复域上的压缩感知

毕业设计开题报告

邹镇洪

北京航空航天大学数学科学学院
信息与计算科学专业

2020 年 3 月 7 日

为什么我们需要压缩感知？

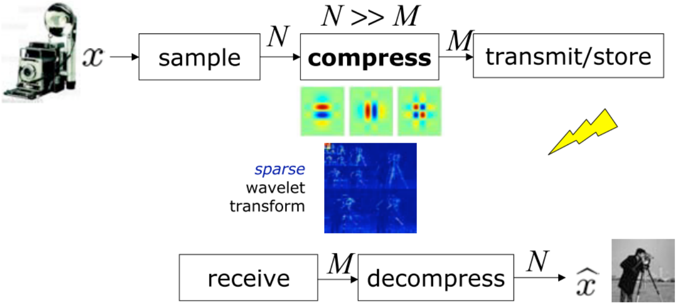


图 1: 上图展示了经典的数据采样、压缩、恢复过程

能不能直接获取 x 中的有效部分（上图的 M 维成分）？

为什么我们需要压缩感知？

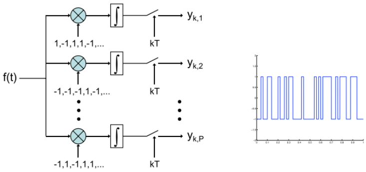
- 传统的 Nyquist-Shannon 采样定理提出，对频率为 f 的信号，需要 $2f$ 以上频率的采样才能完整恢复
- 采集数据长度大、计算了不必要的小系数、大系数位置的编码过程计算量大 [23]
- DFT、DCT 和 DWT 提供了数据稀疏表示的工具，但要求先存储所有的数据
- 压缩感知提供了针对稀疏信号压缩采样的理论和方法
- 右图展示了一种高清重构技术 [20]

图 2: 采样低清图像 (128x128)

图 3: 重构高清图像 (256x256)

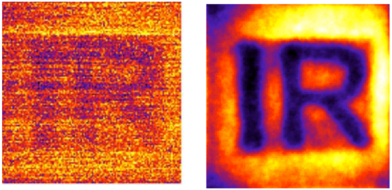
压缩感知涉及众多领域

- 应用数学
- 计算机科学
- 信息论
- 信号处理
- 电路设计
- 光学工程与摄影学
- ...



RMPI Basic architecture　　random modulation

图 4: 压缩感知用于 IBM 芯片设计



raster scan IR　　CS IR

图 5: 压缩感知用于单像素相机

什么是压缩感知*——从信号处理角度

给定信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，测量系统用矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 代替，则测量（采样）信号为：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{1}$$

当 m 小于 n 时，(1) 成为欠定方程组。Byod 等人的《Convex Optimization》[1] 中给出了求解方法：

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} -\mathbf{A_1^{-1}A_2} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\mathbf{z} + \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{A_1^{-1}y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n-m}} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是排序矩阵，使得 $\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ 的前 k 列，即 $\mathbf{A_1}$ 非奇异。此外还可以由 QR 分解法和 LU 分解法来求解。

*压缩感知包括 Compressed Sensing 和 Compressive Sampling 两个说法，其中前者注重压缩重建过程，后者注重采样过程，一般主要使用 Compressed Sensing 的说法。

什么是压缩感知——从信号处理角度

现在考虑对 $\mathbf{x}$ 的稀疏度进行约束，称 $\mathbf{x}$ 是 k 稀疏的，如果 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$。

定义：称矩阵 $\mathbf{A}$ 具有性质 $Unique_0(k)$，如果 $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}$ 可以表示为 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$，其中 $\mathbf{x}$ 是 k 稀疏且对 $\mathbf{y}$ 唯一存在.

考虑优化问题，其中 $\mathbf{A}$ 具有性质 $Unique_0(k)$:

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_0 \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{4}$$

如果问题3可解，那么由矩阵 A 的性质可知由观测值 y 可以精确地重建 x[10]。
问题3又称 P(0) 问题，为了便于求解，通常考虑其近似问题 P(1):

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_1 \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{6}$$

什么是压缩感知——从线性代数角度

令 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n(m < n)$ 的行满秩 $(rank(\mathbf{A}) = m)$ 矩阵，A 的所有 k 分量向量的值域如下：

$$\mathcal{R}_k = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_0 \leq k\} \tag{7}$$

显然欠定方程组 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 有无穷多解。给定 $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_k, k < m$，考虑如下问题：

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_0 \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

