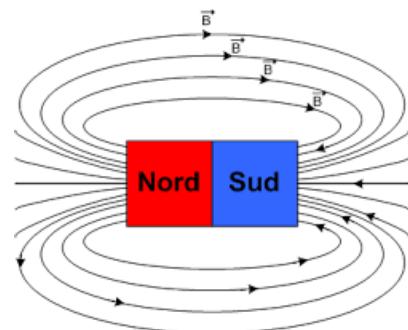
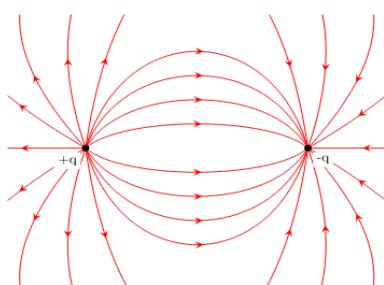


Faculté des Sciences
Département de Physique
Kénitra

Cours



Électrostatique / Magnétostatique
(MIP/S2)

Pr. B. MAROUFI

Année Universitaire 2024 - 2025

SOMMAIRE

Partie 1 - ELECTROSTATIQUE

Chapitre 1 – Loi de Coulomb et champ électrique

I – Généralités

- I.1 – Electrisation
- I.2 – Conducteurs et isolants
- I.3 – Propriétés des charges électriques
- I.4 – Distribution continue de charges – Densité de charges

II – Loi de Coulomb

- II.1 – Enoncé
- II.2 – Représentation vectorielle
- II.3 – Application
 - II.3.1 – Extension aux systèmes de charges ponctuelles
 - II.3.2 – Extension aux distributions continues de charges

III – Champ électrique

- III.1 – Définition
- III.2 – Champ créé par une charge ponctuelle
- III.3 – Champ créé par plusieurs charges ponctuelles
- III.4 – Lignes et tubes de champ électrique
- III.5 – Champ créé par une distribution continue de charges

Chapitre 2 – Théorème de Gauss

I – Flux de champ électrique

- I.1 – Flux à travers une surface quelconque
- I.2 – Flux à travers une sphère centrée sur une charge ponctuelle
- I.3 – Flux à travers une surface fermée quelconque
 - I.3.1 – Charge à l'intérieur de la surface
 - I.3.2 – Charge sur la surface
 - I.3.3 – Charge à l'extérieur de la surface

II – Enoncé du théorème de Gauss

- II.1 – Cas de charges ponctuelles
- II.2 – Cas de distribution continue de charges

Chapitre 3 – Potentiel électrique

- I – Potentiel créé par une charge ponctuelle
- II – Potentiel créé par un système de charges ponctuelles
- III – Surfaces équipotentielles
- IV – Potentiel créé par une distribution continue de charges
- V – Travail de la force electrostatique
- VI – Equations caractéristiques du champ et du potentiel électriques
 - VI.1 – Relation entre champ et potentiel
 - VI.2 – Expression locale du théorème de Gauss
 - VI.3 – Rotationnel du champ électrique
 - VI.4 – Equations de Poisson et de Laplace

Chapitre 4 – Conducteurs en équilibre et énergie électrique**I – Equilibre électrostatique d'un conducteur isolé et unique**

I.1 – Propriétés générales d'un conducteur

I.2 – Conducteur chargé en équilibre

I.3 – Champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé

I.4 – Pression électrostatique

II – Equilibre de plusieurs conducteurs

II.1 – Eléments correspondants

II.2 – Théorème de superposition des états d'équilibre

III – Influence électrostatique

III.1 – Influence sur un conducteur isolé

III.2 – Influence sur un conducteur relié à la terre

III.3 – Influence totale

III.3.1 – Ecran électrique

IV – Condensateurs

IV.1 – Capacité d'un conducteur isolé et unique

IV.2 – Capacités et coefficients d'influence de conducteurs en équilibre

IV.3 – Condensation de charges électriques

IV.4 – Capacité d'un condensateur

IV.5 – Groupement de condensateurs

V – Energie électrique

V.1 – Energie électrostatique d'une charge

V.2 – Energie d'un conducteur isolé

V.3 – Energie d'un système de conducteurs

V.4 – Energie d'un système de charges ponctuelles

V.5 – Energie d'une distribution continue de charges

V.6 – Energie d'un condensateur

V.7 – Localisation de l'énergie électrostatique

Partie 2 - MAGNETOSTATIQUE**Chapitre 5 Magnétostatique****IV-1 Introduction**

IV-1-1 Propriétés des aimants

IV-1-2 Champ magnétique

IV-1-3 La force magnétique

IV-1-3-1 Force de Lorentz

IV-1-3-2 Force de Laplace

IV-2– Expression du champ magnétique

IV-2-1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

IV-2-2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

IV-2.3 Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

IV-3 Lois fondamentales de la magnétostatique

IV-3-1 Flux du champ magnétique

IV-3-1-1 Conservation du flux magnétique

IV-4 Circuit du magnétique

IV-4-1 Circulation du champ autour d'un fil infini

IV-5 Théorème d'Ampère**IV-6 Les trois façons de calculer le champ magnétique**

Annexe – COMPLEMENTS DE MATHÉMATIQUES

I – Vecteurs et systèmes de coordonnées

- I.1 – Vecteurs
- I.2 – Produit scalaire de deux de vecteurs
- I.3 – Produit vectoriel de deux de vecteurs
- I.4 – Systèmes de coordonnées (espace à trois dimensions)
 - I.4.1 – Coordonnées cartésiennes
 - I.4.2 – Coordonnées cylindriques
 - I.4.3 – Coordonnées sphériques

