Année universitaire : 2024-2025
Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences de Kénitra

Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Cours d'Analyse 2

Par

Pr. Ahmed Srhir

Contenu du module

Contenu du module

Chapitre 1 : Formules de Taylor, Développement limité et applications ;

Chapitre 2 : Intégrale de Riemann ;

Chapitre 3 : Calcul des primitives ;

Chapitre 4 : Intégrale généralisée ;

Chapitre 5 : Equations différentielles ;

Chapitre 6 : Courbes paramétrées et courbes polaires.

Chapitre 1
Formules de Taylor, Développement limité et applications

1) Rappels

Théorème 1.1 (théorème de Rolle). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

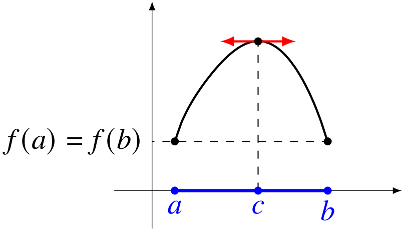
Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\pi} - \tan x$. La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f(0) = f(\dfrac{\pi}{4})$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Rappels

Théorème 1.1 (théorème de Rolle). Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.



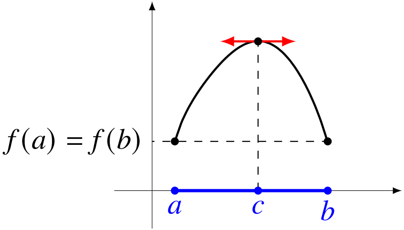
Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\pi} - \tan x$. La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f(0) = f(\dfrac{\pi}{4})$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Rappels

Théorème 1.1 (théorème de Rolle). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.



Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\pi} - \tan x$. La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f(0) = f(\dfrac{\pi}{4})$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Rappels

Théorème 1.2 (théorème des accroissements finis (T.A.F)). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b.[$ Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

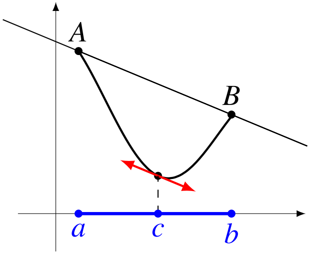
Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

1) Rappels

Théorème 1.2 (théorème des accroissements finis (T.A.F)). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b.[$ Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème 1.3. Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g: I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

2) Formules de Taylor

Définition 2.1 (dérivées successives). Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
i) On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f **est dérivable** sur I et si **la fonction dérivée** f' **est aussi dérivable** sur I. On note $f'' = (f')'$ la *dérivée seconde* de f.

ii) Plus généralement, si $n \geqslant 1$ est un entier. On dit que f est n **fois dérivable** sur I si

- f est dérivable sur I
- f' est dérivable sur I
- $\cdots$
- $f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n-1 \text{ fois}}}$ est dérivable sur I.

On note alors $f^{(n)} = f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n \text{ fois}}}$, et on l'appelle la *dérivée n-ième* de f.

Aurement dit, f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est une fois dérivable sur I.

Remarque. 1) Ainsi on a $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.
2) Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

2) Formules de Taylor

Définition 2.1 (dérivées successives). Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
i) On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f **est dérivable** sur I et si **la fonction dérivée** f' **est aussi dérivable** sur I. On note $f'' = (f')'$ la *dérivée seconde* de f.

ii) Plus généralement, si $n \geqslant 1$ est un entier. On dit que f est n **fois dérivable** sur I si

- f est dérivable sur I
- f' est dérivable sur I
- $\cdots$
- $f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n-1 \text{ fois}}}$ est dérivable sur I.

On note alors $f^{(n)} = f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n \text{ fois}}}$, et on l'appelle la *dérivée n-ième* de f.

Aurement dit, f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est une fois dérivable sur I.

Remarque. 1) Ainsi on a $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

2) Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

2) Formules de Taylor

Exemples. 1) Si $f = \exp$ est la fonction exponentielle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

2) Si $f = c$ est une fonction constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = 0$.

3) Si $f = x^m$ est une fonction monôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+)x^{m-n}$ si $n \leqslant m$, et $f^{(n)} = 0$ si $n > m$.

Théorème 2.2 (formule de Leibniz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)} = f^{(n)}\cdot g + \mathrm{C}_n^1 f^{(n-1)}\cdot g^{(1)} + \cdots + \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)} + \cdots + f\cdot g^{(n)}.}$$

Autrement dit,

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}.$$

Rappelons que C_n^k désigne le coefficient binomial donné par $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Formules de Taylor

Exemples. 1) Si $f = \exp$ est la fonction exponentielle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

2) Si $f = c$ est une fonction constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = 0$.

3) Si $f = x^m$ est une fonction monôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+)x^{m-n}$ si $n \leqslant m$, et $f^{(n)} = 0$ si $n > m$.

Théorème 2.2 (formule de Leibniz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \mathrm{C}_n^1 f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}.}$$

Autrement dit,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Rappelons que C_n^k désigne le coefficient binomial donné par $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Formules de Taylor

Exemples. 1) Si $f = \exp$ est la fonction exponentielle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

2) Si $f = c$ est une fonction constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = 0$.

3) Si $f = x^m$ est une fonction monôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+)x^{m-n}$ si $n \leqslant m$, et $f^{(n)} = 0$ si $n > m$.

Théorème 2.2 (formule de Leibniz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)} = f^{(n)}\cdot g + \mathrm{C}_n^1 f^{(n-1)}\cdot g^{(1)} + \cdots + \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)} + \cdots + f\cdot g^{(n)}.}$$

Autrement dit,

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}.$$

Rappelons que C_n^k désigne le coefficient binomial donné par $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Formules de Taylor

Définition 2.3 (fonction de classe C^n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

1) On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle est n-fois dérivable, et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.
2) On dit que est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Par convention, f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

Exemples. 1) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction constante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) sur un intervalle I, alors λf, $f+g$ et fg sont de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

2) Formules de Taylor

Définition 2.3 (fonction de classe C^n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

1) On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle est n-fois dérivable, et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.
2) On dit que est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Par convention, f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

Exemples. 1) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction constante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) sur un intervalle I, alors λf, $f + g$ et fg sont de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

2) Formules de Taylor

Définition 2.3 (fonction de classe C^n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

1) On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle est n-fois dérivable, et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.
2) On dit que est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Par convention, f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

Exemples. 1) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction constante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) sur un intervalle I, alors λf, $f + g$ et fg sont de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

2) Formules de Taylor

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés tels que $a < b$.

