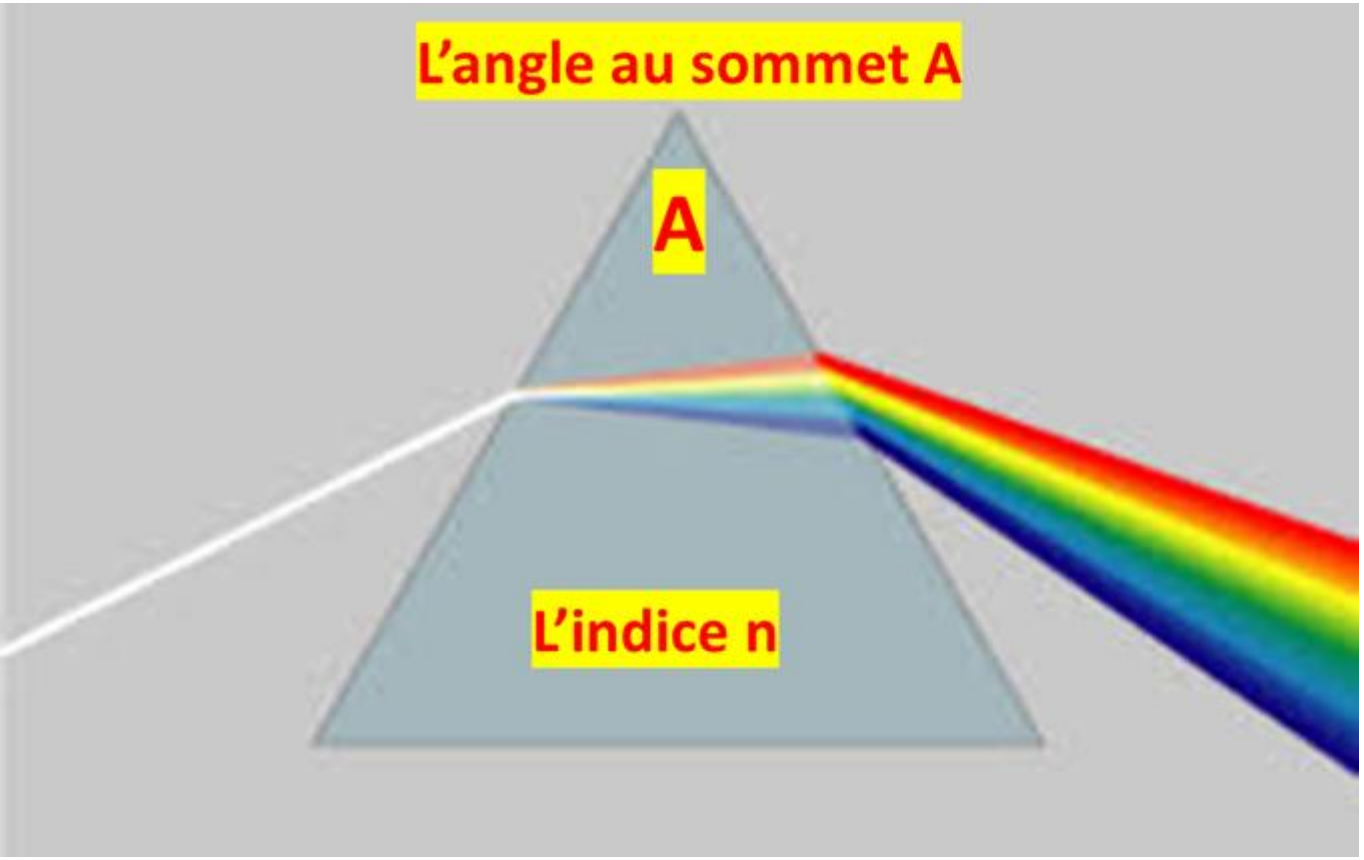
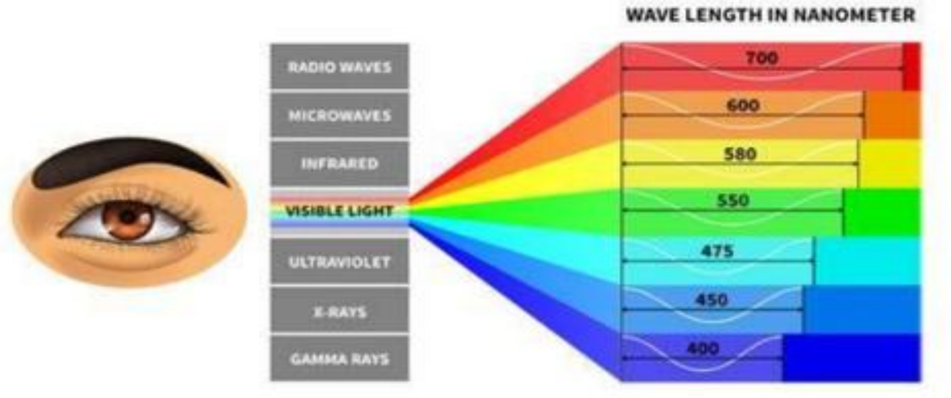
Etude du Prisme



• Le domaine de la lumière visible par l'œil humain correspond aux longueurs d'onde comprises entre 0,4 µm et 0,8 µm **(400 nm et 800 nm).**



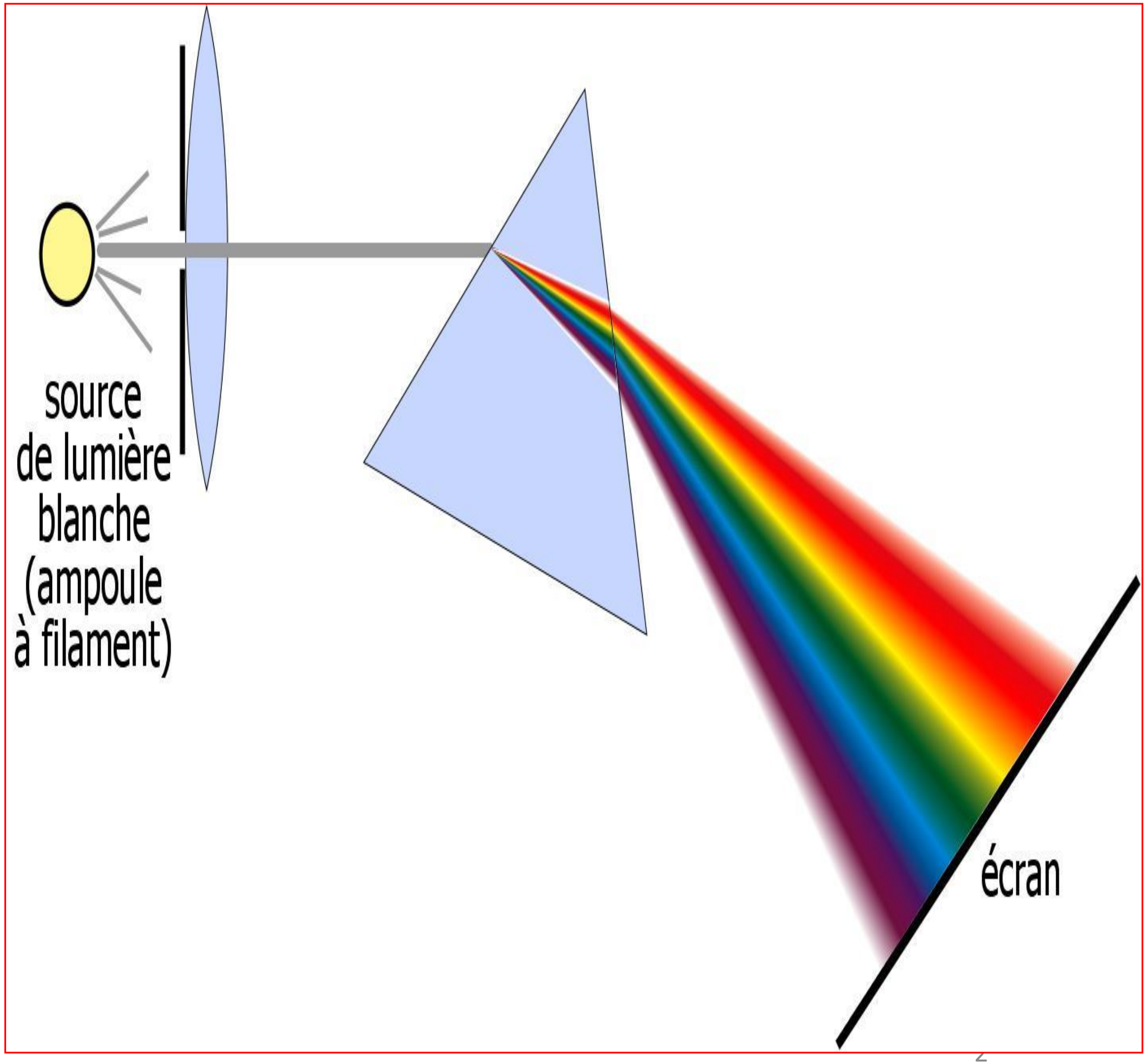
Etude du Prisme

Les prismes sont utilisés pour décomposer une lumière en ses différentes couleurs.

Un prisme est formé d'un milieu transparent limité par deux faces planes.