II – Analyse vectorielle

- II.1 – Champs scalaire ou vectoriel
- II.2 – Opérateurs différentiels
 - II.2.1 – Gradient d'un champ scalaire
 - II.2.2 – Divergence d'un champ vectoriel
 - II.2.3 – Rotationnel d'un champ vectoriel
 - II.2.4 – Laplacien d'un champ vectoriel
- II.3 – Intégrales vectorielles
 - II.3.1 – Circulation d'un vecteur
 - II.3.2 – Flux d'un vecteur à travers une surface
 - II.3.3 – Théorème de Stokes
 - II.3.4 – Théorème d'Ostrogradsky ou Green

III – Angle solide

- III.1 – Angle plan
- III.2 – Angle solide

Partie 1

ELECTROSTATIQUE

Chapitre 1

Loi de Coulomb et champ électrique

I – Généralités

I.1 – Electrisation

Le phénomène d'électrisation a été découvert lorsqu'on a constaté qu'un bâton d'ébonite (caoutchouc durci) frotté avec un tissu de laine attire des corps légers. L'électrisation d'un corps se traduit par l'apparition d'une quantité d'électricité ou charges électriques sur celui-ci. Ce phénomène peut être créé soit

- 1 – Par contact : en mettant en contact un corps chargé avec un corps initialement neutre.
- 2 – Par influence : un corps A neutre placé au voisinage d'un corps B chargé s'électrise. Si on éloigne le corps B (influencent) le corps A (influencé) revient à l'état neutre.
- 3 – Par sources d'électricité : en branchant un corps neutre à une batterie, une pile, une dynamo, etc.

I.2 – Conducteurs et isolants

Par rapport au phénomène d'électrisation, les matériaux se divisent en deux types :

- Les isolants qui ne conduisent pas les charges électriques. C'est le cas du verre, du bois, de l'air sec, du plastique, etc.
- Les conducteurs qui conduisent facilement les charges électriques. C'est le cas des métaux, de l'air humide, de l'eau, du corps humain, des acides, etc.

I.3 – Propriétés des charges électriques

- 1 – Il existe deux types de charges électriques, l'une qualifiée positive, l'autre négative. Les charges de même signe se repoussent alors que les charges de signe contraire s'attirent.
- 2 – La charge électrique d'un système est égale à la somme algébrique des charges élémentaires qui le constituent.
- 3 – Un corps neutre (non chargé) contient des charges de signes contraires en quantités égales.
- 4 – La charge électrique totale d'un système isolé est constante.
- 5 – La charge électrique est quantifiée (Millikan 1910) et ne peut varier que par multiples entiers d'une charge élémentaire $q_e = 1,6021 \cdot 10^{-19}$ Coulomb. Alors la charge d'un système s'écrit :

$$Q = \pm n q_e \quad (\text{n entier positif}).$$
 La charge de l'électron $q = -q_e$.
 La charge du proton $q = +q_e$.
 L'unité de la charge électrique dans le système international (SI) ou MKSA est le Coulomb (C).
- 6 – La charge électrique d'un système est invariante (sa valeur ne dépend pas du repère dans lequel on la mesure).

I.4 – Distribution continue de charges – Densité de charges

La charge électrique Q d'un corps est la somme algébrique de ses charges élémentaires q_i

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i$$

En général N est un nombre très grand, ce qui permet de considérer des valeurs moyennes et des distributions continues de charges.

I.4.1 – Distribution volumique

La charge Q est répartie dans un volume V et par conséquent un volume élémentaire dv contient une quantité élémentaire de charges dq .

La densité volumique de charge est définie par

$$\rho(M) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad (C/m^3)$$

La charge totale du volume est obtenue par

$$Q = \iiint_V \rho(M) dv$$

I.4.2 – Distribution surfacique

La charge Q est répartie sur une surface S et par conséquent une surface élémentaire ds contient une quantité élémentaire de charges dq .

La densité surfacique de charge est définie par

$$\sigma(M) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (C/m^2)$$

La charge totale de la surface est obtenue par

$$Q = \iint_S \sigma(M) ds$$

I.4.3 – Distribution linéaire (linéique)

La charge Q est répartie sur une courbe linéaire L et par conséquent une longueur élémentaire dl contient une quantité élémentaire de charges dq .

La densité linéaire de charge est définie par

$$\lambda(M) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (C/m)$$

La charge totale de la longueur est obtenue par

$$Q = \int_L \lambda(M) dl$$

II – Loi de Coulomb

II.1 – Enoncé

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 au repos exercent l'une sur l'autre une force dirigée suivant la droite qui les joint, proportionnelle à chacune des deux charges, et inversement proportionnelle au carré de leur distance r .

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (k \text{ est une constante})$$

Unités (SI) :

- F en Newton (N),
- q_1 et q_2 en Coulomb (C),

r en mètre (m),

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (\text{cas du vide}),$$

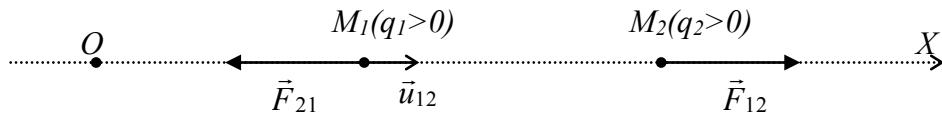
$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad (\text{permittivité absolue du vide}).$$

si $q_1 q_2 > 0$, F est une force de répulsion ($F > 0$).

si $q_1 q_2 < 0$, F est une force d'attraction ($F < 0$).