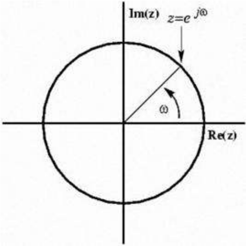
压缩感知问题本质上是求解欠定方程组的稀疏解的问题。

主要包括：是否存在稀疏解，该稀疏解是否唯一，能否判断一个解是否是该问题的唯一稀疏解，如何有效地获得这个稀疏解，等等。

为什么需要复域上的压缩感知？

时间序列信号往往被转到复频域上分析，因此在复域进行计算更为自然。

$$\text{（实域信号）}\ \mathbf{x}(t) \longleftrightarrow \mathbf{X}(\omega) : e^{\sigma + j\omega}\ \text{（复域信号）}$$



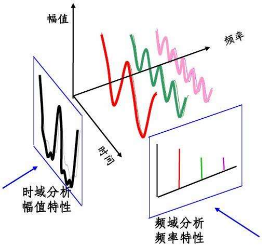


图 6: 时间序列信号通常在复频域上表示

稀疏约束

2006 年，Candès, Romberg, Tao[2, 5] 和 Donoho[9] 分别发表了若干篇奠基性的论文，从此建立起了压缩感知的框架，这一方向开始快速发展。

- 论文 [2] 指出，对于 n[†]阶连续的离散时间信号 f，若稀疏度和采样满足：

$$k \leq \alpha(M) \cdot (\frac{m}{\log n}), M > 0 \tag{10}$$

则有 $1 - O\left(n^{-M}\right)$ 的概率可以通过求解下式重建信号。

$$\min_{g} \sum_{t=0}^{n-1} |g(t)|, \quad \text{s.t.} \quad \hat{g}(\omega_i) = \hat{f}(\omega_i) \text{ for all } i \in [1, m]. \tag{11}$$

- 论文 [5] 指出，如果稀疏信号 f 满足 $|f|_{(i)} \leq R \cdot i^{-\frac{1}{p}}$, where $R > 0$ and $p > 0$，那么用服从高斯分布的测量矩阵测量，重建误差估计为

$$\left\|f - f^{\#}\right\|_{\ell_2} \leq C_p \cdot R \cdot (\frac{m}{\log n})^{-r}, \quad r = 1/p - 1/2 \tag{12}$$

[†] 为了统一符号，没有采用原文的字母

矩阵约束

- **文献 [9] 给出了对感知矩阵的约束条件**
- **假设** $\left\|\Psi^T \mathbf{x}_0\right\|_{p<2} \leq R, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,$\Psi$ 是一组基，定义一个 nonadaptive 矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times n}$，函数 $\mathcal{I}_m(\mathbf{x}) = \Phi\Psi^T\mathbf{x}$，
- **如果 Φ 满足文中三个条件**，J 是 Φ 的列索引向量，$\forall |J| < \rho\frac{n}{\log(m)}$
  - Ψ_J 的最小奇异值大于 $\eta_1 > 0$
  - $\|\mathbf{v}\|_1 \geq \eta_2 \cdot \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{v}\|_2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_J$
  - $\mathbf{Q}_{J^c}(\mathbf{v}) \geq \eta_3/\sqrt{\log(m/n)} \cdot \|\mathbf{v}\|_1, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_J$
- **则由 $\mathbf{y} = \mathcal{I}_m(\mathbf{x})$ 和下列 P(1) 问题可以求解 $\mathrm{x}0$ 的近似值**

$$\min_{\mathbf{x}} \left\|\Psi^T\mathbf{x}\right\|_1 \text{ subject to } \mathbf{y}_m = \mathcal{I}_m(\mathbf{x}) \tag{13}$$

- 此外，文献 [9] 中还指出对于较大的 n，在正态分布上随机采样即可构造满足条件的 Φ，并给出了相应的重构误差界。

求解约束——唯一性和稳定性

稀疏重建（欠定方程组求稀疏解）要求解的唯一性和稳定性条件，分别对应恢复信号的唯一性和对噪声的鲁棒性。

文献 [11] 中进一步介绍了对感知矩阵 A 的约束:

