Solution de la série n° 2

Exercice 1. 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul fixé. Considérons la subdivision régulière $\mathcal{S}_n$ de $[0,1]$ donnée par

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1,$$

avec $x_i = \dfrac{i}{n}$ pour tout entier naturel i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$. Il est évident que f est constante sur chaque sous-intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, avec

$$\forall\, x \in]x_i, x_{i+1}[,\ f(x) = \frac{i^2}{n^2} = c_i.$$

Ce qui montre que f est bien une fonction en escalier.

2) Par définition de l'intégrale des fonctions en escalier, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\cdot c_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\cdot\frac{i^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2.\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}\cdot$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\cdot\end{aligned}$$

Remarque. (Voir remarque 2 : page 9 (chapitre 2)). En faisant le changement de variable $k = i+1$, la fonction f peut aussi s'écrire pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ sous la forme :

$$\forall\, x \in]x_{k-1}, x_k[,\ f(x) = \frac{(k-1)^2}{n^2}\cdot$$

La valeur de l'intégrale de f dans ce cas est donc la même

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}).\frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\cdot$$

Exercice 2. 1) Soit $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée en même temps aux fonctions en escalier ϕ et ψ. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha_i \in]x_{i-1}, x_i[$. Comme $f(\alpha_i) = 1$ et ψ est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$, on obtient

$$\begin{aligned}\forall\, x \in]x_{i-1}, x_i[,\ f(x) \leqslant \psi(x) &\implies f(\alpha_i) \leqslant \psi(\alpha_i) \\ &\implies 1 \leqslant \psi(x).\end{aligned}$$

De même puisque $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\beta_i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $\beta_i \in]x_{i-1}, x_i[$. Comme $f(\beta_i) = 0$ et ϕ est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall\, x \in]x_{i-1}, x_i[,\ \phi(x) \leqslant f(x) &\implies \phi(\beta_i) \leqslant f(\beta_i) \\ &\implies \phi(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall\, x \in [a,b]\backslash\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad 1 \leqslant \psi(x) \ \text{ et } \ \phi(x) \leqslant 0.$$

Puisque les valeurs de ϕ et ψ aux points x_i ne sont importantes (voir remarque 1 page 9 : chapitre 2), on a

$$1 \leqslant \psi \ \text{ et } \ \phi \leqslant 0.$$

2) 1re méthode. On va utiliser la caractérisation de l'intégrabilité (voir proposition 1.6 : page 18 (chapitre 2)). D'après la question 1), si ϕ et ψ sont des fonctions en escalier quelconques telles que $\phi \leqslant f \leqslant \psi$, alors $\phi \leqslant 0$ et $1 \leqslant \psi$. D'où $\psi - \phi \geqslant 1$. Il vient de la croissance de l'intégrale (des fonctions en escalier) que $\int_a^b (\psi - \phi)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant b - a$. Ainsi on a montré qu'il existe $\varepsilon_0 = b - a > 0$ telles que si ϕ et ψ sont des fonctions en escalier quelconques sur $[a,b]$, alors on a

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \phi)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon_0.$$

Donc d'après la proposition 1.6 (chapitre 2), f n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$.

2e méthode. D'après la question 1), si ϕ et ψ sont des fonctions en escalier telles que $\phi \leqslant f \leqslant \psi$, alors $\phi \leqslant 0$ et $1 \leqslant \psi$. Il vient que $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$. On en déduit que 0 est un majorant de la partie $\left\{\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\}$. Or

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\}\cdot$$

Donc $I^-(f) \leqslant 0$. On a aussi $b - a \leqslant \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$. On en déduit que $b - a$ est un minorant de la partie $\left\{\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}$. Or

$$I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}\cdot$$

Donc $b - a \leqslant I^+(f)$. Comme $0 < b - a$ car $a < b$, on en déduit que $I^-(f) < I^+(f)$. Par suite, f n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$.

