Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Solution de la série n° 3

Exercice 1. 1) Toutes les fonctions considérées dans cette question sont continues sur leur domaine de définition. Donc elles admettent des primitives.

a) Les primitives de f_1 sont les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ est une constante et l'intervalle choisi est $I_1 = \mathbb{R}$.

b) Les primitives de f_2 sont les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_2 = \mathbb{R}$.

c) Les primitives de f_3 sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x+\pi) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_3 = \mathbb{R}$.

d) Les primitives de f_4 sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{8}(2x+1)^4 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_4 = \mathbb{R}$.

e) Les primitives de f_5 sont les fonctions $x \longmapsto \frac{4}{3}\sqrt{3x+1} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_5 = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

2) Toutes les fonctions considérées dans cette question sont continues sur leur domaine de définition. Donc elles admettent des primitives.

a) On reconnait $f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + x^2 > 0$. Les primitives de f_1 sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ constante et l'intervalle choisi est $I_1 = \mathbb{R}$.

b) On reconnait $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^{2x} > 0$. Les primitives de f_2 sont donc de la forme $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ constante et l'intervalle choisi est $I_2 = \mathbb{R}$.

c) On reconnait $f_3(x) = u'(x).u(x)$ avec $u(x) = \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$. Les primitives de f_3 sont donc de la forme $x \longmapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ constante et $I_3 =]0, +\infty[$.

d) On reconnait $f_4(x) = u'(x).(u(x))^2$ avec $u(x) = \sin x$. Les primitives de f_4 sont donc de la forme $x \longmapsto \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ constante et $I_4 = \mathbb{R}$.

e) On reconnait $f_5(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$. Les primitives de f_5 sont donc de la forme $x \longmapsto \ln(|\ln x|) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ constante et le domaine choisi est $D_5 =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 2. Considérons la fonction $F\colon [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [0, \pi],\ F(x) = \int_0^x \sin(t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

La fonction F est définie et continue sur $[0, \pi]$, et dérivable sur $]0, \pi[$ car la fonction $t \longmapsto \sin(t)f(t)$ est continue sur $[0, \pi]$. De plus, $F(0) = F(\pi) = 0$. Ainsi F vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Donc il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $F'(c) = 0$. C'est-à-dire $\sin(c).f(c) = 0$. Or $\sin(c) \neq 0$ car $c \in]0, \pi[$. Par suite, il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 3. 1) Toutes les fonctions considérées dans cette question sont continues sur leur intervalle d'intégration. Donc elles sont intégrables.

a) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est la fonction $x \longmapsto \arctan x$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot$$

b) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la fonction $x \longmapsto \arcsin x$. On en déduit que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\arcsin x]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}\cdot$$

c) Une primitive de $x \longmapsto x^4$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{5}x^5$. On en déduit que

$$\int_0^1 x^4dx = [\frac{x^5}{5}]_0^1 = \frac{1}{5}\cdot$$

d) On a $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x-2+2}{x-2} = 1 + \dfrac{2}{x-2}\cdot$ Une primitive de $x \longmapsto 1$ est $x \longmapsto x$ et une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ sur $[0,1]$ est la fonction $x \longmapsto \ln(2-x)$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x}{x-2}\,\mathrm{d}x = [x + 2\ln(2-x)]_0^1 = 1 - 2\ln 2.$$

e) On a

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x+1} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{2x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1-1}{2x+1}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(2x+1)}.\end{aligned}$$

Or une primitive de $x \longmapsto 1$ est la fonction $x \longmapsto x$ et une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{2x+1}$ sur $[0,1]$ est la fonction $x \longmapsto \ln(2x+1)$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(2x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 3}{4}\cdot$$

f) On reconnait $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, avec $u(x) = x^2+1$. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est donc $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

2) Toutes les fonctions considérées dans cette question sont continues sur leur intervalle d'intégration. Donc elles sont intégrables.

a) On reconnait $x\sin(x^2) = \dfrac{1}{2}u'(x)\sin(u(x))$, avec $u(x) = x^2$. Une primitive de $x \longmapsto x\sin(x^2)$ est donc $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(x^2)$. Il vient que