II.2 – Représentation vectorielle

Pour représenter la force de Coulomb entre deux charges q_1 et q_2 placées en M_1 et M_2 , on considère un vecteur unitaire colinéaire avec la droite $M_1 M_2$. Par exemple, sur la figure ci-dessous, on représente les directions des forces exercées entre deux charges positives.



On choisit un vecteur unitaire dirigé de M_1 à M_2 $\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ et $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$.

L'expression de la force exercée par q_1 sur q_2 est $\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12}$.

L'expression de la force exercée par q_2 sur q_1 est $\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \vec{u}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^3} \vec{r}_{21}$.

Alors $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$ ce qui vérifie le principe de l'action et la réaction de la force de Coulomb.

Si $q_1 q_2 > 0$ alors \vec{F}_{12} est dirigée de M_1 vers M_2 (force de répulsion).

Si $q_1 q_2 < 0$ alors \vec{F}_{12} est dirigée de M_2 vers M_1 (force d'attraction).

II.3 – Application

La loi de Coulomb est utilisée, uniquement, pour calculer l'interaction entre deux charges. Pour généraliser cette loi à un système de plusieurs charges ponctuelles, on applique le principe de superposition. Par conséquent, la force qui agit sur une charge quelconque de ce système est la somme vectorielle des forces que chaque charge prise séparément exerce sur cette charge.

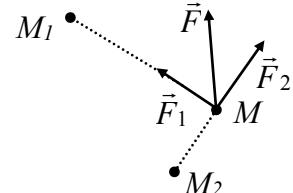
II.3.1 – Extension aux systèmes de charges ponctuelles

Soient trois charges ponctuelles ($q_1 > 0$), ($q_2 < 0$) et ($q < 0$) placées respectivement en M_1 , M_2 et M , figure ci-dessous. Cherchons la force exercée sur la charge q (supposée passive) par les deux autres.

En choisissant $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M} = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$, alors

La force exercée par q_1 sur q est

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} \frac{\vec{u}_1}{r_1^2} = \frac{q_1 q}{4\pi \epsilon_0 r_1^3} \vec{r}_1.$$



La force exercée par q_2 sur q est

$$\vec{F}_2 = \frac{q_2 q}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} \frac{\vec{u}_2}{r_2^2} = \frac{q_2 q}{4\pi \epsilon_0 r_2^3} \vec{r}_2.$$

Les charges q_1 et q_2 exercent sur la charge q la force résultante

$$\vec{F}(M) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q_1 \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{r_2^3} \right)$$

D'une façon générale, la résultante de la force exercée par les q_i charges ponctuelles ($i=1, 2, \dots$) placées aux points M_i sur la charge q placée en M est donnée par l'expression

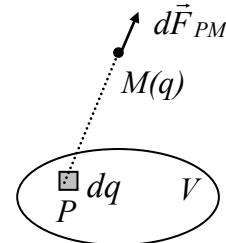
$$\vec{F}(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$$

II.3.2 – Extension aux distributions continues de charges

Pour déterminer la force exercée par un volume V chargé, figure ci-dessous, avec une densité de charge ρ sur une charge q placée au point M , on divise le volume en éléments égaux dv . Un volume élémentaire au point P contient une charge élémentaire $dq = \rho(P) dv$. Cette charge dq crée une force élémentaire $d\vec{F}_{PM}$ sur la charge au point M

$$d\vec{F}_{PM} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q \cdot dq}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$

avec $\vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|}$.

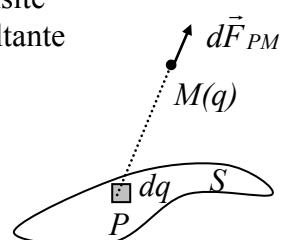


On applique alors, le principe de superposition pour calculer la force résultante $\vec{F}(M)$ exercée sur la charge au point M par tous les points P du volume V .

$$\vec{F}(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) dv}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$

Dans le cas d'une surface S chargée, figure ci-contre, avec une densité de charges $\sigma(P)$, la charge élémentaire $dq = \sigma(P) ds$ et la force résultante $\vec{F}(M)$ aura pour expression

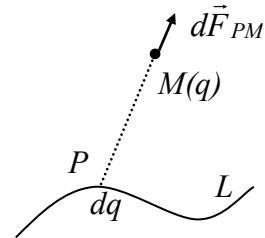
$$\vec{F}(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) ds}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$



Dans le cas d'une longueur linéaire L chargée, figure ci-contre, avec une densité de charges $\lambda(P)$, la charge élémentaire $dq = \lambda(P) dl$ et

la force résultante $\vec{F}(M)$ aura pour expression

$$\vec{F}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P)dl}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$



III – Champ électrique

III.1 – Définition

Considérons, dans un espace, un système de charges ponctuelles actives q_1, q_2, \dots, q_n et plaçons une charge passive q en un point M (q est suffisamment faible afin de négliger ses effets). La force de Coulomb totale exercée sur q est donnée par

$$\vec{F}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{u}_i}{r_i^2}.$$

En divisant $\vec{F}(M)$ par q , on obtient une expression vectorielle qui ne dépend pas de la charge q subissant la force, mais uniquement des charges qui la créent.

$$\frac{\vec{F}(M)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{u}_i}{r_i^2}$$

Cette quantité est appelée vecteur champ électrostatique et notée

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{u}_i}{r_i^2}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ traduit la modification des propriétés électriques de l'espace par l'action des charges q_i (sont les sources du champ électrique).

