

# 复域上的压缩感知

## 毕业设计开题报告

邹镇洪

北京航空航天大学数学科学学院  
信息与计算科学专业

2020 年 3 月 7 日



## ① 课题背景

## ② 研究现状

## ③ 研究内容

## ④ 参考文献

## ① 课题背景

## ② 研究现状

## ③ 研究内容

## ④ 参考文献

## 为什么我们需要压缩感知？

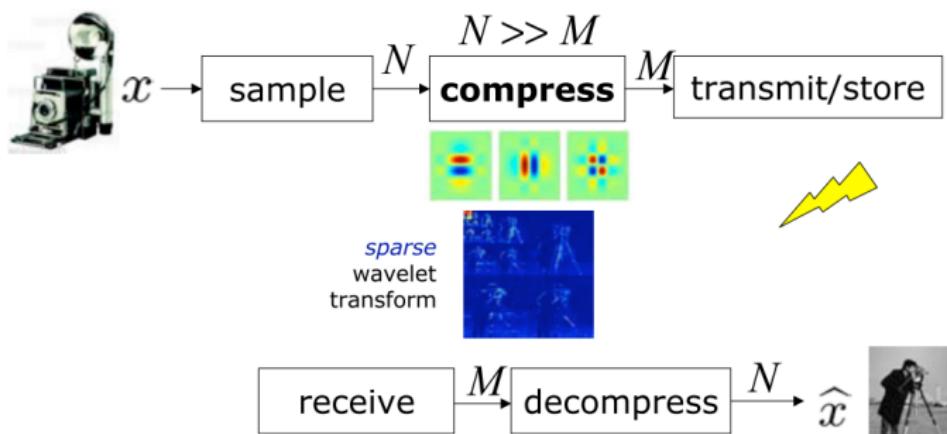


图 1：上图展示了经典的数据采样、压缩、恢复过程

能不能直接获取  $x$  中的有效部分（上图的  $M$  维成分）？

## 为什么我们需要压缩感知？

- 传统的 Nyquist-Shannon 采样定理提出，对频率为  $f$  的信号，需要  $2f$  以上频率的采样才能完整恢复
- 采集数据长度大、计算了不必要的小系数、大系数位置的编码过程计算量大 [23]
- DFT、DCT 和 DWT 提供了数据稀疏表示的工具，但要求先存储所有的数据
- 压缩感知提供了针对稀疏信号压缩采样的理论和方法
- 右图展示了一种高清重构技术 [20]



图 2: 采样低清图像 (128x128)



图 3: 重构高清图像 (256x256)

## 压缩感知涉及众多领域

- 应用数学
- 计算机科学
- 信息论
- 信号处理
- 电路设计
- 光学工程与摄影学
- ...

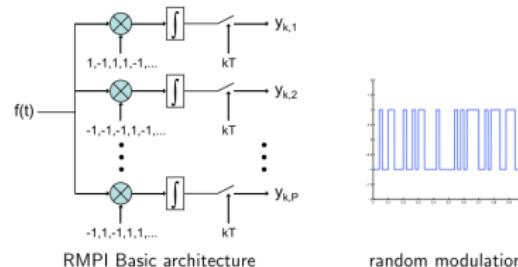


图 4: 压缩感知用于 IBM 芯片设计

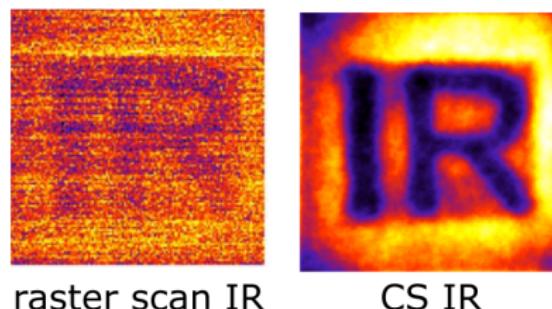


图 5: 压缩感知用于单像素相机

## 什么是压缩感知\*——从信号处理角度

给定信号  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , 测量系统用矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  代替, 则测量(采样)信号为:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (1)$$