Il est caractérisé par son angle au **sommet A** et par son indice de **réfraction n.**

Une forme géométrique standard



La dispersion de la lumière par un prisme

Lorsque de la lumière produite par une source lumineuse frappe sur un prisme, elle est décomposée en ses différentes couleurs.

On dit qu'on a formé le « **spectre** » de la lumière étudiée.

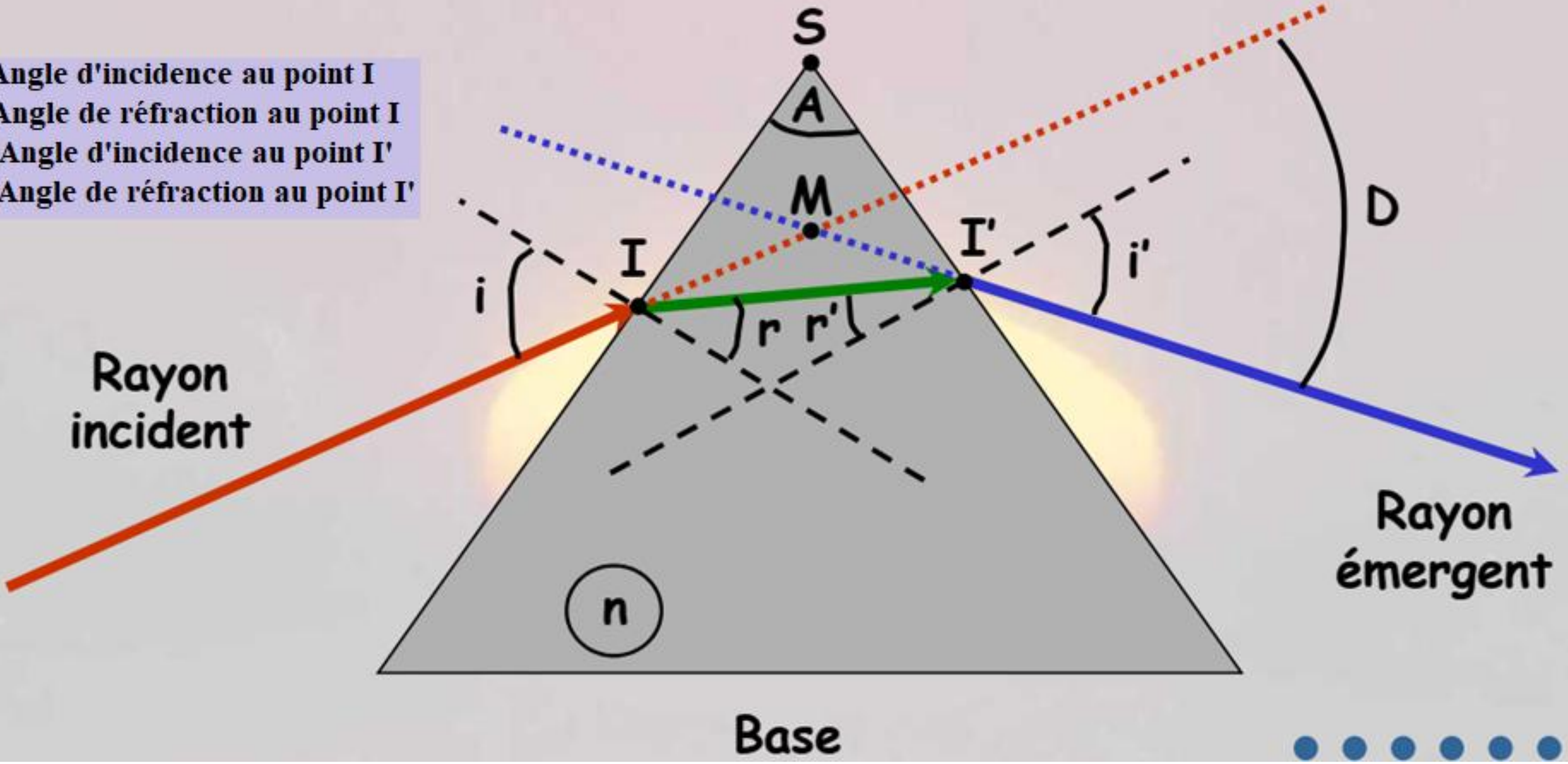
Exemple, dans le ciel, une étoile émet des rayonnements:

Pour recueillir des informations sur les espèces chimiques constituant l'étoile: il faut disperser la lumière, car chaque élément chimique émet des couleurs bien déterminées.

II – Les relations fondamentales du prisme :

On se place dans le plan d'incidence d'un rayon qui arrive par la face d'entrée du prisme (les angles sont tous positifs).

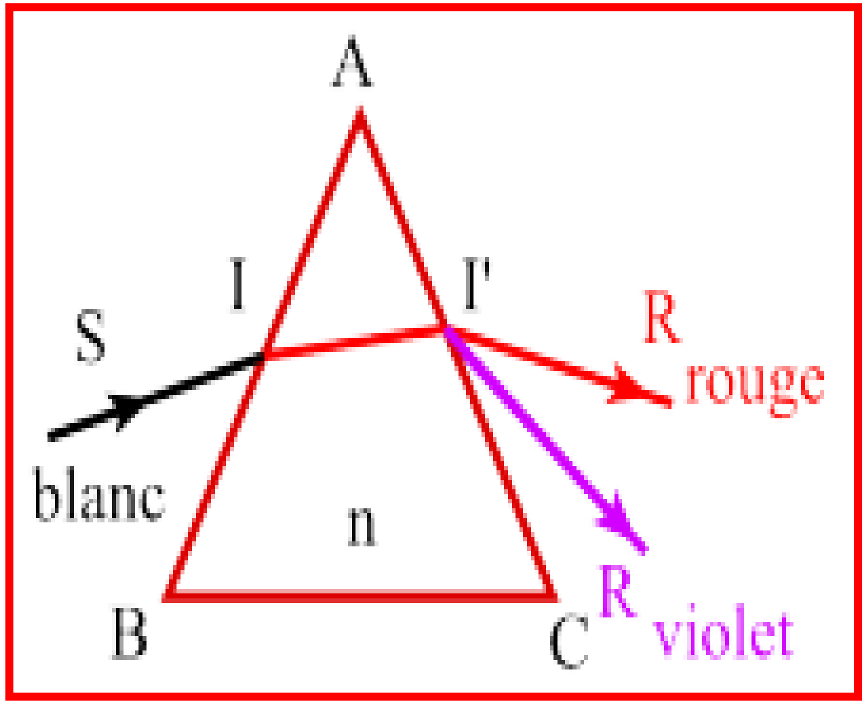
i: Angle d'incidence au point I
r: Angle de réfraction au point I
r': Angle d'incidence au point I'
i': Angle de réfraction au point I'

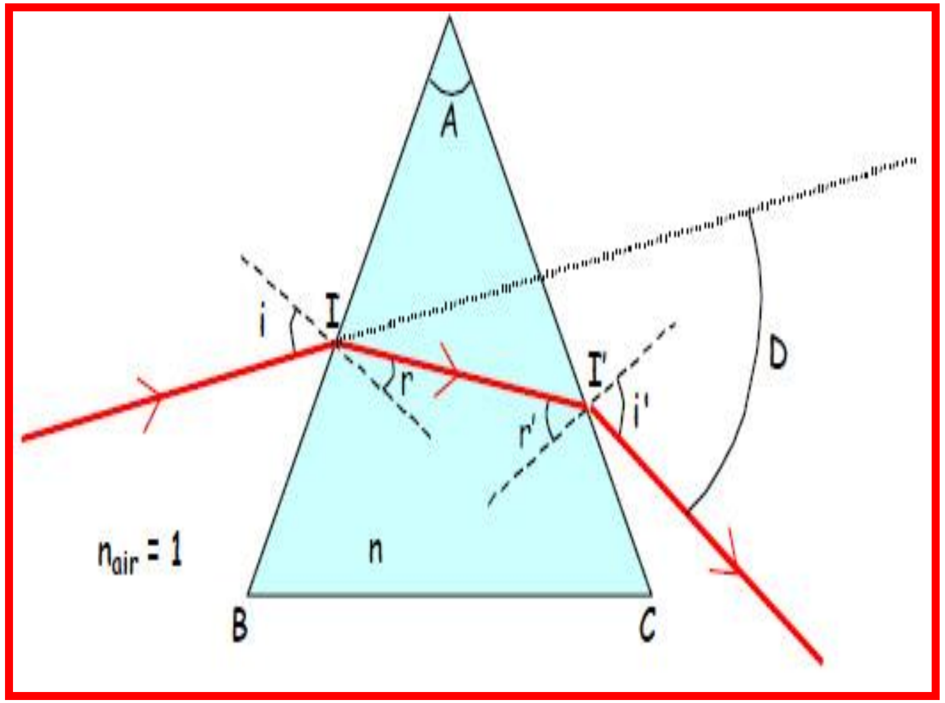


En pratique, le prisme c'est un triangle ABC .