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$$

b) On reconnait $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x} = u'(x)(u(x))^{1/2}$, avec $u(x) = \ln x$. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ sur $[1,+\infty[$ est donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{3}(\ln x)^{3/2}$. Il vient que

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\ln 2)^{3/2}.$$

c) On reconnait $\dfrac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}u'(x).u(x)$, avec $u(x) = \ln(x^2+1)$. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ est donc $x \longmapsto \dfrac{1}{4}(\ln(x^2+1))^2$. Il vient que

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(\ln(x^2+1))^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 2)^2.$$

d) On reconnait $xe^{x^2} = \dfrac{1}{2}u'(x).e^{u(x)}$, avec $u(x) = x^2$. Une primitive de $x \longmapsto xe^{x^2}$ est donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{x^2}$. Il vient que

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

e) On reconnait $\dfrac{x\arctan(x^2)}{x^4+1} = \dfrac{1}{2}u'(x).u(x)$, avec $u(x) = \arctan(x^2)$. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x\arctan(x^2)}{x^4+1}$ est donc $x \longmapsto \dfrac{1}{4}(\arctan(x^2))^2$. Il vient que

$$\int_0^1 \frac{x\arctan(x^2)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\left(\arctan(x^2)\right)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4^3}.$$

Exercice 4. 1) Pour trouver les primitives de fonctions transcendantes dont la dérivée est algébrique (comme ln, arcsin, arctan, ...), une intégration par parties où on dérive la fonction transcendante est souvent la solution du problème.

a) On fait une intégration par parties en posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$. D'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1.\ln x\,\mathrm{d}x &= [x\ln x] - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln x - x + c
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_1 =]0,+\infty[$.

b) On fait une intégration par parties en posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$. D'où $u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $v(x) = x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \arctan x\,\mathrm{d}x &= [x\arctan x] - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_2 = \mathbb{R}$.

c) On fait une intégration par parties en posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = x$. D'où $u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int x\arctan x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x^2+1)}{2}\arctan x\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(x^2+1)}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right] + c
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_3 = \mathbb{R}$.

d) On fait une intégration par parties en posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$. D'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}\cdot$ Il vient que

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right] - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_4 =]0, +\infty[$.

e) On fait une intégration par parties en posant $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$. D'où $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ et $v(x) = x$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \int 1.(\ln x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[x(\ln x)^2\right] - \int 2\frac{\ln x}{x}.x\,\mathrm{d}x\\ &= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,\mathrm{d}x.\\ &= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - x + c\right) \quad \text{d'après a)}\\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c.\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_5 =]0, +\infty[$.

2) a) On intègre par parties en posant $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = \ln(x+1)$. D'où $u(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}\cdot$ Il vient que

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right] + \int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln(x+1) + c\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et le domaine choisi est $D_1 =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

b) On fait une intégration par parties en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. D'où $u(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$ et $v'(x) = \dfrac{2\arctan x}{x^2+1}\cdot$ Il vient que

$$\begin{aligned}\int x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{(x^2+1)(\arctan x)^2}{2}\right] - \int \frac{(x^2+1)}{2}.\frac{2\arctan x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(x^2+1)(\arctan x)^2}{2} - \int \arctan x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(x^2+1)(\arctan x)^2}{2} - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \qquad \text{d'après 1) b).}\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_2 = \mathbb{R}$.

c) On cherche une primitive de f_3 de la forme $F(x) = P(x)e^{2x}$, avec P un polynôme de même degré que le polynôme $4x^2$. C'est-à-dire $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Par dérivation, on obtient

$$F'(x) = (2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b)e^{2x} = (2ax^2 + 2(b+a)x + b + 2c)e^{2x} = f_3(x).$$

Par identification, on a : $2a = 4, b + a = 0$ et $b + 2c = 0$. D'où $a = 2, b = -2$ et $c = 1$. Par suite, les primitives de f_3 sont de la forme $x \mapsto (2x^2 - 2x + 1)e^{2x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_3 = \mathbb{R}$.

d) On fait une intégration par parties en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$. D'où $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\cos x$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x &= [-x^2\cos x] + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c \quad \text{par une } 2^{\text{e}} \text{ I.P.P.} \\ &= (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + c,\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_4 = \mathbb{R}$.