Théorème 2.4 (formule de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Ou sous forme condensée

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

- La formule de **T.-L.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Lagrange en a à l'ordre $n+1$.
- Le terme $R_{n+1}(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

Exemple. Soit x un réel tel que $x > 1$. En utilisant la formule de T.-L., il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4c(x-1)^3.$$

2) Formules de Taylor

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés tels que $a < b$.

Théorème 2.4 (formule de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Ou sous forme condensée

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

- La formule de **T.-L.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Lagrange en a à l'ordre $n + 1$.
- Le terme $R_{n+1}(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

Exemple. Soit x un réel tel que $x > 1$. En utilisant la formule de T.-L., il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4c(x-1)^3.$$

2) Formules de Taylor

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés tels que $a < b$.

Théorème 2.4 (formule de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Ou sous forme condensée

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

- La formule de **T.-L.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Lagrange en a à l'ordre $n+1$.
- Le terme $R_{n+1}(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

Exemple. Soit x un réel tel que $x > 1$. En utilisant la formule de T.-L., il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4c(x-1)^3.$$

2) Formules de Taylor

Preuve. Supposons que $n \geqslant 1$ (le cas $n = 0$ c'est exactement le T.A.F.). Considérons la fonction $\Phi \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.\lambda$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ constante. On a Φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ car f est de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. De plus, il évident que $\Phi(b) = 0$. Ensuite on choisit la constante λ telle que $\Phi(a) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$. Or

$$\Phi'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) + \frac{(b-x)^n}{n!}.\lambda.$$

Ou encore

$$\Phi'(x) = -f'(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}.\lambda.$$

D'où

$$\Phi'(x) = (b-x)^n. \left(-f^{(n+1)}(x) + \lambda \right).$$

Ainsi de $\Phi'(c) = 0$, il vient que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$.

Remarques.

- Si $n = 0$, on retrouve alors la formule des accroissements finis.
- La formule $T.L.$ signifie qu'on peut approcher au voisinage de a la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
- Lorsque $b = a + h$, la formule $T.L$ devient : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

- Toujours avec $a < b$ et les mêmes hypothèses du Théorème 2.4. Alors il existe $c' \in]a, b[$ tel que

$$f(a) = f(b) + (a-b)f'(b) + \frac{(a-b)^2}{2!}f''(b) + \cdots + \frac{(a-b)^n}{n!}f^{(n)}(b) + \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c')\cdot$$

Remarques.

- Si $n = 0$, on retrouve alors la formule des accroissements finis.
- La formule $T.L.$ signifie qu'on peut approcher au voisinage de a la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
- Lorsque $b = a + h$, la formule $T.L$ devient : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

- Toujours avec $a < b$ et les mêmes hypothèses du Théorème 2.4. Alors il existe $c' \in]a, b[$ tel que

$$f(a) = f(b) + (a-b)f'(b) + \frac{(a-b)^2}{2!}f''(b) + \cdots + \frac{(a-b)^n}{n!}f^{(n)}(b) + \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c').$$

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin). Soient I un intervalle ouvert tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta.x).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$.

Exemples. 1) Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\exp(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, $x \longmapsto \exp x$ est sa propre dérivée.

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin). Soient I un intervalle ouvert tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n + 1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta.x).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n + 1$.

Exemples. 1) Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\exp(\theta x),$$

avec $\theta \in]0, 1[$. En effet, $x \longmapsto \exp x$ est sa propre dérivée.

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin). Soient I un intervalle ouvert tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta.x).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$.

Exemples. 1) Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\exp(\theta x),$$

avec $\theta \in]0, 1[$. En effet, $x \longmapsto \exp x$ est sa propre dérivée.

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin). Soient I un intervalle ouvert tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta.x).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$.

Exemples. 1) Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\exp(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, $x \longmapsto \exp x$ est sa propre dérivée.

2) Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cos(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, les dérivées successives de $\sin x$ en 0 sont données par :

$$\sin(0) = 0,\ \sin'(0) = \cos(0) = 1,\ \sin''(0) = -\sin(0) = 0,\ \ldots,\ \sin^{(2k)}(0) = 0 \text{ et } \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\cos(0) = (-1)^k.$$

D'où le résultat. Ainsi on peut dire que $x - x/3!$ constitue une valeur approchée de $\sin(x)$ avec une erreur inférieure ou égale à $x^5/5!$.

3) Soit P un polynôme de degré au plus n. Alors P est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$ s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{n!} x^n.$$

En effet, le reste est nul. Ainsi, les coefficients de P sont donnés par les dérivées successives de P en 0. Ce résultat peut aussi se démontrer par un calcul algébrique.

2) Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cos(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, les dérivées successives de $\sin x$ en 0 sont données par :

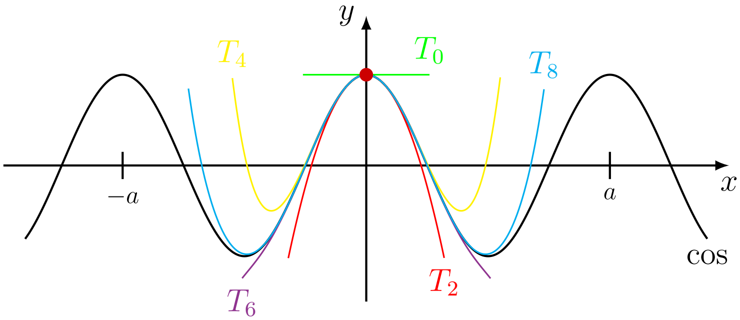
$$\sin(0) = 0,\ \sin'(0) = \cos(0) = 1,\ \sin''(0) = -\sin(0) = 0,\ \ldots,\ \sin^{(2k)}(0) = 0 \text{ et } \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\cos(0) = (-1)^k.$$

D'où le résultat. Ainsi on peut dire que $x - x/3!$ constitue une valeur approchée de $\sin(x)$ avec une erreur inférieure ou égale à $x^5/5!$.