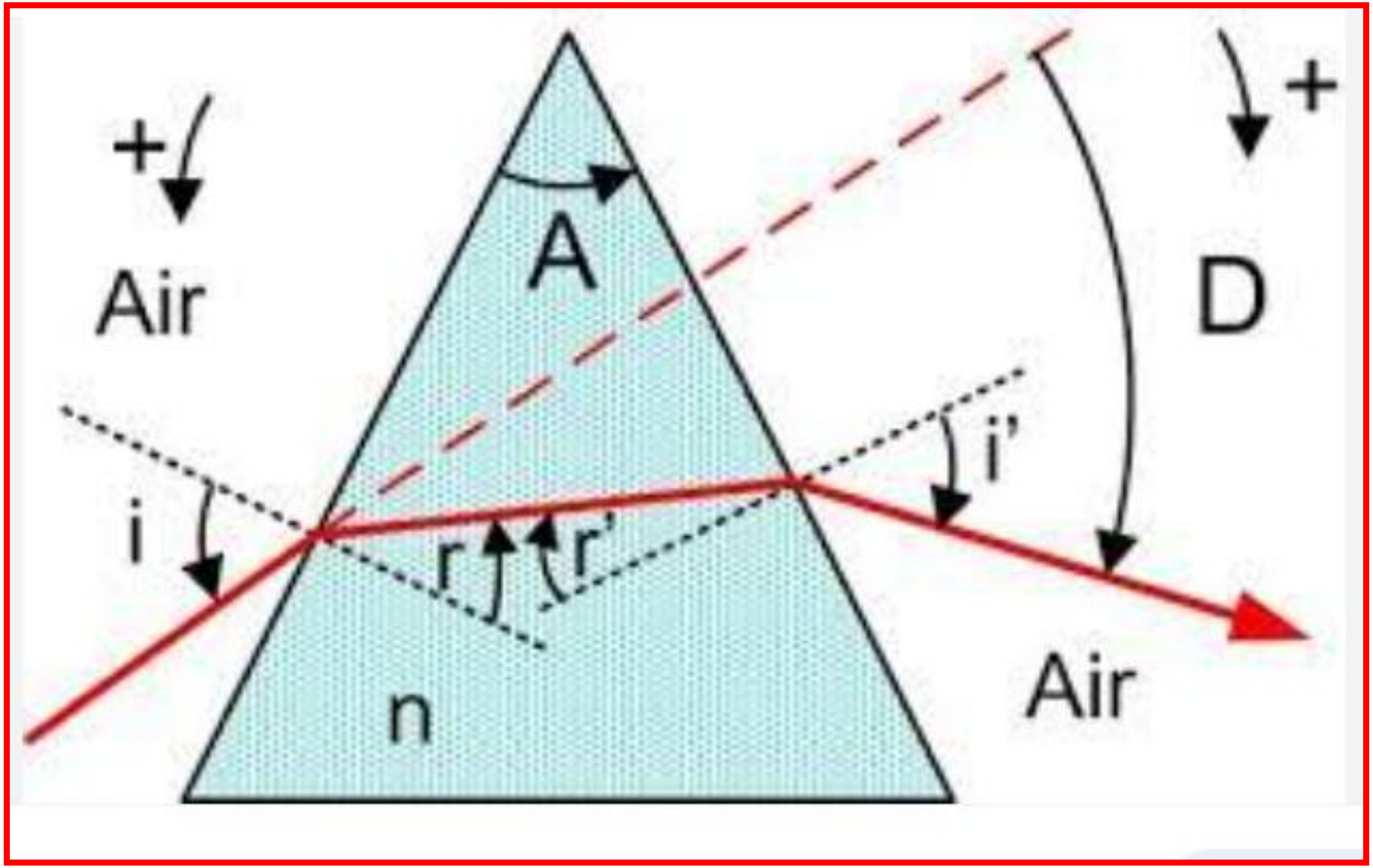
le prisme est plongé dans l'air, et donc que son indice **relatif n > 1**.

Un prisme est dans ces conditions totalement défini par son angle A et son indice relatif n.

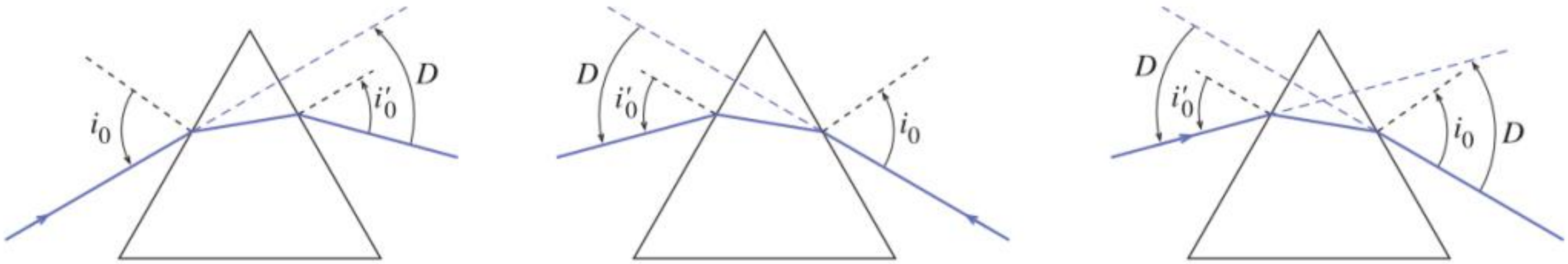




But c’est le calcul l’angle de déviation = D



l'angle de déviation D expérimentalement



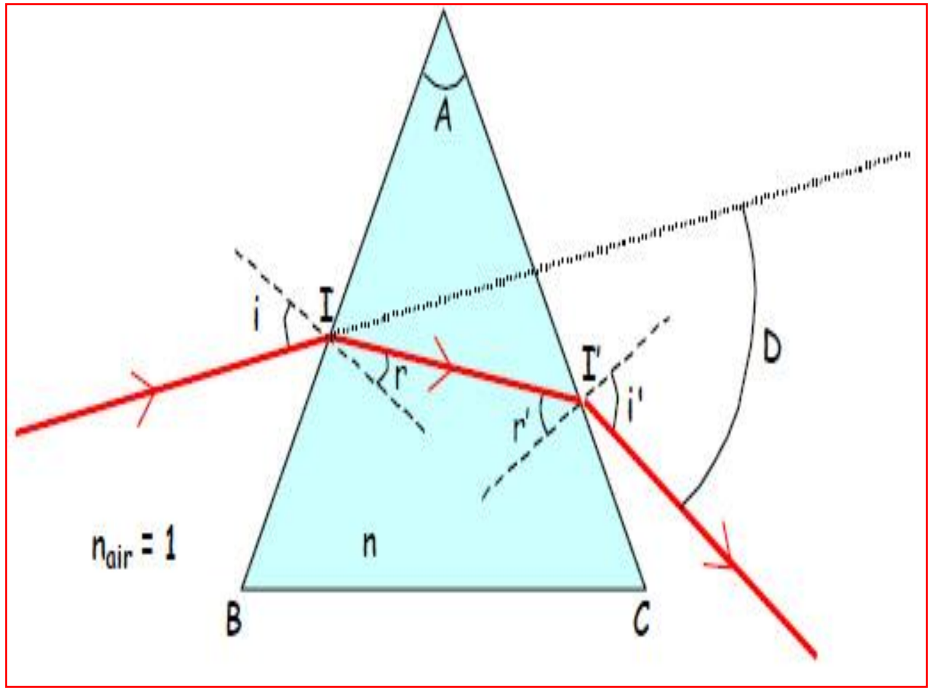
expérience initiale

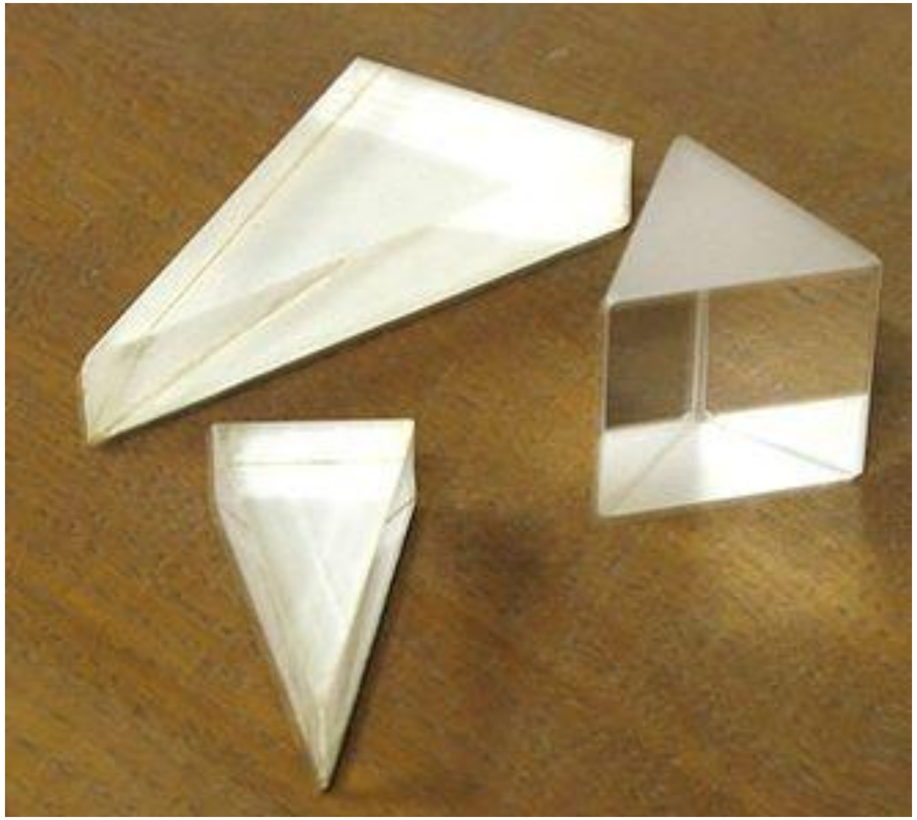
symétrie par rapport au plan bissecteur du prisme

principe de retour inverse de la lumière

La même déviation est obtenue pour deux tracés symétriques par rapport au plan bissecteur du prisme.