Exercice 5. 1) On remarque que

$$\begin{aligned}a + ib &= \int_0^x e^t.(\cos(2t) + i\sin(2t))\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{(1+2i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)t}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{1+2i}(e^{(1+2i)x} - 1).\end{aligned}$$

On a donc

$$a = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+2i}(e^{(1+2i)x}-1)\right) \text{ et } a = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+2i}(e^{(1+2i)x}-1)\right).$$

En développant, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2i}(e^{(1+2i)x}-1) &= \frac{1-2i}{5}(e^x(\cos(2x) + i\sin(2x)) - 1) \\ &= \frac{1}{5}\left[(e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x) - 1) + i\,(e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) + 2)\right].\end{aligned}$$

On en déduit que $a = \dfrac{1}{5}(e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x) - 1)$ et $b = \dfrac{1}{5}(e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) + 2)$.

2) On remarque que

$$I + J = \int_0^x (\cos^2 t + \sin^2 t).e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = e^x - 1$$

et

$$I - J = \int_0^x (\cos^2 t - \sin^2 t).e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(2t).e^t\,\mathrm{d}t = a.$$

On en déduit que

$$2I = I + J + I - J = a + e^x - 1 \quad \text{et} \quad 2J = I + J - (I - J) = e^x - 1 - a.$$

Par suite,

$$I = \frac{a + e^x - 1}{2} \quad \text{et} \quad J = \frac{-a + e^x - 1}{2}.$$

Exercice 6. 1) a) Faisons le changement de variable $t = \sqrt{x}$. D'où $t^2 = x$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{(t+1-1)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2\left[t - \ln(t+1)\right]_0^2 \\ &= 2(2 - \ln 3).\end{aligned}$$

b) On fait un changement de variable en posant $t = e^x$. D'où $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/2}^2 \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1/2}^2 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= [\arctan t]_{1/2}^2 \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2\arctan 2.\end{aligned}$$

c) On fait un changement de variable en posant $t = \sqrt{e^x - 1}$. D'où $e^x = t^2 + 1$ et $e^x \,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 t \cdot \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
&= 2\int_0^1 \frac{(t^2+1-1)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\left[t - \arctan t\right]_0^1 \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}\cdot
\end{aligned}$$

d) On fait un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$. D'où $t^2 = x$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \cos(t).(2t\,\mathrm{d}t) \\
&= 2\int_0^{\pi} t\,\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[t\sin t + \cos t\right]_0^{\pi} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

e) Faisons le changement de variable $t = \sqrt{x^3+1}$. D'où $t^2 = x^3 + 1$ et $2t\,\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^3}\cdot(3x^2\,\mathrm{d}x) = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\left[t + \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_{\sqrt{3}}^{2} \\
&= \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{2}\ln(3)\right) \\
&= \frac{2}{3}\left[2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}\right) - \frac{1}{2}\ln(3)\right].
\end{aligned}$$

2) a) On fait le changement de variable $x = \sin(t)$. D'où $t = \arcsin x$ et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(t)|.\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \text{car cos est positive sur } [-\pi/2, \pi/2] \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1+\cos(2t))}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot
\end{aligned}$$

b) On fait un changement de variable en posant $x = \operatorname{sh} t$. D'où $t = \operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ et $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$.

Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} |\operatorname{ch} t|.\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{(1+\operatorname{ch}(2t))}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[t+\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_0^{\ln(1\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2} + 2\ln(1+\sqrt{2})\right].
\end{aligned}$$

c) On fait un changement de variable en posant $t=e^x$. D'où $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t+1}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln t - \ln(t+1)\right]_1^2 \\
&= \ln\left(\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

d) On fait un changement de variable en posant $t=\sqrt{x}$. D'où $t^2=x$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 e^t.(2t\,\mathrm{d}t) \\
&= 2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[te^t - e^t\right]_0^1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

e) On fait le changement de variable $t=\sqrt{e^x+1}$. D'où $t^2 = e^x+1$ et $2t\,\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\cdot\frac{1}{e^x}\cdot\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{2} \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t^2-1}\cdot t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln(y-1) - \ln(y+1)\right]_{\sqrt{2}}^2 \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - \ln 3.
\end{aligned}$$

Exercice 7. 1) On sait que la fonction $t \longmapsto t^4+1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On en déduit que F est définie sur $\mathbb{R}$.

