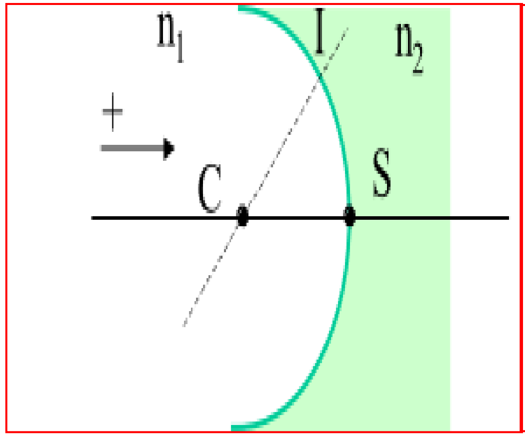
Les dioptres sphériques

Définitions

Un dioptre sphérique est un système optique formé par deux milieux transparents, homogènes et isotropes, d'indices déférents, séparés par une surface sphérique.



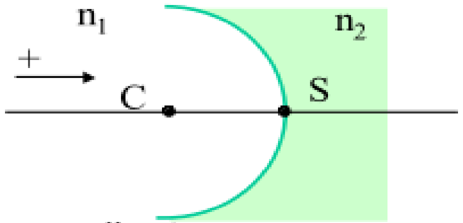
Le centre de la surface sphérique est noté C, S est le sommet de la calotte sphérique.

L'axe joignant C et S est appelé axe principal.

Un axe secondaire est un axe passant par C mais non par S.

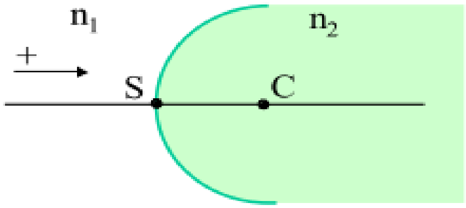
Le rayon de courbure du dioptre R correspond à CS.

En orientant l'axe, on distingue deux types de dioptres, selon le signe de SC :



dioptre concave

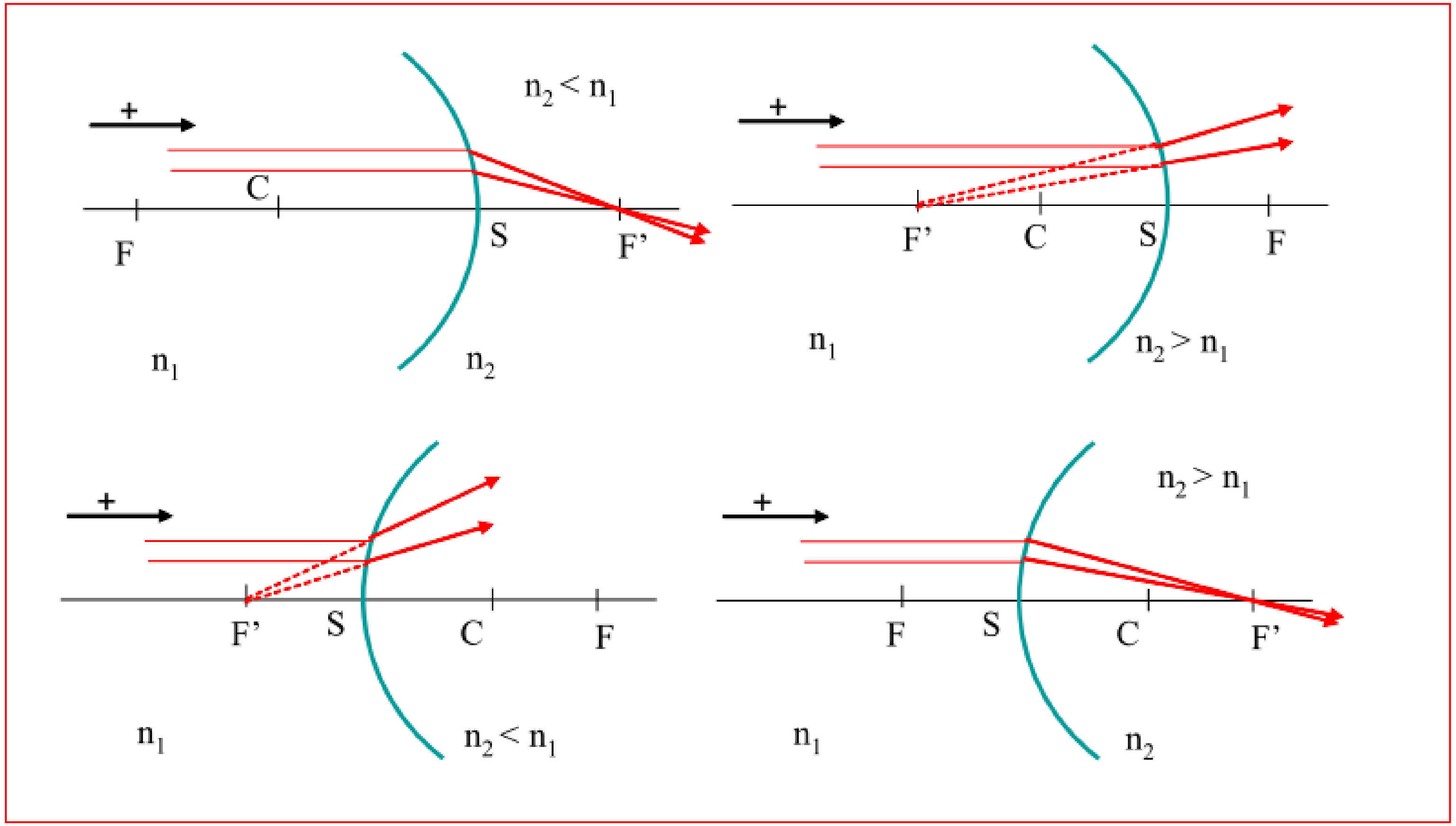
$\overline{SC} < 0$



dioptre convexe

$\overline{SC} > 0$

Convergence



Conclusion :

Un dioptre sphérique est **convergent** lorsque son centre est situé dans le milieu le plus réfringent.

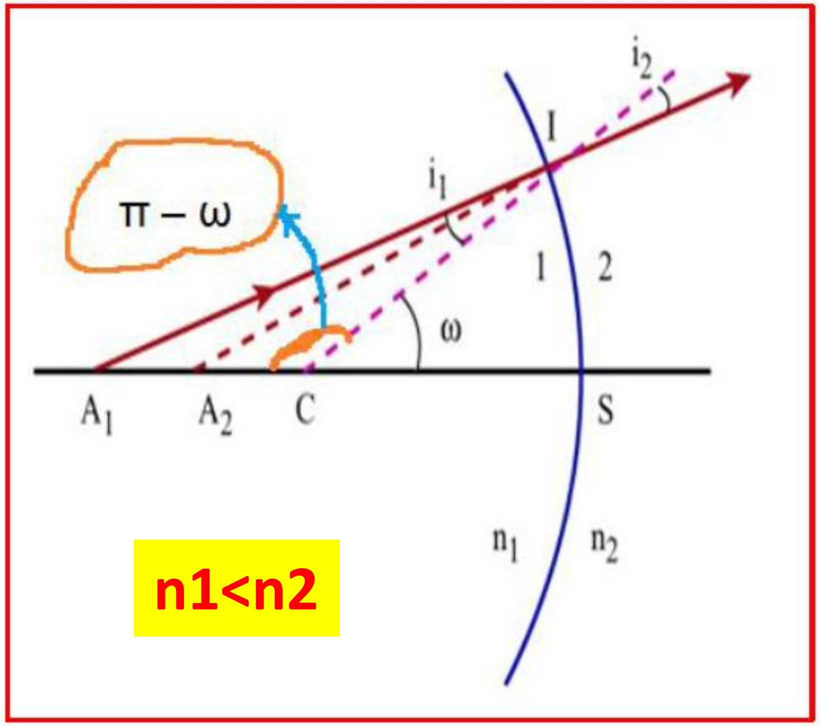
I - Stigmatisme du dioptre sphérique

I -1 Stigmatisme rigoureux

Le point A_1 est pris sur l'axe A_1CS

Cherchons son image,

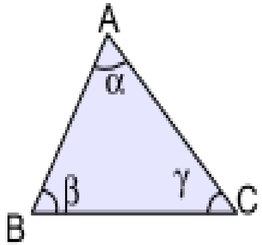
si elle existe, sera sur cet axe car le rayon A_1CS traverse le dioptre sans être dévié.