Exercice 3. 1) Il est clair que la fonctions f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. En particulier, elle est continue sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. D'après le théorème 2.1 (voir page 21 : chapitre 2), on sait que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est intégrable sur cet intervalle. Par suite, f est intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

2) Calculons $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la subdivision régulière $\mathcal{S}_n$ de $[0,1]$ définie par

$$\mathcal{S}_n = \Big(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\Big).$$

Puisque f est croissante sur $[0,1]$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\forall\, x \in \Big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\Big],\ \Big(\frac{i-1}{n}\Big)^2 \leqslant x^2 \leqslant \Big(\frac{i}{n}\Big)^2. \tag{$*$}$$

Nous définissons une fonction en escalier $\phi_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \Big(\dfrac{i-1}{n}\Big)^2 & \text{si } x \in \Big[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\Big[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Remarquons que ϕ_0 est la fonction en escalier vu en exercice 1. Donc ϕ_0 est bien une fonction en escalier. Nous définissons aussi une autre fonction en escalier $\psi_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{i^2}{n^2} \text{ si } x \in \left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right[, \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

On montre de la même manière qu'en exercice 1 que ψ_0 est une fonction en escalier. D'après la question 2 (exercice 1), l'intégrale de ϕ_0 est :

$$\int_0^1 \phi_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\cdot$$

Pour l'intégrale de la fonction ψ_0, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_0(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\cdot\end{aligned}$$

En utilisant les fonctions ϕ_0 et ψ_0, l'inégalité $(*)$ devient $\phi_0 \leqslant f \leqslant \psi_0$. D'après le cours, on sait que

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\} \text{ et } I^+(f) = \inf\left\{\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}\cdot$$

Il vient que $\int_a^b \phi_0(x)\,\mathrm{d}x \leqslant I^-(f)$ et $I^+(f) \leqslant \int_0^1 \psi_0(x)\,\mathrm{d}x$. Or f est intégrable sur $[0,1]$. Donc on a l'égalité $I^-(f) = I^+(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On en déduit que

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\cdot$$

Par passage à la limite (lorsque $n \to +\infty$), on obtient finalement

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot$$

3) *) On sait que la fonctions exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Or d'après le théorème 2.1 (voir chapitre 2 : page 21), toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est intégrable sur cet intervalle. Par suite, g est intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

****)** Calcul de $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Considérons la même subdivision $\mathcal{S}_n$ de $[0,1]$ qu'en question 2). Puisque g est croissante, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\forall\, x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad e^{(i-1)/n} \leqslant e^x \leqslant e^{i/n}. \tag{1}$$

Nous considérons ensuite deux fonctions en escalier $\phi_1, \psi_1\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies (pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$) par :

$$\forall\, x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[, \quad \phi_1(x) = e^{(i-1)/n} \text{ et } \psi_1(x) = e^{i/n} \text{ et } \phi_1(1) = \psi_1(1) = 1.$$

D'après l'inégalité (1), on a $\phi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$. De plus, l'intégral de ϕ_1 est donnée par :

$$\int_0^1 \phi_1(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}.\frac{e-1}{e^{1/n}-1}\cdot$$

De même l'intégral de ψ_1 est donnée par :

$$\int_0^1 \psi_1(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i} = \frac{1}{n}.e^{1/n}.\frac{e-1}{e^{1/n}-1}\cdot$$

Ensuite de la même façon que dans la question 2), on trouve l'inégalité suivante :

$$(e-1).\frac{1/n}{e^{1/n-1}} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (e-1).e^{1/n}.\frac{1/n}{e^{1/n}-1}.$$

Par passage à la limite (lorsque $n \to +\infty$), on obtient

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = e-1.$$

4) i) La fonction h peut aussi s'écrire sous la forme :

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{si } x \in [1,2[\\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Il en résulte que h est continue par morceaux sur $[0,2]$. Par suite, h est intégrable sur $[0,2]$.
ii) Rappelons que toute fonction intégrable (au sens de Riemann) sur un intervalle fermé bornée est nécessairement bornée. Il est évident que la fonction k n'est pas bornée sur $[0,2]$. Par suite, k n'est pas intégrable sur $[0,2]$.