$**$) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$. On fait le changement de variable $t=-s$. D'où $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s$.

Il vient que

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{s^4+1}} \cdot (-\,\mathrm{d}s) \\ &= -\int_0^x \frac{1}{\sqrt{s^4+1}}\,\mathrm{d}s \\ &= -F(x). \end{aligned}$$

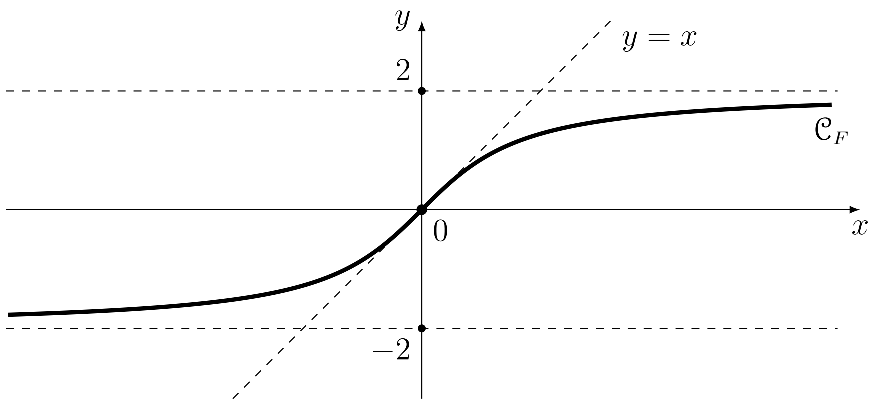
2) $*$) Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$**$) On a la dérivée F' est strictement positive. Donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_F$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = F(0) + F'(0).(y-0)$. Or $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$. Donc l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_F$ au point d'abscisse 0 est $y = x$.
4) $*$) Soit $x \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t && \text{en utilisant la relation de Chasles car } 0 < 1 \leqslant x \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{0^4+1}}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^4+0}}\,\mathrm{d}t && \text{car } 0 \leqslant t \text{ et } 0 < 1 \\ &= 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= 2 - \frac{1}{x} \\ &< 2 && \text{car } \frac{1}{x} > 0. \end{aligned}$$

$**$) La fonction F est croissante et majorée (par 2) sur $[1, +\infty[$. On en déduit que F admet une limite finie en $+\infty$.
5) L'allure de la courbe $\mathcal{C}_F$ de f :



Exercice 8. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$. Faisons le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$. D'où $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$ et $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{2}\cos t - \cos\dfrac{\pi}{2}\sin t = \cos t$. Il vient que

$$W_n = \int_{\pi/2}^0 \cos^n t.(-\,\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

$**$) On sait que

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

Il vient que

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant 1.$$

D'après la croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$ Or la fonction $x \mapsto \sin^n x$ est continue et positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc (voir exercice 6 de la série 2)

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 < W_n \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \ \sin^{n+1}x - \sin^n x = (\sin x - 1).\sin^n x \leqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Ainsi la fonction $x \mapsto \sin^n x - \sin^{n+1} x$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. On en déduit que (voir exercice 6 de la série 2)

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^n x - \sin^{n+1} x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

C'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ W_{n+1} < W_n.$$

Ce qui montre que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est donc strictement décroissante.

$**$) On a $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels décroissante et minorée (par 0). Donc elle est convergente.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \,\mathrm{d}x$. On calcule W_{n+2} par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin x.\sin^{n+1} x.\,\mathrm{d}x \\
&= [-\cos x.\sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x.(n+1).(\cos x.\sin^n x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x.\sin^n x\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\sin^n x\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.
\end{aligned}$$

D'où $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Par suite,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ W_{n+2} = \frac{(n+1)}{n+2}\cdot W_n.} \qquad (\circledast)$$

$**$) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule ($\circledast$), on a

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{(2n-1)}{2n} \cdot W_{2n-2} \\
&= \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{2n-2} \cdot W_{2n-4} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot W_0 \\
&= \frac{2n}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{car } W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \pi/2 \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot
\end{aligned} \tag{$\boxtimes$}$$