- 相干性 ($\mu(\mathbf{A})$)：若 $k < \frac{1+1/\mu(\mathbf{A})}{2}$ 则最多存在一个 $\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$
- 稀疏度 ($spark(\mathbf{A})$)：若 $spark(\mathbf{A}) < 2k$ 则最多存在一个 $\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$
- k 阶零空间性质 (NSP)：若 $(\Delta, \mathbf{A})$ 满足 $\|\Delta(\mathbf{Ax}) - \mathbf{x}\|_2 \leq C\frac{\sigma_k(\mathbf{x})}{\sqrt{k}}$，则重建误差具有一致保证，$\Delta$ 为重建算子。
- k 阶约束等距性质 (RIP)：若满足 k 阶 RIP，则重建误差具有一致保证和稳定性。

$$(1-\delta_k)||\mathbf{x}||_2^2 \leq ||\mathbf{Ax}||_2^2 \leq (1+\delta_k)||\mathbf{x}||_2^2, \exists \delta_k \in (0,1) \tag{14}$$

优化问题——从 ℓ_0 到 ℓ_q

- 文献 [4] 指出 P(0) 问题的求解是 NP-hard 问题，因此考虑其近似 P(1) 问题。论文 [3] 中证明，当向量 x 充分稀疏且矩阵 A 满足 RIP 条件时，由 P(1) 问题可以精确地求解 x。
- 文献 [7, 13] 提出了基追踪算法 (Basis Pursuit，BP)，将 P(0) 转为 P(1) 求解。此外，匹配追踪算法 [18] 和迭代重加权最小二乘法 [8] 等也是经典算法。不同以上，文献 [14] 提出用可微的高斯函数类来近似离散信号，直接对 P(0) 求解。
- 文献 [6] 证明 $\ell_q, q \in (0, 1)$ 比 ℓ_1 适用于更稀疏的信号，而 [16] 进一步证明了 ℓ_q 约束的稳定性。

复域上的进展

在论文 [2, 3, 5] 中即说明给出的定理和性质同样适用于复域信号，不过论文中只在实域上讨论，且目前针对复域的算法依然较少。

2011 论文 [21] 将实域上的 ONE-L1 算法推广到复域的 P(1) 问题上，在实验中发现在压缩重建中复数信号比实数信号更容易被恢复。

2012 论文 [22] 认为对复信号去耦再处理的效果不如同时对相位和幅度施加约束，并提出了一种对相位和幅度通用的 ℓ_p 最小化恢复算法。

$$\min J(f) = \|g - \Phi f\|_2^2 + \lambda_1 \|\Psi |f|\|_p^p + \lambda_2 \|D|f|\|_p^p + \lambda_3 \|DP\|_p^p \qquad (15)$$

2013 论文 [17] 对实部和虚部分别施加了稀疏约束，并应用 OMP 求解问题17:

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \Re\{D\} & -\Im\{D\} \\ \Im\{D\} & \Re\{D\} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \Re\{\boldsymbol{y}\} \\ \Im\{\boldsymbol{y}\} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^r \\ \boldsymbol{\alpha}^i \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|_1, \quad \text{subject to} \quad \|\tilde{\boldsymbol{y}} - \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|_2 \leq \epsilon \qquad (17)$$

复域上的进展

2016 论文 [12] 采用新方法来解耦实部和虚部，使用 OMP 来求解，并采用 Landweber 来处理最小二乘子问题。分解同17，但优化约束为：

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{2N}} \|\mathbf{z}\|_{\ell_1} \quad \text{subject to } \mathbf{Az} = \mathbf{b} \tag{18}$$

2017 论文 [15] 提出两种基于 OMP 的算法，主要是将复信号按实部虚部解耦为两个实信号分别用 OMP 来处理，再合并计算参数用于下一轮迭代。

$$\begin{aligned} \Re\{y\} &= \Phi\Re\{x\} \\ \Im\{y\} &= \Phi\Im\{x\} \end{aligned} \tag{19}$$

2019 论文 [19] 将 Split Bregman method (SBM) 方法推广到了复域。

研究内容

进行中 学习实数域下的压缩感知算法，包括矩阵约束和误差估计的推倒证明、不同范数的约束问题；

进行中 分析复域下的问题和实域的区别、难点；

未开始 将经典的压缩感知算法推广到复数域，如贪婪算法、MP 算法和 BP 算法等，或基于现有成果提出更高效的求解算法；

未开始 尝试给出复数域下的唯一性稳定性条件和误差估计；

未开始 对比实验和仿真实验。

计划进度

时间	研究内容	计划产出	备注[‡]
前期	压缩感知基本知识	笔记	
3.1-3.15	现有复域上的压缩感知算法，分析复域下的问题和实域的区别、难点	论文引言	开题
3.16-3.20	对现有算法进行对比和仿真实验	论文引言、对比实验	Matlab
3.21-4.11	选择一个算法推广到复域	相关性质的推导证明	中期
4.12-4.25	对算法进行优化	论文主体	
4.26-5.5	仿真实验	论文实验部分	
5.6-5.15	撰写论文	完整毕设论文	提交