Unité (S.I) : (N/C) ou (V/m).

Remarques :

1 – Le champ $\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q}$ est une grandeur vectorielle ayant la direction de $\vec{F}(M)$, le sens de $\vec{F}(M)$ si $q > 0$, le sens opposé si $q < 0$ et pour intensité $E(M) = \left| \frac{\vec{F}(M)}{q} \right|$.

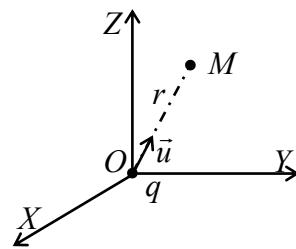
2 - $\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q} = \sum_i \left(\frac{\vec{F}_i}{q} \right) = \sum_i \vec{E}_i$ est une grandeur vectorielle qui vérifie le principe de superposition.

III.2 – Champ créé par une charge ponctuelle

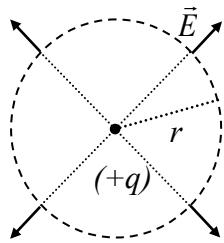
Une charge ponctuelle q crée, en un point M de l'espace à la distance r de la charge, le champ électrique

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{u}}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \text{avec } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

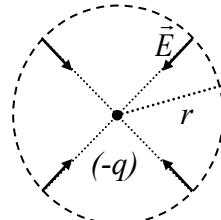
$$|\vec{E}(M)| = \frac{|q|}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$



- 1 – Le champ n'est pas défini sur la charge q , si $r \rightarrow 0 \Rightarrow |\vec{E}(M)| \rightarrow +\infty$.
- 2 – Le champ est radial : la direction de $\vec{E}(M)$ passe par le point où se trouve la charge q qui le crée.
- 3 – Le champ est à symétrie sphérique : le module de $\vec{E}(M)$ est le même à égale distance de la charge q .
- 4 – Le sens du champ est celui de (q, \vec{r}) .



Le champ diverge de q
pour une charge positive



Le champ converge vers q
pour une charge négative

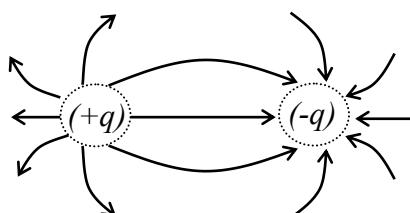
III.3 – Champ créé par plusieurs charges ponctuelles

Dans un espace, où il y a n charges ponctuelles actives q_1, q_2, \dots, q_n , le champ électrique créé en un point M est donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$$

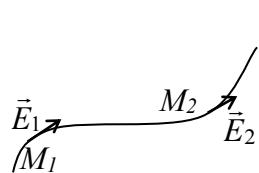
Le champ n'est pas défini sur les charges q_i , si $r_i \rightarrow 0 \Rightarrow |\vec{E}(M)| \rightarrow +\infty$.

Dans le cas de deux charges, l'une positive ($+q$) et l'autre négative ($-q$), la représentation du champ électrique résultant est donnée par les courbes ci-dessous.

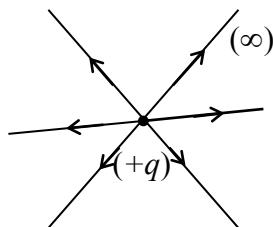


III.4 – Lignes et tubes de champ électrique

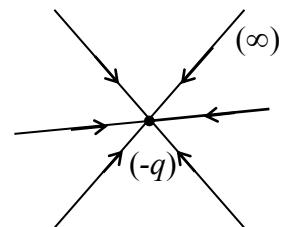
1 – Les lignes de champ (ou lignes de force) sont définies par les courbes tangentes en chacun de leurs points au champ électrique, orientées dans le sens de $\vec{E}(M)$, figure ci-dessous.



Lignes de champ

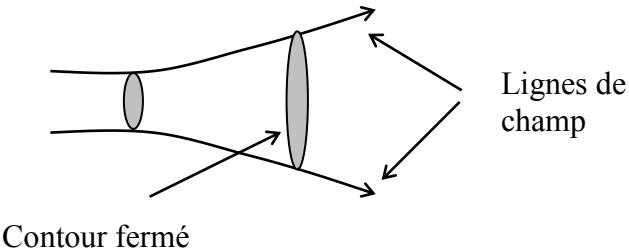


Lignes de champ pour une charge positive

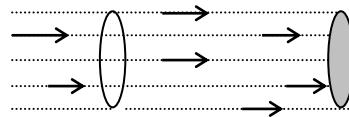


Lignes de champ pour une charge négative

2 – Un tube de champ (ou tube de force) est défini par la surface formée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé, figure ci-dessous.



Dans le cas d'un champ uniforme $\vec{E}(M)=Cte$, les lignes de champ sont des droites parallèles et le tube de champ est un cylindre, figure ci-dessous.