Un rayon quelconque A_1I se réfracte suivant IA_2, sur l'axe optique,

Rappel

Les égalités dans un triangle quelconque ABC, on a:

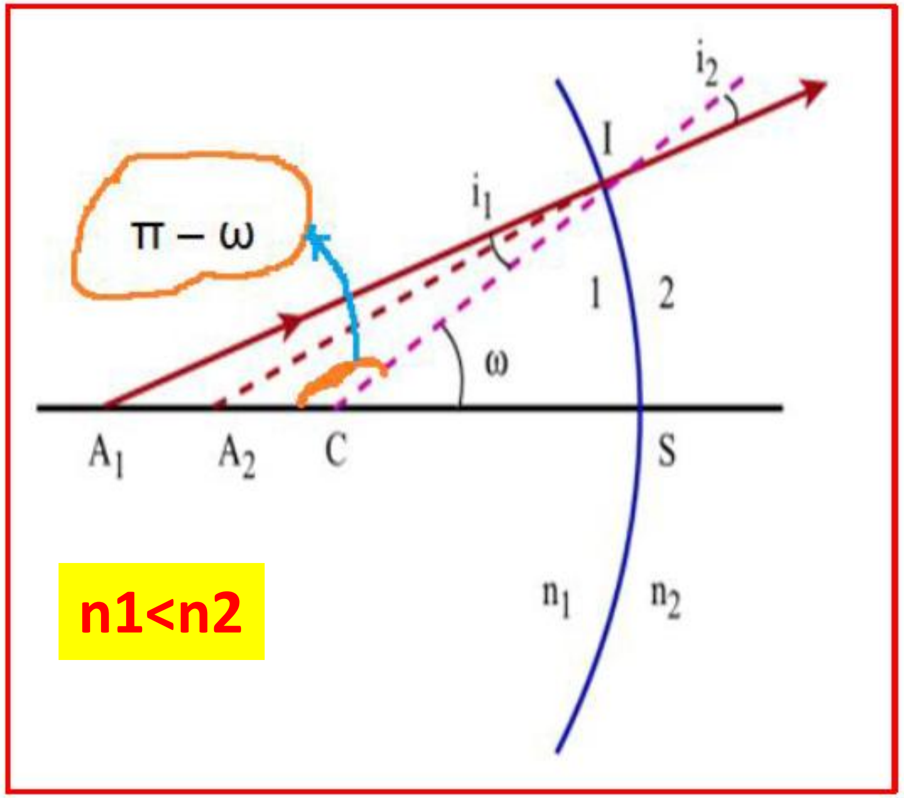


$$\frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin\beta}{AC} = \frac{\sin\gamma}{AB}$$

Appliquons la relation des sinus dans le triangle:

Soit le triangle (ICA_1)

$$\frac{\overline{CA_1}}{\sin\ i_1} = \frac{\overline{IA_1}}{\sin\ (\pi-\omega)} = \frac{\overline{IA_1}}{\sin\ \omega} \quad \textbf{(1)}$$

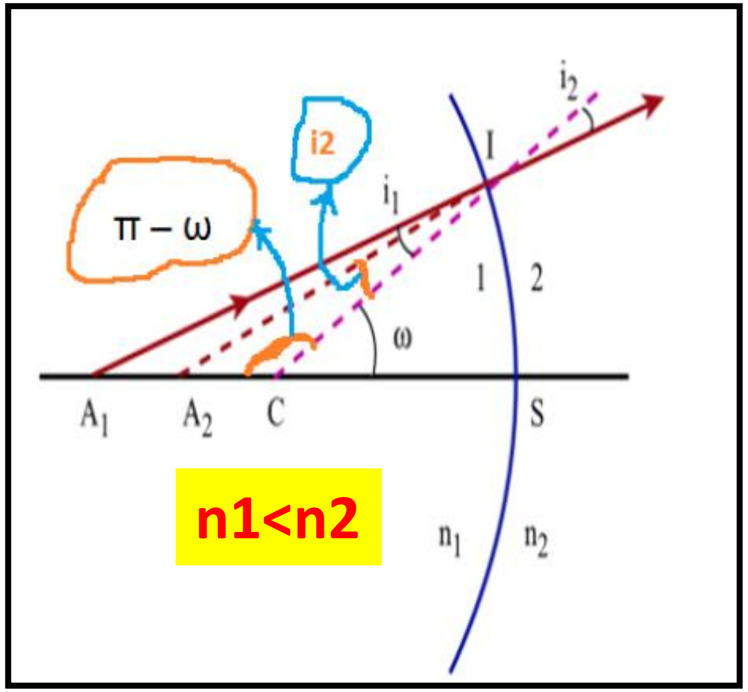


Au triangle ICA_2 : $$\frac{\overline{CA_2}}{\sin i_2} = \frac{\overline{IA_2}}{\sin(\pi-\omega)} = \frac{\overline{IA_2}}{\sin \omega} \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\sin i_1} = \frac{\overline{IA_1}}{\sin(\pi-\omega)} = \frac{\overline{IA_1}}{\sin \omega} \quad \textbf{(1)}$$

(1) et (2) On en déduit : $$\frac{1}{\sin \omega} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1} \sin i_1} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{IA_2} \sin i_2}$$

en tenant compte de la relation : $$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



on obtient: $$n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{IA_2}}$$

la quantité : $$n \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}}$$

se conserve à la traversée du dioptre, **est un invariant fondamental**.

$A_2=A_1$ ont la même position ???

Pour que le point A_2 soit l'image du point A_1, CA_2 ne doit pas dépendre de l'angle d'incidence donc de la position de I.

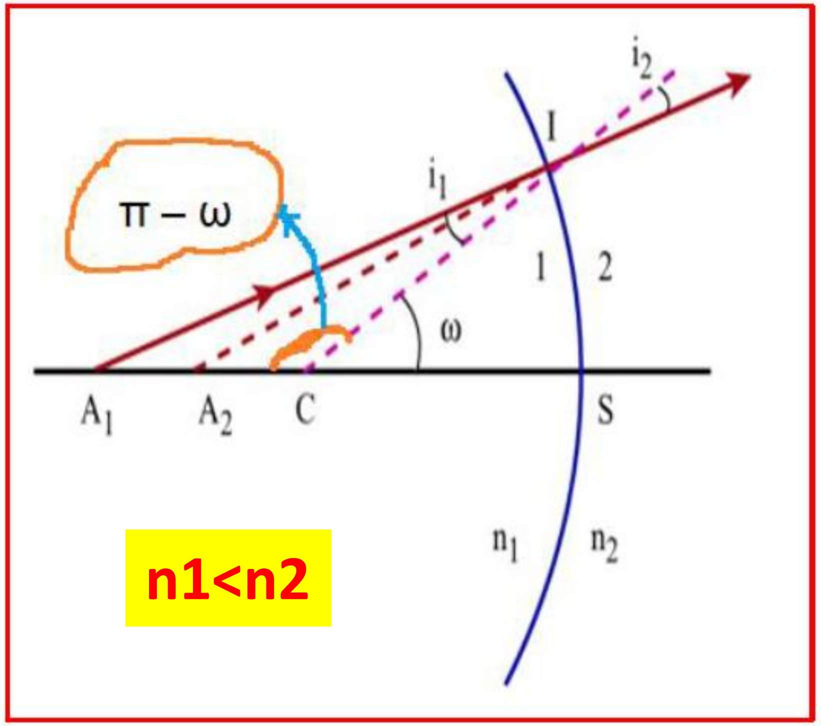
$$n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{IA_2}}$$

Est indépendant de la position de I.

Cela est réalisé pour :

C, le centre du dioptre sphérique : si $CA_1 = 0$, $CA_2 = 0$, alors $A_2 = A_1 = C$;

$A_2=A_1$;



Stigmatisme approché

point I → **vers le point S**

On peut montrer qu'il y a stigmatisme approché près des points pour lesquels le dioptre sphérique présente un stigmatisme rigoureux.

Lorsqu'on se place dans les conditions de Gauss, les rayons **incidents sont peu inclinés** par rapport à l'axe principal, la portion utile du dioptre sphérique est alors réduite à une **petite portion entourant le sommet.**

Les angles d'incidence étant faibles, on peut écrire IA ≈ SA et IA' ≈ SA'
càd (point I est confondu avec Sommet S).

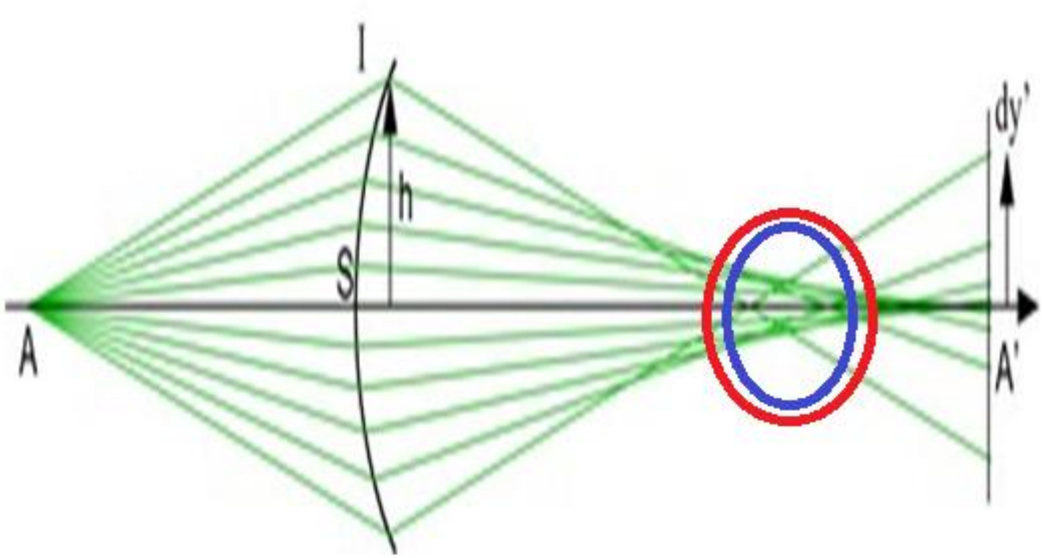
L'invariant fondamental devient :

$$n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{IA_2}}$$

$$n_1 \frac{CA_1}{SA_1} = n_2 \frac{CA_2}{SA_2}$$

NB:
Cette relation ne faisant plus intervenir I, à tout point objet A1, on associe un point image A2.