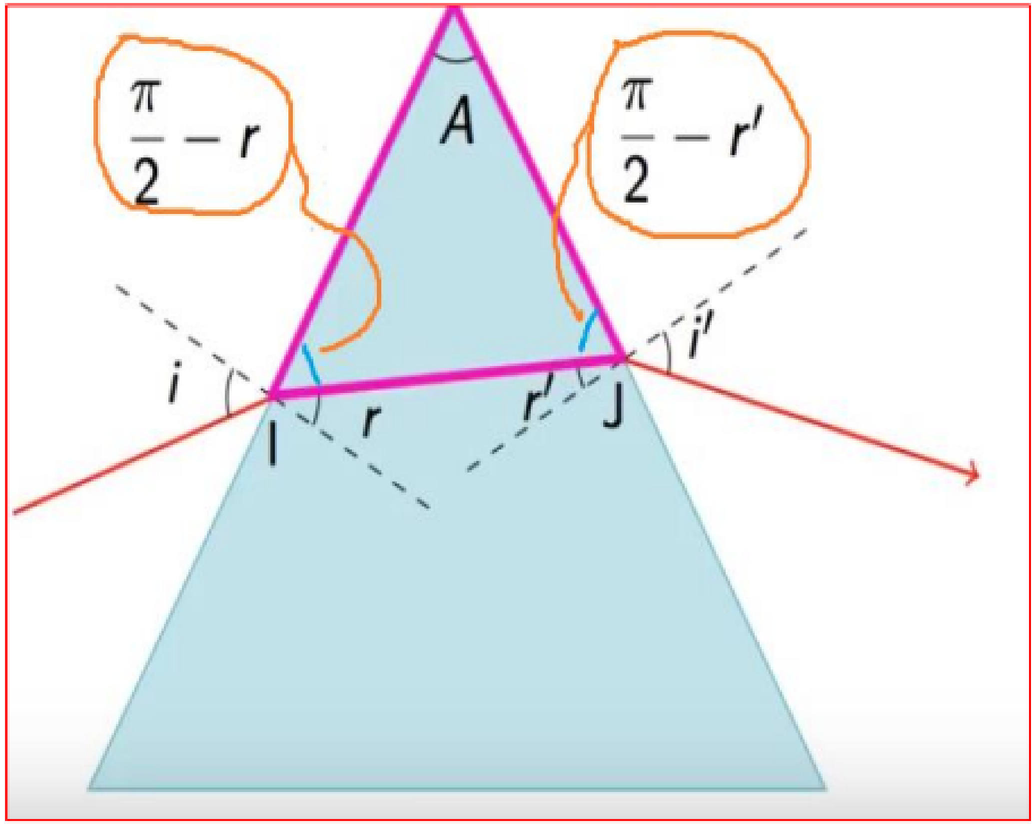
Schéma réel du prisme





Les trois formules du prisme

Relations du prisme



Calculons A : angle au sommet

Dans le triangle **(IJA),** on a:

- Trigonométrie :

$$A + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' = \pi$$

Donc A = r + r'

Relations de Snell - Descartes

Point I: sin *i* = *n* sin *r* ***(1)***

Point j: sin *i'* = *n* sin *r'* ***(2)***

A = r + r' **(3)**

Condition d'émergence d'un rayon

Rayon lumineux (angle d'incidence i sur la face d'entrée du prisme).

Les lois de Snell-Descartes:

Au point I : sin i = n sin r

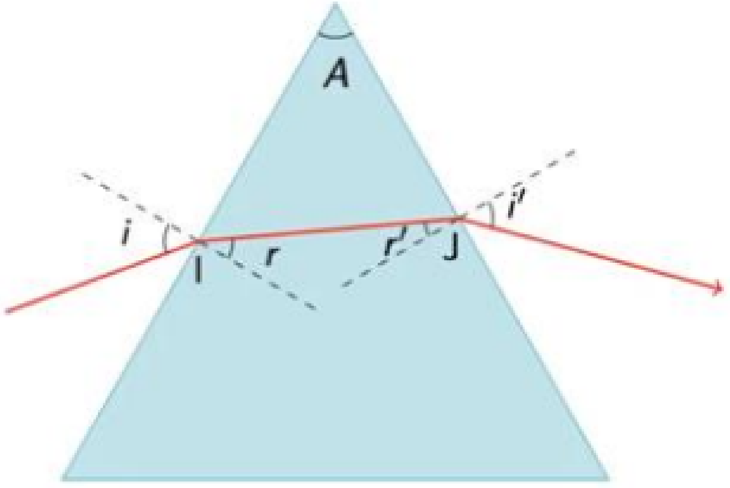
Au point J : sin i' = n sin r'

Réfraction au point I' est liée à la valeur de r'.

Au point J (face de sortie):

Si $r' > \lambda_{limite}$ = Arcsin(1/n), il y a **réflexion totale** et le rayon n'émergent pas. (pas de rayon émergent= sortant)

donc : r' est tel que ($r' \leq \lambda_{limite}$) obligatoirement pour avoir Réfraction



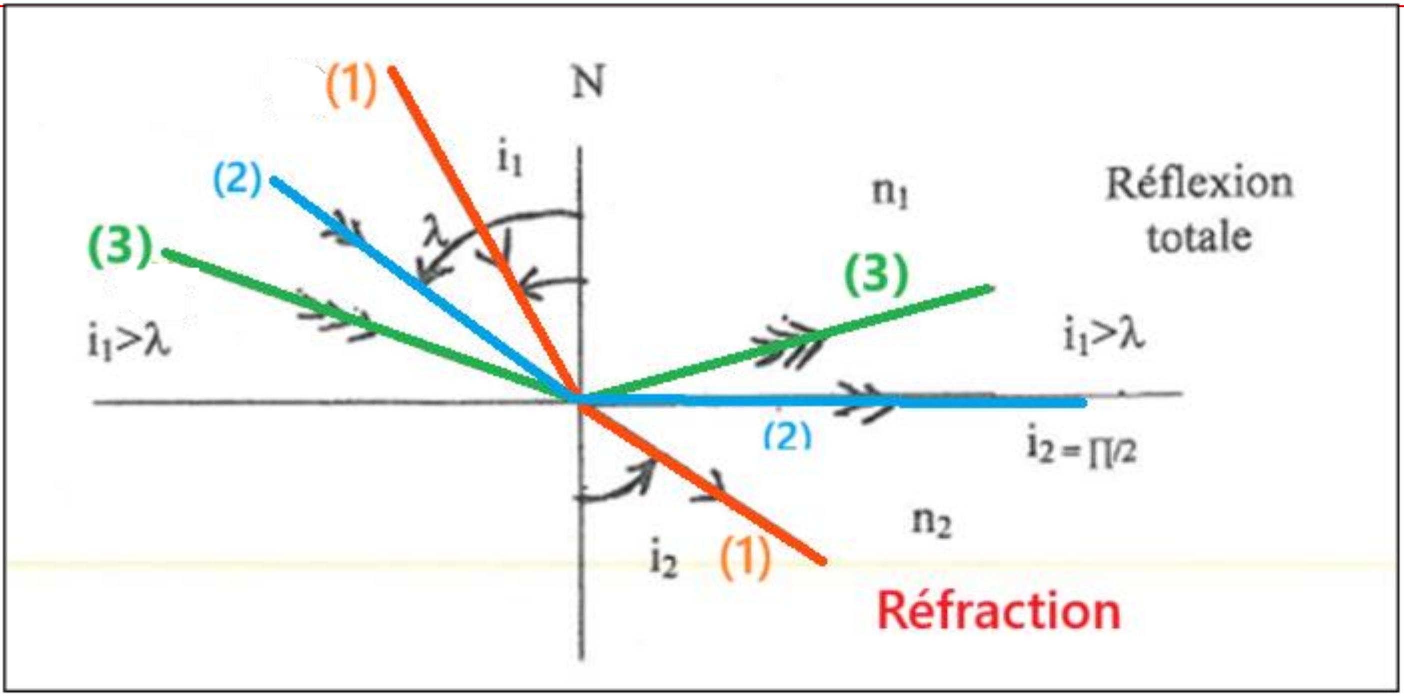
Rappel

Réfraction ou bien réflexion totale

Face de Sortie du prisme

b) Discussion des lois de réfraction:

2eme cas: n1 > n2 : milieu 1 est plus refreinent que le milieu 2



(i1 < i2)