当  $m$  小于  $n$  时, (1) 成为欠定方程组。Byod 等人的《Convex Optimization》[1] 中给出了求解方法:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是排序矩阵, 使得  $\mathbf{AP} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2]$  的前  $k$  列, 即  $\mathbf{A}_1$  非奇异。  
此外还可以由 QR 分解法和 LU 分解法来求解。

\* 压缩感知包括 Compressed Sensing 和 Compressive Sampling 两个说法, 其中前者注重压缩重建过程, 后者注重采样过程, 一般主要使用 Compressed Sensing 的说法。

## 什么是压缩感知——从信号处理角度

现在考虑对  $\mathbf{x}$  的稀疏度进行约束，称  $\mathbf{x}$  是  $k$  稀疏的，如果  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$ 。

定义：称矩阵  $\mathbf{A}$  具有性质  $Unique_0(k)$ ，如果  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y}$  可以表示为  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ，其中  $\mathbf{x}$  是  $k$  稀疏且对  $\mathbf{y}$  唯一存在。

考虑优化问题，其中  $\mathbf{A}$  具有性质  $Unique_0(k)$ :

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_0 \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (4)$$

如果问题3可解，那么由矩阵  $\mathbf{A}$  的性质可知由观测值  $\mathbf{y}$  可以精确地重建  $\mathbf{x}$ [10]。

问题3又称 P(0) 问题，为了便于求解，通常考虑其近似问题 P(1):

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_1 \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (6)$$

## 什么是压缩感知——从线性代数角度

令  $\mathbf{A}$  是  $m \times n (m < n)$  的行满秩 ( $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ ) 矩阵,  $\mathbf{A}$  的所有  $k$  分量向量的值域如下:

$$\mathcal{R}_k = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_0 \leq k\} \quad (7)$$

显然欠定方程组  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  有无穷多解。给定  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_k, k < m$ , 考虑如下问题:

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_0 \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

**压缩感知问题本质上是求解欠定方程组的稀疏解的问题。**

主要包括: 是否存在稀疏解, 该稀疏解是否唯一, 能否判断一个解是否是该问题的唯一稀疏解, 如何有效地获得这个稀疏解, 等等。

## 为什么需要复域上的压缩感知？

时间序列信号往往被转到复频域上分析，因此在复域进行计算更为自然。

$$(\text{实域信号}) \quad \mathbf{x}(t) \longleftrightarrow \mathbf{X}(\omega) : e^{\sigma+j\omega} \quad (\text{复域信号})$$

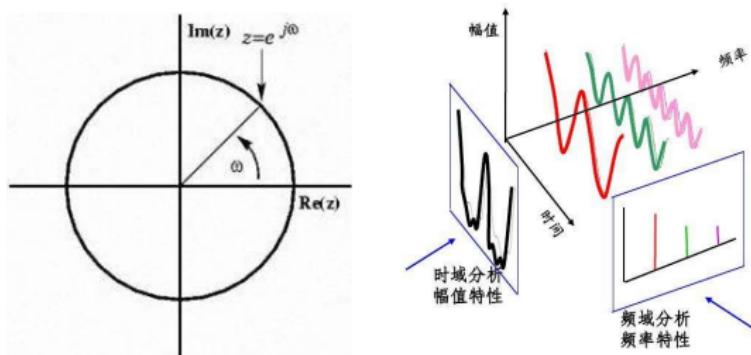


图 6: 时间序列信号通常在复频域上表示

## ① 课题背景

## ② 研究现状

## ③ 研究内容

## ④ 参考文献

## 稀疏约束

2006 年, Candès, Romberg, Tao[2, 5] 和 Donoho[9] 分别发表了若干篇奠基性的论文, 从此建立起了压缩感知的框架, 这一方向开始快速发展。