Stigmatisme approché



point I → le point S

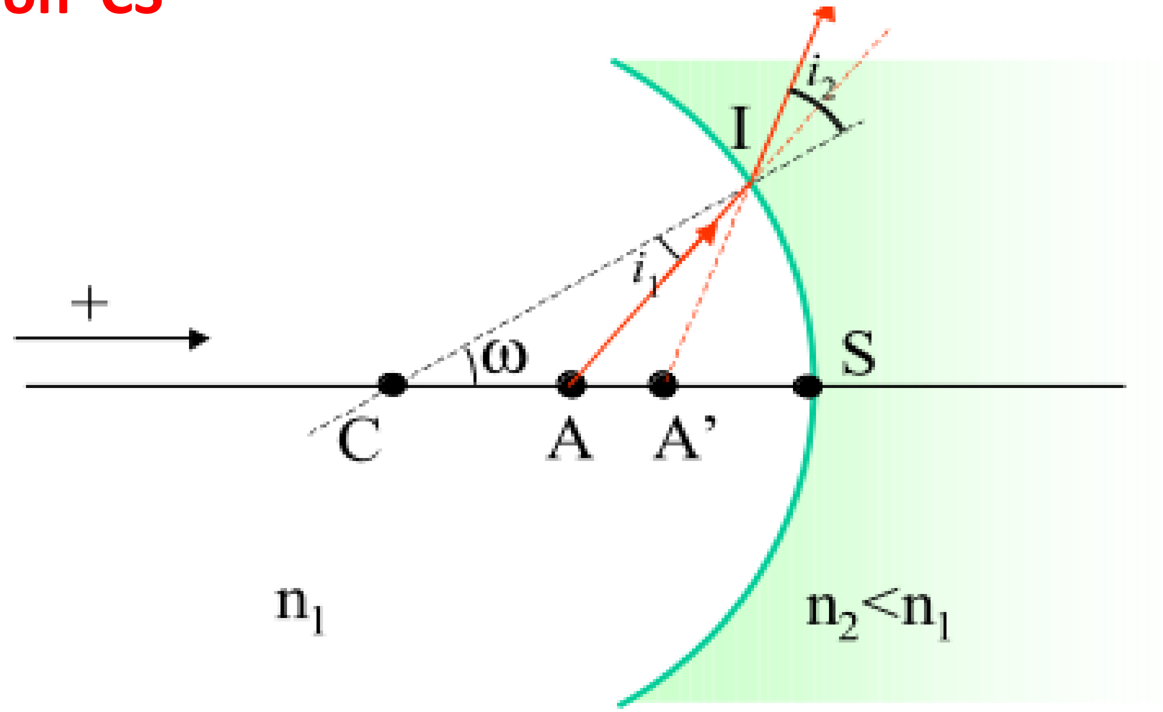
Les angles sont faibles

7.2 Invariant fondamental du dioptre sphérique :
Cas : Point A entre (SC)

Un dioptre sphérique concave,
séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 avec ($n_2 < n_1$) .

Ce choix de type de dioptre arbitraire.

Point A est situé sur Rayon CS



Interprétation Physique

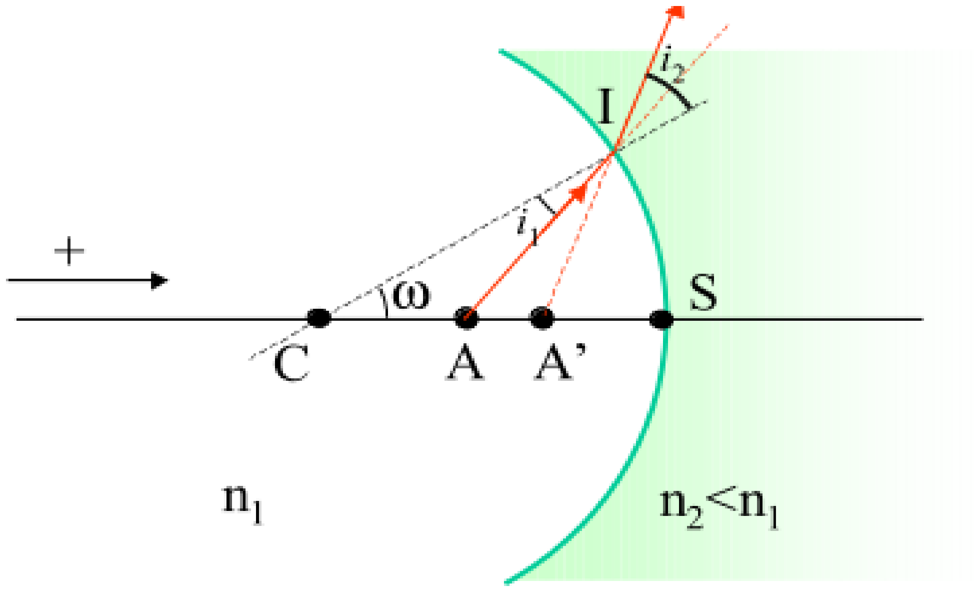
Le rayon (AS) passant par C (C,A,S sont alignés),

Il arrive sur le dioptre selon une incidence normale, donc il n'est pas dévié :

l'image A' de l'objet A appartient aussi à l'axe principal.

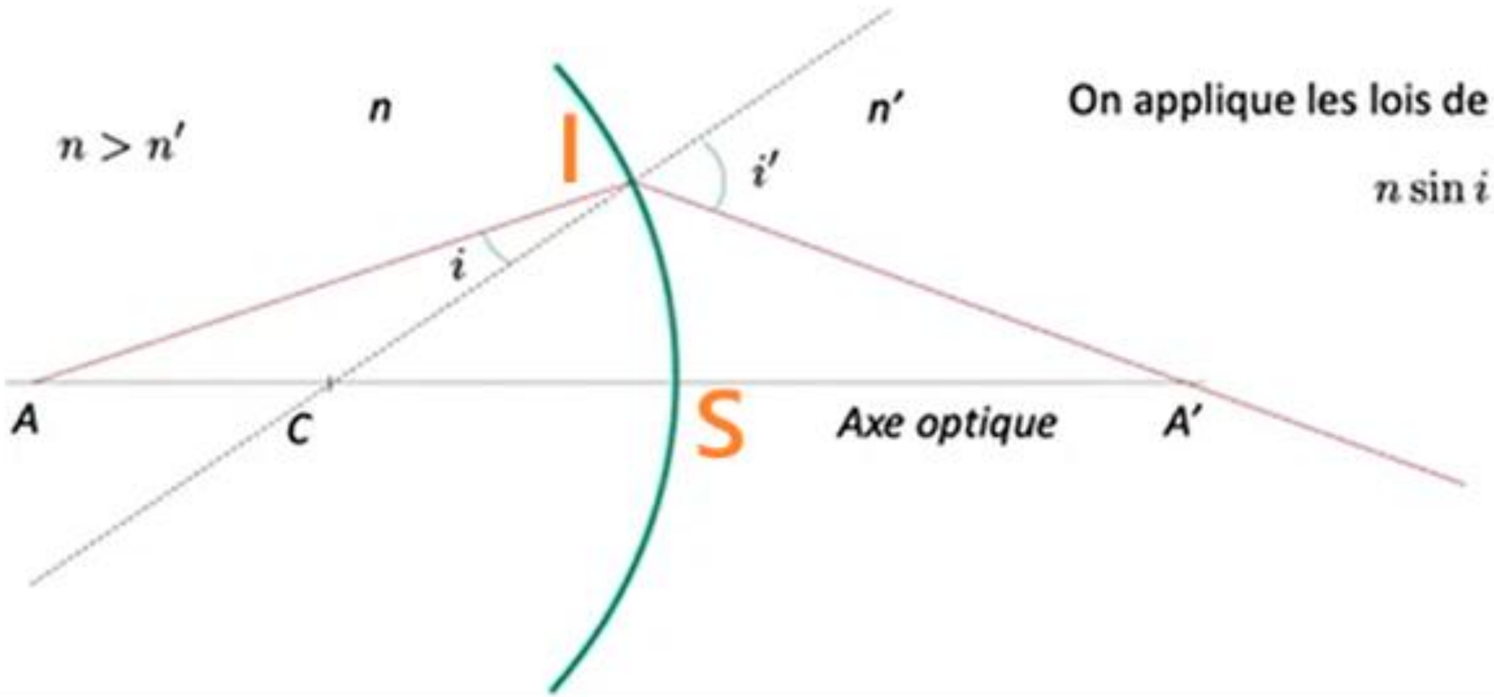
Le rayon (AI) se réfracte et donne une image A' (virtuelle dans notre cas).

Suivant La position de l'angle d'incidence i



Dioptre convergent

Point A est situé est dehors du Rayon CS

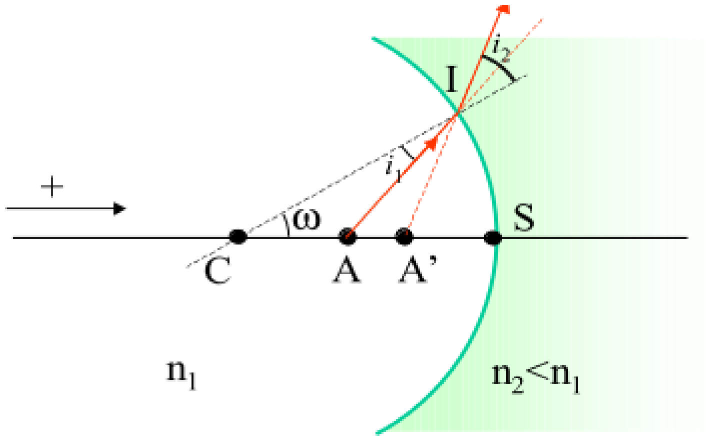


On applique les lois de la réfraction

$$n \sin i = n' \sin i'$$

Dans le triangle CIA , on a sin (i_1) /CA = sin (ω)/IA : soit encore **sin ω = sin i_1 (IA/CA)** **(1)**

dans le triangle CIA', on a **sin (i_2)/CA' = sin (ω)/IA'** **(2)**



On reporte l'expression (1) dans l'équation (2), on obtient:

sin (i_2)/CA' = (sin (i_1) (IA/CA)) . (1/IA')

$$\frac{IA}{CA} = \frac{IA'}{CA'} * \frac{\sin i_2}{\sin i_1}$$

(IA/CA)=(IA'/CA')n1/n2= sin(i2)/sin(i1)

$$n_1 \frac{CA}{IA} = n_2 \frac{CA'}{IA'}$$

$$n_1 \frac{CA}{IA}$$

Cette Quantité est invariante dans la traversée d'un dioptre.