Exercice 4. 1) Supposons que f est nulle sauf en un nombre fini $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ de points de $[a,b]$. Considérons la subdivision $\mathcal{S}_n$ de $[a,b]$ définie par :

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Par hypothèse sur f, on a donc pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\forall\, x \in]x_{i-1}, x_i[,\ f(x) = 0.$$

Ainsi f est une fonction en escalier sur $[a,b]$. Il vient que f est intégrable sur $[a,b]$, et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

2) Supposons maintenant que f est intégrable sur $[a,b]$, et que l'on change les valeurs de f en un nombre fini $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ de points de $[a,b]$. Considérons la fonction $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [a,b]\backslash\{x_1,\ldots,x_{n-1}\},\ g(x) = f(x) \text{ et } g(x_i) \neq f(x_i) \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Il vient en particulier que

$$\forall\, x \in [a,b]\backslash\{x_1,\ldots,x_{n-1}\},\ g(x) - f(x) = 0 \text{ et } (g-f)(x_i) \neq 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Ainsi la fonction $g-f$ est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$. D'après la question 1), la fonction $g-f$ est intégrable sur $[a,b]$, et $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
D'après la linéarité de l'intégrale (voir Proposition 3.4 du chapitre 2 page 34), il vient que la fonction $g = g-f+f$ est intégrable sur $[a,b]$, et on a

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3) Remarquons que le résultat est vrai pour les fonctions en escalier car la restriction d'une fonction en escalier est encore une fonction en escalier. Supposons que f soit intégrable sur $[a,b]$. Soit $[c,d] \subseteq [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable sur $[a,b]$ et en utilisant la proposition 1.6 (c.f. chapitre 2 page 18), il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ sur $[a,b]$ telles que

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \phi)(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Comme $\phi|_{[c,d]}$ et $\psi|_{[c,d]}$ sont des fonctions en escalier sur $[c,d]$ telles que

$$\phi|_{[c,d]} \leqslant f|_{[c,d]} \leqslant \psi|_{[c,d]} \text{ et } \int_c^d (\psi|_{[c,d]} - \phi|_{[c,d]})(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (\psi - \phi)(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Par suite, la fonction $f|_{[c,d]}$ est intégrable sur $[c,d]$ d'après proposition 1.6.

Exercice 5. 1) Considérons la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1],\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit $\mathcal{S}_0$ la subdivision régulière de $[0,1]$ définie par $\mathcal{S}_0 = \{0, 1/2, 1\}$. Puisque f est décroissante sur $[0,1]$, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2$:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) \text{ et } M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}).$$

La somme de Darboux inférieure de f pour $\mathcal{S}_0$ est donc :

$$\begin{aligned} D^-_{\mathcal{S}_0}(f) &= \sum_{i=1}^{2} (x_i - x_{i-1}).m_i \\ &= \frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot f(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{20}. \end{aligned}$$

De même, la somme de Darboux supérieure de f pour $\mathcal{S}_0$ est :

$$\begin{aligned} D^+_{\mathcal{S}_0}(f) &= \sum_{i=1}^{2} (x_i - x_{i-1}).M_i \\ &= \frac{1}{2}\cdot f(0) + \frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

2) Considérons maintenant la subdivision $\mathcal{S}_1$ de $[0,1]$ définie par $\mathcal{S}_1 = \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$. De même que dans la question précédente, on a pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) \text{ et } \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}).$$

La somme de Darboux inférieure de f pour $\mathcal{S}_1$ est donc

$$\begin{aligned} D^-_{\mathcal{S}_1}(f) &= \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1}).m_i \\ &= \frac{1}{2}.f(1/4) + \frac{1}{4}.f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}.\frac{4}{5} + f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4}.f(1) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{2}) = \frac{2449}{3400}. \end{aligned}$$

De même, la somme de Darboux supérieure de f pour $\mathcal{S}_1$ est

$$\begin{aligned} D^+_{\mathcal{S}_1}(f) &= \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1}).M_i \\ &= \frac{1}{4}.f(0) + \frac{1}{4}.f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}.f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}.f(\frac{3}{4}) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}) = \frac{1437}{1700}. \end{aligned}$$

3) Rappel. Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit que l'inégalité $a < x < b$ est un **encadrement** de x. On dit aussi que a est une **valeur approchée par défaut** de x à b-a près, et que b est une **valeur approchée par excès** de x à b-a près.