- 论文 [2] 指出, 对于  $n^\dagger$  阶连续的离散时间信号  $f$ , 若稀疏度和采样满足:

$$k \leq \alpha(M) \cdot \left( \frac{m}{\log n} \right), M > 0 \quad (10)$$

则有  $1 - O(n^{-M})$  的概率可以通过求解下式重建信号。

$$\min_g \sum_{t=0}^{n-1} |g(t)|, \quad \text{s.t.} \quad \hat{g}(\omega_i) = \hat{f}(\omega_i) \text{ for all } i \in [1, m]. \quad (11)$$

- 论文 [5] 指出, 如果稀疏信号  $f$  满足  $|f|_{(i)} \leq R \cdot i^{-\frac{1}{p}}$ , where  $R > 0$  and  $p > 0$ , 那么用服从高斯分布的测量矩阵测量, 重建误差估计为

$$\left\| f - f^{\#} \right\|_{\ell_2} \leq C_p \cdot R \cdot \left( \frac{m}{\log n} \right)^{-r}, \quad r = 1/p - 1/2 \quad (12)$$

<sup>†</sup>为了统一符号, 没有采用原文的字母

## 矩阵约束

- 文献 [9] 给出了对感知矩阵的约束条件
- 假设  $\|\Psi^T \mathbf{x}_0\|_{p < 2} \leq R$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi$  是一组基, 定义一个 nonadaptive 矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 函数  $\mathcal{I}_m(\mathbf{x}) = \Phi \Psi^T \mathbf{x}$ ,
- 如果  $\Phi$  满足文中三个条件,  $J$  是  $\Phi$  的列索引向量,  $\forall |J| < \rho \frac{n}{\log(m)}$ 
  - $\Psi_J$  的最小奇异值大于  $\eta_1 > 0$
  - $\|\mathbf{v}\|_1 \geq \eta_2 \cdot \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{v}\|_2$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_J$
  - $\mathbf{Q}_{J^c}(\mathbf{v}) \geq \eta_3 / \sqrt{\log(m/n)} \cdot \|\mathbf{v}\|_1$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_J$
- 则由  $\mathbf{y} = \mathcal{I}_m(\mathbf{x})$  和下列 P(1) 问题可以求解  $\mathbf{x}_0$  的近似值

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \Psi^T \mathbf{x} \right\|_1 \text{ subject to } \mathbf{y}_m = \mathcal{I}_m(\mathbf{x}) \quad (13)$$

- 此外, 文献 [9] 中还指出对于较大的  $n$ , 在正态分布上随机采样即可构造满足条件的  $\Phi$ , 并给出了相应的重构误差界。

## 求解约束——唯一性和稳定性

稀疏重建（欠定方程组求稀疏解）要求解的唯一性和稳定性条件，分别对应恢复信号的唯一性和对噪声的鲁棒性。

文献 [11] 中进一步介绍了对感知矩阵  $\mathbf{A}$  的约束：

- 相干性 ( $\mu(\mathbf{A})$ ): 若  $k < \frac{1+1/\mu(\mathbf{A})}{2}$  则最多存在一个  $\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$
- 稀疏度 ( $\text{spark}(\mathbf{A})$ ): 若  $\text{spark}(\mathbf{A}) < 2k$  则最多存在一个  $\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$
- $k$  阶零空间性质 (NSP): 若  $(\Delta, \mathbf{A})$  满足  $\|\Delta(\mathbf{Ax}) - \mathbf{x}\|_2 \leq C \frac{\sigma_k(\mathbf{x})}{\sqrt{k}}$ ，则重建误差具有一致保证， $\Delta$  为重建算子。
- $k$  阶约束等距性质 (RIP): 若满足  $k$  阶 RIP，则重建误差具有一致保证和稳定性。

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2, \exists \delta_k \in (0, 1) \quad (14)$$