C'est l'invariant fondamental du dioptre sphérique.

7.4 Etude du dioptre sphérique dans les conditions de l'approximation de Gauss

7.4.1 Formules de conjugaison et de grandissement

les relations de conjugaison, liant la position de l'objet à la position de son image par le dioptre sphérique.

Origine au sommet

En partant de l'expression de **l'invariant** du dioptre sphérique dans les conditions de Gauss,

Les points I=S (S confondu avec I)

$$n_1 \frac{CA_1}{SA_1} = n_2 \frac{CA_2}{SA_2}$$

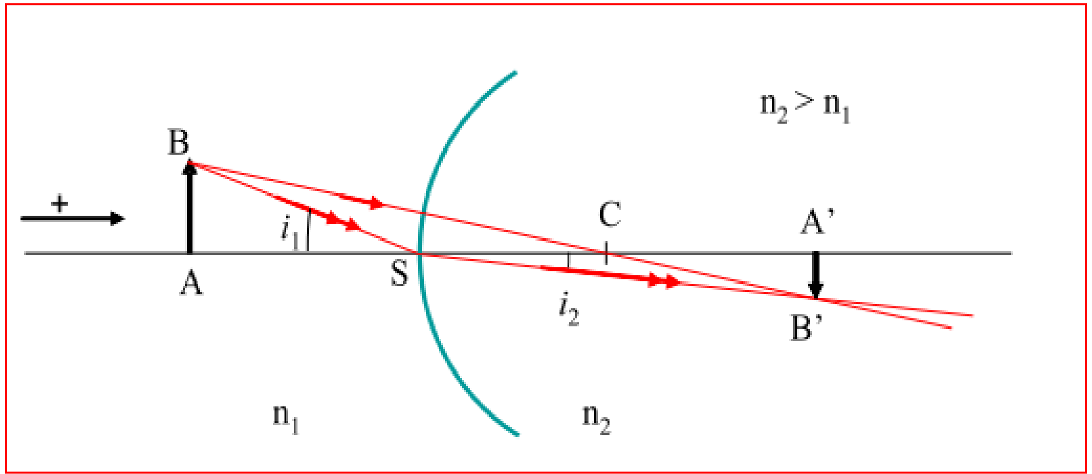
Relation de Chasles: CA = CS+SA

$$\frac{n_1}{SA_1} - \frac{n_2}{SA_2} = \frac{n_1 - n_2}{SC}$$

Cette relation est la formule de conjugaison - origine au sommet - pour le dioptre sphérique.

Elle permet de connaître la position de l'image d'un objet proche de l'axe optique (taille de l'image est petite).

Grandissement d'un Objet AB par rapport au sommet S



Dans les conditions de Gauss, i_1 et i_2 sont petits donc:

$$tgi_2 = i_2 = \frac{-A'B'}{SA'}$$

$$tgi_1 = i_1 = \frac{AB}{-SA}$$

La loi de Descartes pour la réfraction s'écrit également $n_1\ i_1 = n_2\ i_2$, d'où

Le grandissement d'un système optique est défini comme où est l'image de l'objet?

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

Formules de conjugaison: Origine au centre

En reprenant la relation : $n_1 \dfrac{\overline{CA_1}}{\overline{SA_1}} = n_2 \dfrac{\overline{CA_2}}{\overline{SA_2}}$

on peut encore écrire : $n_1 \dfrac{\overline{SA_2}}{\overline{CA_2}} = n_2 \dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{CA_1}}$

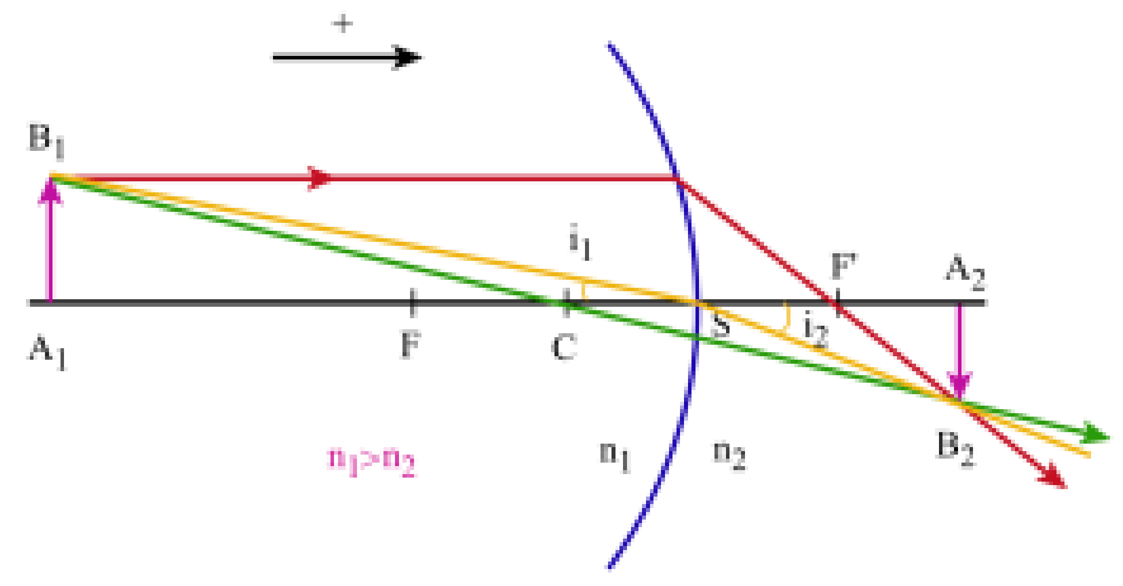
sachant que :

$$\overline{SA_1} = \overline{SC} + \overline{CA_1}$$

$$\overline{SA_2} = \overline{SC} + \overline{CA_2}$$

on en déduit :

$$\frac{n_1}{\overline{CA_2}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$



En appliquant le théorème de Thalès aux triangles (CA_1B_1) et (CA_2B_2) on obtient

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}$$

Formule de conjugaison - Grandissement à l'Origine au centre:

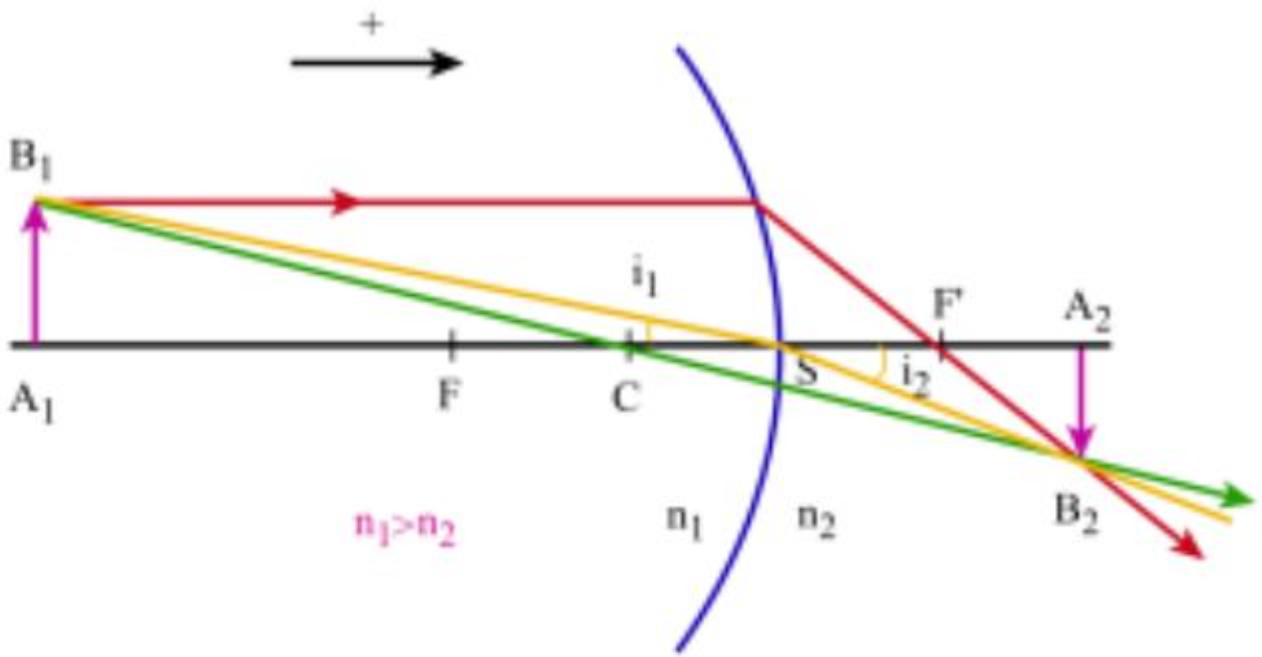
A partir de l'expression de l'invariant fondamental du dioptre :

$$n\frac{CA}{IA}$$

$$\frac{n_1}{CA'} - \frac{n_2}{CA} = \frac{n_1 - n_2}{CS}$$

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{CA'}{CA}$$

Relation de Conjugaison l'Origine au centre:



En reprenant la relation : $n_1 \dfrac{\overline{CA_1}}{\overline{SA_1}} = n_2 \dfrac{\overline{CA_2}}{\overline{SA_2}}$

on peut encore écrire : $n_1 \dfrac{\overline{SA_2}}{\overline{CA_2}} = n_2 \dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{CA_1}}$

sachant que :

$$\overline{SA_1} = \overline{SC} + \overline{CA_1}$$

$$\overline{SA_2} = \overline{SC} + \overline{CA_2}$$

on en déduit :

$$\frac{n_1}{\overline{CA_2}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles CA_1B_1 et CA_2B_2 on obtient :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}$$

Discussion sur grandissement

- Si $\boldsymbol{\gamma > 0}$ (+) l'image est **droite** (elle a le même sens que l'objet).
- Si $\boldsymbol{\gamma < 0}$ (-) l'image est **renversée** (sens inverse).

