Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

# Série n° 2

**Exercice 1.** Soit $n$ un entier naturel non nul fixé. Considérons la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout entier $i$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{i^2}{n^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}\right[ \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $f$ est une fonction en escalier.
2) Calculer en fonction de $n$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ de $f$ sur $[0,1]$.

---

**Exercice 2** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Considérons la fonction $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Montrer que si $\phi$ et $\psi$ sont deux fonctions en escalier telles que $\phi \leqslant f \leqslant \psi$. Alors $\phi \leqslant 0$ et $1 \leqslant \psi$.
2) En déduire que $f$ n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,b]$.

---

**Exercice 3.** Considérons les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^x.$$

1) Montrer que la fonction $f$ est intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
2) En utilisant la définition, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3)* Refaire les questions 1) et 2) pour la fonction $g$.
4) Etudier l'intégrabilité des fonctions $h, k\colon [0\,,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$h(x) = x - [x] \text{ et } k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left]0\,,2\right] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

---

**Exercice 4***. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1) Montrer que si $f$ est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a\,,b]$. Alors $f$ est intégrable sur $[a\,,b]$, et que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2) En déduire que si $f$ est intégrable et si l'on change les valeurs de $f$ en un nombre fini de points de $[a\,,b]$. Alors $f$ est encore intégrable et la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne change pas.
3) Montrer que si $f$ est intégrable sur $[a\,,b]$. Alors sa restriction sur tout intervalle $[c\,,d] \subset [a\,,b]$ est encore intégrable sur $[c\,,d]$.

---

**Exercice 5.** Considérons la fonction $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1) Calculer les sommes de Darboux (inférieure et supérieure) de $f$ par rapport à la subdivision suivante $\mathcal{S}_0 = \left\{0, 1/2, 1\right\}$ de $[0\,,1]$.

2)* Même question pour la subdivision suivante $\mathcal{S}_1 = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ de $[0\,,1]$.

3) En admettant que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\cdot$ Donner un encadrement de $\pi$ par des nombres rationnels.

4) Pour une subdivision régulière (uniforme) de pas $1/n$, à quelle valeur de $n$ on est sûr qu'on a une valeur approchée par excès de $\pi$ à $10^{-3}$ près.

---

**Exercice 6***. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a\,,b]$.

2) En déduire que si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2}\cdot$ Alors $f$ admet au moins un point fixe sur $[a\,,b]$.

3) Montrer que si $f$ est positive ou nulle. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \forall\, x \in [a\,,b],\ f(x) = 0\cdot$$

4) En déduire que si $P$ est un polynôme réel. Alors $\displaystyle\int_a^b P^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies P = 0$.

---

**Exercice 7.** En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite des suites suivantes :

**1**) $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}\cdot$ **2**) $S_n = \displaystyle\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\cdot$ **3**)* $T_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cdot$ **4**) $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}\cdot$

**5**)* $V_n = \displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\sqrt{k})$. **6**) $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}\cdot$ **7**)* $X_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k}\cdot$ **8**) $Y_n = \displaystyle\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{1/n}$. **9**)* $Z_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

---

* : **La correction de cette question ou exercice ne sera pas donné en classe.**