3) Soit P un polynôme de degré au plus n. Alors P est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$ s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{n!} x^n.$$

En effet, le reste est nul. Ainsi, les coefficients de P sont donnés par les dérivées successives de P en 0. Ce résultat peut aussi se démontrer par un calcul algébrique.



y
T_4
T_0
T_8
$-a$
a
x
cos
T_6
T_2

4) Considérons la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\frac{2}{(1+\theta x)^3},$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, les dérivées successives de $\ln(1+x)$ en 0 sont données par : $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. Ensuite $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$. Puis $f^{(3)}(x) = 2\dfrac{1}{(1+x)^3}$ donc $f^{(3)}(0) = 2$. Par récurrence, on a $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. D'où si $n > 0$: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

2) Formules de Taylor

Corollaire 2.5 (inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $f^{(n+1)}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}^+$ sur $]a,b[$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M.(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemples. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. L'inégalité de Taylor-Lagrange pour $n=2$ sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6], \ |\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par x sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est majorée par $x^3/6$, soit de l'ordre de 2.10^{-2}. Pour $n=4$, l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6], \ \left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^5}{120}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par $x - x^3/6$ sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est de l'ordre de 3.10^{-4}.

2) Formules de Taylor

Corollaire 2.5 (inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $f^{(n+1)}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}^+$ sur $]a,b[$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M.(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemples. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. L'inégalité de Taylor-Lagrange pour $n = 2$ sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6],\ |\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par x sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est majorée par $x^3/6$, soit de l'ordre de 2.10^{-2}. Pour $n = 4$, l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6],\ \left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^5}{120}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par $x - x^3/6$ sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est de l'ordre de 3.10^{-4}.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (extremums). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a.

- On dit que f admet *un maximum local (ou relatif) en* a si $f(x) \leqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f, \ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet *un minimum local (ou relatif) en* a si $f(x) \geqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f, \ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (extremums). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a.

- On dit que f admet *un maximum local (ou relatif) en a* si $f(x) \leqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f,\ \ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet *un minimum local (ou relatif) en a* si $f(x) \geqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f,\ \ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a.

2) Formules de Taylor

Remarque. On dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *maximum global* en a si

$$\forall x \in D_f,\ \ f(x) \leqslant f(a).$$

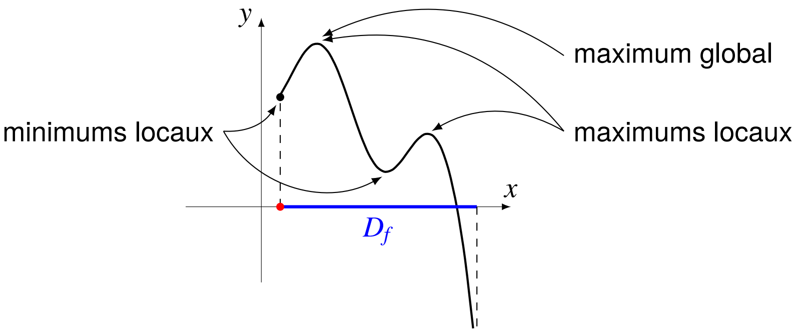
Il est clair que un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

2) Formules de Taylor

Remarque. On dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *maximum global* en a si

$$\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant f(a).$$

Il est clair que un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.



2) Formules de Taylor

Proposition 2.7 (Condition nécessaire). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a. Si f est dérivable en a et admet un maximum local (ou un minimum local) en a, alors $f'(a) = 0$. On dit que f admet un point critique en a.

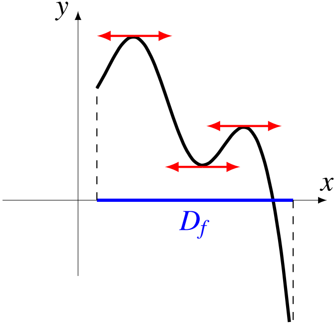
Géométriquement, si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors au point $(a, f(a))$ la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.

Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple : $f(x) = x^3$. Le point $a = 0$ est un point critique, mais ce n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point *d'inflexion*).

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7 (Condition nécessaire). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a. Si f est dérivable en a et admet un maximum local (ou un minimum local) en a, alors $f'(a) = 0$. On dit que f admet un point critique en a.

Géométriquement, si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors au point $(a, f(a))$ la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.

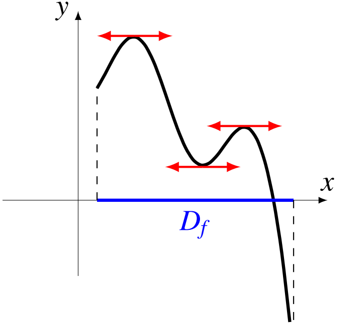


Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple : $f(x) = x^3$. Le point $a = 0$ est un point critique, mais ce n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point *d'inflexion*).

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7 (Condition nécessaire). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a. Si f est dérivable en a et admet un maximum local (ou un minimum local) en a, alors $f'(a) = 0$. On dit que f admet un point critique en a.

Géométriquement, si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors au point $(a, f(a))$ la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.



Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple : $f(x) = x^3$. Le point $a = 0$ est un point critique, mais ce n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point *d'inflexion*).

2) Formules de Taylor

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$.
3) La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'admet ni minimum ni maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.

$f(x) = x^2$

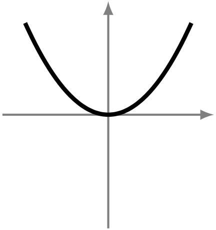
$f(x) = -x^2$

$f(x) = x^3$

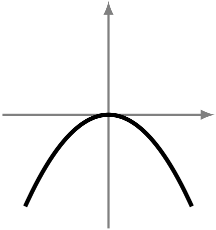
2) Formules de Taylor

Exemples.

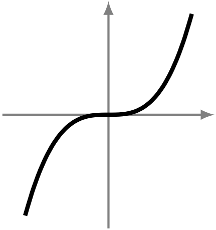
1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$.
3) La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'admet ni minimum ni maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.



