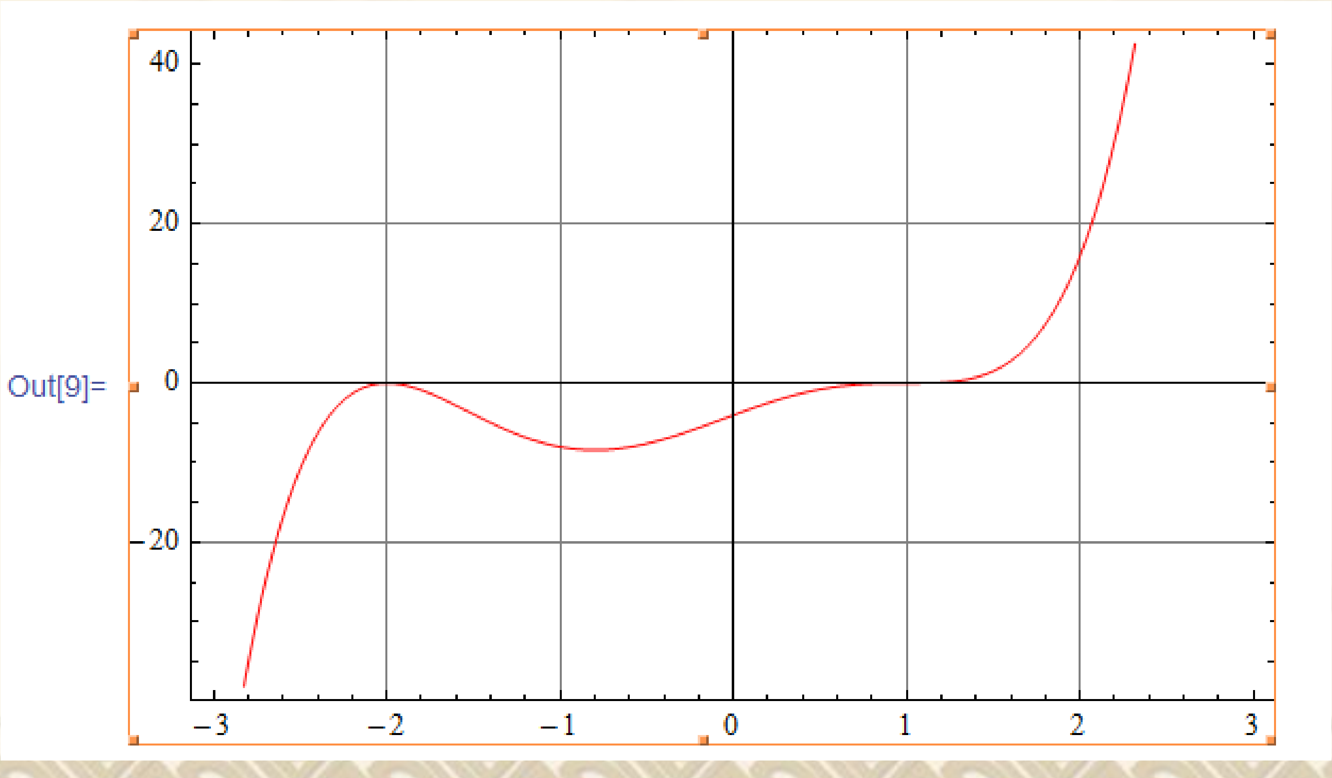
此命令输出了 6 幅图，参数 p 是从 1 到 3 以 $\frac{1}{2}$ 为步长的选择，从这些图中可以很明显地看出在第一象限参数 p 对函数 $y = x^p$ 的影响。为了图形演示更加生动，我们可以对这些图形进行动画演示。（选中图后，用“**Ctrl**”+“**Y**”键）

例 3　绘出函数 $f(x)=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$ 以及 $f'(x), f''(x)$ 的图形，并找出所有的驻点和拐点。