- Si $\boldsymbol{|\gamma| > 1}$ l'image est **plus grande** que l'objet.
- Si $\boldsymbol{|\gamma| < 1}$ l'image est **plus petite** que l'objet.
- Si $\boldsymbol{\gamma = 1}$ l'image et l'objet ont **la même taille**.

- **Les caractéristiques de l'image :**

- La position de l'image : $\overline{SA'}$

- Si $\overline{SA'} > 0$ l'image est réelle
- Si $\overline{SA'} < 0$ l'image est virtuelle

- La nature de l'image :

→ Dire si elle est réelle ou virtuelle.
→ Dire si elle est droite ou renversée :
→ Dire si elle est agrandie, réduite ou de même taille que l'objet

7.4.2 Foyers: Foyer principal image F'

Le foyer principal image F' est défini comme la position de A' lorsque A se trouve à l'infini :

$$\frac{n_1}{SA_1} - \frac{n_2}{SA_2} = \frac{n_1 - n_2}{SC}$$

SA_1 tend vers infini alors SA_2 tend vers F'

La relation de conjugaison:

$$\boxed{\mathrm{SF}' = \mathrm{SC}\frac{n_2}{n_2 - n_1}}$$

La quantité f' = SF' est appelée **la distance focale image.**

Il résulte de la définition de F' que:

tout rayon incident parallèle à l'axe optique se réfracte en passant par le foyer image F'.

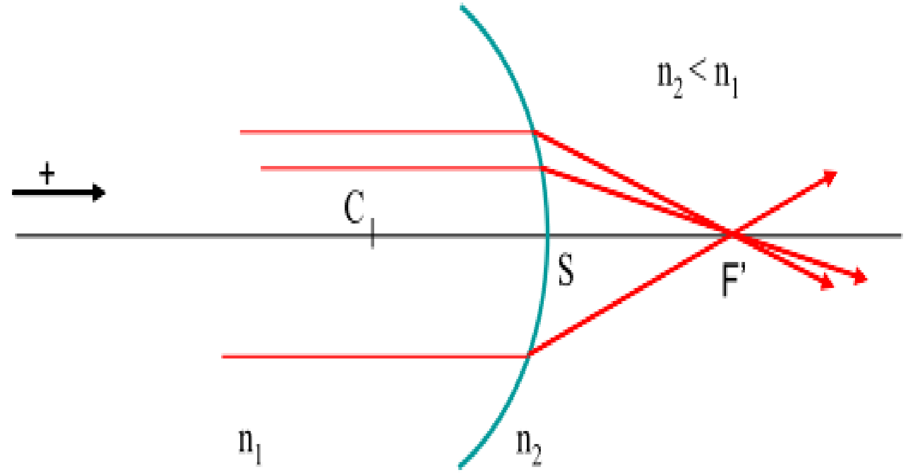


Fig. 5

Foyer principal objet F : C'est la position F de A lorsque A' se trouve à l'infini :

$$\frac{n_1}{SA_1} - \frac{n_2}{SA_2} = \frac{n_1 - n_2}{SC}$$

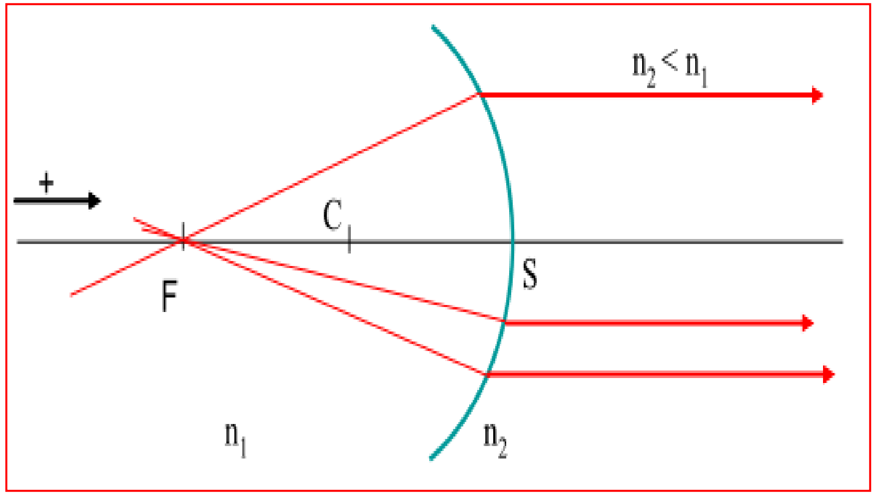
$$\overline{SA'} \longrightarrow \infty \quad A \longrightarrow F$$

A' = A_2

La relation de conjugaison avec origine au sommet devient

$$\overline{SF} = \overline{SC}\frac{n_1}{n_1 - n_2}$$

La quantité f = SF est appelée la **distance focale objet.** Il résulte de la définition de F qu'un rayon incident passant par le foyer objet F se réfractera en un rayon parallèle à l'axe optique du dioptre sphérique.



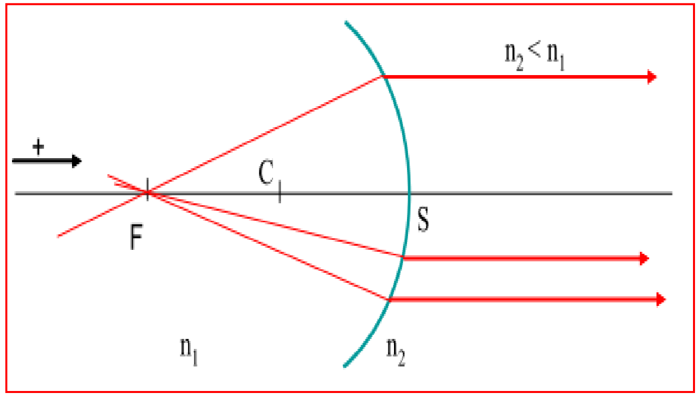
Relation entre les distances focales

Rapport des distances focales :

$$f' = SF' = SC\frac{n_2}{n_2-n_1} \qquad \text{et} \qquad f = SF = SC\frac{n_1}{n_1-n_2}$$

$$\frac{f}{f'} = \frac{\overline{SF}}{\overline{SF'}} = \boxed{-}\frac{n_1}{n_2}$$

On constate donc que **les deux foyers** sont de part et d'autre du sommet S du dioptre sphérique.

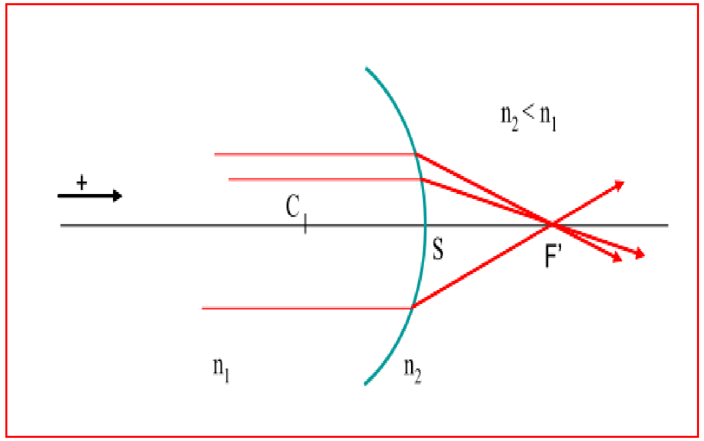


- Somme des distances focales

$$f + f' = \overline{SC}$$

$$\overline{CF'} = -\overline{SF} \qquad\qquad \overline{CF} = -\overline{SF'}$$

Les deux foyers sont situés à égale distance respectivement de C et de S. Le milieu de [CS] est confondu avec le milieu de FF'. (Voir TD)



Le foyer image est l'image d’un point situé à l'infini sur l'axe :

F' est foyer image, $SF' = f'$ est la distance focale image du dioptre.

Le foyer objet est tel que son image soit à l'infini sur l'axe :

F est le foyer objet $SF= f$ est la distance focale objet du dioptre.

Autres formulations des relations de conjugaison et grandissement

Les foyers images et objets sont définies ainsi que les distances focales, on peut réécrire les formules de conjugaisons.