$f(x) = x^2$



$f(x) = -x^2$



$f(x) = x^3$

2) Formules de Taylor

Voici maintenant une **condition suffisante** (d'existence des extremums) du premier ordre :

Proposition 2.8 (Condition suffisante des extremums). Soient I un inervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $a \in I$ un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$). Si f' change de signe au voisinage de a, alors f admet un extremum local en a. Plus précisement,

1) s'il existe $\alpha > 0$ tel que $f' < 0$ sur $]a-\alpha, a[$ et $f' > 0$ sur $]a, a+\alpha[$, alors f admet un minimum local en a;
2) s'il existe $\alpha > 0$ tel que $f' > 0$ sur $]a-\alpha, a[$ et $f' < 0$ sur $]a, a+\alpha[$, alors f admet un maximum local en a;
3) si $f'(a) = 0$ et f' ne change pas de signe au voisinage de a, alors f n'admet pas un extremum local en a.

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$. De plus, on a $f'(x) = 2x < 0$ si $x < 0$ et $f'(x) = 2x > 0$ si $x > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$. De plus, on a $f'(x) = -2x > 0$ si $x < 0$ et $f'(x) = -2x < 0$ si $x > 0$.
3) La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'admet pas un extremum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.

2) Formules de Taylor

Voici maintenant une **condition suffisante** (d'existence des extremums) du premier ordre :

Proposition 2.8 (Condition suffisante des extremums). Soient I un inervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $a \in I$ un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$). Si f' change de signe au voisinage de a, alors f admet un extremum local en a. Plus précisement,

1) s'il existe $\alpha > 0$ tel que $f' < 0$ sur $]a - \alpha, a[$ et $f' > 0$ sur $]a, a + \alpha[$, alors f admet un minimum local en a;
2) s'il existe $\alpha > 0$ tel que $f' > 0$ sur $]a - \alpha, a[$ et $f' < 0$ sur $]a, a + \alpha[$, alors f admet un maximum local en a;
3) si $f'(a) = 0$ et f' ne change pas de signe au voisinage de a, alors f n'admet pas un extremum local en a.

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$. De plus, on a $f'(x) = 2x < 0$ si $x < 0$ et $f'(x) = 2x > 0$ si $x > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$. De plus, on a $f'(x) = -2x > 0$ si $x < 0$ et $f'(x) = -2x < 0$ si $x > 0$.
3) La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'admet pas un extremum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.

2) Formules de Taylor

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient une **condition suffisante** (d'existence des extremums) du second ordre :

Proposition 2.8 (Condition suffisante des extremums). Soient I un inervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in I$ un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$). Alors on a :

1) si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a;
2) si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a;
3) si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure. Il faut approfondir l'étude.

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$.
3) Pour la fonction $f : x \mapsto x^3$ on ne peut pas conclure. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.

2) Formules de Taylor

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient une **condition suffisante** (d'existence des extremums) du second ordre :

Proposition 2.8 (Condition suffisante des extremums). Soient I un inervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in I$ un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$). Alors on a :

1) si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a;
2) si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a;
3) si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure. Il faut approfondir l'étude.

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$.
3) Pour la fonction $f : x \mapsto x^3$ on ne peut pas conclure. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.

2) Formules de Taylor

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre m, on obtient une **condition suffisante** (d'existence des extremums) d'ordre m :

Proposition 2.9 (Condition suffisante des extremums). Soient I un inervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivble et $a \in I$ un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$). Soit $m \geqslant 2$ tel que f soit de classe C^m sur I et $f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ et $f^{(m)}(a) \neq 0$. Alors on a :

1) si m est pair et si $f^{(m)}(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a;
2) si m est pair et si $f^{(m)}(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a;
3) si m est impair, alors f n'admet pas un extremum local en a.

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^4$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^4$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = -24 < 0$.
3) La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'admet pas un extremum local en 0. On a $f'(0) = f^{(2)}(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$ et 3 est impair.

2) Formules de Taylor

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre m, on obtient une **condition suffisante** (d'existence des extremums) d'ordre m :

Proposition 2.9 (Condition suffisante des extremums). Soient I un inervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivble et $a \in I$ un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$). Soit $m \geqslant 2$ tel que f soit de classe C^m sur I et $f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ et $f^{(m)}(a) \neq 0$. Alors on a :

1) si m est pair et si $f^{(m)}(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a;
2) si m est pair et si $f^{(m)}(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a;
3) si m est impair, alors f n'admet pas un extremum local en a.

Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^4$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^4$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = -24 < 0$.
3) La fonction $f : x \mapsto x^3$ n'admet pas un extremum local en 0. On a $f'(0) = f^{(2)}(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$ et 3 est impair.

2) Formules de Taylor

Définition 2.10 (fonction convexe). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \ f(t.x_1 + (1-t).x_2) \leqslant t.f(x_1) + (1-t).f(x_2).$$

Interprétation géométrique :

Figure – Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses cordes.

2) Formules de Taylor

Définition 2.10 (fonction convexe). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \ f(t.x_1 + (1-t).x_2) \leqslant t.f(x_1) + (1-t).f(x_2).$$

Interprétation géométrique :

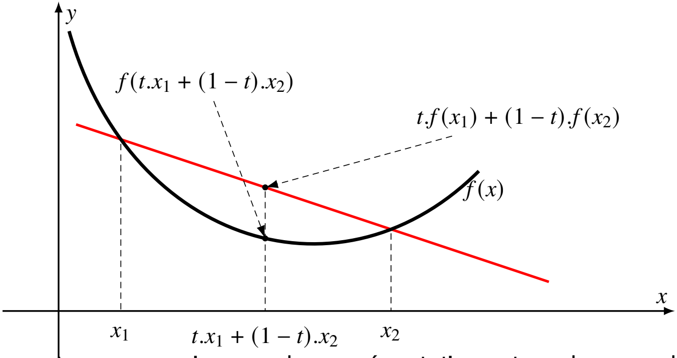


Figure – Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses cordes.

2) Formules de Taylor

Remarque (fonction concave). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convave si la fonction $-f$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \ t.f(x_1) + (1-t).f(x_2) \leqslant f(t.x_1 + (1-t).x_2).$$

Interprétation géométrique :

Figure – Une fonction est concave ssi sa courbe représentative est au dessus de toutes ses cordes.