De même, on trouve

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot$$

4) $*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2), on a $W_{n+1} < W_n$. Il s'ensuit que

$$\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} < \frac{W_n}{W_{n-1}}$$

car $W_{n-1} > 0$ d'après la question 1). Or d'après la formule ($\circledast$) de la question 3), on a $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot W_{n-1}$. D'où

$$\frac{n}{n+1} < \frac{W_n}{W_{n-1}} \cdot$$

On a aussi $\dfrac{W_n}{W_{n-1}} < 1$ car $W_n < W_{n-1}$ et $W_{n-1} > 0$.

$**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utlisant la formule ($\circledast$) de la question 3), on a

$$\begin{aligned}
n\, W_n . W_{n-1} &= n \left(\frac{n-1}{n} . W_{n-2} \right) W_{n-1} \\
&= (n-1)\, W_{n-1} . W_{n-2}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(n\, W_n W_{n-1})_{n \geqslant 1}$ est constante. De plus, on a $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Il vient que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, W_n W_{n-1} = 1 . W_0 . W_1 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

5) $*$) D'après l'inégalité de 4) et en appliquant le théorème des gendarmes, il vient que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$. D'où $W_n \sim W_{n-1}$. On en déduit que ${W_n}^2 \sim W_n W_{n-1}$. Or d'après la question 4), on a $W_n W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n} \cdot$ Donc ${W_n}^2 \sim \dfrac{\pi}{2n} \cdot$ Comme $W_n = \sqrt{{W_n}^2}$ car $W_n > 0$, il vient que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \cdot$

$**$) D'après la formule ($\boxtimes$) de la question 3), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \mathtt{C}_{2n}^{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot
\end{aligned}$$

Or d'après $*$), on sait que $W_{2n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\cdot$ Il vient que $\mathtt{C}_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sqrt{\pi} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$ C'est-à-dire

$$\mathtt{C}_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\cdot$$

Remarque. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$, il vient que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\cdot$$

Exercice 9. 1) a) On a $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}\cdot$ Une primitive de $x \longmapsto 1$ est la fonction $x \longmapsto x$ et une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est la fonction $x \longmapsto \ln|x+1|$. Par suite,

$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln|x+1| + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ constante et le domaine choisi est $D_1 = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

b) On a $\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\cdot$ Il vient que

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ constante et le domaine choisi est $D_2 = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

c) On reconnait $\frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 4$. Il vient que

$$\int \frac{x}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-4} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ constante et $D_3 = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

d) On reconnait $\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1} = \frac{u'(x)}{u^2(x)+1}$ avec $u(x) = x+2$. Il vient que

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \arctan(x+2) + c,$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $I_4 = \mathbb{R}$.

e) D'après la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}\cdot$$

Par identification des coefficients, on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}\cdot$ D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c_1 \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c_1\end{aligned}$$

avec $c_1 \in \mathbb{R}$ et $D_5 = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Ainsi sur $I_5 =]-1, 1[$, on a :

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) + c_2,$$

avec $c_2 \in \mathbb{R}$.

2) a) On a $\dfrac{3x+2}{x^2+x+1} = 3\cdot\dfrac{(x+2/3)}{x^2+x+1} = 3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+4/3)}{x^2+x+1} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(2x+1+1/3)}{x^2+x+1} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(2x+1)}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}\cdot$ Or on a d'une part

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+1) \qquad \text{car } x \longmapsto x^2+x+1 \text{ est positive sur } \mathbb{R}.$$

D'autre part, on a $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\cdot$ D'où

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\cdot$$

Finalement, on a

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I_1 = \mathbb{R}$.

b) On a $\dfrac{2x}{x^2-x+1} = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot$ De même que dans la question a), on trouve

$$\int \frac{2x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I_2 = \mathbb{R}$.

c) On reconnait $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+x-2$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x &= \ln|x^2+x-2| + c\\ &= \ln|(x-1)(x+2)| + c\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $D_3 = \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$. Ainsi si le domaine est $I_3 =]-2,1[$, on a

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \ln(-x^2-x+2) + c'$$

avec $c' \in \mathbb{R}$ une constante.

