Exercice d'application: Th de Gauss

Exercice 1 : Distributions de charges linéaires

On considère un fil de longueur infinie, uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$.

1. Déterminer, sans calcul, la direction et le sens du vecteur champ électrostatique en un point M situé à la distance d du fil.
2. On se propose de calculer le module $\left\|\vec{E}(M)\right\|$ par application du théorème de Gauss :
   a) Trouver une surface fermée convenable et calculer le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface.
   b) Quelle est la charge totale contenue dans le volume limité par cette surface.
   c) En déduire l'expression de $\left\|\vec{E}(M)\right\|$.
3. Retrouver l'expression de $\vec{E}(M)$ par application directe de la loi de Coulomb.
4. Comparer les deux méthodes et conclure.

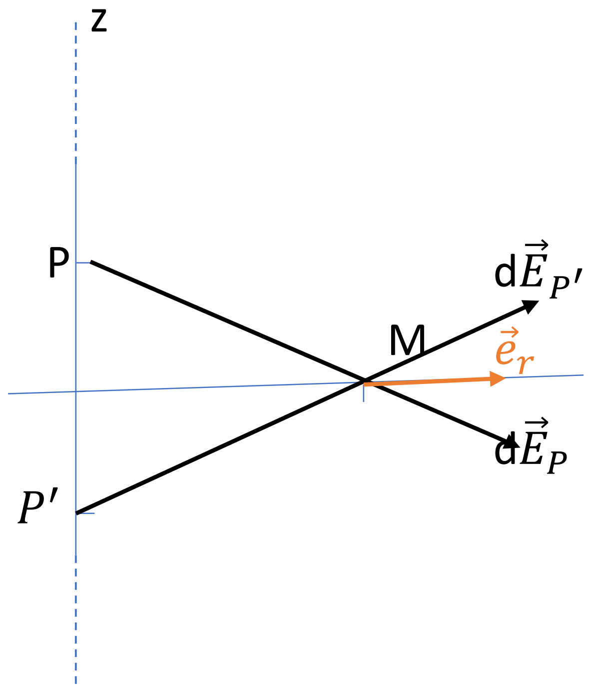
1) **Déterminer, sans calcul, la direction et le sens du vecteur champ électrostatique en un point M situé à la distance d du fil.**

Densité linéique $\lambda > 0$ ⇒ dq= λ dl , $\overrightarrow{OM}$ = d $\vec{e}_r$

Soit P un point du fil, autours du point P on a une charge

élémentaire dq. Cette charge élémentaire au point P va créer un champ

électrostatique au point M



$$d\vec{E}_P = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|^3}$$

Le point P' symétrie de P par rapport à O

$$d\vec{E}_{P'} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{P'M}}{\left|\overrightarrow{P'M}\right|^3}$$

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$ = - z$\vec{k}$+ d $\vec{e}_r$

$\overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OM}$ = z$\vec{k}$ + d $\vec{e}_r$

On a: $\left|\overrightarrow{PM}\right| = \left|\overrightarrow{P'M}\right|$

Avec: $\overrightarrow{PO}$ = - $\overrightarrow{P'O}$

Donc:

d$\vec{E}$= d$\vec{E}_P$+ d$\vec{E}_{P'}$

$$= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|^3}$$

Puisque $\lambda > 0$, le champ $\vec{E}$(M) à la même direction que le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Et $\overrightarrow{OM}$= d $\vec{e}_r$

Donc:

$\vec{E}$(M)= $\left|\vec{E}\right|$ $\vec{e}_r$

2) Calcul par Th. De Gauss

a. Surface de Gauss:

Surface d’un cylindre fermé de rayon d et de hauteur h

calcul du flux :

$$\phi = \oiint \vec{E}\ d\vec{S}$$

on a:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_L$$

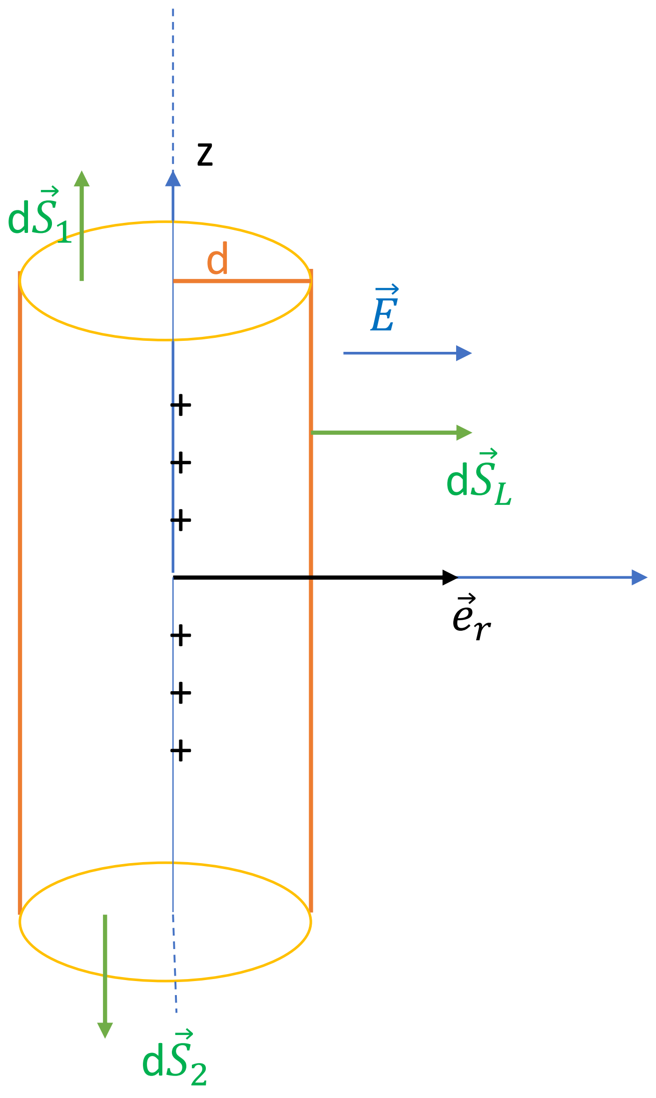
Avec:

- $\phi_1 = \oiint \vec{E}\ d\vec{S}_1$

On a:

$$d\vec{S}_1 = r\ d\,r\ d\theta\ \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \left|\vec{E}\right|\ \vec{e}_r$$



Donc:

$\phi_1 = \phi_2 = 0$

- $\phi_L = \oiint \vec{E}\, d\vec{S}_L$

$= \iint E\, dS_2 \cos 0$

$= E\, d\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$

$\phi_L = E\, 2\pi d\, h$

b. Calcul de la charge interne:

$\sum Q_{int} = \int dq$

$= \lambda \int_0^h dz$

$\sum Q_{int} = \lambda\, h$

C. En déduire l'expression de $\left|\vec{E}(M)\right|$

Application de théorème de Gauss:

$$\phi = \oiint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_{int}$$

$$E\, 2\pi d\, h = \lambda\, h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi d} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi d}\, \vec{e}_r$$

3) l'expression de $\vec{E}$(M) par application directe de la loi de coulomb

On a:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|^3}$$

$$= \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{(d^2+z^2)^{3/2}}\, \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dz}{(d^2+z^2)^{3/2}}\, \vec{e}_r$$

Remarque:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(d^2+z^2)^{1/2}}\right)= \frac{d^2}{(d^2+z^2)^{3/2}}$$

D'où:

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{+\infty} dz\ (d^2+z^2)^{-3/2}\ \vec{e}_r$$

$$= \frac{2\lambda d}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}\left[\frac{z}{(d^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{+\infty}\ \vec{e}_r$$

D'autre part: $\lim\limits_{z\to+\infty}\frac{z}{(d^2+z^2)^{1/2}} = \lim\limits_{z\to+\infty}\frac{z}{z(1+\frac{d^2}{z^2})^{1/2}}$

$= 1$

Donc: $\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\ \vec{e}_r$

4) Le calcul indirect par Th. de Gauss est évidemment plus simple et plus rapide que par application directe de la loi de Coulomb