2) Formules de Taylor

Remarque (fonction concave). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convave si la fonction $-f$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \ t.f(x_1) + (1-t).f(x_2) \leqslant f(t.x_1 + (1-t).x_2).$$

Interprétation géométrique :

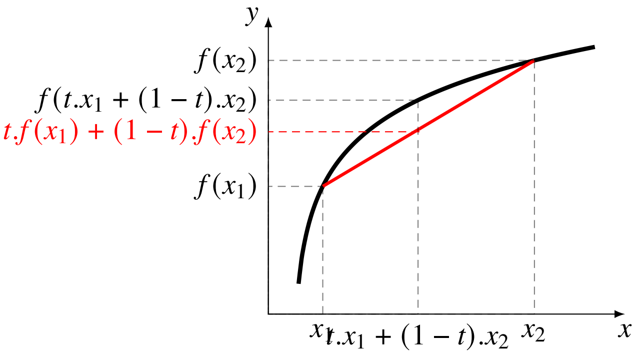


Figure – Une fonction est concave ssi sa courbe représentative est au dessus de toutes ses cordes.

2) Formules de Taylor

Exemples.

1) La fonction $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) La fonction $f : x \longmapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
3) Les fonctions affines sont des fonctions à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Une fonction peut être ni convexe ni convave.

Figure – Une fonction qui ni convexe ni convave.

2) Formules de Taylor

Exemples.

1) La fonction $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) La fonction $f : x \longmapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
3) Les fonctions affines sont des fonctions à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Une fonction peut être ni convexe ni convave.

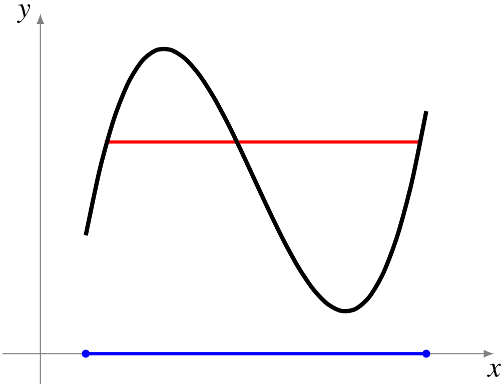


Figure – Une fonction qui ni convexe ni convave.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.11. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.
3) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est concave sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est négative ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.
2) La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction exponentielle $x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors

1) f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.
2) Si f est convexe sur I et $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.11. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.
3) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est concave sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est négative ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.
2) La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction exponentielle $x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors

1) f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.
2) Si f est convexe sur I et $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.11. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.
3) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est concave sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est négative ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.
2) La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction exponentielle $x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors

1) f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.
2) Si f est convexe sur I et $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.11. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.
3) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est concave sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est négative ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.
2) La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction exponentielle $x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors

1) f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.
2) Si f est convexe sur I et $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.12 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en x_0 à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x - x_0)^n$ et est noté $o((x - x_0)^n)$. Donc $o((x - x_0)^n)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \dfrac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x + 1/2) = \sin 1 + (x - 1/2)\cos 1 - (x - 1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x - 1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x - 1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1/2} \varepsilon(x) = 0.$

2) Formules de Taylor

Théorème 2.12 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim_{x\longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en x_0 à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x-x_0)^n$ et est noté $o((x-x_0)^n)$. Donc $o((x-x_0)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x+1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x+1/2) = \sin 1 + (x-1/2)\cos 1 - (x-1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x-1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x-1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{x\longrightarrow 1/2} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.12 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en x_0 à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \longrightarrow x_0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x - x_0)^n$ et est noté $o((x - x_0)^n)$. Donc $o((x - x_0)^n)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 1/2 s'écrit

$$\sin(x + 1/2) = \sin 1 + (x - 1/2)\cos 1 - (x - 1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x - 1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x - 1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1/2} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.12 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en x_0 à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \longrightarrow x_0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x - x_0)^n$ et est noté $o((x - x_0)^n)$. Donc $o((x - x_0)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x + 1/2) = \sin 1 + (x - 1/2)\cos 1 - (x - 1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x - 1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x - 1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{x \longrightarrow 1/2} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.13 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \, \varepsilon(x),$$

avec $\lim \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.13 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n\, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\, \varepsilon(x),$$

avec $\lim \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.13 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n\, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\, \varepsilon(x),$$

avec $\lim \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.13 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x),$$

avec $\lim \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.13 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n\, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\, \varepsilon(x),$$

avec $\lim \varepsilon(x) = 0$.

3) Développements limités

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de 0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Contre-exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de 0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Contre-exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de 0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Contre-exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de 0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Contre-exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités

Remarque. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). Alors

1) f admet un $DL_0(0)$ ssi f admet une limite finie en 0. Plus précisément

$$f(x) = a_0 + o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = a_0.$$

f est alors prolongeable par continuité en 0. On posera $\tilde{f}(0) = a_0$.

2) f admet un $DL_1(0)$ ssi f est dérivable en 0 (après prolongement par continuité en 0). Plus précisément :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(0) = a_1.$$

Attention. L'existence d'un $DL_n(0)$ avec $n \geqslant 2$ ne garantit pas l'existence de $f^{(n)}(0)$.

Contre-exemple. La fonction $x \longmapsto x^3 \sin(1/x)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

3) Développements limités

Remarque. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). Alors

1) f admet un $DL_0(0)$ ssi f admet une limite finie en 0. Plus précisément

$$f(x) = a_0 + o(1) \iff \lim_{x \to 0} f(x) = a_0.$$

   f est alors prolongeable par continuité en 0. On posera $\tilde{f}(0) = a_0$.

2) f admet un $DL_1(0)$ ssi f est dérivable en 0 (après prolongement par continuité en 0). Plus précisément :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x) \iff \lim_{x \to 0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(0) = a_1.$$

Attention. L'existence d'un $DL_n(0)$ avec $n \geqslant 2$ ne garantit pas l'existence de $f^{(n)}(0)$.

Contre-exemple. La fonction $x \longmapsto x^3 \sin(1/x)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

3) Développements limités

Proposition 3.2 (propriétés).

1) Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_m(0)$ pour tout $m \leqslant n$ obtenu par « troncature » au degré m du $DL_n(0)$.
2) Si une fonction f admet un DL, alors celui-ci est unique (c.-à-d. les coefficients a_k sont uniques).
3) Si f est paire et admet un DL alors la partie régulière de DL est paire (c.-à-d. uniquement avec des exposants pairs).
4) Si f est impaire et admet un DL alors la partie régulière de DL est impaire (c.-à-d. uniquement avec des exposants impairs).

