

# Musterlösungen zur Klausur

Robotik I: Einführung in die Robotik

am 16. Juni 2020

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:
Denavit	Hartenberg	$\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 1	von 12 Punkten
Aufgabe 2	von 7 Punkten
Aufgabe 3	von 6 Punkten
Aufgabe 4	von 6 Punkten
Aufgabe 5	von 7 Punkten
Aufgabe 6	von 7 Punkten

Gesamtpunktzahl:	45 von 45 Punkten
------------------	-------------------

Note:	<b>1,0</b>
-------	------------

## Aufgabe 1 *Kinematik*

1. Gelenke

1 P.

 $G_1$ : Rotationsgelenk (Drehgelenk) $G_2$ : Lineargelenk (Schubgelenk)

2. (a)

3 P.

$$\begin{aligned}
 A_{0,1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \cdot \cos(0^\circ) & \sin(\theta_1) \cdot \sin(0^\circ) & 30 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \cdot \cos(0^\circ) & -\cos(\theta_1) \cdot \sin(0^\circ) & 30 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(0^\circ) & \cos(0^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 30 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 30 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{1,2} &= \begin{bmatrix} \cos(0^\circ) & -\sin(0^\circ) \cdot \cos(45^\circ) & \sin(0^\circ) \cdot \sin(45^\circ) & 0 \cdot \cos(0^\circ) \\ \sin(0^\circ) & \cos(0^\circ) \cdot \cos(45^\circ) & -\cos(0^\circ) \cdot \sin(45^\circ) & 0 \cdot \sin(0^\circ) \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(b)

3 P.

$$\begin{aligned}
 A_{0,2} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 30 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 30 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(\theta_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 30 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos(\theta_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 30 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(c)  $q = (0^\circ, 100 \text{ mm})$ 

1 P.

$$\begin{aligned} A_{0,2} &= \begin{bmatrix} \cos(0^\circ) & -\sin(0^\circ) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(0^\circ) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 30 \cdot \cos(0^\circ) \\ \sin(0^\circ) & \cos(0^\circ) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos(0^\circ) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 30 \cdot \sin(0^\circ) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. (a) Position:
- $p = (30, 0, 100)^T$

1 P.

- (b) Rotationsachse und -winkel:

2 P.

Rotationsachse:  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$ Rotationswinkel  $\alpha$ :

$$\text{Spur}(R) = 1 + 2 \cdot \cos(\alpha) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} = \pm 45^\circ$$

Rotationsmatrix um  $x$ -Achse, um die Mehrdeutigkeit aufzulösen:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_x(+\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(+\frac{\pi}{4}) & -\sin(+\frac{\pi}{4}) \\ 0 & \sin(+\frac{\pi}{4}) & \cos(+\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Antwort: Rotationsachse  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und Rotationswinkel  $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Alternative Lösung:

Rotationsachse:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (R - I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$III \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + II \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

Einsetzen in  $III$ :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_2 + -1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = c$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotationswinkel:

$$\text{Spur}(R) = 1 + 2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{2} = \pm 90^\circ$$

Mehrdeutigkeit auflösen (Zeile 1, Spalte 3):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = a_1 a_3 (1 - \cos \alpha) + a_2 \sin \alpha = 1 \cdot 0 (1 - \cos \alpha) + 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

(c) Quaternion:

1 P.
------

$$\mathbf{q} = (\cos(\frac{\alpha}{2}), \mathbf{a} \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}))$$

$$\mathbf{q} = (\cos(\frac{\pi}{8}), \sin(\frac{\pi}{8}), 0, 0)$$

$$\mathbf{q} \approx (0.924, 0.382, 0, 0) \text{ (nicht notwendig)}$$

Alternative Lösung:

$$\mathbf{q} = (\cos(\frac{\alpha}{2}), \mathbf{a} \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}))$$

$$\mathbf{q} = (\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}), 0, 0)$$

$$\mathbf{q} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

$$\mathbf{q} \approx (0.707, 0.707, 0, 0) \text{ (nicht notwendig)}$$

## Aufgabe 2 *Dynamik*

### 1. Allgemein

(a) Gleichung:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

(b) Benennung und Erklärung

Ausdruck	Beschreibung
$\boldsymbol{\tau}$	Vektor der generalisierten Kräfte
$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$	Massenträgheitskomponente
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$	Zentripetal- und Corioliskomponenten
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	Vektor der Gravitationskomponenten

### 2. Anwendungsszenarien

- (a) Szenario 1: **Direktes Dynamikproblem**, da die externen Kräfte gegeben sind und die Bewegungen gesucht werden, welche diese auf dem Robotersystem verursachen.
- (b) Szenario 2: **Inverses Dynamikproblem**, da das Gewicht des Objekts nur über das Robotersystem geschätzt werden soll. Folglich muss der Roboter wissen, welche Dynamik sein eigenes System hat, um externe Kräfte von internen Kräften unterscheiden zu können.

