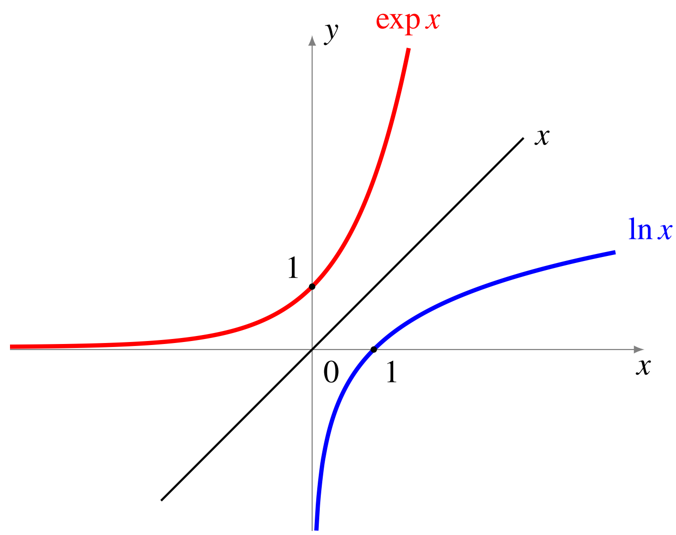
Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Fonctions usuelles

1 Les fonctions $\ln$ et $\exp$

La fonction *logarithme népérien* $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est continue et strictement croissante. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la fonction *exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$.



Les fonctions logarithme néperien et exponentielle vérifient donc les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad e^{\ln x} = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^y) = y.}$$

2 La fonction arcsin

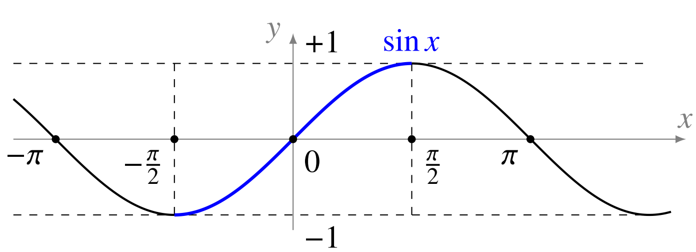
La restriction de la fonction sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire la fonction

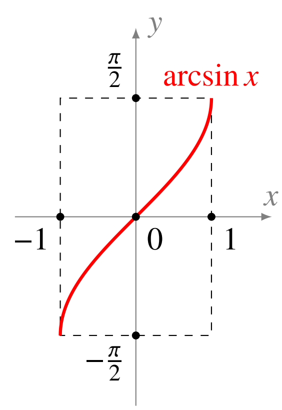
$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

est continue et strictement croissante. Elle est donc bijective. Sa fonction réciproque est la fonction

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

qui est aussi continue et strictement croissante.





La fonction arcsin vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \ \sin\big(\arcsin x\big) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \ \arcsin\big(\sin x\big) = x.}$$

3 La fonction arccos

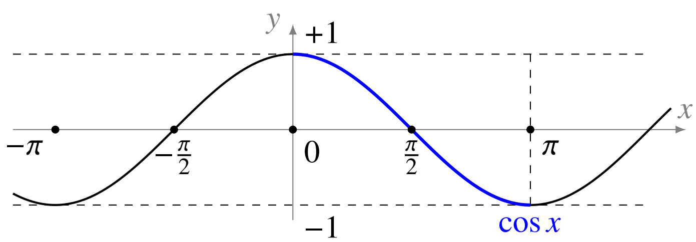
La restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$, c'est-à-dire la fonction

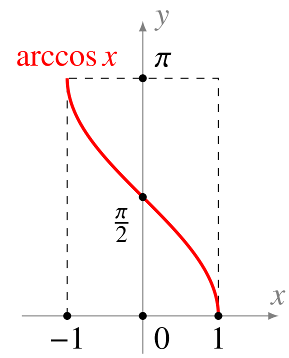
$$\cos_{|[0,\pi]} :\ [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$

est continue et strictement décroissante. Elle est donc bijective. Sa fonction réciproque est la fonction

$$\arccos :\ [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

qui est aussi continue et strictement décroissante.





La fonction arccos vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \ \cos\big(\arccos x\big) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in [0,\pi],\ \ \arccos\big(\cos x\big) = x}.$$

4 La fonction arctan

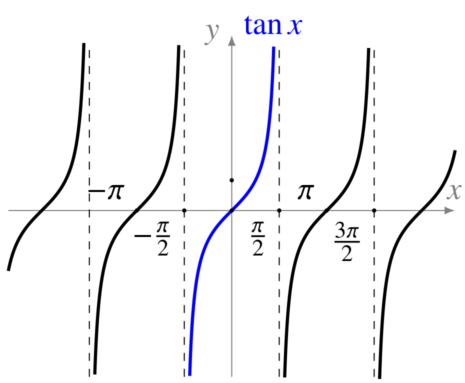
La restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est-à-dire la fonction

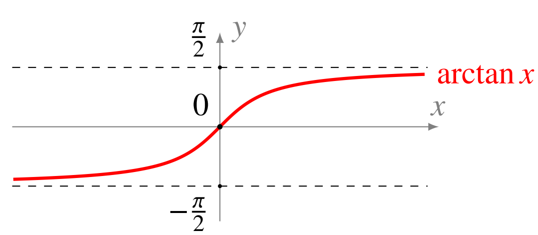
$$\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} :\ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \left]-\infty, +\infty\right[$$

est continue et strictement croissante. Elle est donc bijective. Sa fonction réciproque est la fonction

$$\arctan :\ \left]-\infty, +\infty\right[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

qui est aussi continue et strictement croissante.