Comme conséquence de la proposition 3.2 (point 2)), on a une **condition suffisante** d'existence très pratique et utile d'un DL en 0 :

Théorème 3.3 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

Proposition 3.2 (propriétés).

1) Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_m(0)$ pour tout $m \leqslant n$ obtenu par « troncature » au degré m du $DL_n(0)$.
2) Si une fonction f admet un DL, alors celui-ci est unique (c.-à-d. les coefficients a_k sont uniques).
3) Si f est paire et admet un DL alors la partie régulière de DL est paire (c.-à-d. uniquement avec des exposants pairs).
4) Si f est impaire et admet un DL alors la partie régulière de DL est impaire (c.-à-d. uniquement avec des exposants impairs).

Comme conséquence de la proposition 3.2 (point 2)), on a une **condition suffisante** d'existence très pratique et utile d'un DL en 0 :

Théorème 3.3 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

Les coefficients de $DL_n(0)$ dans ce cas sont donnés par :

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \ a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemples de $\mathrm{DL}_n(0)$ usuels : ils sont tous à connaître par coeur.

1) $$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2) $$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

3) $$\mathrm{sh}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

4) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

5) $$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

3) Développements limités

6) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

7) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

8) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

9) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

10) $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, avec P_n et Q_n sont des plynômes.

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, avec P_n et Q_n sont des plynômes.

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f + g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, avec P_n et Q_n sont des plynômes.

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, avec P_n et Q_n sont des plynômes.

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemple. Les $DL_{2n}(0)$ des fonctions sh et ch sont donnés par :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ et } \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Produit des DL. La fonction fg admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$(fg)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n),$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Exemple. Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ est donné par :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemple. Les $DL_{2n}(0)$ des fonctions sh et ch sont donnés par :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ et } \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Produit des DL. La fonction fg admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$(fg)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n),$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Exemple. Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ est donné par :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemple. Les $DL_{2n}(0)$ des fonctions sh et ch sont donnés par :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ et } \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Produit des DL. La fonction fg admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$(fg)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n),$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Exemple. Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ est donné par :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

d) Quotient des DL. Si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (i.e. $b_0 \neq 0$), alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en divisant à l'ordre n, suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemples.

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

2) $$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3) $$\operatorname{th} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

e) Composition des DL. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (c-à-d si $a_0 = 0$), alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en remplaçant dans $Q_n(x)$ la variable x par $P_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

d) Quotient des DL. Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (i.e. $b_0 \neq 0$), alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en divisant à l'ordre n, suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemples.

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

2) $$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3) $$\operatorname{th} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

e) Composition des DL. Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (c-à-d si $a_0 = 0$), alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en remplaçant dans $Q_n(x)$ la variable x par $P_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

d) Quotient des DL. Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (i.e. $b_0 \neq 0$), alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en divisant à l'ordre n, suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemples.

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

2) $$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3) $$\operatorname{th} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

e) Composition des DL. Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (c-à-d si $a_0 = 0$), alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en remplaçant dans $Q_n(x)$ la variable x par $P_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemple. Les $DL_3(0)$ des fonctions $x \overset{f}{\mapsto} \sin x$ et $y \overset{g}{\mapsto} e^y$ sont donnés respectivement par :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ et } e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^3).$$

D'où le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^{\sin x}$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

f) Dérivation des DL. Si la fonction f' admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est le polynôme dérivé $P_n'(x)$. Autrement dit,

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}).$$

f) Primitivation des DL. Si F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$: sa partie régulière est $F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Autrement dit,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemple. Les $DL_3(0)$ des fonctions $x \overset{f}{\mapsto} \sin x$ et $y \overset{g}{\mapsto} e^y$ sont donnés respectivement par :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ et } e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^3).$$

D'où le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^{\sin x}$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

f) Dérivation des DL. Si la fonction f' admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est le polynôme dérivé $P_n'(x)$. Autrement dit,

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}).$$

f) Primitivation des DL. Si F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$: sa partie régulière est $F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Autrement dit,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemple. Les $DL_3(0)$ des fonctions $x \overset{f}{\mapsto} \sin x$ et $y \overset{g}{\mapsto} e^y$ sont donnés respectivement par :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ et } e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^3).$$

D'où le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^{\sin x}$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

f) Dérivation des DL. Si la fonction f' admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est le polynôme dérivé $P_n'(x)$. Autrement dit,

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}).$$

f) Primitivation des DL. Si F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$: sa partie régulière est $F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Autrement dit,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

3) Développements limités

3.1) Opérations sur les développements limités

Exemples. 1) Le $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4).$$

2) Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est donné par :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

3) Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est donné par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

3) Développements limités

3.2) DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de x_0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + \cdots + a_n.(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f(t + x_0)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Le $DL_5(1)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x-1)$ est donné par :

$$\cos(x-1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o(x-1)^5.$$

3) Développements limités

3.2) DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de x_0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + \cdots + a_n.(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f(t + x_0)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Le $DL_5(1)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x-1)$ est donné par :

$$\cos(x-1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o(x-1)^5.$$

3) Développements limités

3.2) DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de x_0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + \cdots + a_n.(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f(t + x_0)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Le $DL_5(1)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x-1)$ est donné par :

$$\cos(x-1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o(x-1)^5.$$

3) Développements limités

3.2) DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de x_0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + \cdots + a_n.(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f(t + x_0)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Le $DL_5(1)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x-1)$ est donné par :

$$\cos(x-1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o\left(x-1\right)^5.$$

3) Développements limités

3.2) DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Remarque. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). Alors

1) f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une limite finie en x_0. Plus précisément

$$f(x) = a_0 + o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0.$$

f est alors prolongeable par continuité en x_0. On posera $\tilde{f}(x_0) = a_0$.

2) f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est dérivable en x_0 (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Attention. L'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geqslant 2$ ne garantit pas l'existence de $f^{(n)}(x_0)$.

Contre-exemple. La fonction $x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

3) Développements limités

3.2) DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Remarque. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). Alors

1) f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une limite finie en x_0. Plus précisément

$$f(x) = a_0 + o(1) \iff \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0.$$

f est alors prolongeable par continuité en x_0. On posera $\tilde{f}(x_0) = a_0$.

