KIT-Fakultät für Informatik
Prof. Dr.-Ing. Tamim Asfour

Musterlösungen zur Klausur

Robotik I: Einführung in die Robotik

am 23. Februar 2024

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:
Denavit	Hartenberg	$\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 1	6 von 6 Punkten
Aufgabe 2	10 von 10 Punkten
Aufgabe 3	8 von 8 Punkten
Aufgabe 4	8 von 8 Punkten
Aufgabe 5	8 von 8 Punkten
Aufgabe 6	5 von 5 Punkten

Gesamtpunktzahl:	45 von 45 Punkten

	Note: **1,0**

Aufgabe 1 *Transformationen*

1. Transformationsmatrix T_1: 1 P.

$$T_1 = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rotationsmatrix R_2: 2 P.

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Rotationsmatrix R_3: 2 P.

$$R_3 = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Da die Rotation R_2 im Koordinatensystem $\mathcal{F}_1$ dargestellt wird, wird sie von rechts mit der Rotationsmatrix R_1 multipliziert, um die Orientierung von $\mathcal{F}_2$ zu erhalten.)

4. Zielposition: 2 P.

$$\mathbf{p}_w = R_3 \mathbf{p}_2 + \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 *Kinematik und Dynamik*

1. (a) DH-Parameter: **2 P.**

Gelenk	$\boldsymbol{\theta_i}$ [°]	$\boldsymbol{d_i}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{a_i}$ [$\boldsymbol{mm}$]	$\boldsymbol{\alpha_i}$ [°]
1	θ_1	50	10	0
2	θ_2	10	0	0

(b) Vorwärtskinematik: **3 P.**

Rechenweg für die Transformationsmatrix:

$$A_{0,2} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta_1 & -\sin\ \theta_1 & 0 & 10 \cdot \cos\ \theta_1 \\ \sin\ \theta_1 & \cos\ \theta_1 & 0 & 10 \cdot \sin\ \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\ \theta_2 & -\sin\ \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\ \theta_2 & \cos\ \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 & 0 & 10\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 & 0 & 10\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \cdot 10 + 50 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & 10\cos\theta_1 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & 10\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abgelesene Vorwärtskinematik:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\ \cos\theta_1 \\ 10\ \sin\theta_1 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}$$

2. Inverse Kondition: **2 P.**

   - Berechnung Eigenwerte $\lambda_{1,2}$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4 \cdot (a \cdot c - b^2)}}{2} \\
&= \frac{3 + 3 \pm \sqrt{(3+3)^2 - 4 \cdot (3 \cdot 3 - (-2)^2)}}{2} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (9 - 4)}}{2} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \\
&= \frac{6 \pm 4}{2} \\
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= 5
\end{aligned}
$$

   - Singulärwerte $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{5}$
   - Inverse Kondition: $\mu_2(\theta) = \frac{\sigma_{\min}(A)}{\sigma_{\max}(A)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

3. (a) Erklärung: Generalisierte Koordinaten sind ein minimaler Satz an voneinander unabhängigen Koordinaten, welche den aktuellen Systemzustand vollständig beschreiben. **1 P.**

   Benennung: In der Bewegungsgleichung sind das die Gelenkpositionen $\boldsymbol{q}$.

   (b) Terme und deren Dimension: **2 P.**

Term	**Dimension**	**Benennung**
$\boldsymbol{\tau}$	n bzw. $(n \times 1)$	Vektor der generalisierten Kräfte
$M(\boldsymbol{q})$	$n \times n$	Massenträgheitsmatrix
$C(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$	$n \times n$	Zentripetal- und Coriolismatrix
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$	n bzw. $(n \times 1)$	Vektor der Gravitationskomponenten

Aufgabe 3 *Bewegungsplanung*

1. (a) Problemdefinition: 1 P.

   Finde eine kollisionsfreie Trajektorie im Konfigurationsraum C von einer Startkonfiguration $\boldsymbol{q}_{Start} \in C$ zu einer Zielkonfiguration $\boldsymbol{q}_{Ziel} \in C$.