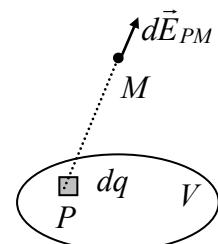


III.5 – Champ créé par une distribution continue de charges

III.5.1 – Distribution volumique de charges

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)dv}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$

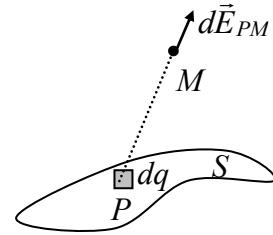
$$\text{avec } \vec{u}_{PM} = \overrightarrow{PM}$$



III.5.2 – Distribution surfacique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)ds}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$

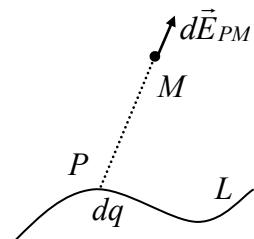
avec $\vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$



III.5.3 – Distribution linéaire

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P)dl}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$

avec $\vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$



Chapitre 2

Théorème de Gauss

I – Flux de champ électrique

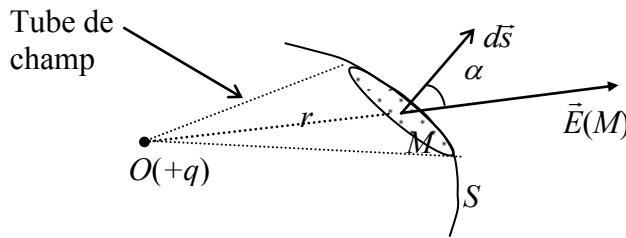
Le théorème de Gauss est basé sur le calcul du flux du champ électrique à travers une surface fermée. Dans ce paragraphe, on va calculer le flux à travers différentes surfaces.

I.1 – Flux à travers une surface quelconque

Le flux élémentaire du champ électrique \vec{E} à travers une surface S , figure ci-dessous, est donné par (annexe II.3)

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

avec $d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$ est le vecteur élément de surface orienté par la normale \vec{n} à la surface (de l'intérieur vers l'extérieur de S) élémentaire ds .



En un point M de cette surface à la distance r de la charge q , le champ a pour expression.

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

$$r = OM \text{ et } \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM}$$

et le flux élémentaire est

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{s}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2}$$

avec $\alpha = (\vec{E}(M), d\vec{s})$ l'angle entre \vec{E} et $d\vec{s}$ au point M .

Or l'angle solide (annexe III.2) en Stéradian (Sr) sous lequel on voit l'élément de surface ds est donné par

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{s}}{r^2} = \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2}$$

d'où l'expression du flux en fonction de l'angle solide

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Finalement, le flux total de \vec{E} à travers la surface S est exprimé par

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

avec Ω est l'angle total sous lequel on voit toute la surface S à partir du point O où se trouve la charge q .

I.2 – Flux à travers une sphère centrée sur une charge ponctuelle

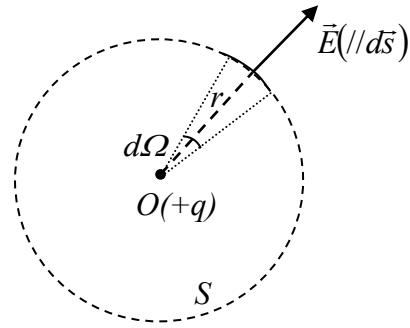
Le flux élémentaire, à travers la surface sphérique fermée S (figure ci-dessous), du champ électrique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q , est donné en fonction de l'angle solide élémentaire par

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

En tout point M de la surface de la sphère S de rayon r , le champ électrique est colinéaire à la normale à cette surface.

Alors, l'angle solide élémentaire est égale

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{s}}{r^2} = \frac{ds}{r^2}$$



et l'angle solide Ω sous lequel, on voit toute la surface de la sphère fermée à partir de la charge q est déterminé par

$$\Omega = \iint_{\text{sphère}} \frac{ds}{r^2} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$$

avec $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ l'élément de surface exprimé dans le système de coordonnée sphérique.

Finalement, le flux total de \vec{E} à travers la surface sphérique fermée S est

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{sphère}} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On constate que le flux du champ électrique \vec{E} est indépendant du rayon de la sphère. C'est une propriété intéressante, car elle permet de choisir une surface appropriée qui facilite le calcul du flux de \vec{E} .

I.3 – Flux à travers une surface fermée quelconque

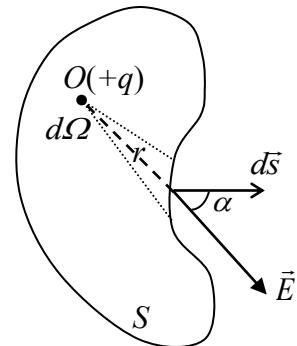
I.3.1 – Charge à l'intérieur de la surface

Le calcul du flux du champ électrique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q placée à l'intérieur d'une surface fermée S , figure ci-dessous, donne

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{espace}} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Comparé au résultat trouvé précédemment, on remarque que le flux de \vec{E} reste constant quelque soit la surface fermée prise sur l'angle solide.