2) f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est dérivable en x_0 (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \iff \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Attention. L'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geqslant 2$ ne garantit pas l'existence de $f^{(n)}(x_0)$.

Contre-exemple. La fonction $x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

3) Développements limités

3.3) Développement limité au voisinage de $\pm\infty$.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c.-à-d. $]\alpha, +\infty[\subset D_f$). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de $+\infty$, on a :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = \frac{1}{x}\cdot$ Alors étudier le $DL_n(+\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et finie.

3) Développements limités

3.3) Développement limité au voisinage de $\pm\infty$.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c.-à-d. $]\alpha, +\infty[\subset D_f$). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de $+\infty$, on a :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = \frac{1}{x}\cdot$ Alors étudier le $DL_n(+\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ existe et finie.

3) Développements limités

3.3) Développement limité au voisinage de $\pm\infty$.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c.-à-d. $]\alpha, +\infty[\subset D_f$). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de $+\infty$, on a :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = \frac{1}{x}\cdot$ Alors étudier le $DL_n(+\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ existe et finie.

3) Développements limités

3.3) Développement limité au voisinage de $\pm\infty$.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c.-à-d. $]\alpha, +\infty[\subset D_f$). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x voisin de $+\infty$, on a :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque 1. Si on fait le changement de variable $t = \frac{1}{x}\cdot$ Alors étudier le $DL_n(+\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Remarque 2 (condition nécessaire). Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ existe et finie.

3) Développements limités

3.3) Développement limité au voisinage de $\pm\infty$.

Contre-exemple. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ n'admettent pas de DL au voisinage de $+\infty$.

Exemples. 1) La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} e^{\frac{1}{x}}$ admet un $DL_n(+\infty)$ car la fonction $g(t) = f(\frac{1}{t}) = e^t$ admet un $DL_n(0)$, et on a :

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}).$$

2) La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sin(\frac{1}{x})$ admet un $DL_n(+\infty)$ car la fonction $g(t) = f(\frac{1}{t}) = \sin t$ admet un $DL_n(0)$.

3) Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x}$. Comme $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2(1 - \frac{1}{x})}$, le $DL_n(+\infty)$ de f est donné par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} + o\Big(\frac{1}{x^n}\Big).$$

Remarque. On définit de la même manière pour une fonction f définie au voisinage de $-\infty$ (c.-à-d. $]-\infty, \alpha[\subset D_f$) le développement limité à l'ordre n de f au voisinage au voisinage de $-\infty$.

3) Développements limités

3.3) Développement limité au voisinage de $\pm\infty$.

Contre-exemple. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ n'admettent pas de DL au voisinage de $+\infty$.

Exemples. 1) La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} e^{\frac{1}{x}}$ admet un $DL_n(+\infty)$ car la fonction $g(t) = f(\frac{1}{t}) = e^t$ admet un $DL_n(0)$, et on a :

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}).$$

2) La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sin(\frac{1}{x})$ admet un $DL_n(+\infty)$ car la fonction $g(t) = f(\frac{1}{t}) = \sin t$ admet un $DL_n(0)$.

3) Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x}$. Comme $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2(1 - \frac{1}{x})}$, le $DL_n(+\infty)$ de f est donné par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} + o\Big(\frac{1}{x^n}\Big).$$

Remarque. On définit de la même manière pour une fonction f définie au voisinage de $-\infty$ (c.-à-d. $]-\infty, \alpha[\subset D_f$) le développement limité à l'ordre n de f au voisinage au voisinage de $-\infty$.

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

a) Calcul des limites des formes indéterminées : L'une des applications des

développements limités est la recherche de certaines limites, notament celles des formes indérterminées, et ceci en remplaçant chaque fonction par la partie régulière de son développement limité.

Exemple. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$. Au voisinage de 0, on a $\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$ est une forme

indérterminée de type $\frac{0}{0}$. Les $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\tan x$ sont respectivement :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et } \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \sim_0 \frac{x^3}{3} \text{ et } \tan x - x \sim_0 \frac{x^3}{3}.$$

Ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} = 1.$$

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

a) Calcul des limites des formes indéterminées : L'une des applications des développements limités est la recherche de certaines limites, notament celles des formes indérterminées, et ceci en remplaçant chaque fonction par la partie régulière de son développement limité.

Exemple. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$. Au voisinage de 0, on a $\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$ est une forme indérterminée de type $\dfrac{0}{0}$. Les $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\tan x$ sont respectivement :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et } \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \sim_0 \frac{x^3}{3} \text{ et } \tan x - x \sim_0 \frac{x^3}{3}.$$

Ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} = 1.$$

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

a) Calcul des limites des formes indéterminées : L'une des applications des développements limités est la recherche de certaines limites, notament celles des formes indérterminées, et ceci en remplaçant chaque fonction par la partie régulière de son développement limité.

Exemple. Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$. Au voisinage de 0, on a $\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$ est une forme indérterminée de type $\frac{0}{0}$. Les $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\tan x$ sont respectivement :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et } \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \sim_0 \frac{x^3}{3} \text{ et } \tan x - x \sim_0 \frac{x^3}{3}.$$

Ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} = 1.$$

3) Développements limités
3.4) Applications des DL.

b) Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction dérivable au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$. Si f admet un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + a_2.(x - x_0)^2 + \cdots + a_n.(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1.(x - x_0)$ est la tangente à la courbe C_f de f au point $(x_0, f(x_0))$. Si r est le plus petit entier (avec $2 \leqslant r \leqslant n$) tel que $a_r \neq 0$, alors (puisque f admet un $DL_r(x_0)$) on peut écrire

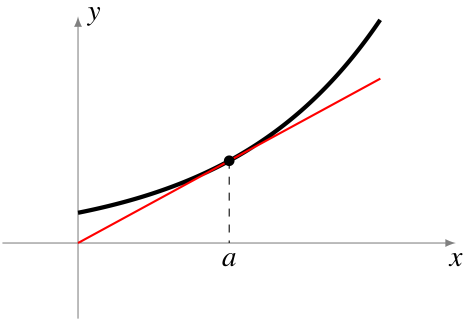
$$f(x) - y = a_r.(x - x_0)^r + o((x - x_0)^r).$$

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

Alors on distingue les trois cas suivants :

1er cas : Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} a_r.(x - x_0)^r = 0^+$, alors la courbe est au dessus de la tangente.