[‡]暂定 4.6 中期，5.19 提交材料

学习材料

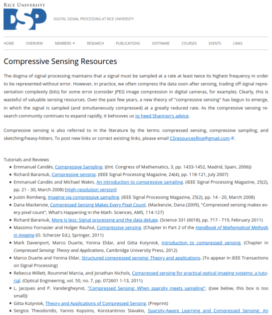


图 7: 莱斯大学信号处理小组 http://dsp.rice.edu/CS/

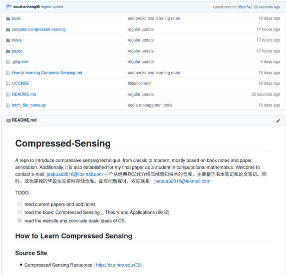


图 8: 个人整理的相关研究资料和毕设进展挂在网上

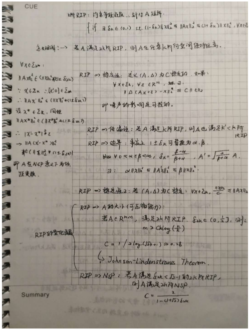


图 9: 学习笔记

[1] S. Boyd, P. B. Stephen, and V. Lieven, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.

[2] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao, *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*, IEEE Transactions on information theory, 52 (2006), pp. 489–509.

[3] ———, *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*, Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 59 (2006), pp. 1207–1223.

[4] E. J. Candes and T. Tao, *Decoding by linear programming*, IEEE transactions on information theory, 51 (2005), pp. 4203–4215.

[5] ———, *Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?*, IEEE transactions on information theory, 52 (2006), pp. 5406–5425.

[6] R. Chartrand and V. Staneva, *Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing*, Inverse Problems, 24 (2008), p. 035020.

[7] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders., *Atomic decomposition by basis pursuit*, SIAM review, 43 (2001), pp. 129–159.

[8] I. Daubechies, R. DeVore, M. Fornasier, and C. S. Güntürk, *Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery*, Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 63 (2010), pp. 1–38.

[9] D. L. Donoho, *Compressed sensing*, IEEE Transactions on information theory, 52 (2006), pp. 1289–1306.

[10] ———, *Reflections on compressed sensing*, IEEE Information Theory Society Newsletter, 58 (2008), pp. 18–23.

[11] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed sensing: theory and applications*, Cambridge university press, 2012.

[12] R. Kang, G. Qu, and B. Wang, *Two effective strategies for complex domain compressive sensing*, Circuits, Systems, and Signal Processing, 35 (2016), pp. 3380–3392.

[13] Y. Li, A. Cichocki, and S.-I. Amari, *Sparse component analysis for blind source separation with less sensors than sources*, Ica, 2003 (2003).

[14] G. H. Mohimani, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten, *Fast sparse representation based on smoothed 0 norm*, in International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation, Springer, 2007, pp. 389–396.

[15] H. Park, K.-H. Kim, J.-S. No, and D.-W. Lim, *Reconstruction of complex sparse signals in compressed sensing with real sensing matrices*, Wireless Personal Communications, 97 (2017), pp. 5719–5731.

[16] R. Saab and Ö. Yilmaz, *Sparse recovery by non-convex optimization–instance optimality*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 29 (2010), pp. 30–48.

[17] F. H. C. Tivive and A. Bouzerdoum, *A compressed sensing method for complex-valued signals with application to through-the-wall radar imaging*, in 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE, 2013, pp. 2144–2148.

[18] J. A. Tropp and A. C. Gilbert, *Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit*, IEEE Transactions on information theory, 53 (2007), pp. 4655–4666.

[19] K. Xiong, G. Zhao, G. Shi, and Y. Wang, *A convex optimization algorithm for compressed sensing in a complex domain: The complex-valued split bregman method*, Sensors, 19 (2019), p. 4540.

[20] J. Yang, J. Wright, T. S. Huang, and Y. Ma, *Image super-resolution via sparse representation*, IEEE transactions on image processing, 19 (2010), pp. 2861–2873.

[21] Z. Yang and C. Zhang, *Sparsity-undersampling tradeoff of compressed sensing in the complex domain*, in 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), IEEE, 2011, pp. 3668–3671.

[22] S. Yu, A. S. Khwaja, and J. Ma, *Compressed sensing of complex-valued data*, Signal Processing, 92 (2012), pp. 357–362.

[23] **胡广书**, 现代信号处理教程, 清华大学出版社有限公司, 2004.

感谢聆听！