Si (i2 = $\pi/2$) alors (i1 = ƛ) n1 sin i1 = n2 sin i2 =n2

Sin (i1) = n2/n1 = sin ƛ

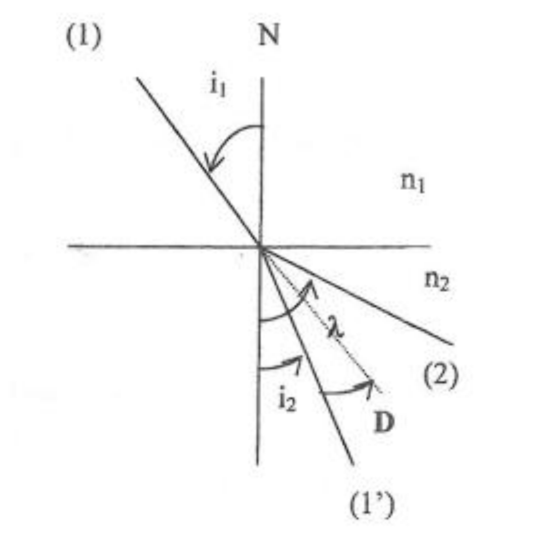
Si (i1 > $ƛ_{limite}$) alors (i2 > $\pi/2$)

On aura Réflexion Totale

Face d'entrée du prisme

b) Discussion des lois de réfraction

1er cas: n1 < n2 : milieu 2 est plus refreinent que le milieu 1



n1sin i1 = n2 sin i2 :

Or (n1< n2)   ce qui donne   i1>i2

I1 = (π/2) alors sin (ƛ) = (n1/n2) sin (π/2) = (n1/n2)

ƛ est appelé angle limite de Réfraction

Aucun rayon ne peut dévier au-delà de l'angle ƛ

Il n' y a pas un angle de réfraction supérieur à ƛ

Càd: on ne peut avoir un angle (ϴ > ƛ)

Condition sur l’angle d’incidence i:

<u>Émergence du rayon au point I:</u> Au point J: on a $(r' < \lambda_{limite})$

Or on a : $A = r + r'$

$r' = (A - r) < \lambda_{limite})$ ce qui donne $(A - \lambda_{limite}) < r)$

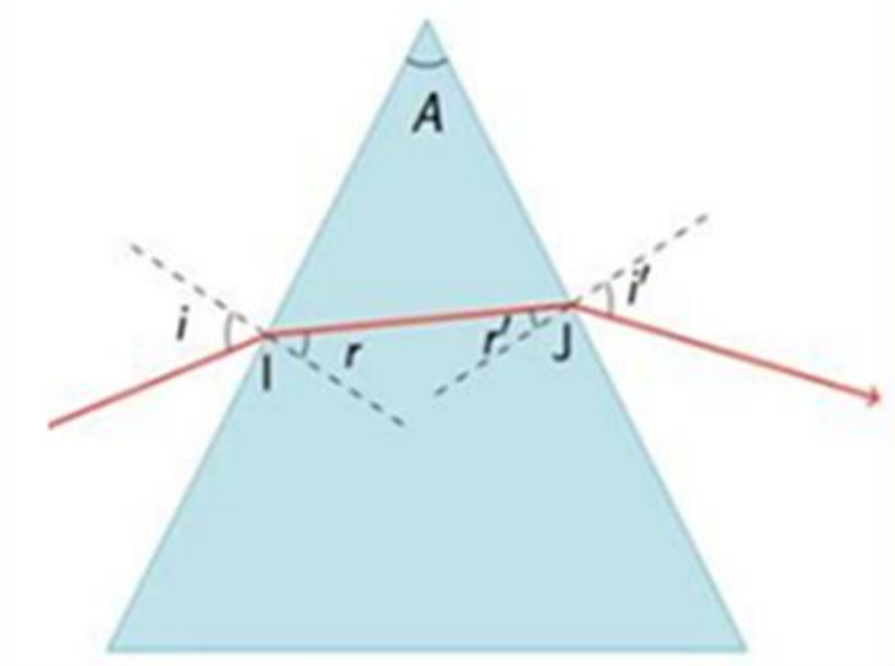
Point I: $\sin(i) = n \sin(r) > n \sin(A - \lambda_{limite})$

$\sin(i) > n \sin(A - \lambda_{limite})$

$i > \text{Arc} \sin((n \sin(A - \lambda_{limite})))$.

Donc :

$i \geq \text{Arc} \sin(n \sin(A - \text{arc} \sin(1/n)))$.



Condition sur l'angle A au sommet du prisme pour avoir émergence

Inéquation : $r' \leq \lambda_{limite}$ **donne la réfraction au point J**:

Équation (3) du prisme : **A= r + r' alors (r' = A- r)**

Càd : (**r'** est minimum si **r** est maximum)

si r = λ_{limite} . On aura donc

Inéquation (3) : $(A - \lambda_{limite} \leq r')$.

(1) et (3) alors $A - \lambda_{limite} \leq r' \leq \lambda_{limite}$ **alors** $A \leq 2\,\lambda_{limite}$

Autre démonstration

Au point I ona $\sin(i) = n \sin(r)$

$i = 90$ alors $r =$ angle limite $= \lambda_{limite}$

Donc il faut que $r < \lambda_{limite}$

de meme

Au point J on a $n \sin(r') = \sin(i')$

$I' = 90$ alors $r' = \lambda_{limite}$

Donc il faut que $r' < \lambda_{limite}$

Donc

$r' < \lambda_{limite}$

$r < \lambda_{limite}$

Donc $A = (r + r') < 2\lambda_{limite}$

Calcul de la déviation

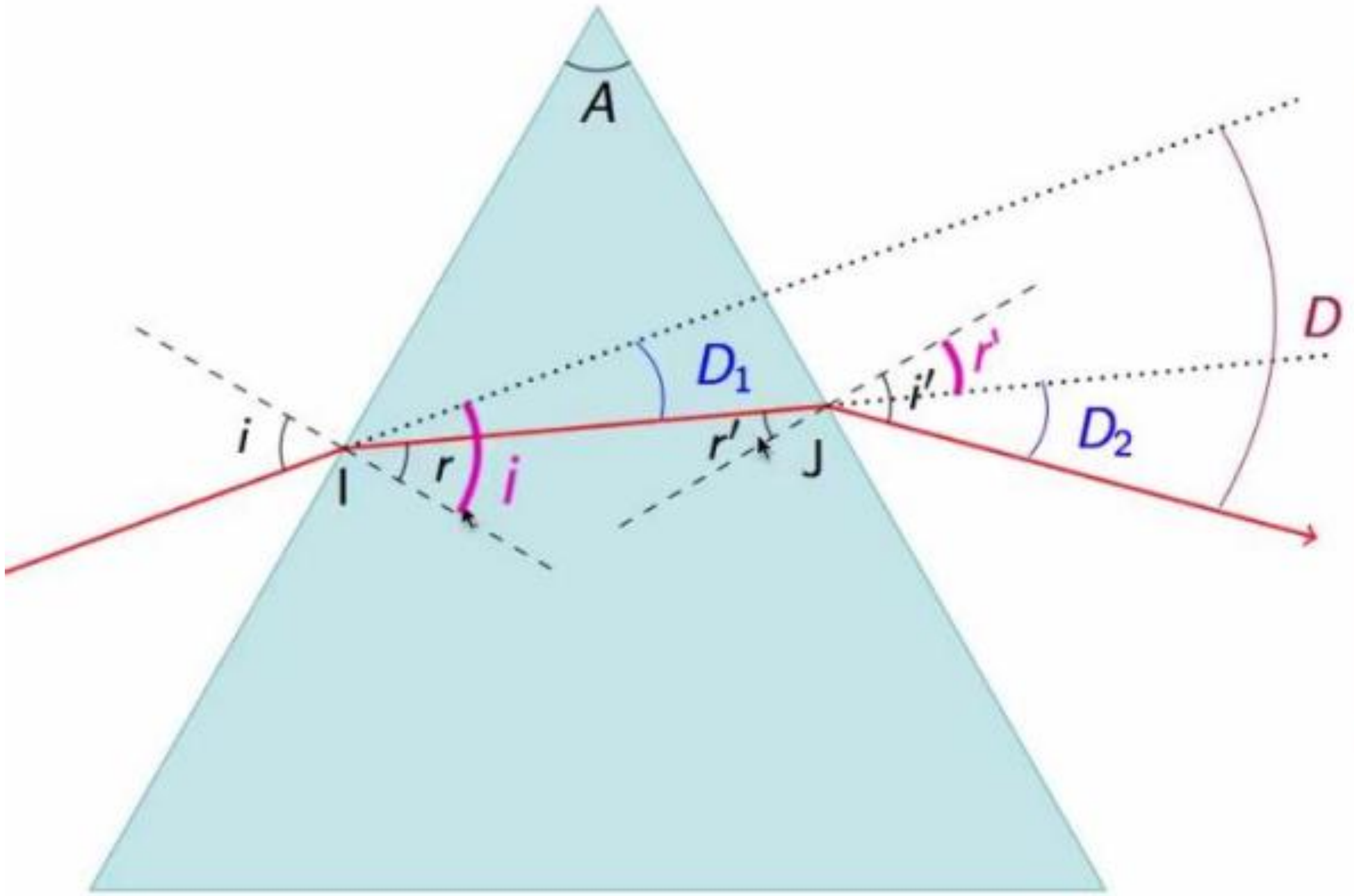
L'angle de la déviation D est par définition:

l'angle dont il faut faire tourner le rayon **incident SI** pour l'amener dans la direction du rayon **émergent JR**.