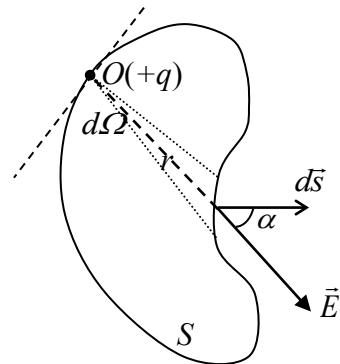


I.3.2 - Charge sur la surface

Le calcul du flux du champ électrique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q placée en un point O d'une surface fermée S , figure ci-dessous, donne

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\frac{1}{2}\text{espace}} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

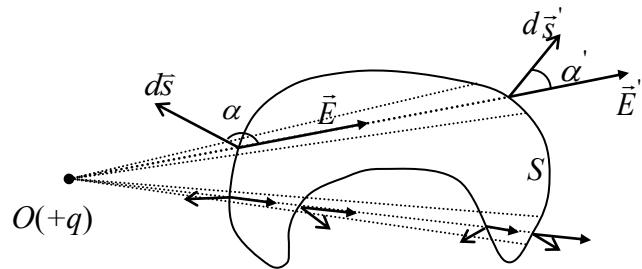


I.3.3 – Charge à l'extérieur de la surface

Le calcul du flux du champ électrique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q placée à l'extérieur d'une surface fermée S , figure ci-dessous, donne

$$d\phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\phi_{E'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha' \cdot d\bar{s}}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega'$$



Or $d\Omega = -d\Omega'$ ce qui donne pour la somme des deux flux élémentaires pour le même tube de champ

$$d\phi = d\phi_E + d\phi_{E'} = 0$$

Alors, la somme totale des flux à travers toute la surface est nulle.

$$\phi = \sum_i d\phi_i = 0$$

Remarque : si le cône élémentaire de sommet O découpe dans la surface S un nombre pair d'éléments ds alors $\sum_i d\phi_i = 0$

II – Enoncé du théorème de Gauss

II.1 – Cas de charges ponctuelles

Le flux électrostatique sortant d'une surface fermée S est égal au rapport de la somme algébrique des charges intérieures à la permittivité du vide. Ce flux est indépendant de la position de ces charges et de l'existence de charges extérieures.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{intérieur}}$$

II.2 – Cas de distribution continue de charges

Le flux électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au rapport de la charge Q (intérieure à la surface fermée S) à la permittivité du vide.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Dans le cas où les charges sont réparties à l'intérieur d'un volume avec une densité volumique ρ , la charge est donnée par

$$Q = \iiint_V \rho dV$$

le volume V est limité par la surface fermée S sur laquelle on calcule le flux du champ électrique.

- Dans le cas où les charges sont réparties sur une surface avec une densité surfacique σ , la charge est donnée par

$$Q = \iint_{S'} \sigma ds$$

la surface S' est à l'intérieur de la surface fermée S sur laquelle on calcule le flux du champ électrique.

- Dans le cas où les charges sont réparties sur une longueur avec une densité linéaire λ , la charge est donnée par

$$Q = \int_L \lambda dl$$

la longueur L est à l'intérieur de la surface fermée S sur laquelle on calcule le flux du champ électrique.

Chapitre 3

Potentiel électrique

I – Potentiel créé par une charge ponctuelle

Le potentiel électrique est défini à partir de la circulation du champ électrique \vec{E} le long d'une trajectoire donnée (annexe II.3).

La circulation élémentaire du champ \vec{E} suivant une courbe L , figure ci-dessous, est donnée par l'expression

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

avec $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$ est le vecteur déplacement élémentaire sur la courbe L orienté de A vers B .

En un point M de cette courbe à la distance r de la charge q , le champ a pour expression.

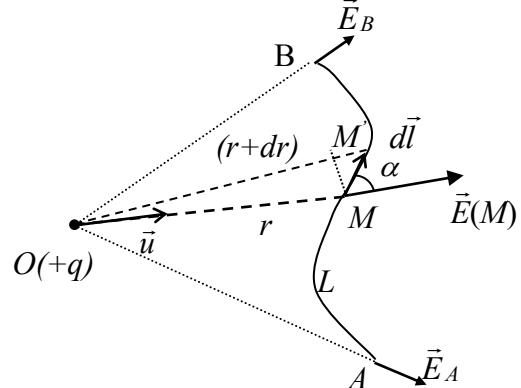
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|}$$

et la circulation est exprimée par

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl \cos \alpha$$

avec $\alpha = (\vec{E}, d\vec{l})$ l'angle entre \vec{E} et $d\vec{l}$



En utilisant l'approximation suivante

$$dl \cos \alpha \approx dr$$

la circulation élémentaire peut être exprimée suivant cette expression

$$dC = Edr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\left(\frac{-1}{r}\right) = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + k\right) = -dV$$

avec k une constante

On définit le potentiel électrique, au point M situé à la distance r de la charge q , par la fonction suivante à valeurs scalaires et à une constante k additive près

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + k$$

1 - Unité (S.I) : Volt (V).

2 - Le potentiel électrique n'est pas défini sur la charge si $r \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow \pm\infty$.

3 - Par convention, on considère $V(\infty) = k = 0$ et par conséquent $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

La circulation du champ le long de la courbe L est donnée par

$$C = \int_{AB} dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B$$

$$C = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

La circulation du champ électrique \vec{E} ne dépend pas du chemin suivi, mais ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B .

On appelle $(V_A - V_B)$ la différence de potentiel (ddp) entre les points A et B .