On pourra vérifier que ces relations peuvent s'écrire de plusieurs manières :

D'après l'équation (***) on fait tendre A vers l'infini ou bien A' vers l'infini

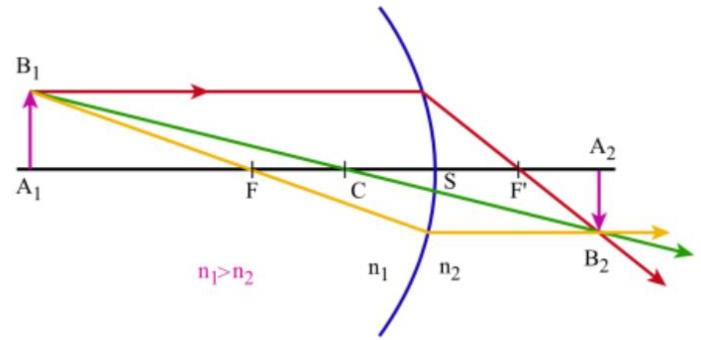
(***) $$\frac{n_1}{SA} - \frac{n_2}{SA'} = \frac{n_1 - n_2}{SC}$$

$$\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{-n_2}{\overline{SF'}} = \frac{n_1}{\overline{SF}} = \frac{\boldsymbol{n_1 - n_2}}{\boldsymbol{SC}}$$

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{-n_2}{\overline{SF'}} = \frac{n_1}{\overline{SF}}}$$

Origine aux foyers : La relation de Newton pour les miroirs sphériques

$$\boxed{\mathbf{SF} * \mathbf{SF'} = \mathbf{FA} * \mathbf{F'A'} = \mathbf{f} * \mathbf{f'}}$$



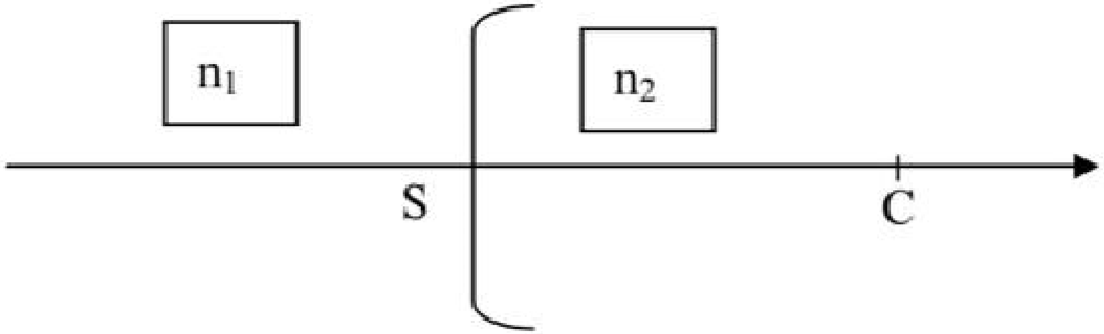
Grandissement longitudinal:

on définit le grandissement **longitudinal g** comme le rapport du déplacement de l'image et du déplacement de l'objet correspondant :

$$g = \frac{d\overline{SA'}}{d\overline{SA}}$$

$$g = \frac{d\overline{SA'}}{d\overline{SA}} = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}\gamma^2.$$

2. DIOPTRE SHERIQUE



Par définition la vergence d'un dioptre sphérique s'écrit :

$$\boxed{V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}}$$

Formules de conjugaison :

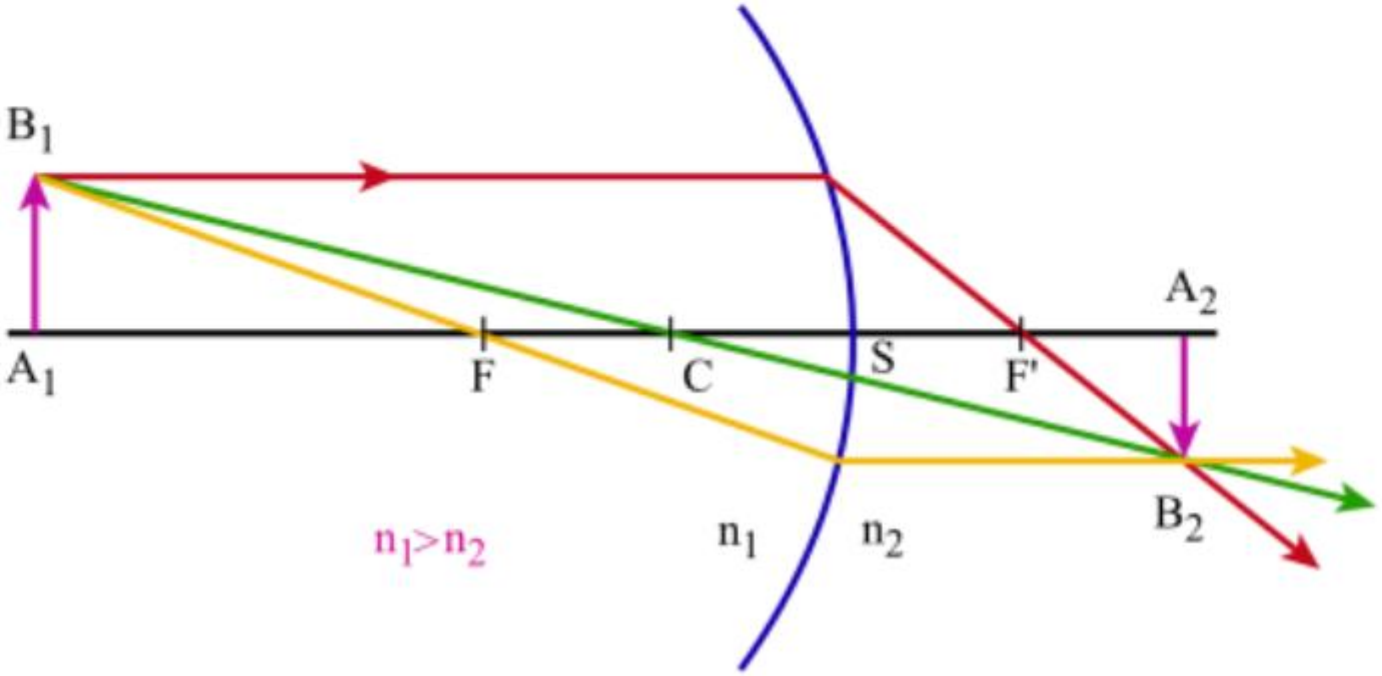
Origine au sommet	$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$ $\gamma = \frac{n_1}{n_2} \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}$
Origine au centre	$\frac{n_1}{\overline{CA_2}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$ $\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}$
Origine aux foyers	$\overline{FA_1}\ \overline{F'A_2} = \overline{SF}\ \overline{SF'} = ff'$ $\gamma = -\frac{f}{\overline{FA_1}} = \frac{\overline{F'A_2}}{f'}$

Par définition la vergence d'un dioptre sphérique s'écrit :

$$\boxed{V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}}$$

Image d'un objet plan

Image réelle



Nous utiliserons pour faire cette construction 3 rayons particuliers :

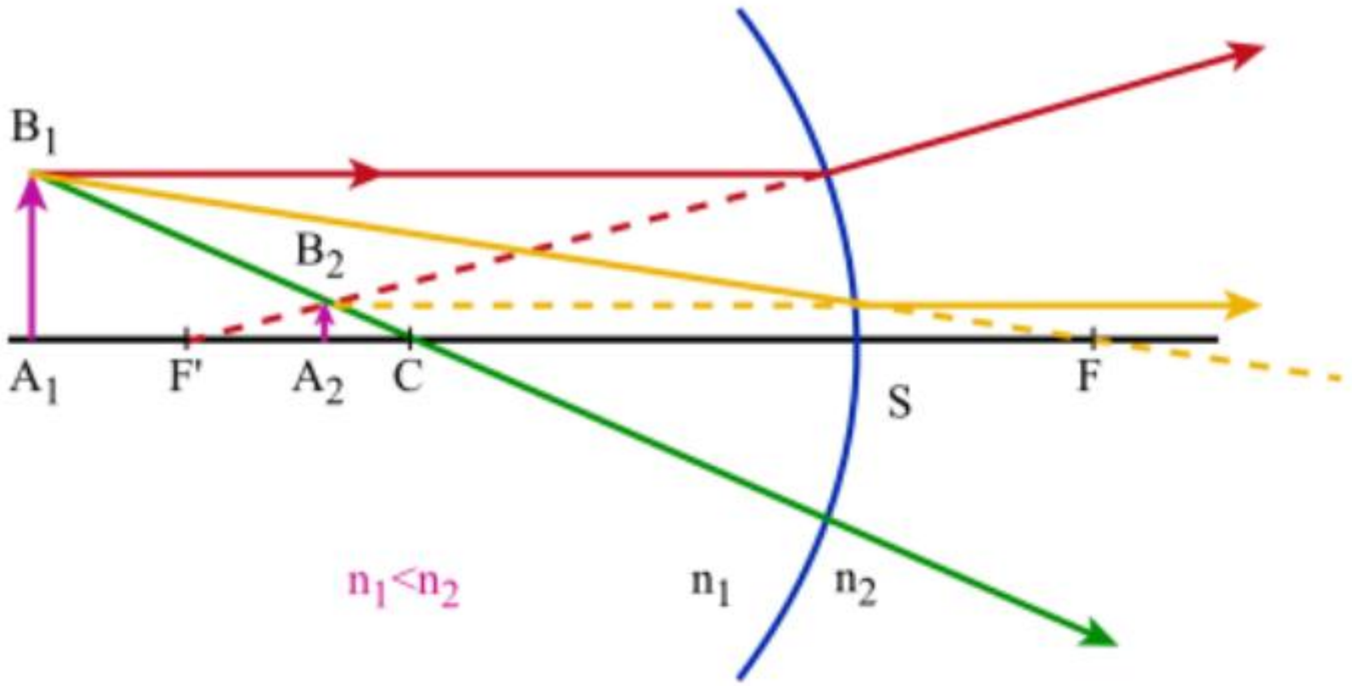
• un rayon passant par le centre du dioptre et qui n'est pas dévié à la traversée du Dioptre.

• un rayon issu de B_1 et passant par le foyer objet F : il est réfracté suivant une parallèle à l'axe principal.