### 3. RNEA

- Rekursive Berechnung der **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** jedes einzelnen Armelements von der Basis bis zum Endeffektor (**Vorwärtspfad**). Im Algorithmus **Zeilen 4 und 5**:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \dot{\mathbf{q}}_i$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\phi}}_i \dot{\mathbf{q}}_i$$

- Berechnung der **Kräfte/Momente** mithilfe Newton-Euler, welche auf **jedes einzelne Armelement wirken** bzw. welche für die Beschleunigungen benötigt werden. Im Algorithmus **Zeile 6**:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{I}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{I}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^e$$

- Rekursive **Aufsummierung der Kräfte zwischen den Armelementen** und der Gelenkkraftvariablen für den jeweiligen Gelenktyp (**Rückwärtspfad**).

**Zeilen 9 bis/und 11:**

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{f}_{p(i)} = \mathbf{f}_{p(i)} + \mathbf{f}_i$$

## Aufgabe 3    *Bewegungsplanung*

1 P.

1. **Vorteil:** Kürzere Laufzeit, Einfacher zu implementieren, Effizienter

**Nachteil:** Kann Kollisionen übersehen (zu kleines  $d$ )

1 P.

2. **Ziel:** Wähle zielgerichtet Punkte in engen Passagen für die nächste Stichprobe.

**Vorgehen:** Wähle  $q_1, q_2 \in C_{obs}$  und Prüfe ob der Mittelpunkt  $q_m = (q_1 + q_2)/2$  in  $C_{free}$  liegt (Ausreichend ist bereits:  $q_1, q_2 \in C_{obs}, q_m = (q_1 + q_2)/2$ ).

1 P.

3. **Zentraler Schritt:** Rewiring

Akzeptiert für den zweiten Teil der Frage:

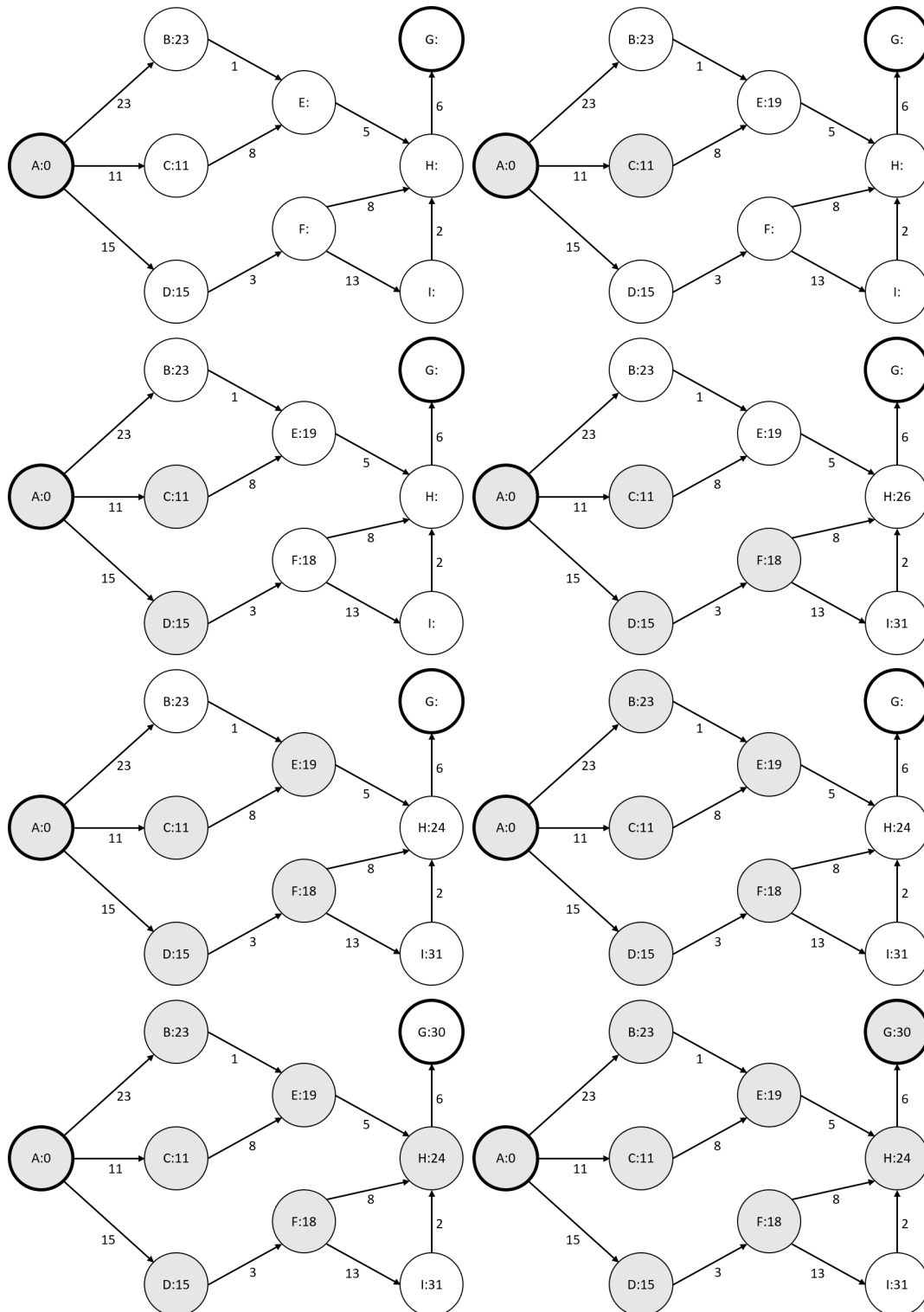
- **Vorgehen** Bestimmen der Knoten in der Nähe des neuen Knotens. Prüfe für diese Knoten, ob die Kosten über den neuen Knoten geringer sind als Kosten des bisherigen Pfads. Wenn Ja und diese Verbindung kollisionsfrei ist, dann verbinde diesen Knoten über den neuen Knoten.
- **Wann:** Zeitpunkt im Algorithmus (Beim Hinzufügen neuer Knoten zum Baum)
- **Wann:** Bedingung (Für bereits hinzugefügte Knoten in einem Radius um den neuen Knoten, sind die Kosten über den neuen Knoten geringer als Kosten des bisherigen Pfads)