d) La décomposition en élements simples de la fraction rationnelle $1/(x^3-1)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}\cdot$$

Par les méthodes des F.R, on trouve $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{3}$ et $c = -\dfrac{2}{3}\cdot$ D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Il vient que

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $D_4 = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

3) a) La division euclidienne de $x^3 + 2x$ par $x^2 + x + 1$ s'écrit sous la forme suivante :

$$x^3 + 2x = x^3 - 1 + 1 + 2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x + 1.$$

D'où la décomposition en élements simples

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Il vient que

$$\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2+x+1) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I_5 = \mathbb{R}$.

b) On remarque que -1 et 1 et 2 sont des racines « évidentes » du polynôme $x^3 - 2x - x + 2$. D'où la factorisation $x^3 - 2x - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$. D'où la décomposition en élements simples

$$\frac{1}{x^3-2x-x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

On trouve

$$\frac{1}{x^3-2x-x+2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Par suite,

$$\int \frac{1}{x^3-2x-x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $D_2 = \mathbb{R}\backslash\{-1,1,2\}$.

c) On a la factorisation $x^4 - 1 = (x^2+1)(x-1)(x+1)$. D'où la décomposition en élements simples

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

On trouve

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}.$$

Par suite,

$$\int \frac{4x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $D_3 = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

d) On a

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+2)^2+1]^3}\,\mathrm{d}x.$$

On fait un changement de variable $t = x + 2$. D'où

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t.$$

On calcule I_n par une I.P.P. en posant $u(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$ et $v'(t) = 1$. D"où $u'(t) = \dfrac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}$ et $v(t) = t$. Il vient que

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + \int \frac{2nt^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{(t^2+1-1)}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$I_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + \frac{(2n-1)}{2n}.I_n.$$

Il vient que

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = I_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2.$$

Or $I_2 = \dfrac{t}{2(t^2+1)} + \dfrac{1}{2}I_1 = \dfrac{t}{2(t^2+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan t + c$. Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan t + c\\ &= \frac{x+2}{4(x^2+4x+5)^2} + \frac{3x+6}{8(x^2+4x+5)} + \frac{3}{8}\arctan(x+2) + c,\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I_4 = \mathbb{R}$.

Exercice 10. 1) a) On a $\sqrt{x} = x^{1/2} = x^{2/4} = (\sqrt[4]{x})^2$. On a aussi $\sqrt[4]{x^3} = (\sqrt[4]{x})^3 = x^{3/4}$. Ainsi le dénominateur commun des exposants rationnels de $\sqrt{x}$ et $\sqrt[4]{x^3}$ est 4. On fait donc le changement de variable $t = \sqrt[4]{x}$. D'où $x = t^4$ et $\mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^3+t^2}{t^4(t^2-1)}.4t^3\,\mathrm{d}t\\ &= 4\int \frac{(t+1)t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\ &= 4\int \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t\\ &= 4\int \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)\mathrm{d}t\\ &= 4\int \left(1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t\\ &= 4t + 4\ln|t-1| + c\\ &= 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x}-1| + c\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

b) On fait le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. D'où $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \left(\frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\arctan t + c\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I =]-1,0[\cup]0,1[$.

c) On fait le changement de variable $t = \sqrt{x-2}$. D'où $x = t^2+2$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2+3}{(t^2-1)t} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \frac{t^2+3}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \left(1+\frac{2}{t-1}-\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2t + 4\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c \\
&= 2\sqrt{x-2} + 4\ln\left|\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}\right| + c
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $D =]2,3[\cup]3,+\infty[$.

d) On a

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{x^2+2x+5} + \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale, on fait le changement de variable $x+1 = 2t$. D'où $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{\sqrt{4t^2+4}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + c \qquad \text{car } t \longmapsto t+\sqrt{t^2+1} \text{ est positive sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+2x+5} + \ln\left(\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I = \mathbb{R}$.