Cette déviation est donc la somme de deux déviations successives qui ont lieu dans le même sens, **l'une à l'entrée point I,** l'autre **à la sortie du prisme point J**,

D = D1 + D2

Rappel



- $D_1 = i - r$
- $D_2 = i' - r'$

Ainsi :

$$D = D_1 + D_2 = i - r + i' - r'$$

$$\Longrightarrow \boxed{D = i + i' - A}$$

Avec : A = r + r'

Point I: sin *i* = *n* sin *r* (1)

Point j: sin *i'* = *n* sin *r'* (2)

A = r + r' (3)

Expression de la fonction de $D = f(i)$

D = i + i' - A

3 formules du prisme $\Longrightarrow$ Expression de i' en fonction de i

$\Longrightarrow$ La déviation ne dépend que de i lorsque n et A sont fixés

Calculer i' = f(r)

En effet :

Point J • $n \sin r' = 1 \sin i' \Longrightarrow i' = \arcsin(n \sin r') = \arcsin(n \sin(A - r))$

Point I • $1 \sin i = n \sin r \Longrightarrow r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$

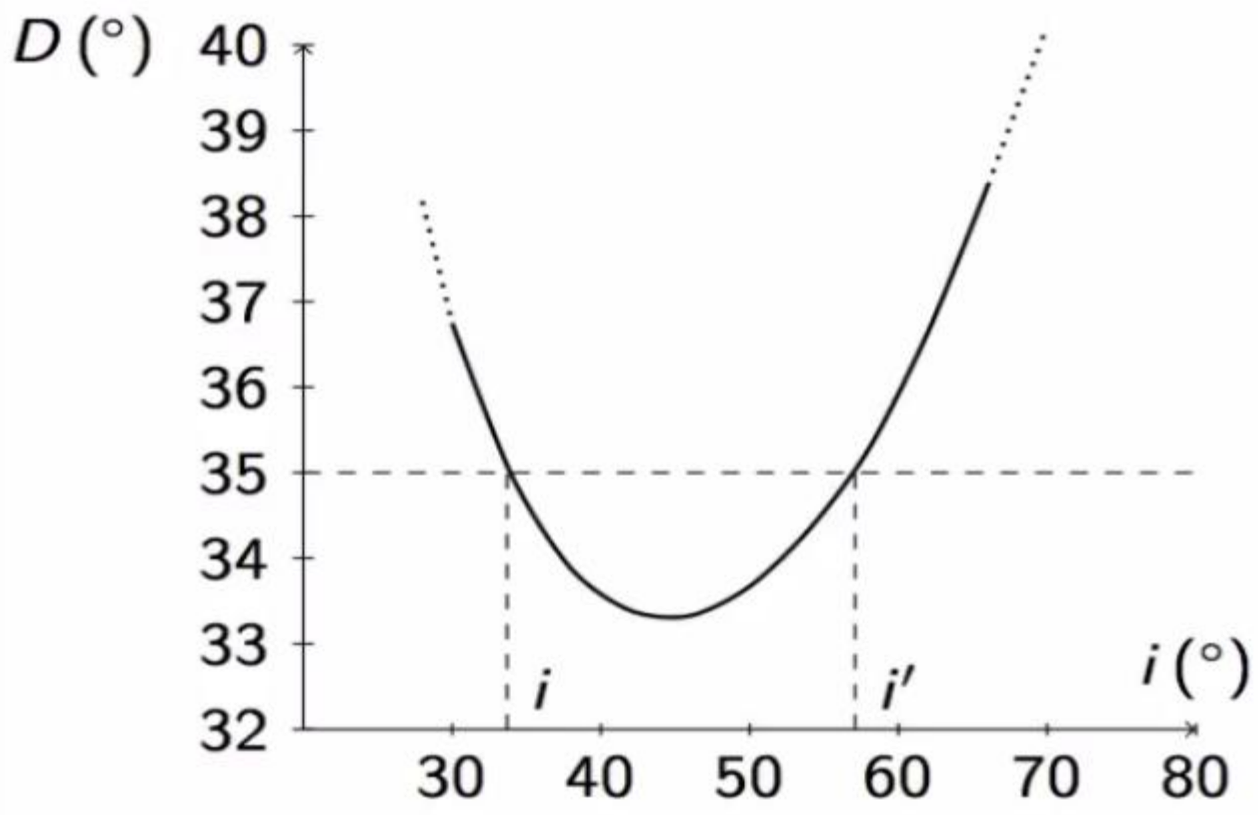
Finalement :

$$\boxed{D = i + \arcsin\left(n \sin\left(A - \arcsin\frac{\sin i}{n}\right)\right) - A}$$

Exemple expérimental

Allure de la fonction $D = f(i)$

$D = f(i)$ pour $A = 55{,}75°$ et $n = 1{,}5$



Pour calculer D minimale:
Calculer les dérivées de (1), (2), (3) et (4)

(1) $\sin(i) = n\sin(r)$

(2) $n\sin(r') = \sin(i')$

(3) $r + r' = A$

(4) $D = i + i' - (r + r')$

1. $\cos(i) = n\cos(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$
2. $\cos(i') = n\cos(r')\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}i'}$
3. $dr + dr' = 0$
4. $dD = di + di'$

Or d'après la relation 4. : $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 + \frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i}$

Et d'après 1. et 2. : $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 + \frac{n\cos(r')dr'}{\cos(i')} \times \frac{\cos(i)}{n\cos(r)dr}$

D'après 3. : $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 - \frac{\cos(r')\cos(i)}{\cos(r)\cos(i')}$

dr = -dr' (A= cste)

Calcul développé des dérivées

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 - \frac{\cos(r')\cos(i)}{\cos(r)\cos(i')}$$

D'où : $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$ si et seulement si $\cos(r')\cos(i) = \cos(r)\cos(i')$

$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$ si et seulement si $(1 - \sin(r')^2)(1 - \sin(i)^2) = (1 - \sin(r)^2)(1 - \sin(i')^2)$

$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$ si et seulement si $(1 - \frac{1}{n^2}\sin(i')^2)(1 - \sin(i)^2) = (1 - \frac{1}{n^2}\sin(i)^2)(1 - \sin(i')^2)$

$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$ si et seulement si $\frac{1}{n^2}\sin(i')^2 + \sin(i)^2 = \frac{1}{n^2}\sin(i)^2 + \sin(i')^2$

$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$ si et seulement si $(\frac{1}{n^2} - 1)(\sin(i')^2 - \sin(i)^2) = 0$

Or $\frac{1}{n^2} \neq 1$: $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$ si et seulement si $\sin(i)^2 = \sin(i')^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{D \text{ est minimal pour } i = i'}$

Déviation minimale et angle au sommet du prisme $D_{min} = f(A)$

Si $D = D_{\mathrm{m}}$ alors $i = i'$; donc $r = r'$ (les deux lois de Descartes au niveau des deux dioptres du prisme sont les mêmes)

$A = r + r'$

On a alors : $D_{\mathrm{m}} = 2\,i - A \implies i = \dfrac{D_{\mathrm{m}} + A}{2}$; On a aussi $r = \dfrac{A}{2}$

La loi de Descartes devient :

$$\sin\, i = n \sin\, r \implies \sin\, \frac{D_{\mathrm{m}} + A}{2} = n \sin\, \frac{A}{2}$$

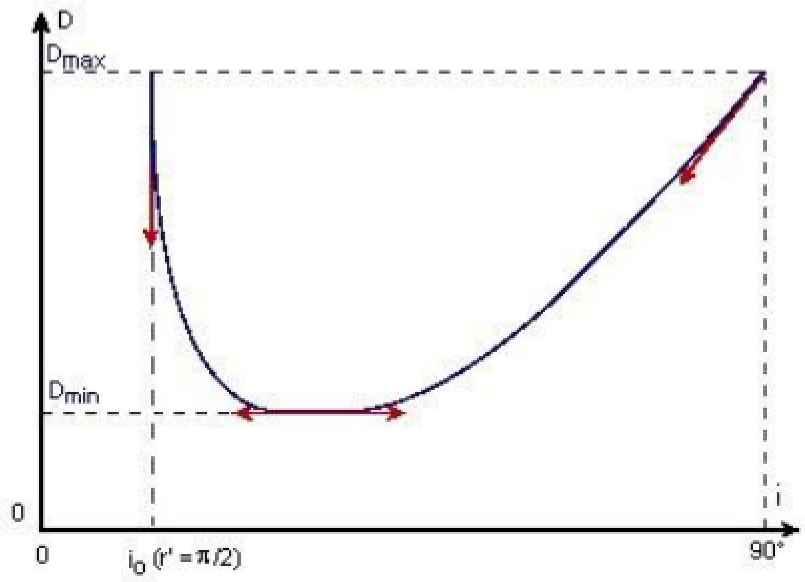
$$D_{\mathrm{m}} = 2\, \arcsin\left(n \sin\, \frac{A}{2}\right) - A$$