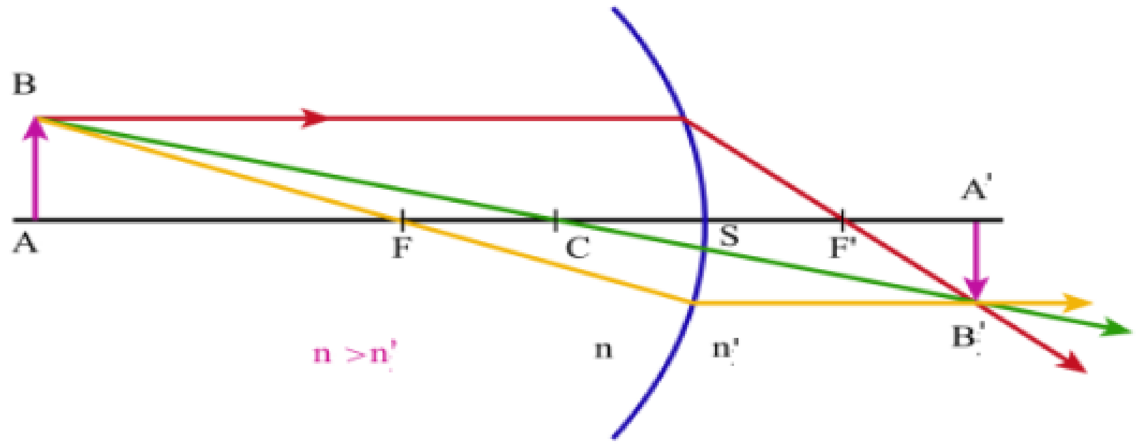
• un rayon issu de B_1 et parallèle à l'axe principal : il est réfracté suivant un rayon qui passe par le foyer image F'.

Image d'un objet plan

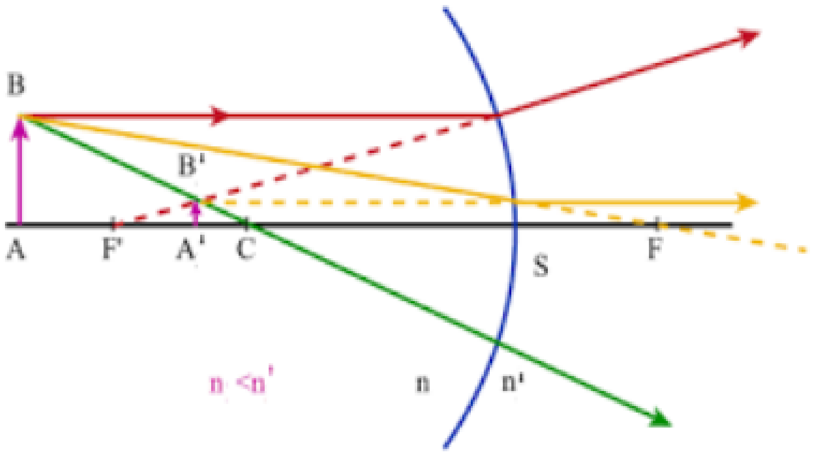
Image virtuelle



- **Construction géométrique de l'image**
  - Il faut placer l'objet **AB**: réel ou virtuel
  - Construire l'image **B'** du point **B**: il suffit de considérer deux rayons issus de ce point :
    - le rayon incident parallèle à l'axe optique passe par F'
    - le rayon incident qui passe par F sort du dioptre parallèle à l'axe optique
    - Le rayon qui passe par le centre C du dioptre n'est pas dévié
  - **A'** est le projeté orthogonal de **B'** sur l 'axe optique.



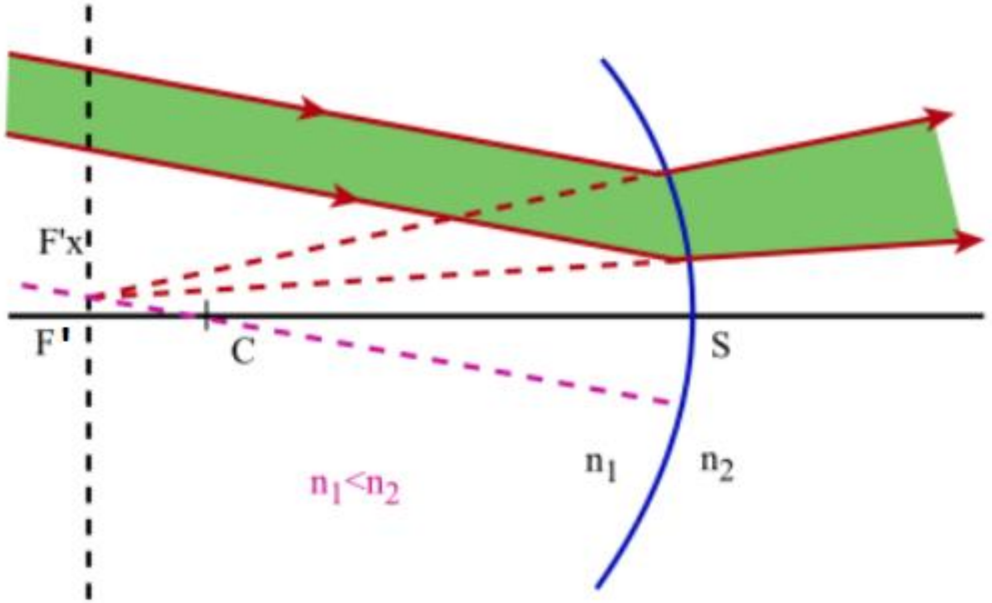
Concave convergent



Concave divergent

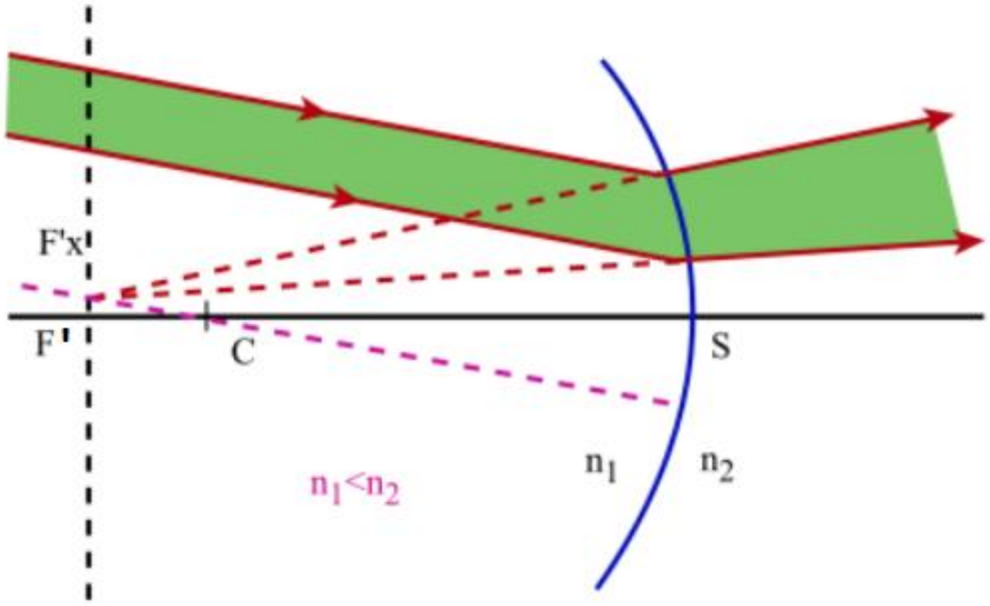
Fin

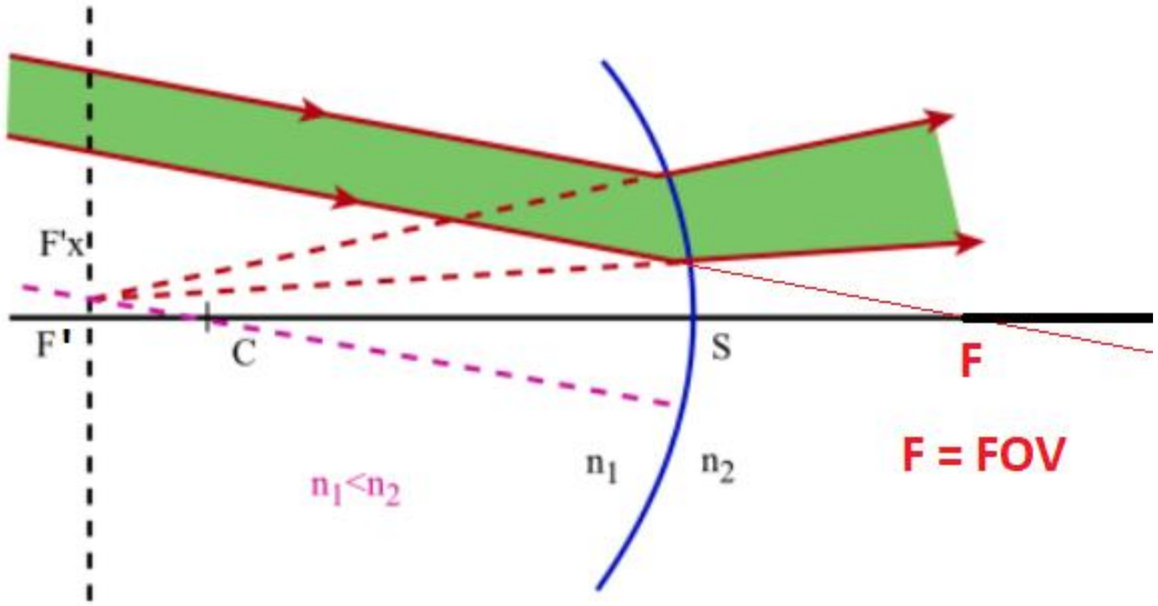
le plan focal image.