解：首先，我们不妨将 $f(x)$ 的自变量显示范围定为[−3,3]，则输入如下命令：

```
In[8]:= f[x_] := -4 + 8 x - x^2 - 5 x^3 + x^4 + x^5
        Plot[f[x], {x, -3, 3},
         GridLines → Automatic, Frame → True,
         PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```

为了利于观察一些特殊点的位置，我们选择了选项“**GirdLines→Automatic**”使图形的坐标平面上出现了网格线，而且这时 **Mathematica** 将自动选择相应的 y 的显示范围为 $[-20,10]$。输出结果如下图：

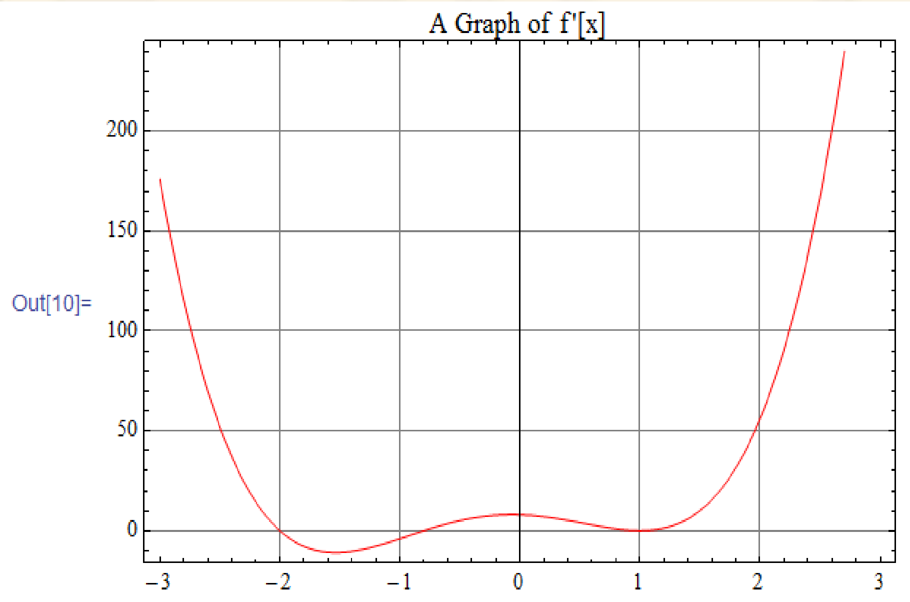


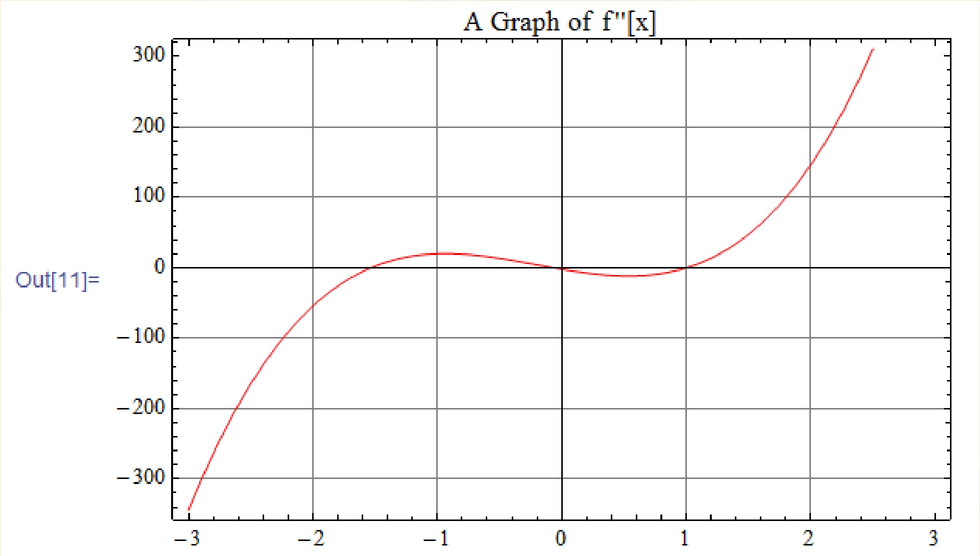
图中的曲线差不多是函数 $y=f(x)$ 图形的“全貌”。从图形中可以看出 $x=-2, x=1$ 为函数的零点，单调性在 $x=-2, x=-0.8, x=1$ 附近改变，而且在 $x=-1, x=0, x=1$ 附近曲线凸向似乎有所改变。

总之，由函数的图形我们只能近似地判断出一些信息，那么这些印象是否属实呢？为了证实这些印象，我们利用下面的 **Mathematica** 语句来加以验证：

```
In[10]:= Plot[f'[x], {x, -3, 3}, GridLines → Automatic,
          Frame → True,
          PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0],
          PlotLabel → "A Graph of f'[x]"]
         Plot[f''[x], {x, -3, 3}, GridLines → Automatic,
          Frame → True,
          PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0],
          PlotLabel → "A Graph of f''[x]"]
```

运行后，绘出了 $f(x)$ 的一阶导函数和二阶导函数的图形（如下图），从图中可以分别观察出，$f'(x)$ 有三个零点，且均为 $f(x)$ 的极值点；$f''(x)$ 有三个零点，且均为 $f(x)$ 的拐点。





为了具体求出这些极值点和拐点，下面我们可以利用解方程的命令“**Solve**”来求解 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的实根，输入命令为：

```
In[12]:=  Solve[f'[x] == 0, x]
          Solve[f''[x] == 0, x]
```

Out[12]= $\left\{\{x \to -2\}, \left\{x \to -\frac{4}{5}\right\}, \{x \to 1\}, \{x \to 1\}\right\}$

Out[13]= $\left\{\{x \to 1\}, \left\{x \to \frac{1}{10}\left(-8 - 3\sqrt{6}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{10}\left(-8 + 3\sqrt{6}\right)\right\}\right\}$

从运行结果可以得到原函数极值点和拐点的具体值。

这样我们利用 **Mathematica** 并同时结合函数微分学的知识找出了一些关键点，从而对函数的图形就有了真实全面的了解。