Remarque : pour une courbe fermée ($A=B$), on a $C = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ et par conséquent la circulation du champ électrique est conservative et \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$ (annexe II.3).

II – Potentiel créé par un système de charges ponctuelles

Le champ électrique créé par un système de charges ponctuelles q_i en un point M de l'espace est donné par

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i$$

La circulation de ce champ $\vec{E}(M)$ le long d'une trajectoire AB a pour expression

$$C = \int_{AB} \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i \int_{AB} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i C_i$$

avec C_i est la circulation du champ \vec{E}_i , créé par la charge q_i placée au point O_i , le long de la trajectoire AB .

$$C_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{iA}}^{r_{iB}} \frac{d\mathbf{r}_i}{r_i^2} \quad \text{avec } r_{iA}=O_iA \text{ et } r_{iB}=O_iB$$

d'où la circulation totale

$$C = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{iA}} - \frac{1}{r_{iB}} \right)$$

$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{iA}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{iB}}$$

$$= V_A - V_B$$

qui ne dépend que de l'état initial A et de l'état final B . On appelle la quantité

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + k$$

le potentiel électrique au point M situé à la distance r_i des charge q_i . C'est une fonction à valeurs scalaires et à une constante k additive près.

Le potentiel électrique n'est pas défini sur les charges ponctuelles, si $r_i \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow \pm\infty$.

Par convention, s'il n'y a pas de charges à l'infini, si $r_i \rightarrow \infty \Rightarrow V(\infty) = k = 0$.

Conséquence : Le potentiel électrique créé, par des charges q_i , en un point M de l'espace est une superposition des potentiels électriques $V_i(M)$.

$$V(M) = \sum_i V_i(M)$$

III – Surfaces équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont l'ensemble des points où le potentiel électrique a partout la même valeur. Elles sont définies par l'équation (cas d'un espace à trois dimensions)

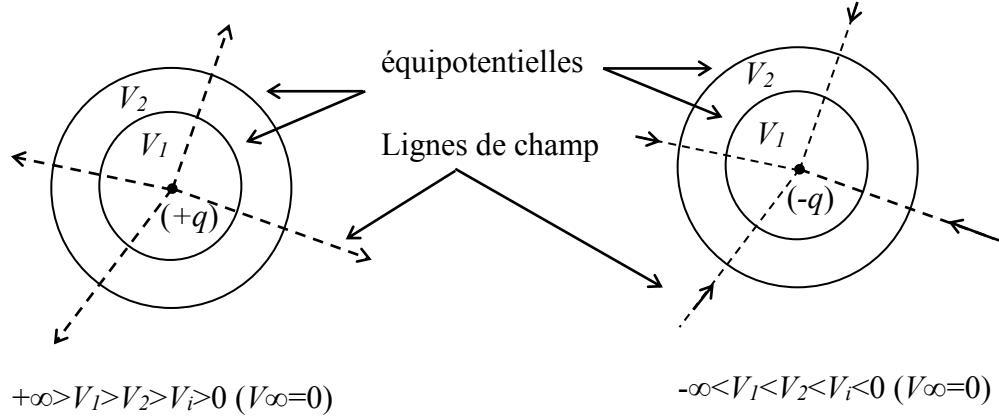
$$V(M) = V(x, y, z) = V_0 = Cte$$

III.1 – Cas d'une charge ponctuelle

Le potentiel électrique $V(M)$ créé, par une charge ponctuelle q , en un point M de l'espace à la distance r est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

si $V(M)=Cte$ alors $r=Cte$, et les surfaces équipotentielles sont des sphères, figure ci-dessous, de rayons constants et centrées sur la position de la charge q (on a une symétrie sphérique).



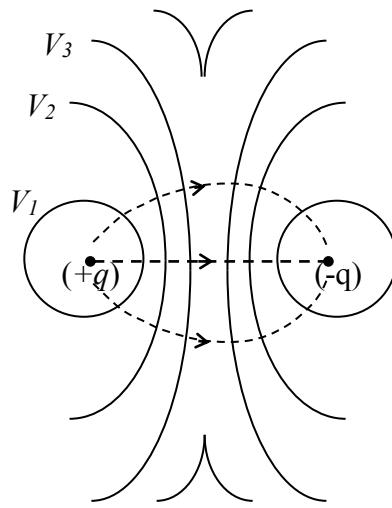
Remarque : Les lignes de champ (tangentes à $\vec{E}(M)$) sont des trajectoires orthogonales aux surfaces équipotentielles.

III.2 – Cas de deux charges ponctuelles

Le potentiel électrique $V(M)$ créé, par deux charges ponctuelles l'une positive ($+q$) et l'autre négative ($-q$), en un point M de l'espace, à la distance r_1 de la charge positive et r_2 de la charge négative, est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

si $V(M)=Cte$ alors $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = Cte$ et les surfaces équipotentielles correspondantes ont l'allure de la figure ci-dessous



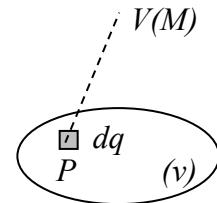
IV – Potentiel créé par une distribution continue de charges

IV.1 – Cas de distribution volumique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(v)} \frac{dq}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(v)} \frac{\rho(P)dv}{r}$$