## 优化问题——从 $\ell_0$ 到 $\ell_q$

- 文献 [4] 指出  $P(0)$  问题的求解是 NP-hard 问题，因此考虑其近似  $P(1)$  问题。论文 [3] 中证明，当向量  $x$  充分稀疏且矩阵  $A$  满足 RIP 条件时，由  $P(1)$  问题可以精确地求解  $x$ 。
- 文献 [7, 13] 提出了基追踪算法 (Basis Pursuit, BP)，将  $P(0)$  转为  $P(1)$  求解。此外，匹配追踪算法 [18] 和迭代重加权最小二乘法 [8] 等也是经典算法。不同以上，文献 [14] 提出用可微的高斯函数类来近似离散信号，直接对  $P(0)$  求解。
- 文献 [6] 证明  $\ell_q, q \in (0, 1)$  比  $\ell_1$  适用于更稀疏的信号，而 [16] 进一步证明了  $\ell_q$  约束的稳定性。

## 复域上的进展

在论文 [2, 3, 5] 中即说明给出的定理和性质同样适用于复域信号，不过论文中只在实域上讨论，且目前针对复域的算法依然较少。

**2011** 论文 [21] 将实域上的 ONE-L1 算法推广到复域的 P(1) 问题上，在实验中发现在压缩重建中复数信号比实数信号更容易被恢复。

**2012** 论文 [22] 认为对复信号去耦再处理的效果不如同时对相位和幅度施加约束，并提出了一种对相位和幅度通用的  $\ell_p$  最小化恢复算法。

$$\min J(f) = \|g - \Phi f\|_2^2 + \lambda_1 \|\Psi |f|\|_p^p + \lambda_2 \|D|f|\|_p^p + \lambda_3 \|DP\|_p^p \quad (15)$$

**2013** 论文 [17] 对实部和虚部分别施加了稀疏约束，并应用 OMP 求解问题17：

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \Re\{D\} & -\Im\{D\} \\ \Im\{D\} & \Re\{D\} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{y}\} \\ \Im\{\mathbf{y}\} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}' \\ \boldsymbol{\alpha}^i \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|_1, \quad \text{subject to} \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{D}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|_2 \leq \epsilon \quad (17)$$

## 复域上的进展

2016 论文 [12] 采用新方法来解耦实部和虚部，使用 OMP 来求解，并采用 Landweber 来处理最小二乘子问题。分解同17，但优化约束为：

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N}} \|\mathbf{z}\|_{\ell_1} \quad \text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (18)$$

2017 论文 [15] 提出两种基于 OMP 的算法，主要是将复信号按实部虚部解耦为两个实信号分别用 OMP 来处理，再合并计算参数用于下一轮迭代。

$$\begin{aligned} \Re\{y\} &= \Phi \Re\{x\} \\ \Im\{y\} &= \Phi \Im\{x\} \end{aligned} \quad (19)$$

2019 论文 [19] 将 Split Bregman method (SBM) 方法推广到了复域。

## ① 课题背景

## ② 研究现状

## ③ 研究内容

## ④ 参考文献

## 研究内容

**进行中** 学习实数域下的压缩感知算法，包括矩阵约束和误差估计的推倒证明、不同范数的约束问题；

**进行中** 分析复域下的问题和实域的区别、难点；

**未开始** 将经典的压缩感知算法推广到复数域，如贪婪算法、MP 算法和 BP 算法等，或基于现有成果提出更高效的求解算法；

**未开始** 尝试给出复数域下的唯一性稳定性条件和误差估计；

**未开始** 对比实验和仿真实验。

# 计划进度

时间	研究内容	计划产出	备注 <sup>†</sup>
前期	压缩感知基本知识	笔记	
3.1-3.15	现有复域上的压缩感知算法，分析复域下的问题和实域的区别、难点	论文引言	开题
3.16-3.20	对现有算法进行对比和仿真实验	论文引言、对比实验	Matlab
3.21-4.11	选择一个算法推广到复域	相关性质的推导证明	中期
4.12-4.25	对算法进行优化	论文主体	
4.26-5.5	仿真实验	论文实验部分	
5.6-5.15	撰写论文	完整毕设论文	提交