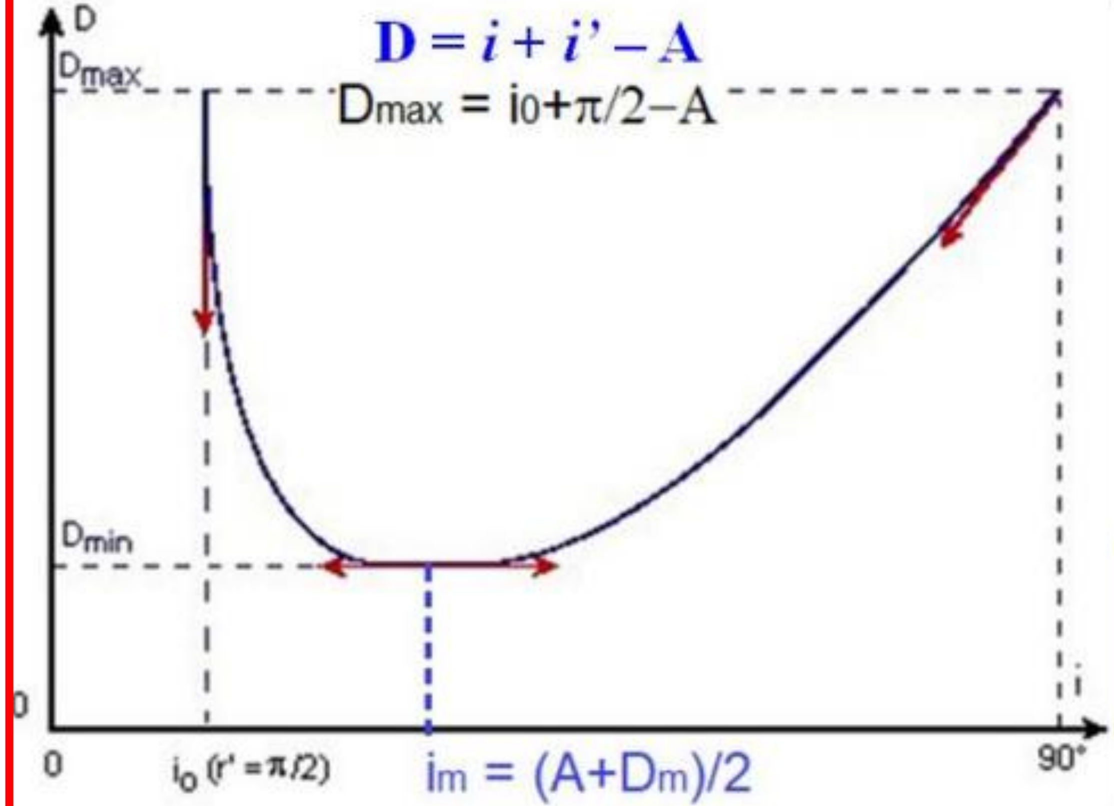
Etudier la variation de la déviation D

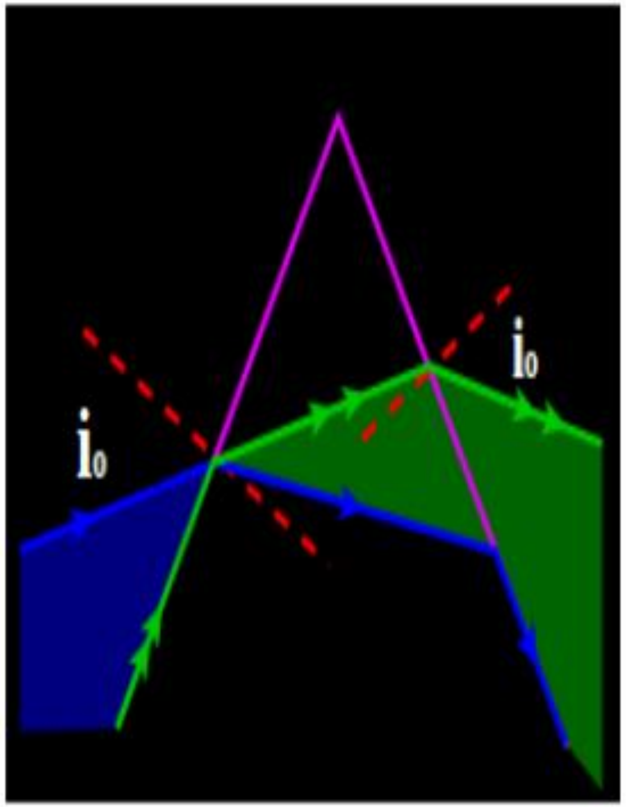
$$D = f(n, i, A)$$

$$D = i + i' - A$$

$$D_0 = i + 90° - A$$







$D_{max} = D_0 = i + 90° - A$

- D'après le **Principe du Retour Inverse** de la **Lumière, il existe 2 Valeurs de l'Angle d'Incidence *i* :**

- $i = i_0$ $i' = 90°$: **Ray. Bleu**

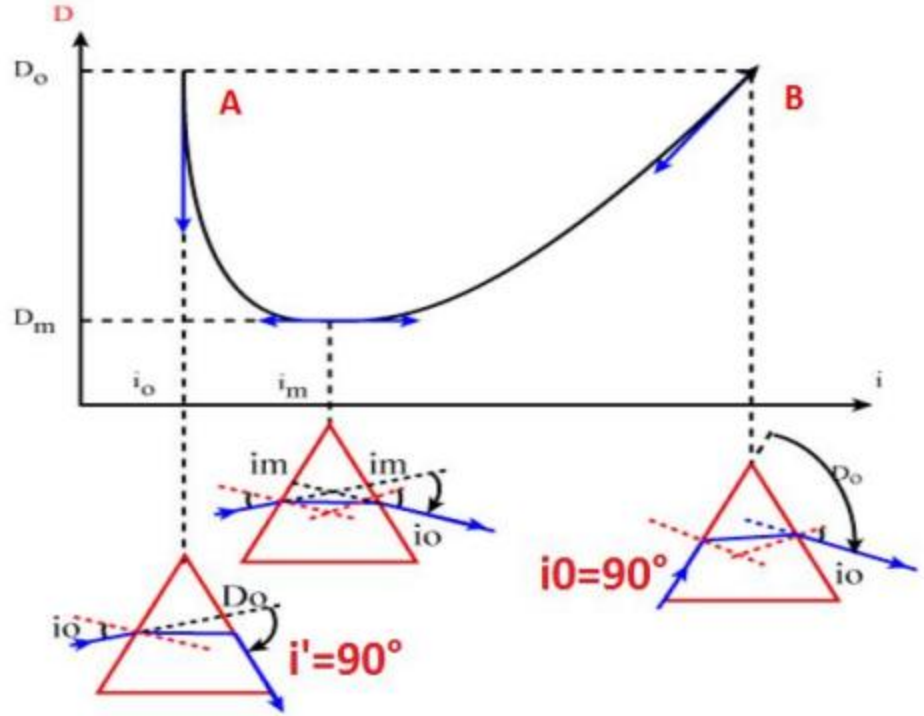
Même Déviation: $D_{max} = i_0 + \pi/2 - A$

- $i = 90°$ $i' = i_0$: **Ray. Vert**

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos i' \cdot \cos r}$$

$$\begin{cases} i = i_0 \\ I' = 90° \end{cases} \quad \frac{dD}{di} = -\infty$$

$D_0 = i_0 + 90° - A$



$\frac{dD}{di} = +1$

- **Point A** correspond à l'incidence minimale i_0 pour laquelle existe un rayon émergeant, i' vaut alors 90° .

- **Point B** (incidence rasante i= 90°), l'angle i' est égal à i_0.

- Pour les points A et B, la déviation est maximum.

Angle Incident (i)	i_0	i_m	+90°
Angle émergent (i')	+90°	$_{im}$ (r=r')	i_0
dD/di	- infini	0	+1
D(i)	D_0	D_m	D_0

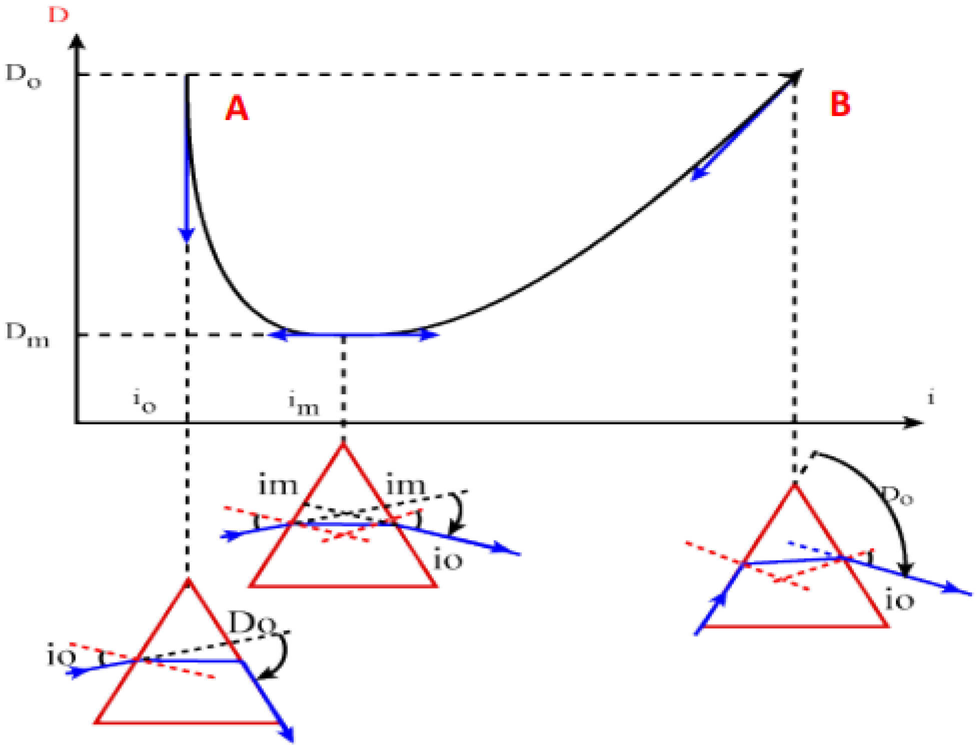
21

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \,.\, \cos r'}{\cos i' \,.\, \cos r}$$

$$\frac{dD}{di} = +1$$

$i=i'$ et $r=r' = A/2$

$D_m = 2i_m - A$



D'après le principe du retour inverse de la lumière, il existe deux valeurs de i ($i = i_0$ et $i = 90°$) (et donc de i') qui donnent la même déviation.