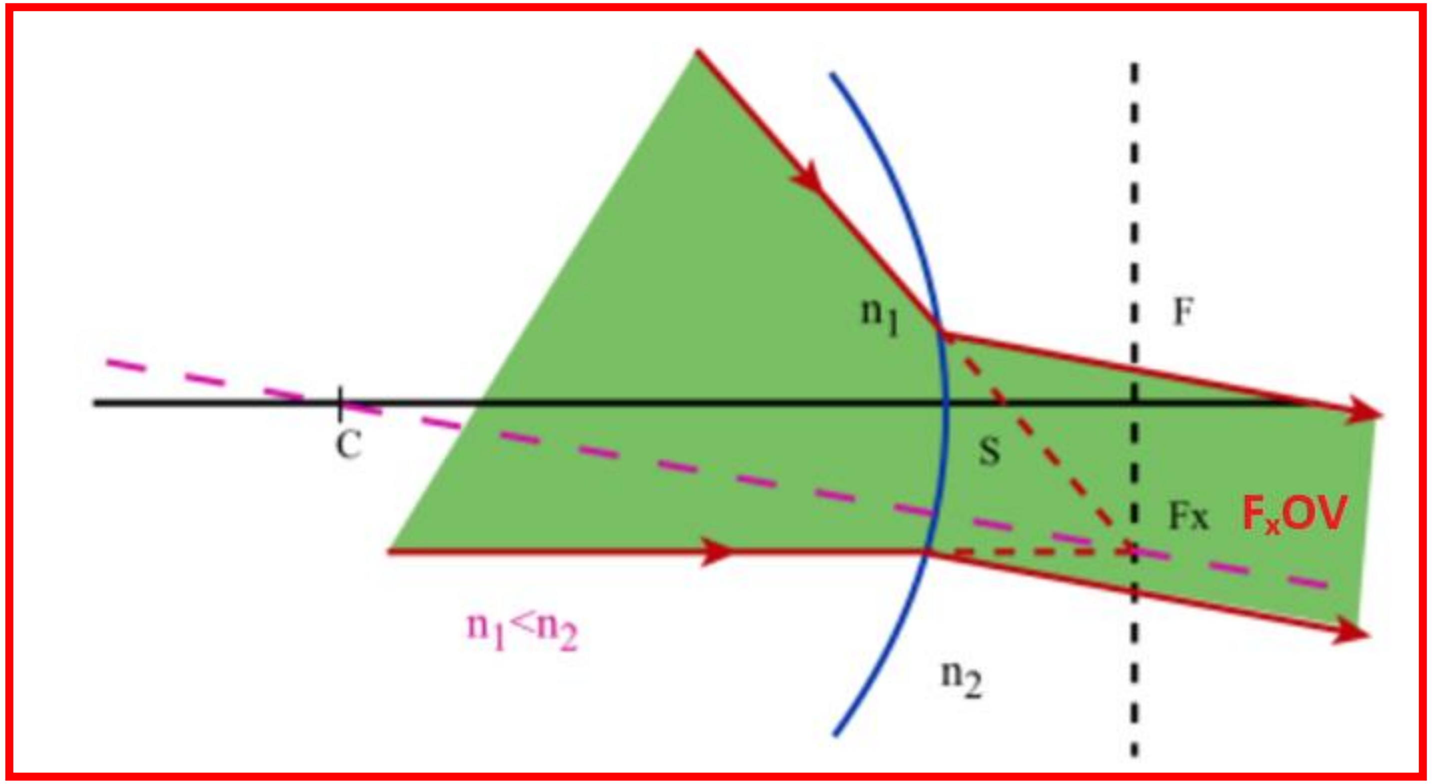
CF_x// Rayons incidents

Le plan passant par F' et perpendiculaire à l'axe optique est le plan focal image.
Si le dioptre est concave et n_1 <n_2 le plan focal image est virtuel et le faisceau émergent réfracté, correspondant à un faisceau incident parallèle, est divergent et semble provenir d'un foyer secondaire F'x obtenu en prenant l'intersection entre une parallèle au faisceau incident passant par le centre C et le plan focal image.


F'x
F'
C
S
n_1
n_2
$n_1<n_2$


F'x
F'
C
S
F
n_1
n_2
$n_1<n_2$
F = FOV

le Plan Focal Objet.

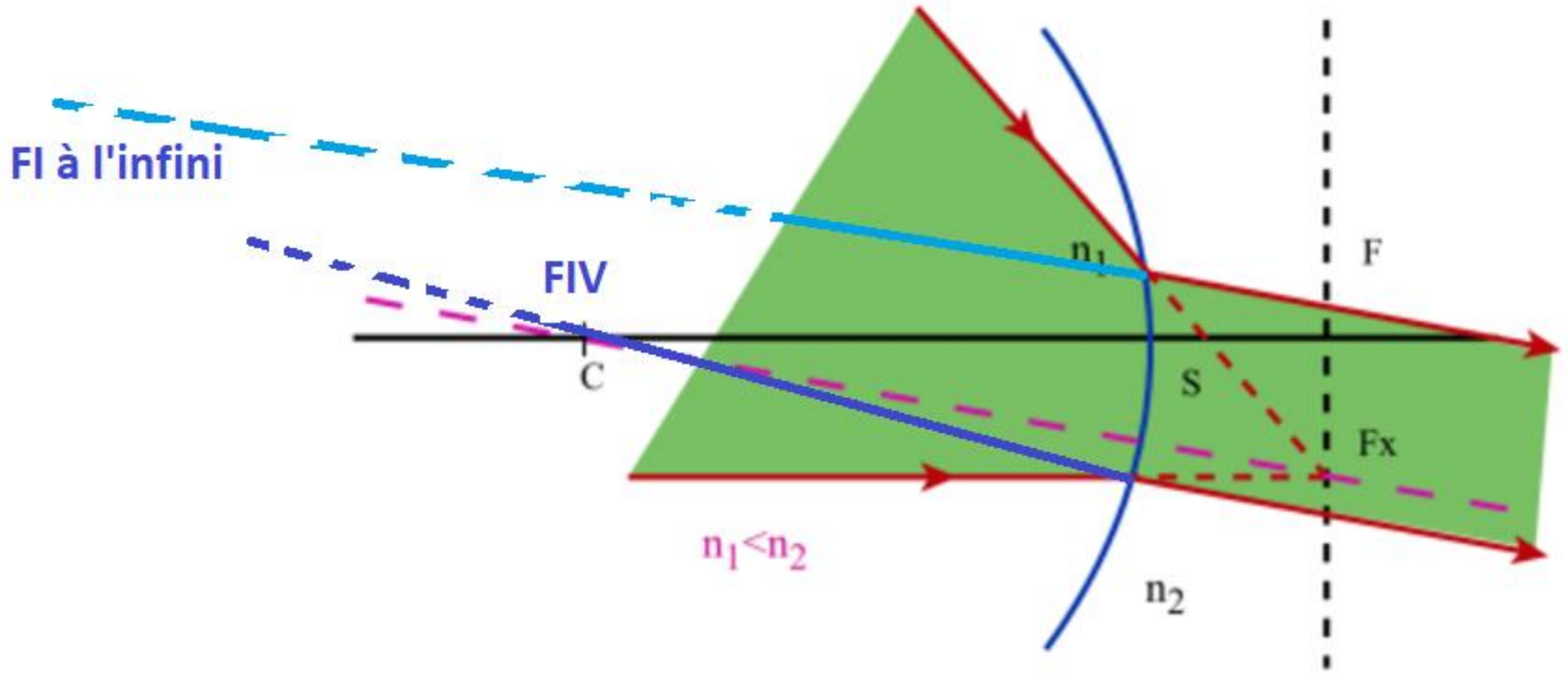


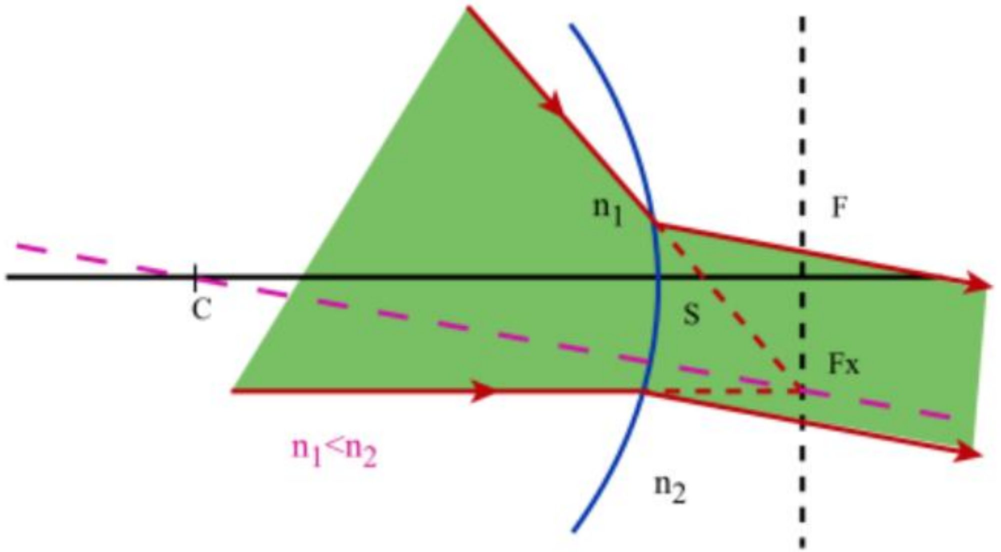
CF_x//rayon réfracté

Le plan focal objet est le plan passant par le foyer objet F et perpendiculaire à l'axe optique du dioptre.

Si le dioptre est concave et $n_1 < n_2$ le plan focal objet est virtuel.

Un faisceau incident convergent en un foyer objet secondaire Fx sera réfracté en un faisceau de rayons parallèles l'axe secondaire passant par le foyer secondaire Fx et le centre du dioptre.


FI à l'infini
FIV
n_1
F
C
S
Fx
$n_1<n_2$
n_2


n_1
F
C
S
Fx
$n_1<n_2$
n_2