Aufgabe 1 *Transformationen* (6 Punkte)

1. Gegeben sei die Matrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Beweisen Sie, dass es sich bei R um eine *Rotationsmatrix* handelt: $\boxed{\text{4 P.}}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Geben Sie die *inverse* Matrix R^{-1} zu R an. $\boxed{\text{1 P.}}$

3. Gegeben sei die Verkettung einer Rotation und Translation in kartesischer Darstellung: $\boxed{\text{1 P.}}$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Überführen Sie die angegebene Transformation in eine *homogene Darstellung*.

Aufgabe 2 *Kinematik* (7 Punkte)

1. Gegeben ist ein Roboter mit zwei Gelenken, der über die Transformationsmatrizen $A_{0,1}$ und $A_{1,2}$ beschrieben wird.

$$A_{0,1} = \begin{pmatrix} cos\,\theta_1 & -sin\,\theta_1 & 0 & 50 \cdot cos\,\theta_1 \\ sin\,\theta_1 & cos\,\theta_1 & 0 & 50 \cdot sin\,\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90°) & -sin(90°) & 0 \\ 0 & sin(90°) & cos(90°) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $A_{0,2}$ von der Basis zum Endeffektor. 2 P.

   (b) Tragen Sie die DH-Parameter des Roboters in die Tabelle auf dem Lösungsblatt ein. 2 P.

2. Die Beziehung zwischen Endeffektor-Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit wird gegeben durch: 3 P.

$$\dot{x}(t) = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

   Leiten Sie die Beziehung zwischen Drehmomenten in Gelenken $\tau(t) \in \mathbb{R}^n$ und Kräften und Momenten am Endeffektor $F(t) \in \mathbb{R}^6$ her. Geben Sie den Rechenweg an.

Aufgabe 3 *Dynamik* (8 Punkte)

1. Das dynamischen Modell beschreibt die Beziehungen zwischen Kräften und Momenten in den Gelenken und den Positionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Armelemente.

   (a) Geben Sie die allgemeine Bewegungsgleichung an. 1 P.

   (b) Beschreiben Sie die einzelnen Ausdrücke und Terme der Gleichung und geben Sie deren Dimension an. Gehen Sie von einem System mit n Bewegungsfreiheitsgraden aus. 2 P.

2. In Abbildung 1 ist ein Roboter mit einem Rotationsgelenk dargesetllt. Der Arm hat die Länge a_1. Zur Vereinfachung wird die Masse des Armelements als Punktmasse m_1 am Ende des Arms modelliert. Durch die Einschränkungen des Systems kann q_1 als generalisierte Koordinate identifiziert werden.

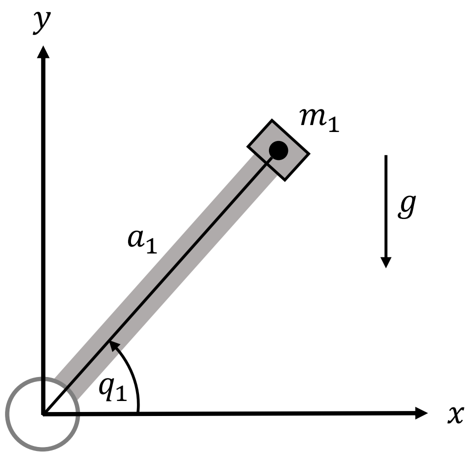


Abbildung 1: Roboter mit einem Rotationsgelenk.

   (a) Wie kann die kinetische Energie E_{kin} und potentielle Energie E_{pot} des Systems in Abhängigkeit von q_1 beschrieben werden? Stellen Sie die Gleichungen auf. 2 P.

   (b) Wie ist die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ allgemein definiert? Geben Sie die Lagrange-Funktion für den in Abbildung 1 dargestellten Roboter an. 1 P.

   (c) Um die generalisierten Kräfte τ_n des Roboters zu berechnen, soll nun basierend auf der Lagrange-Methode das Dynamikmodell abgeleitet werden. Die allgemeine Bewegungsgleichung sei gegeben durch 2 P.

$$\tau_n = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} \ .$$

   Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Roboters in Abbildung 1 in Abhängigkeit von q_1 auf.

Aufgabe 4 *Bewegungsplanung mit PRM* (6 Punkte)

1. Nennen Sie jeweils zwei Eigenschaften von PRM und RRT, in denen sich die beiden Algorithmen unterscheiden. **2 P.**

2. Auf dem Lösungsblatt ist eine Roadmap abgebildet. Diese wurde für einen kreisförmigen Roboter mit dem Radius $r = 1$ erstellt. Dunkelgraue Flächen markieren Hindernisse im zweidimensionalen Arbeitsraum. Drei zufällige Positionen $a = (24, 10)$, $b = (13, 1)$ und $c = (26, 3)$ wurden erzeugt, um die Roadmap zu erweitern. **2 P.**

   Erweitern Sie die Roadmap auf dem Lösungsblatt, indem Sie a, b und c mit den nächsten drei Nachbarn verbinden, sofern dies auf direktem Weg möglich ist.

3. In Abbildung 2 sei eine Roadmap, in der eine A^*-Suche vom Startknoten A zum Zielknoten G begonnen wurde. Die Suche nutzt die Heuristik $h = 42$. Wegkosten c sind an den Kanten angegeben. Die Kosten g von bereits bearbeiteten Knoten sind in den Knoten angegeben. Der Startknoten A wurde bereits expandiert. **2 P.**

   Geben Sie die Reihenfolge an, in der A^*-Algorithmus die weiteren Knoten expandiert.