Quand $i = i' = i_{min}$ alors la déviation est minimum.

Résumé

- $i = i_0$ et $i' = 90°$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{dD}{di} = -\infty$ $\Longrightarrow$ D_{max}
- $i = i' = i_m$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{dD}{di} = 0}$ $\Longrightarrow$ D_{min}
- $i = 90°$ et $i' = i_0$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{dD}{di} = +1$ $\Longrightarrow$ D_{max}

Angle Incident (i)	i_0	i_m	90°
Angle Emergent (i')	90°	i_m	i_0
dD/di	$-\infty$	0	+1
D(i)	D_{max}	D_{min}	D_{max}

$$D_{max} = i_0 + 90° - A$$
$$D_{min} = 2i_m - A$$

Mesure de l'indice n d'un prisme

Soit $D_{(minimale)}$ = l'angle de déviation minimum.

On a $D = i + i' - A$ **Avec** $i = i_0 = i_0' = i_m$

$(D_m = 2\, i_m - A)$

$i_m = (A + D_m) / 2$ et $(r_m = A / 2)$

$\Rightarrow$ $\sin i_m = n \sin r_m$

$Sin\, ((A + D_m)/2)) = n \sin (A/2)$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Résumé

$$\boxed{D \text{ est minimal pour } i = i'}$$

Et alors :

Si : $i = i' = i_m$

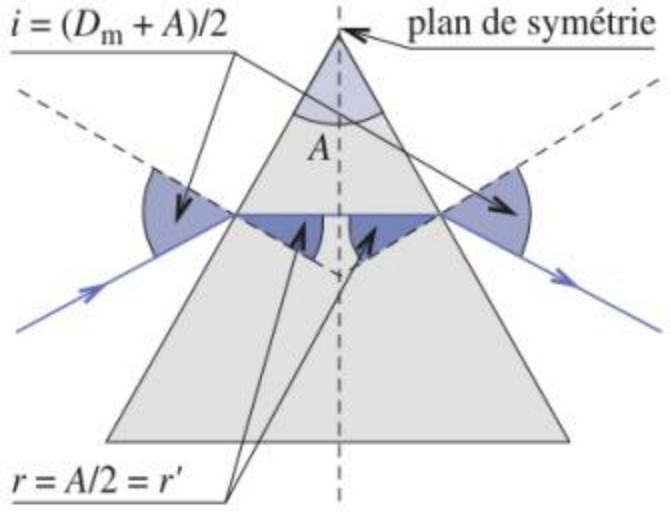
Alors : $r = r' = \dfrac{A}{2}$

Donc : $D_m = 2i_m - A$ $\Longrightarrow$ $i_m = (A + D_m)/2$

Or d'après (1) : $\sin i_m = n \sin r_m$ $\Longrightarrow$ $n = \sin i_m / \sin r_m$

Soit enfin l'Expression de l'**Indice de Réfraction** n en fonction de A et D_m :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$



Disposition géométrique des rayons au minimum de déviation.

-la déviation D:

Comment varie D lorsque l'indice n varie.

(Le verre étant dispersif, son indice varie avec la longueur d'onde.)

Pour un rayon incident donné, l'angle **d'incidence i est fixé** ;

A est un paramètre constant pour un prisme donné (A=60°).

Donc D dépend de i'.

Il faut donc trouver comment varie i' en fonction de n. ???????????

Au point I (face d'entrée du prisme): **$\sin(r) = \sin(i)/n$;**

Donc quand : **n augmente, r diminue.**

Ensuite r' est donné par $r' = A - r$.

Donc (r') augmente quand (r) diminue.

Au point J (face de sortie du prisme) : **$\sin(i') = n \sin(r')$.**

$D = i + i' - A$

i' augmente quand r' et n augmentent.

Déviation D = f(i') augmente alors n augmente.

Déviation D: augmente avec i' donc : augmente avec (n, r')

c) Influence de la longueur d'onde sur la déviation

En première approximation, la loi de Cauchy donne les variations de l'indice de réfraction du verre en fonction de la longueur d'onde :

où a et b sont des constantes caractérisant le milieu transparent.

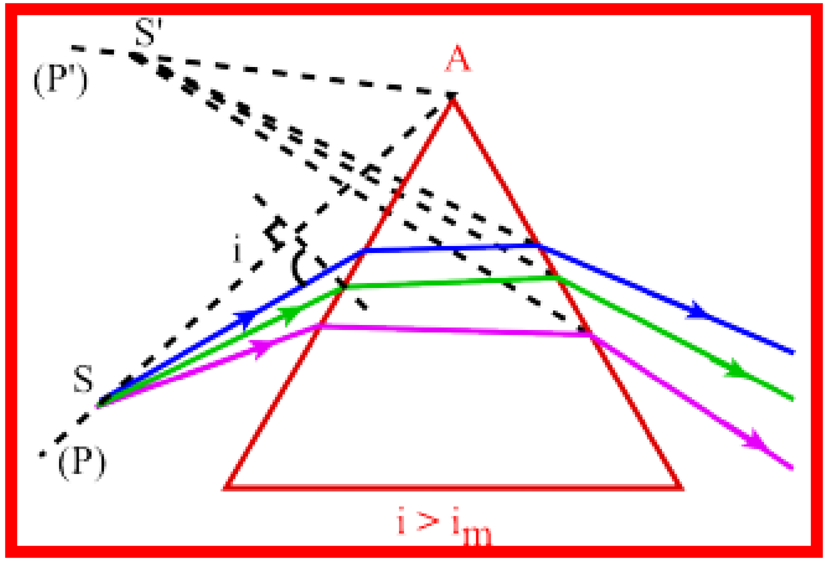
Cette loi montre que l'indice n augmente quand la longueur d'onde diminue, c'est à dire lorsque l'on passe du **rouge au violet par diffraction du prisme.**

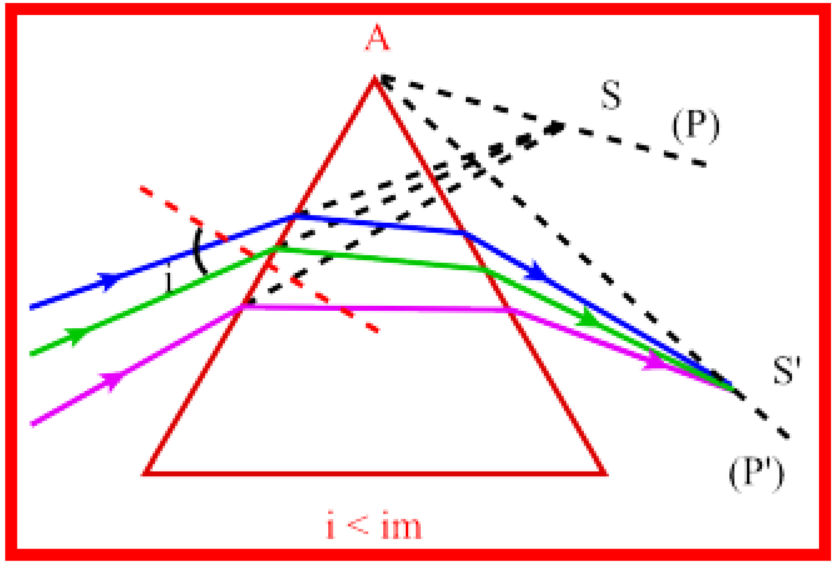
Par conséquent, la lumière rouge sera moins déviée que la lumière violette. Ce qui est conforme aux constatations expérimentales.

$$n = a + \frac{b}{\lambda_0^2}$$

Déviation D augmente alors n augmente ce qui donne la longueur d'onde diminue.

Image dans le prisme:





pour chaque valeur de i, il existe deux plans conjugués (P) et (P') tel qu'à tout point S de l'un correspond dans le même plan de section principale un point S' de l'autre. Ces plans qui sont appelés **plans homocentriques** passent tous par l'arête du prisme.

Pour un prisme, l'ensemble des points à l'infini et ceux qui appartiennent à son arête sont rigoureusement stigmatiques.