Puisque f est continue (ou décroissante) sur $[0,1]$, on a f est intégrable sur $[0,1]$. D'après la proposition 2.7 (voir chapitre 2 page 31), on a l'inégalité suivante :

$$D^-_{\mathcal{S}_0}(f) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant D^+_{\mathcal{S}_0}(f). \tag{$**$}$$

Or $D^-_{\mathcal{S}_0}(f) = \dfrac{13}{20}$, $D^+_{\mathcal{S}_0}(f) = \dfrac{9}{10}$ et $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En utilisant l'inégalité $(**)$, on obtient un encadrement de π par des nombres rationnels suivant :

$$\frac{13}{5} < \pi < \frac{18}{5}.$$

Remarque. En utilisant la subdivision $\mathcal{S}_1$ de $[0,1]$, on obtient un autre encadrement de π par des nombres rationnels suivant :

$$\frac{2449}{850} < \pi < \frac{1437}{425}.$$

4) Soit $\mathcal{S}_n$ une subdivision régulière de pas $1/n$ de $[0,1]$. D'après la proposition 2.7 (cf chapitre 2 page 31) et comme $\pi/4 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, on a l'inégalité :

$$D^-_{\mathcal{S}_n}(f) \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant D^+_{\mathcal{S}_n}(f).$$

Puisque f est décroissante sur $[0,1]$, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ on a :

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) \text{ et } M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
D^+_{\mathcal{S}_n}(f) - D^-_{\mathcal{S}_n}(f) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}).(f(x_{i-1}) - f(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}.(f(x_{i-1}) - f(x_i)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) - f(x_i)) \\
&= \frac{1}{n}(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) - f(x_n)) \\
&= \frac{1}{n}(f(x_0) - f(x_n)) \\
&= \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \\
&= \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

(Notons que les nombres $D^+_{\mathcal{S}_n}(f)$ et $D^-_{\mathcal{S}_n}(f)$ sont rationnels car f est une fraction rationnelle et le pas de la subdivision $\mathcal{S}_n$ est $1/n$). On en déduit que pour que le nombre rationnel $4\,D^+_{\mathcal{S}_n}(f)$ soit une valeur approchée par excès de π à 10^{-3} près, il suffit que $\dfrac{2}{n} \leqslant 10^{-3}$. C'est-à-dire $n \geqslant 2\cdot 10^3 = 2000$.

Exercice 6. 1) 1er cas (cas trivial) : f est identiquement nulle sur $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Alors f s'annule évidemment au moins une fois sur $[a,b]$.

2$^{\text{e}}$ cas : f non identiquement nulle sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$. De plus et d'après la formule de la moyenne, il existe une constante $c\in[a,b]$ telle que

$$f(c)=\frac{1}{(b-a)}\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or par hypothèse $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Il s'ensuit qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$. Par suite, f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

2) Supposons maintenant que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b^2-a^2}{2}$. On sait que la fonction $x\longmapsto\dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction $x\longmapsto x$ (voir chapitre 3). D'où

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x\,\mathrm{d}x$. D'après la linéarité de l'intégrale, il vient que $\displaystyle\int_a^b (f(x)-x)\,\mathrm{d}x=0$. Or la fonction $x\longmapsto f(x)-x$ est continue sur $[a,b]$. Donc d'après la question 1), il existe $c\in[a,b]$ telle que $f(c)-c=0$. C'est-à-dire $f(c)=c$. Ce qui montre que f admet au moins un point fixe sur $[a,b]$.

3) Supposons maintenant que f est positive ou nulle. Il est clair que

$$(\forall\, x\in[a\,,b],\ f(x)=0)\implies\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Réciproquement, supposons que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Montrons que f est nulle sur $[a,b]$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Comme f est positive ou nulle, on a donc $f(x_0)>0$. La continuité de f en x_0 permet d'affirmer qu'il existe un voisinage fermé $[\alpha,\beta]$ de x_0 avec $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ t.q.

$$\forall\, x\in[\alpha,\beta],\ f(x)>0.$$

La continuité de f sur $[\alpha,\beta]$ permet d'affirmer que f est minorée et atteint sa borne inférieure sur $[\alpha,\beta]$. Autrement dit, il existe $c\in[\alpha,\beta]$ tel que

$$\forall\, x\in[\alpha,\beta],\ f(x)\geqslant\inf_{t\in[\alpha,\beta]}f(t)=f(c)>0.$$