<sup>†</sup>暂定 4.6 中期, 5.19 提交材料

学习材料

RICE UNIVERSITY  
 DIGITAL SIGNAL PROCESSING AT RICE UNIVERSITY

---

HOME    DISCOVER    MEMBERS    RESEARCH    PUBLICATIONS    SOFTWARE    COURSES    EVENTS    LINKS

## Compressive Sensing Resources

The dogma of signal processing maintains that a signal must be sampled at a rate at least twice its highest frequency in order to be represented without error. However, in practice, we often compress the data soon after sensing, trading off signal quality for storage or computation complexity. Just as some sensor technologies (JPEG image compression in digital cameras, for example) clearly, this is wasteful of valuable sensing resources. Over the past few years, a new theory of “compressive sensing” has begun to revolutionize signal processing, in which the signal is sampled (and simultaneously compressed) at a greatly reduced rate. As the compressive sensing research community continues to expand rapidly, it happens to be “Shannon’s adage.”

Compressive sensing is also referred to in the literature by the terms compressed sensing, compressive sampling, and sketching/heavy-hitters. To post new links or correct existing links, please email [CISresourcesRice@gmail.com](mailto:CISresourcesRice@gmail.com).

- Topics and Authors**

  - **David C. Mireault, *Concurrent Sensing***, (Chapter in: *Information Processing*, 3, 1430-1452, [July 2009])
  - **Richard Riecke, *Concurrent Sensing***, (Chapter in: *Information Processing Magazine*, 24(4), 118-121, [July 2009])
  - **Emanuele Cimatti and Michael Wainrib, *Enabling concurrent sensing*** (*IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2), pp. 31 - 36, March 2008) [\[preprint\]](#)
  - **David C. Mireault, *Concurrent Sensing***, (IEEE Signal Processing Magazine, 25(2), pp. 14 - 20, March 2008)
  - **David Mireault, *Concurrent Sensing Makes Data Flow Faster*, *CrossTalk*, March/April (2009), "Compressed sensing makes it pay your costs", *WHAT'S Happening in the Math Sciences*, April (2009), 111-127)**
  - **Richard Baraniuk, *More is Less: Signal processing and the data deluge***, *Science* 310 (998), pp. 717-718, February 2011
  - **Mario Berndt, *Holger Hagenauer, *Concurrent sensing****
  - **David C. Mireault, *Introduction to the Handbook of Mathematical Web-based Education***
  - **Mark Davenport, Marie Deneue, Hernán Niño, and Gitta Kutyniok, *Introduction to compressed sensing***, (Chapter in: *Compressed sensing: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2012)
  - **Marie Deneue and Horacio Salas, *Constrained compressed sensing: Theory and applications*** (To appear in: *IEEE Transactions on Signal Processing*)
  - **Horacio Salas, Francisco Marzano, and Jonathan Nocedal, *Constrained sensing for optimal sensor placement in a full-digital optical fingerprinting system*, *Optics Letters*, Vol. 36, No. 10, pp. 2170-2172, 2011**
  - **L. Jacques, and P. Vetterli, *On sparse representations, T-sensing, T-compressive sensing, What sparse means sensing***, *see below*, this book is too small
  - **Gitta Kutyniok, *Theory and Applications of Compressed Sensing*** (*Preprint*)

图 7: 莱斯大学信号处理小组 <http://dsp.rice.edu/CS/>

studenten@10.0.0.10:22 second ago

└─ block  
  └─ completely-compressed-sensing  
    └─ notes  
      └─ paper  
      └─ phone  
        └─ How to learn Compressive Sensing.pdf  
        └─ LICENSE.pdf  
        └─ README.md  
        └─ batch\_file\_name.py  
          └─ README.md

## Compressed-Sensing

A paper to introduce compressive sensing technique, from classic to modern, mostly based on book notes and paper annotations. Additionally, it is also established by my final paper as a student in computational mathematics. Welcome to contribute to this project at <https://github.com/10.0.0.10/compressed-sensing>, 贡献你的智慧和力量，让更多的人受益于你的贡献！

TODO:

- ─ read current papers and add notes
- ─ read the book: Compressive Sensing - Theory and Applications (2012)
- ─ read the website and conclude basic ideas of CS.