4. Expansionsreihenfolge:

3 P.

Expansion:  $(A) \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow H \rightarrow G$

Herleitung (nicht in Lösung gefordert):





## Aufgabe 4 Greifen

1. Definition:

1.5 P.

- Die mediale Achse ist die Vereinigung der Zentren der maximalen Kugeln in  $H$ .

2. Objekthülle:

2 P.

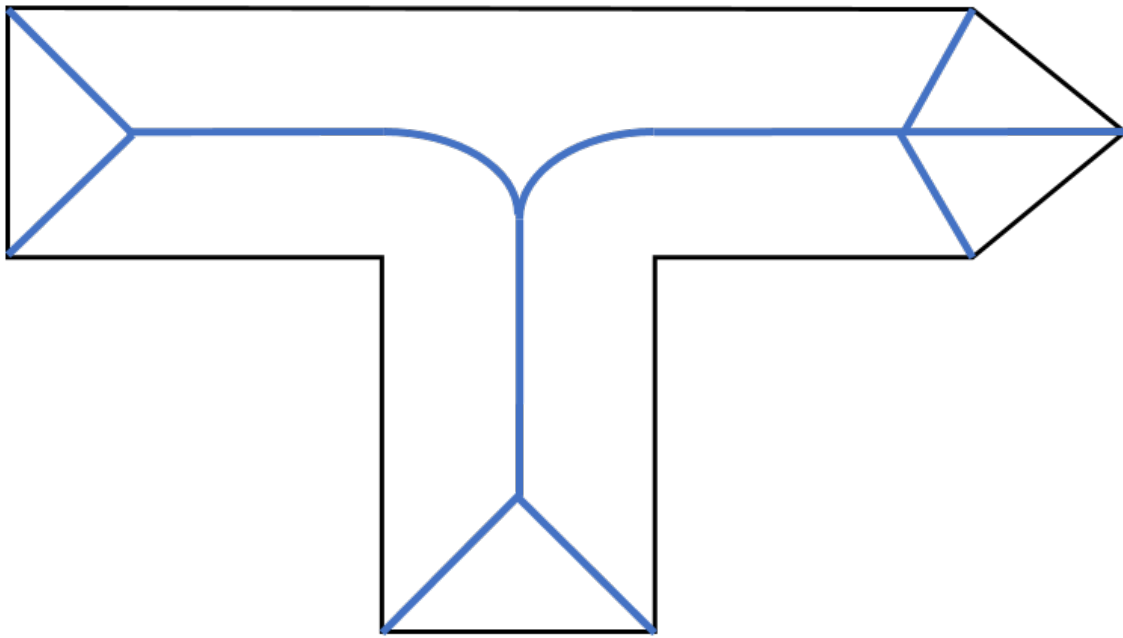


Abbildung 1: Objekthülle in 2D.