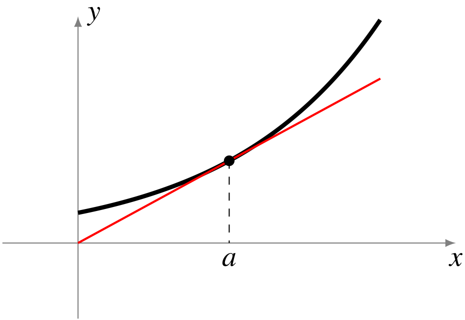
2e cas : Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} a_r.\,(x - x_0)^r = 0^-$, alors la courbe est en dessous de la tangente.

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

Alors on distingue les trois cas suivants :

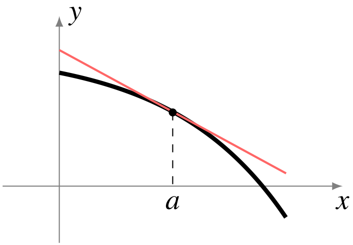
1^er^ cas : Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}a_r.(x-x_0)^r=0^+$, alors la courbe est au dessus de la tangente.



2^e^ cas : Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}a_r.\,(x-x_0)^r=0^-$, alors la courbe est en dessous de la tangente.

3) Développements limités

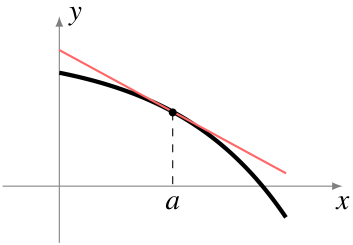
3.4) Applications des DL.



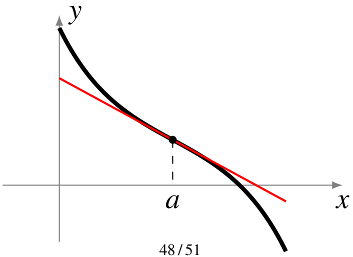
3ᵉ cas : Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} (f(x) - y) = 0^+$ (resp. 0^-) et $\lim\limits_{x \to x_0^-} (f(x) - y) = 0^-$ (resp. 0^+), alors le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.



3e cas : Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} (f(x) - y) = 0^+$ (resp. 0^-) et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} (f(x) - y) = 0^-$ (resp. 0^+), alors le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.



3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

c) Position d'une courbe par rapport à ses asymptôtes :

Soit f une fonction définie au voisinage de l'$\pm\infty$. Si au voisinage de $\pm\infty$, la fonction f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

avec $\alpha, \beta, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptôte oblique de la courbe C_f de f.

Si r (avec $1 \leqslant r \leqslant n$) est le plus petit entier tel que $a_r \neq 0$, alors on peut écrire

$$f(x) - y = \frac{a_r}{x^r} + o\left(\frac{1}{x^r}\right).$$

- 1er cas : si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_r}{x^r} = 0^+$, alors la courbe de f est en dessus de l'asymptôte.
- 2e cas : si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_r}{x^r} = 0^-$, alors la courbe de f est en dessous de l'asymptôte.

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

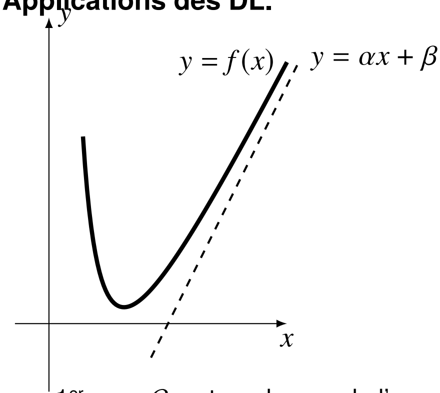


Figure – 1er cas : C_f est en dessus de l'asymptôte.

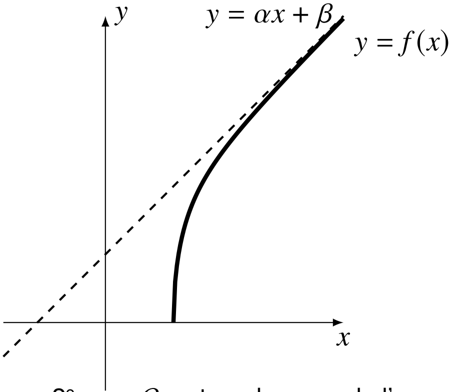


Figure – 2e cas : C_f est en dessous de l'asymptôte.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ avec $x \neq -1$. En utilisant les $DL_2(\infty)$, la fonction f peut s'écrire au voisinade de ∞ sous la forme :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

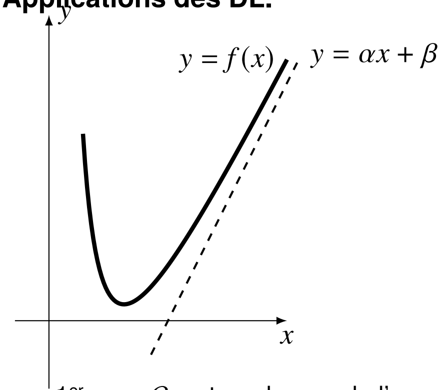


FIGURE – 1er cas : C_f est en dessus de l'asymptôte.

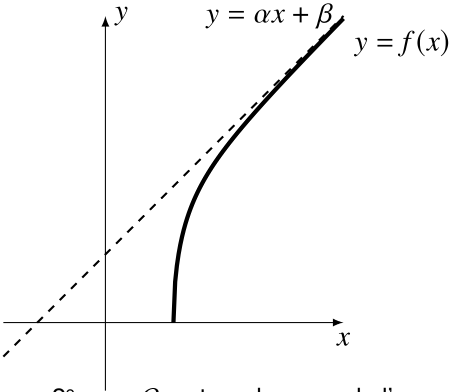


FIGURE – 2e cas : C_f est en dessous de l'asymptôte.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ avec $x \neq -1$. En utilisant les $DL_2(\infty)$, la fonction f peut s'écrire au voisinade de ∞ sous la forme :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3) Développements limités

3.4) Applications des DL.

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptôte oblique de la courbe de f en $+\infty$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0^+$, alors la courbe est en dessus de l'asymptôte en $+\infty$.