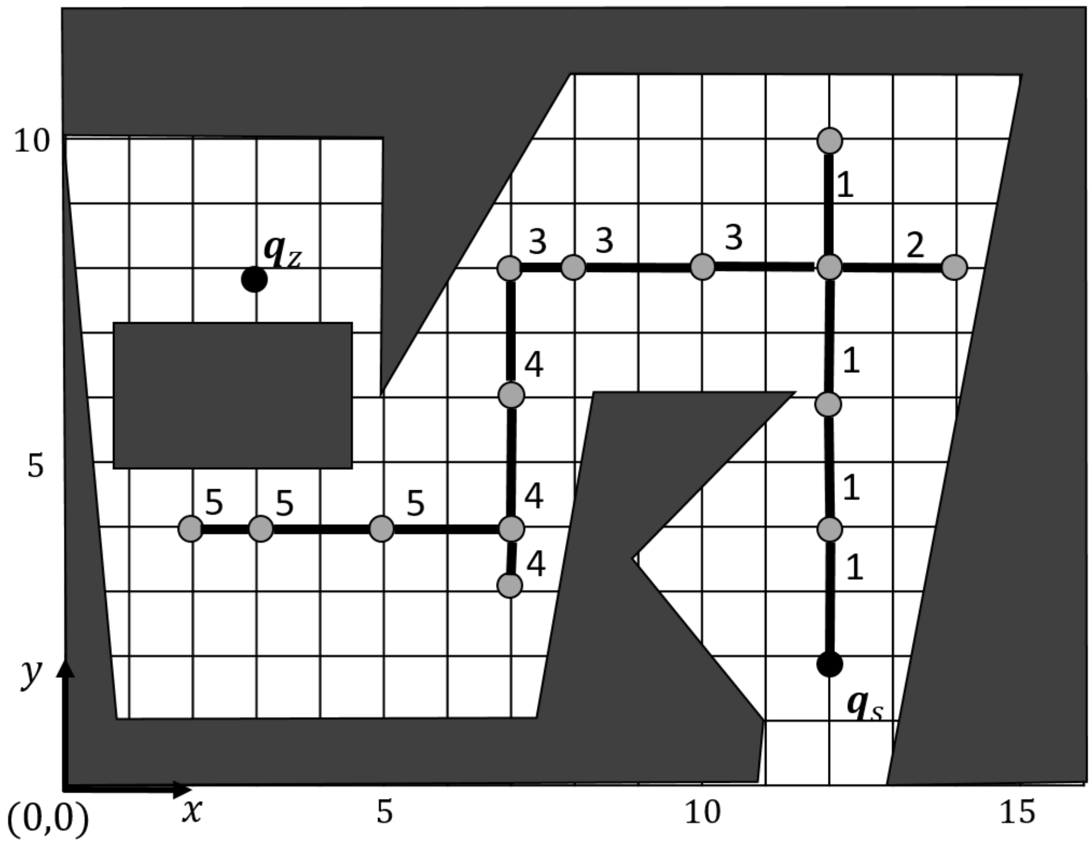
   (b) Konfigurationsraum: $C = SE(2)$ 1 P.

2. (a) Heuristiken: 1.5 P.

Heuristik	**Zulässig? (ja / nein)**
$h_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_{Ziel})$	ja
$h_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_{Ziel})$	nein
$h_3(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_{Ziel})$	ja

   (b) Unzulässig werdende Heuristiken: h_1 (Euklidische Distanz), h_3 (Manhattan-Distanz) 1 P.

3. (a) Umgebung: 3 P.



   (b) Problem: Durchqueren von enger Passage zum Erreichen des Zielpunktes nötig; es ist unwahrscheinlich, dass RRT Punkte in dieser Passage sampelt 0.5 P.

Aufgabe 4 *Greifen*

1. Grifftypen nach Cutkosky: 1 P.

   Auf der ersten Ebene der Grifftaxonomie wird zwischen Kraft- und Präzisionsgriffen unterschieden.

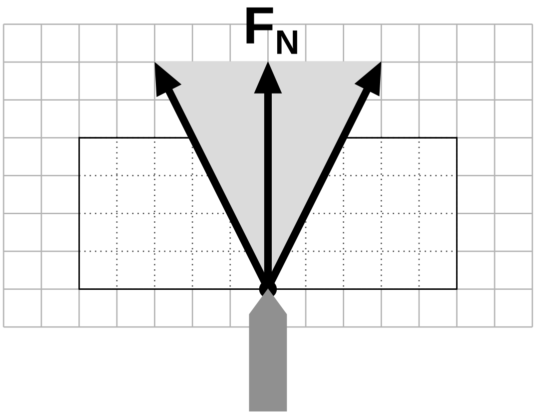
2. (a) Wrench: 0.5 P.