3. Schritte:

1 P.

- (a) Minimum Spanning Tree (MST) / Minimaler Spannbaum
- (b) Entfernen von Kanten mit großer Distanz

4. Heuristiken:

1.5 P.

- Annähern an Verzweigungspunkte
- Annähern an Sternspitzen
- Annähern an Kreismittelpunkt
- Annähern an Rand einer Öffnung

## Aufgabe 5 *Bildverarbeitung*

1. Filteroperationen :

2 P.

(a) Name eines Tiefenpass-Filter:

- Median
- Mittelwert
- Gauß

(b) Verwendung von Tiefenpass-Filtern:  
Glättung oder Rauschelimination

(c) Name eines Hochpass-Filter:

- Prewitt
- Sobel
- Laplace

(d) Verwendung von Hochpass-Filtern:

Kantendetektion

2. Canny-Kantendetektor

(a) Bildgradienten :

2 P.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(b) Weitere Schritte:

2 P.

- i. Berechnung der Richtung und des Betrags des Bildgradienten
- ii. Diskretisierung des Winkels
- iii. Non-Maximum Suppression
- iv. Einteilung in starke und schwache Kanten via Thresholding

3. Bildübertragung:

1 P.

$$\text{Graustufenbild: } 30 \times 100 \times 100 \times 8 = 2400000 \frac{\text{Bit}}{\text{Sekunde}} = 2,4 \frac{\text{MBit}}{\text{Sekunde}}$$

## Aufgabe 6 *Programmieren durch Vormachen*

### 1. 2 Gründe:

2 P.

- Mächtiger Mechanismus zur Komplexitätsreduktion des Suchraums während des Lernens (im Gegensatz zum Ausprobieren aller Möglichkeiten). Nennen der Beispiele auch möglich:
  - Gute Beobachtungen können als Startpunkt gewählt werden
  - Schlechte Beobachtungen können direkt aus dem Suchraum eliminiert werden
- Impliziter Mechanismus zum Trainieren von Robotern, der das explizite und mühsame händische Programmieren durch Menschen reduziert oder sogar ganz eliminiert. (äquivalente Formulierungen auch möglich, wenn klar wird, dass das explizite Programmieren obsolet wird.)
- Hilft beim Verständnis der Kopplung zwischen Perzeption und Aktion und dem Lernen relevanter Beziehungen zwischen diesen.
- Nutzung impliziten menschlichen Expertenwissens, dass durch jahrelanges Training erworben wurde, aber vom menschlichen Demonstrator nicht direkt in Regeln und Codeanweisungen beschrieben werden kann.

### 2. 2 Ebenen zum Erlernen einer Fähigkeit bei PdV:

1 P.

- Symbolische Ebene
- Trajektorien Ebene

### 3. Verfahren:

2 P.

- möglich sind ():
  - IMU-basierte Bewegungserfassung (z.B. Xsens).
  - Bei sehr genauer Begründung noch Mechanische Modelle, aber nur wenn diese kinematisch äquivalent sind, den Menschen also nicht bei der Bewegung behindern (muss in Begründung stehen).
  - Bei guter Begründung: Markerlose optische Verfahren (e.g. 3D-OpenPose) mit e.g. folgender Kamera (Drohne oder Mitarbeiter). Allerdings müsste dabei auf Verdeckung in der Begründung eingegangen werden
- explizit **nicht** möglich sind ():
  - Marker-basierte optisch-passive Bewegungserfassung (z.B. VICON, OptiTrack). Grund: Anforderung an Aufnahmebereich; Nur indoor möglich
  - Marker-basierte optisch-aktive Bewegungserfassung (z.B. mit Infrarot LED). Grund: Anforderung an Aufnahmebereich; Nur indoor möglich
  - Magnetische/akustische Bewegungserfassung. Grund: Stark begrenzte Reichweite
  - Mechanische Bewegungserfassung (e.g. Potentiometer), da diese normalerweise die Bewegungsfreiheit zu sehr einschränken

**Begründung:** Die möglichen Verfahren haben geringe Anforderungen an Aufnahmeumgebung (i.e., outdoor möglich). Die Verfahren bieten keine Positionsbestimmung des Menschen im globalen Koordinatensystem (da keine Referenz gegeben), aber das ist laut Aufgabenstellung nicht erforderlich.

4. Optisch-aktiv oder optisch-passiv?

2 P.

Eigenschaft	optisch-aktiv	optisch-passiv	beides
a			X
b	X		
c		X	
d	X		
e			X
f			X
g			X
h	X		