D'après la croissance de l'intégrale, il vient que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta f(c)\,\mathrm{d}x=(\beta-\alpha).f(c)>0.$$

D'après la relation de Charles, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x>0.$$

Contradiction avec $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Par suite,

$$\forall\, x\in[a,b],\ f(x)=0.$$

4) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme réel. Puisque la fonction $x\longmapsto P^2(x)$ est continue et positive ou nulle, d'après la question 3), on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b P^2(x)\,\mathrm{d}x=0 &\implies \forall\, x\in[a,b],\ P^2(x)=0\\ &\implies \forall\, x\in[a,b],\ P(x)=0\\ &\implies P=0 \text{ car un polynôme non nul admet un nombre fini de racines.}\end{aligned}$$

Exercice 7. 1) Soit $n \geqslant 1$. On a

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$
$$= \frac{(1-0)}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(0+k\cdot\dfrac{(1-0)}{n}\right)^2}$$

Ainsi R_n s'écrit sous la forme d'une somme de Riemann de la fonction intégrable (puisqu'elle est continue) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$ On sait alors que

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot$$

2) De même, (S_n) est une somme de Riemann car

$$S_n = \frac{(\pi/2-0)}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\left(0+k.\frac{(\pi/2-0)}{n}\right).$$

Par suite, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi/2}\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

3) De même, (T_n) est une somme de Riemann car

$$T_n = \frac{(1-0)}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left(0+k\cdot\frac{(1-0)}{n}\right)^2\sin\left(\pi\left(0+k\frac{(1-0)}{n}\right)\right).$$

Par suite, (T_n) est convergente et on a

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

4) On (U_n) n'est pas une somme de Riemann, mais on a l'encadrement suivant vrai pour tout $1\leqslant k\leqslant n$:

$$\frac{n+k}{n^2+n}\leqslant\frac{n+k}{n^2+k}\leqslant\frac{n+k}{n^2}\cdot$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k).$$

Or $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+k) = \dfrac{(1-0)}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+k\cdot\dfrac{(1-0)}{n}\right)$ est une somme de Riemann qui converge vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1(1+x)\,\mathrm{d}x = \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot$ D'autre part, on a la suite

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k) = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

converge vers $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cdot$ D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{2}\cdot$

5) V_n n'est pas une somme de Riemann, mais on a l'encadrement suivant vrai pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\sqrt{k} - 1 \leqslant E(\sqrt{k}) \leqslant \sqrt{k}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant V_n \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}. \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Or $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann qui converge vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$. De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{2}{3}\cdot$

6) On a (W_n) n'est pas une somme de Riemann, mais on remarque que

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+k}\cdot$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann qui converge vers $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$

D'autre part, en faisant le changement de variable $i = k - n$ on a aussi :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2+\frac{i}{n}}$$

est une somme de Riemann qui converge vers $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2+x} = [\ln(2+x)]_0^1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} W_n = \ln(3)$.

7) On a (X_n) est une somme de Riemann. En effet, en faisant le changement de variable $i = k - n$ on a :

$$X_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot$$

Or $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ est une somme de Riemann qui converge vers $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. Par suite, (X_n) est convergente et on a $\lim_{n\to+\infty} X_n = \frac{1}{2}. \ln(2) = \ln(\sqrt{2})$.

8) On a (Y_n) n'est pas une somme de Riemann, mais on remarque que

$$\begin{aligned}
\ln Y_n &= -\ln n + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = -\ln n + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right). \\
&= -\ln n + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\ln n + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] \\
&= -\ln n + \frac{1}{n} \cdot n \ln n + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann qui converge vers

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} Y_n = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}\cdot$

9) On a Z_n n'est pas une somme de Riemann, mais on remarque que

$$\ln Z_n = \frac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n!) - n\ln n\right].$$

Or $\ln((2n)!) = \sum_{k=1}^{2n} \ln k$ et $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ et $n\ln n = \sum_{k=1+n}^{2n} \ln n$. D'où

$$\begin{aligned}\ln Z_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1+n}^{2n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{n+i}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right).\end{aligned}$$

On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$ est une somme de Riemann qui converge vers

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x)]_0^1 - [x]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Par suite, (Z_n) est convergente, et on a $\lim_{n\to+\infty} Y_n = \frac{4}{e}\cdot$