   Ein *Wrench* ist die Verallgemeinerung von Kräften und Drehmomenten, die in einem Kontaktpunkt wirken.

   (b) Dimension bei 2D Griff: 3 1 P.

   Dimension bei 3D Griff: 6

   (c) Reibungsdreieck: 1 P.



   (d) Änderung: Der Öffnungswinkel bleibt konstant, also ändert sich nicht. 1.5 P.

   Begründung: Der Öffnungswinkel hängt nur vom Reibungskoeffizienten μ ab ($\alpha = \arctan(\mu)$). Eine Änderung der Normalkraft hat daher keinen Einfluss.

   Alternativ lässt sich das Gleichbleiben des Öffnungswinkels grafisch darüber begründen, dass die Längen des Normalkraftvektors und des Vektors der maximalen Tangentialkraft proportional wachsen. Dadurch bleiben die Innenwinkel des rechwinkligen Dreiecks, das die Vektoren aufspannen, und somit insbesondere der Öffnungswinkel gleich.

3. Kraft- und formgeschlossene Griffe:

   (a) Strengeres Kriterium: 1.5 P.

   Das Kriterium der formgeschlossenen Griffe ist strenger.

   Begründung:

   Formschluss bedeutet Kraftschluss ohne Reibung, sodass jeder formgeschlossene Griff auch kraftgeschlossen ist. Umgekehrt gibt es aber kraftgeschlossene Griffe, die nicht formgeschlossen sind.

   (b) Griff kraftgeschlossen? 1.5 P.

   Der Griff kann nicht kraftgeschlossen sein , da keine Drehmomente in negativer Richtung erzeugt werden können ($f_{\tau,1} > 0$, $f_{\tau,2} = 0$).

Aufgabe 5 *Bildverarbeitung*

1. Filteroperationen: 2 P.

   - Name eines Tiefenpass-Filter:
     - Median
     - Mittelwert
     - Gauß
   - Anwendung von Tiefenpass-Filtern: Glättung oder Rauschelimination
   - Name eines Hochpass-Filter:
     - Prewitt
     - Sobel
     - Laplace
   - Anwendung von Hochpass-Filtern: Kantendetektion

2. Formel und Namen der Terme: 1 P.

$$P = K \cdot (R|\boldsymbol{t})$$

K	intrinsische Parameter
$(R\|\boldsymbol{t})$	extrinsische Parameter

3. (a) Unterschied: Das erweiterte Kameramodell verwendet unabhängige Brennweiten f_x und f_y in u und v Richtung (rechteckige Pixel) und der Hauptpunkt $(c_x, c_y)^\top$, ist nicht identisch mit dem Ursprung des Kamerakoordinatensystems . 1 P.

   (b) Bildkoordinaten: 2 P.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} f_x \cdot x \\ f_y \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 27 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 22 \end{pmatrix}$$

4. (a) Speicherbedarf: 1 P.

   $600 \cdot 400 \cdot 3\,\mathrm{B} = 720\,000\,\mathrm{B} = 0.72\,\mathrm{MB}$

   (b) Datenübertragung per USB 2.0: 1 P.

   Ja, denn USB 2.0 kann bis $60\,\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{s}}$ übertragen und für 30 Bilder pro Sekunde von der Kamera werden nur $21.6\,\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{s}}$ benötigt.

Aufgabe 6 *Programmieren durch Vormachen*

1. Hauptfragestellungen: 2 P.

    - **Wer** soll imitiert werden?
    - **Wann** soll imitiert werden?
    - **Was** soll imitiert werden?
    - **Wie** soll imitiert werden?

2. (a) Definition: 1 P.

    Bewegungssegmentierung ist die Unterteilung der Bewegungstrajektorie(n) in mathematische einfach darstellbare Teile.

    (b) Kriterium obere Ebene: 2 P.

    Kontaktrelationen zwischen Objekten

    Kriterium untere Ebene:

    Charakteristiken von Trajektorien (Bewegungsdynamik)