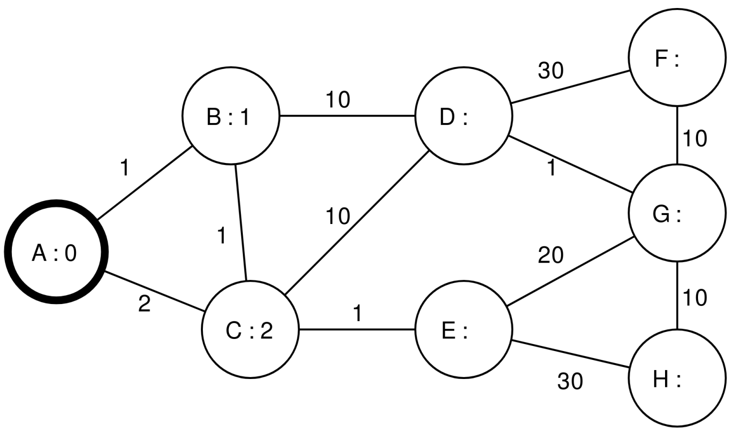


Abbildung 2: A*-Suche in einer Roadmap.

Aufgabe 5 *Greifen* (6 Punkte)

1. Erklären Sie die Unterschiede zwischen Greifanalyse und Greifsynthese. Welche Werte sind gegeben und welche werden gesucht? 2 P.

2. In der Vorlesung wurden kraftgeschlossene Griffe behandelt.

   (a) Was bedeutet es anschaulich, wenn ein Griff kraftgeschlossen ist? 1 P.

   (b) Nennen Sie zwei Qualitätsmaße zur Bewertung von Griffen. 1 P.

3. Um einen Griff für die Ausführung auf einer Roboterhand zu beschreiben, wird u. a. der Annäherungsvektor verwendet.

   (a) Was ist der Annäherungsvektor? 1 P.

   (b) Geben Sie zwei weitere Parameter zur Beschreibung eines Griffs an. 1 P.

Aufgabe 6 *Bildverarbeitung* (7 Punkte)

1. Was bedeutet Kamerakalibrierung? 1 P.

2. Gegeben sei das RGB-Bild B: 3 P.

$$B_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Korrelieren Sie das Bild mit dem Filter g, welcher aus den drei Filtermatrizen

$$g_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad g_G = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

besteht. Wenden Sie dafür die jeweiligen Filtermatrizen auf die entsprechenden Bildkanäle an, um B'_R, B'_G und B'_B zu erhalten. Ignorieren Sie dabei Randpixel, d. h. die Ergebnisse haben weniger Pixel als die Eingabebilder.

3. Folgende Punkte in $\mathbb{R}^3$ beschreiben ein Dreieck:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach einer Transformation des Dreiecks sind die neuen Eckpunkte:

$$p'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte p'_1, p'_2 und p'_3 sollen schrittweise zum Ursprungsdreieck zurück transformiert werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla F_T \in \mathbb{R}^3$ der Fehlerfunktion $F_T \in \mathbb{R}$. 1 P.

$$\nabla F_T = \left(\frac{\partial F_T}{\partial x}, \frac{\partial F_T}{\partial y}, \frac{\partial F_T}{\partial z} \right)^T \qquad F_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} ||p'_i - p_i||^2.$$

(b) Eine Aktualisierungsfunktion mittels Gradientenverfahren ist gegeben durch: 2 P.

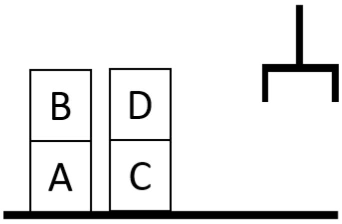
$$p'_{i,n} = p'_{i,n-1} - \alpha \cdot \nabla F_T$$

Berechnen Sie den ersten Schritt $n = 1$ der Aktualisierungsfunktion für p_1 bei der Schrittweite $\alpha = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 7 *Symbolisches Planen* (5 Punkte)

1. Nennen und beschreiben Sie die fünf Teile eines STRIPS-Zustandsraums Θ. 2 P.

2. Gegeben sei eine Planungsdomäne mit dem initialen Zustand I (siehe Abbildung 3) und dem Aktionsraum A (siehe Abbildung 4).



Konstanten: A ∧ B ∧ C ∧ D ∧ table
I: on(A, table) ∧
on(B,A) ∧ clear(B)
on(C, table) ∧
on(D, C) ∧ clear(D)

Abbildung 3: Initialer Zustand I.

Name:	putOn(?B1, ?B2, ?from)
Vorbedingung:	clear(?B2) ∧ clear(?B1) ∧ on(?B1, ?from)
Add-List:	clear(?from) ∧ on(?B1, ?B2)
Delete-List:	clear(?B2) ∧ on(?B1, ?from)

Name:	putOnTable(?B1, ?from)
Vorbedingung:	clear(?B1) ∧ on(?B1, ?from)
Add-List:	clear(?from) ∧ on(?B1, table)
Delete-List:	on(?B1, ?from)

Vereinfachung:

- *?B1 ≠ ?B2*
- *?B1 ≠ ?from*
- *?B2 ≠ ?from*
- *?B2 ≠ table*

Abbildung 4: Aktionsmenge A.

Führen Sie den ersten Schritt einer Breitensuche im Zustandsraum der Planungsdomäne durch. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Geben Sie die ClosedList $\mathcal{C}$ nach der Expansion an. 1 P.

(b) Geben Sie den Zustand (als Prädikatenliste) nach Ausführung der Aktion putOn(B, D, A) an. 1 P.

(c) Geben Sie alle weiteren parametrisierten Aktionen an, die im initialen Zustand I ausführbar sind. 1 P.