### How to Learn Compressed Sensing

#### Source Site

- ─ Compressive Sensing Resources | <http://cs.nyu.edu/~cs/>

图 8: 个人整理的相关研究  
资料和毕设进展挂在网上

图 9: 学习笔记

## ① 课题背景

## ② 研究现状

## ③ 研究内容

## ④ 参考文献

- [1] S. BOYD, P. B. STEPHEN, AND V. LIEVEN, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.
- [2] E. J. CANDÈS, J. ROMBERG, AND T. TAO, *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*, IEEE Transactions on information theory, 52 (2006), pp. 489–509.
- [3] ———, *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*, Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 59 (2006), pp. 1207–1223.
- [4] E. J. CANDES AND T. TAO, *Decoding by linear programming*, IEEE transactions on information theory, 51 (2005), pp. 4203–4215.
- [5] ———, *Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?*, IEEE transactions on information theory, 52 (2006), pp. 5406–5425.
- [6] R. CHARTRAND AND V. STANEVA, *Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing*, Inverse Problems, 24 (2008), p. 035020.
- [7] S. S. CHEN, D. L. DONOHO, AND M. A. SAUNDERS., *Atomic decomposition by basis pursuit*, SIAM review, 43 (2001), pp. 129–159.
- [8] I. DAUBECHIES, R. DEVORE, M. FORNASIER, AND C. S. GÜNTÜRK, *Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery*, Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 63 (2010), pp. 1–38.
- [9] D. L. DONOHO, *Compressed sensing*, IEEE Transactions on information theory, 52 (2006), pp. 1289–1306.

- [10] ———, *Reflections on compressed sensing*, IEEE Information Theory Society Newsletter, 58 (2008), pp. 18–23.
- [11] Y. C. ELDAR AND G. KUTYNIOK, *Compressed sensing: theory and applications*, Cambridge university press, 2012.
- [12] R. KANG, G. QU, AND B. WANG, *Two effective strategies for complex domain compressive sensing*, Circuits, Systems, and Signal Processing, 35 (2016), pp. 3380–3392.
- [13] Y. LI, A. CICHOCKI, AND S.-I. AMARI, *Sparse component analysis for blind source separation with less sensors than sources*, Ica, 2003 (2003).
- [14] G. H. MOHIMANI, M. BABAIE-ZADEH, AND C. JUTTEN, *Fast sparse representation based on smoothed 0 norm*, in International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation, Springer, 2007, pp. 389–396.
- [15] H. PARK, K.-H. KIM, J.-S. NO, AND D.-W. LIM, *Reconstruction of complex sparse signals in compressed sensing with real sensing matrices*, Wireless Personal Communications, 97 (2017), pp. 5719–5731.
- [16] R. SAAB AND Ö. YILMAZ, *Sparse recovery by non-convex optimization—instance optimality*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 29 (2010), pp. 30–48.
- [17] F. H. C. TIVIVE AND A. BOUZERDOUM, *A compressed sensing method for complex-valued signals with application to through-the-wall radar imaging*, in 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE, 2013, pp. 2144–2148.

- [18] J. A. TROPP AND A. C. GILBERT, *Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit*, IEEE Transactions on information theory, 53 (2007), pp. 4655–4666.
- [19] K. XIONG, G. ZHAO, G. SHI, AND Y. WANG, *A convex optimization algorithm for compressed sensing in a complex domain: The complex-valued split bregman method*, Sensors, 19 (2019), p. 4540.
- [20] J. YANG, J. WRIGHT, T. S. HUANG, AND Y. MA, *Image super-resolution via sparse representation*, IEEE transactions on image processing, 19 (2010), pp. 2861–2873.
- [21] Z. YANG AND C. ZHANG, *Sparsity-undersampling tradeoff of compressed sensing in the complex domain*, in 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), IEEE, 2011, pp. 3668–3671.
- [22] S. YU, A. S. KHWAJA, AND J. MA, *Compressed sensing of complex-valued data*, Signal Processing, 92 (2012), pp. 357–362.
- [23] 胡广书, 现代信号处理教程, 清华大学出版社有限公司, 2004.

感谢聆听！