e) On fait le changement de variable $t = \sqrt{x^2+1}$ D'où $x^2 = t^2-1$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + c.
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) a) On fait le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot$ D'où $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -4\int \frac{(t^2+1-1)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -4\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 4\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -4\arctan t + \frac{2t}{t^2+1} + 2\arctan t + c \\
&= -2\arctan t + \frac{2t}{t^2+1} + c \\
&= -2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \sqrt{1-x} + c
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I =]-1, 1[$.
b) On sait que $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. On fait le changement de variable $x+1 = \operatorname{sh} t$. D'où $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}.\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{(1+\operatorname{ch}(2t))}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + c \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{argsh}(x+1) + \frac{1}{2}\operatorname{ch} t.\operatorname{sh} t + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x+1))(x+1) + c.
\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 11. 1) a) Puisque l'exposant de $\cos^5 x$ est impair, le changement de variable qui convient (d'après les régles de Bioche) est $t = \sin x$. D'où $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x.\cos^4 x.\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int t^2.(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int (t^2-2t^4+t^6)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + c \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c.
\end{aligned}$$

b) Puisque l'exposant de $\sin^5 x$ est impair, le changement de variable qui convient (d'après les régles de

Bioche) est $t = \cos x$. D'où $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \sin^5 x\,\mathrm{d}x &= -\int \cos^4 x.\sin^4 x.(-\sin x\,\mathrm{d}x)\\
&= -\int t^4.(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t\\
&= \int (2t^6 - t^8 - t^4)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{7}t^7 - \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{5}t^5 + c\\
&= \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c.
\end{aligned}$$

c) Puisque les exposants de $\cos^2 x$ et $\sin^4 x$ sont les deux paires, on doit linéariser. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^4 x &= \left[\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})^2\right]^2 \left[\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right]^4\\
&= \frac{1}{64}\left({}^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})\\
&= \frac{1}{64}\left({}^{6ix} - 2e^{4ix} - e^{2ix} + 4 - e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)\\
&= \frac{1}{32}(\cos(6x) - 2\cos(4x) - \cos(2x) + 2).
\end{aligned}$$

Il vient que

$$\int \cos^2 x \sin^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{32}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{\sin(4x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right) + c.$$

d) Puisque les exposants de $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ les deux sont impaires, on a le choix entre le changement de variable $t = \sin x$ ou $t = \cos x$. On pose $t = \sin x$. D'où $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^3 x.\cos^2 x.\cos x\,\mathrm{d}x\\
&= \int t^3.(1-t^2)\,\mathrm{d}t\\
&= \int (t^3 - t^5)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + c\\
&= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + c.
\end{aligned}$$

2) a) On reconnait $\dfrac{\cos x - \sin x}{2 + \cos x + \sin x} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 2 + \cos x + \sin x$. Il vient que

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{2 + \cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \ln(2+\cos x+\sin x)+c \quad \text{car } 2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \geqslant 2 - \sqrt{2} > 0.$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et $I = \mathbb{R}$.

2e méthode : On pourait faire le changement de variable $t = \tan(x/2)$.

b) Les régles de Bioche ne conviennent pas içi. On fait donc le changement de variable $t = \tan(x/2)$. D'où

$x = 2\arctan t$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t$. On a aussi $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot$ Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+2\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
&= \int \frac{2}{3-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t+\sqrt{3}}-\frac{1}{t-\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}\right| + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+\sqrt{3}}{\tan(\frac{x}{2})-\sqrt{3}}\right| + c.
\end{aligned}$$

avec $c\in\mathbb{R}$ et $D_2 = \mathbb{R}\backslash\left(\{2\pi/3+k\pi\,|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi+m\pi\,|m\in\mathbb{Z}\}\right)$.

c) Posons $\omega(x) = \dfrac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. On a $\omega(\pi-x)=\omega(x)$. Donc d'après les régles de Bioche, on fait le changement de variable $t=\sin x$. D'où $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{t-1}\right)+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c
\end{aligned}$$

avec $c\in\mathbb{R}$ et $D_3 = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Posons $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$. On a alors

$$I+J = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1 \;\text{ et }\; J-I = \int \frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos x+\sin x| + c_2.$$

On en déduit que

$$I+J-(J-I) = 2I = x - \ln|\cos x+\sin x| + c.$$

Par suite,

$$\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x-\ln|\cos x+\sin x|\right)+c.$$

avec $c\in\mathbb{R}$ et $D_4 = \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$.