**第十章作业**

JS319104

曹邹颖

**P217:**

**8．**

解：<S,⮾>是半群与独异点，

⮾在S上封闭，

x,y,zS,

(x⮾y)⮾z

=[((xy)mod4)z]mod4

=[(((xmod4)(ymod4))mod4)(zmod4)]mod4

=((xmod4)(ymod4) z)mod4

=((xmod4)(ymod4)(zmod4))mod4

x⮾(y⮾z)

=[x((yz)mod4)]mod4

=[(xmod4)(((ymod4)(zmod4))mod4)]mod4

=((x(ymod4)(zmod4))mod4

=((xmod4)(ymod4)(zmod4))mod4

∴(x⮾y)⮾z= x⮾(y⮾z)即⮾满足结合律，

∴<S,⮾>是半群

易知单位元为1，

∴<S,⮾>是独异点，

但是0没有逆元，

∴<S,⮾>不是群。

**9．**

解：<Z,>能够成群，

在Z上封闭，

x,y,zZ,

(xy)z=(x+y-2)+z-2=x+y+z-4;

x(yz)=x+(y+z-2)-2=x+y+z-4；

∴(xy)z=x(yz)即满足结合律，

∴<Z,>是半群

假设单位元为t，

则有xZ, xt=tx=x即x+t-2=t+x-2=xt=2

∴存在单位元为2

∴<Z,>是独异点，

又对xZ，存在4-xZ，使得x(4-x)=(4-x)x=2=e,

∴任一元素都存在逆元，

∴<Z,>能构成群。

**12.**

证明：

设x⮾y=(xy)mod n,

先证⮾在T上封闭，

x,yT,

则(x,n)=1且(y,n)=1,

由裴蜀定理知存在整数a，b，c，d，s.t.xa+nb=1，yc+nd=1

xa=1-nb,yc=1-nd;

(xa)(yc)=1-nb-nd+n2bd(xy)(ac)+n(b+d-nbd)=1

设xy=mn+t（mZ），0≤t<n即x⮾y=t

(mn+t)(ac)+n(b+d-nbd)=1t(ac)+n(mac+b+d-nbd)=1

∵ac，mac+b+d-nbd为整数

∴（t，n）=1x⮾yT

∴⮾在T上封闭

Zn={0,1,2,…,n-1},1Zn且（1，n）=1

∴1T且1为T中单位元

xT,

则(x,n)=1，xZn={0,1,2,…,n-1}

由裴蜀定理知存在整数a，b，s.t.xa+nb=1，

令a=kn+t（k,tZ），0≤t<n，x(kn+t)+nb=1xt+n(b+kx)=1

可见存在tZn,x⮾t=1t为x的逆元，

又⮾满足结合律和交换律，

∴T关于模n乘法构成阿贝尔群

**P218:**

**15．**

证明：

**∵**xG有x2=e，

∴xG有x-1=x

取x,yG, xy=x-1y-1=(yx)-1=yx

∴二元运算可交换

∴群G为交换群

**16．**

证明：

假设存在e，e'为G中两个不同的幂等元，

则xG有xe=x=xe'，

由群G的消去律得e=e'，

∴e为G中唯一的幂等元。

**17．**

证明：

设|abc|=r, |bca|=s, |cba|=t,

则(abc)r=abc, (bca)s=bca,(cba)t=cba,

又由群中二元运算满足结合律得

(abc)r+1=(abc)r(abc)=a(bca)rbc=abc

由群中消去律得(bca)r=e，∴r是s的整数倍

同理得s是t的整数倍，t是r的整数倍，

∴r=t=s

∴|abc|=|bca|=|cba|。

**18.**

证明：

对aG，a2=ea-1=ea-1=a2a-1=a，

∴对G中阶＞2的元素必有a-1≠a，

又|a|=|a-1|

∴G中阶＞2的元素成对出现，共有偶数个

∵G是偶数阶群

∴G中剩下的1阶和2阶元总共有偶数个

又群中1阶元只有一个，就是单位元，

∴2阶元的个数必为奇数，则偶数阶G中必有2阶元。

**21．**

证明：

∵aN，

∴N(a)非空

取x,yN（a）,则xa=ax，ya=ay，x-1G，y-1G，

则x=axa-1,(ya)-1=a-1y-1=(ay)-1=y-1a-1

∴(xy-1)a=x(y-1a)=(axa-1)(y-1a)=ax(a-1y-1)a=ax(y-1a-1)a=a(xy-1)

∴xy-1N（a）

∴由子群的判定定理二知N（a）是G的子群。

**22．**

证明：

∵exHx-1，

∴xHx-1非空

取a,bxHx-1,则存在h1,h2H,s.t.a=xh1x-1,b=xh2x-1,

∵H是G的子群

∴h2-1Hh1h2-1H，

又ab-1=xh1x-1xh2-1x-1=x(h1h2-1)x-1xHx-1,

∴由子群的判定定理二知xHx-1是G的子群。

**25．**

**(1)**

x,y一奇一偶，x+y为奇

f(x+y)=-1=1\*(-1)=f(x)\*f(y)

x,y同奇同偶，x+y为偶

f(x+y)=1=1\*1=(-1)\*(-1)=f(x)\*f(y)

∴f是同态，不是单同态，也不是满同态，更不是同构。f(G1)={1，-1}

**(2)**

x,yZ,

f(x+y)=cos(x+y)+isin(x+y)=cosxcosy-sinxsiny+i(sinxcosy+cosxsiny)

f(x)\*f(y)=(cosx+isinx)\*(cosy+isiny)

=cosxcosy-sinxsiny+i(sinxcosy+cosxsiny)

**∴**f(x+y)=f(x)\*f(y)

∵A={x|xC∧|x|=1}={a+bi|a,bR∧a2+b2=1},f:Z→A,f(x)=cosx+isinx,

ranf≠A,

若f(x)=f(x')则cosx=cosx'∧sinx=sinx'x'=x+2kπ(kZ)又xZ∴x=x'

∴f是同态，是单同态，不是满同态，不是同构。f(G1)={cosx+isinx|xZ}

**(3)**

同理（2），x,yR,有f(x+y)=f(x)\*f(y)

∵A={x|xC∧|x|=1}={a+bi|a,bR∧a2+b2=1},f:Z→A,f(x)=cosx+isinx,

ranf=A,

若f(x)=f(x')则cosx=cosx'∧sinx=sinx'x'=x+2kπ(kZ)R

∴f是同态，不是单同态，是满同态，不是同构。f(G1)={cosx+isinx|xR}

**另：**

给定群G及其子群H，令：S={Ha|aG}，T={aH|aG}，定义f：S→T，f(Ha)=a-1H,aG,证明：f是双射。

证明：

对aHT，aG，则a-1GHa-1S，s.t.f(Ha-1)=aH,∴f是满射

f(Ha)=f(Hb)=a-1H=b-1H ba-1H(ba-1)-1Hb-1HaHbHa=Hb∴f是单射

所以f是满射。