Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE ET HYPERBOLIQUE

N.B. Les formules hyperboliques s'obtiennent facilement à partir des formules circulaires en remplacant cos par ch et sin par $i \cdot \text{sh}$.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch}\, a \cdot \text{ch}\, b + \text{sh}\, a \cdot \text{sh}\, b$$
$$\text{sh}(a+b) = \text{sh}\, a \cdot \text{ch}\, b + \text{sh}\, b \cdot \text{ch}\, a$$
$$\text{th}(a+b) = \frac{\text{th}\, a + \text{th}\, b}{1 + \text{th}\, a \cdot \text{th}\, b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\text{ch}(a-b) = \text{ch}\, a \cdot \text{ch}\, b - \text{sh}\, a \cdot \text{sh}\, b$$
$$\text{sh}(a-b) = \text{sh}\, a \cdot \text{ch}\, b - \text{sh}\, b \cdot \text{ch}\, a$$
$$\text{th}(a-b) = \frac{\text{th}\, a - \text{th}\, b}{1 - \text{th}\, a \cdot \text{th}\, b}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2\, \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\, \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$
$$\sin 2a = 2\, \sin a \cdot \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\, \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\begin{aligned}\text{ch}\, 2a &= 2\, \text{ch}^2 a - 1 \\ &= 1 + 2\, \text{sh}^2 a \\ &= \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a\end{aligned}$$
$$\text{sh}\, 2a = 2\, \text{sh}\, a \cdot \text{ch}\, a$$
$$\text{th}\, 2a = \frac{2\, \text{th}\, a}{1 + \text{th}^2 a}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\text{ch}\, a \cdot \text{ch}\, b = \frac{1}{2}\left[\text{ch}(a+b) + \text{ch}(a-b)\right]$$
$$\text{sh}\, a \cdot \text{sh}\, b = \frac{1}{2}\left[\text{ch}(a+b) - \text{ch}(a-b)\right]$$
$$\text{sh}\, a \cdot \text{ch}\, b = \frac{1}{2}\left[\text{sh}(a+b) + \text{sh}(a-b)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\,\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\,\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\,\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\,\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\,\operatorname{ch}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\,\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\,\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\,\operatorname{sh}\frac{p-q}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{p+q}{2}$$

En posant $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\begin{cases} \cos x &= \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

En posant $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x &= \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ \operatorname{sh} x &= \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \operatorname{th} x &= \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

N.B. : Pour les dérivées, la multiplication par i n'est plus valable.

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$
$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$
$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{avec } |x| < 1)$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{avec } |x| < 1)$$
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{avec } x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (\text{avec } x > 1)$$
$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (\text{avec } x \in \mathbb{R})$$
$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (\text{avec } |x| < 1)$$