La fonction arctan vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ \tan\big(\arctan x\big) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \ \arctan\big(\tan x\big) = x.}$$

5 La fonction argch

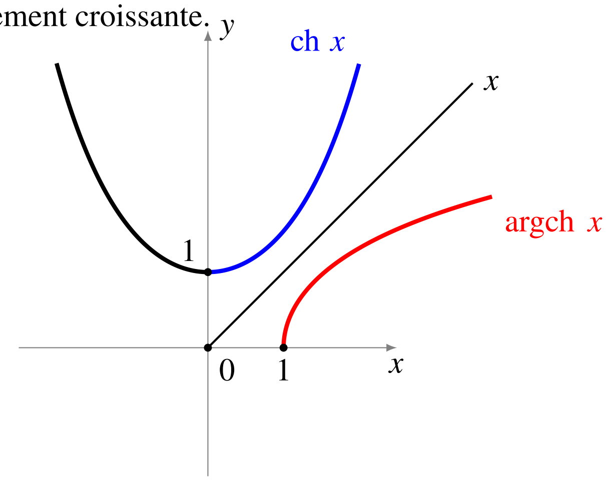
La fonction cosinus hyperbolique $\mathrm{ch}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La restriction de la fonction ch à $[0, +\infty[$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Elle est donc bijective. Sa fonction réciproque (appelée argument cosinus hyperbolique) est la fonction

$$\mathrm{argch}\colon\ [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

qui est aussi continue et strictement croissante.



La fonction argch vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[,\ \ \mathrm{ch}\left(\mathrm{argch}\, x\right) = x} \ \text{ et } \ \boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ \ \mathrm{argch}\left(\mathrm{ch}\, x\right) = x.}$$

Remarque. On a formule suivante :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \ \mathrm{argch}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

6 La fonction argsh

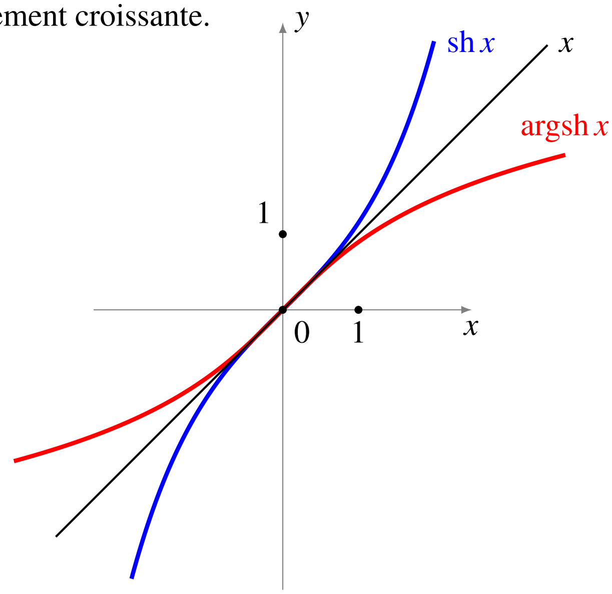
La fonction sinus hyperbolique $\mathrm{sh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La fonction sh est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective. Sa fonction réciproque (appelée argument sinus hyperbolique) est la fonction

$$\mathrm{argsh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est aussi continue et strictement croissante.



La fonction argsh vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{sh}\left(\operatorname{argsh} x\right) = x} \text{ et } \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{argsh}\left(\operatorname{sh} x\right) = x.}$$

Remarque. On a formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

7 la fonction argth

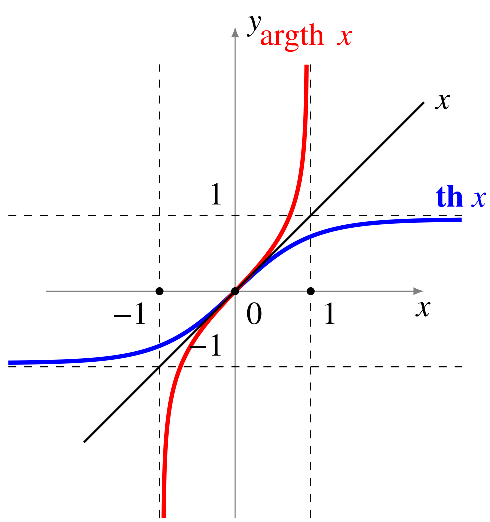
La fonction tangente hyperbolique $\operatorname{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\cdot$$

La fonction th est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Elle est donc bijective. Sa fonction réciproque (appelée argument tangente hyperbolique) est la fonction

$$\operatorname{argth} :\ ]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est aussi continue et strictement croissante.



La fonction argth vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \ \operatorname{th}\left(\operatorname{argth} x\right) = x} \text{ et } \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{argth}\left(\operatorname{th} x\right) = x.}$$

Remarque. On a la formule suivante :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \ \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$