$r=PM$ avec $r>0$

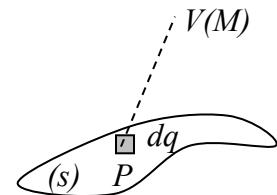


IV.2 – Cas de distribution surfacique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(s)} \frac{dq}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(s)} \frac{\sigma(P)ds}{r}$$

$r=PM$ avec $r>0$

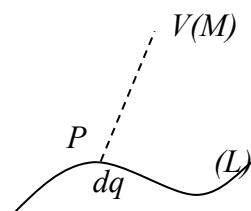


IV.3 – Cas de distribution linéaire

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(L)} \frac{dq}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(L)} \frac{\lambda(P)dl}{r}$$

$r=PM$ avec $r>0$



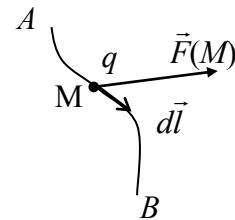
V – Travail de la force électrostatique

Dans une région de l'espace où il existe un champ électrique $\vec{E}(M)$, une charge ponctuelle q est soumise à une force électrique, figure ci-dessous,

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ de la charge q le long d'une trajectoire AB , la force $\vec{F}(M)$ va fournir un travail élémentaire

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Le travail total en Joule (J) de la force électrique pour la trajectoire AB (en utilisant les résultats de la circulation de $\vec{E}(M)$) est donné par

$$W = \int_{AB} dW = q \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B)$$

Le travail de la force électrique ne dépend que de l'état initial A et de l'état final B de la trajectoire parcourue.

Remarque : à partir de la relation $(V_A - V_B) = \frac{W}{q}$, on détermine l'unité de la différence de potentiel entre les points A et B .

Le Volt est la différence de potentiel entre deux points d'un champ électrique tel que le déplacement, par la force électrique, d'une charge de 1 Coulomb entre ces deux points met en jeu un travail de 1 Joule.

VI – Equations caractéristiques du champ et du potentiel électriques

Les propriétés électrostatiques de l'espace peuvent être représentées soit par le vecteur champ électrique $\vec{E}(x,y,z)$, soit par la fonction scalaire potentiel électrique $V(x,y,z)$.

VI.1 – Relation entre champ et potentiel

Dans un espace à trois dimensions, où il y a un champ $\vec{E}(M)$ et un potentiel $V(M)$, on a la relation suivante de la circulation du champ électrique

$$\begin{aligned} dC &= \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \\ dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) dz = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

On déduit alors, que le champ électrique dérive du potentiel électrique (annexe II.2) par la relation

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$$

Dans le cas où on travaille dans un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) , on a

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Dans le cas où on travaille dans un système de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , on a

$$\vec{E} \left\{ \begin{array}{l} E_\rho = - \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$$

Dans le cas où on travaille dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , on a

$$\vec{E} \left\{ \begin{array}{l} E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

Conséquence : à partir de la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$ exprimée en coordonnées cartésiennes, on déduit l'unité du champ électrique (Volts/mètre) au lieu de (Newtons/Coulomb) déduite à partir de la force électrique $E = \frac{F}{q}$.

VI.2 – Expression locale du théorème de Gauss

Le flux d'un champ électrique $\vec{E}(M)$, créé par une charge de densité volumique ρ , à travers une surface fermée (S) est exprimé par le théorème de Gauss

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(v)} \rho dV$$

Ce flux peut être réécrit, en utilisant le théorème de Green ou d'Ostrogradski (annexe II.3), suivant l'expression

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{(v)} \text{div} \vec{E} \cdot dv \text{ où } (v) \text{ est le volume limité par la surface } (S)$$

De ces deux relations, on déduit l'expression locale du théorème de Gauss (ou 1^{ère} équation de Maxwell)

$$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Si $\rho(M) \neq 0$ alors $\text{div} \vec{E}(M) \neq 0$ et le flux électrique n'est pas conservatif.

Si $\rho(M) = 0$ alors $\text{div} \vec{E}(M) = 0$ et le flux électrique est conservatif (flux de $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée est nul).

Conséquence : Le calcul de la divergence de $\vec{E}(M)$, en un point de l'espace (annexe II.2), nous renseigne sur la présence ou non de charges électriques (sources de champ) en ce point.

VI.3 – Rotationnel du champ électrique

La circulation du champ électrique $\vec{E}(M)$, le long d'une trajectoire (L) fermée est nulle

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

En utilisant le théorème de Stokes (annexe II.3), la relation précédente peut être réécrite sous la forme

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \text{ où } (S) \text{ une surface s'appuyant sur } (L)$$

On déduit, le rotationnel du champ électrique (ou 2^{ème} équation de Maxwell)

$$\vec{rot} \vec{E}(M) = \vec{0}$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le champ $\vec{E}(M)$ dérive d'un potentiel scalaire.

Conséquence : la condition $\vec{rot} \vec{E} = \vec{0}$ implique que le champ électrique $\vec{E}(M)$ n'est pas un champ tourbillonnaire (vecteur tournant).

VI.4 – Equations de Poisson et de Laplace

En utilisant les résultats précédents, on déduit la relation suivante

$$div \vec{E}(M) = div(-\vec{grad} V(M)) = -\Delta V(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

L'équation de Poisson est donnée par

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$$

Si $\rho(M)=0$, on obtient l'équation de Laplace

$$\Delta V(M) = 0$$

Chapitre 4

Conducteurs en équilibre et énergie électrique

I – Equilibre électrostatique d'un conducteur isolé et unique

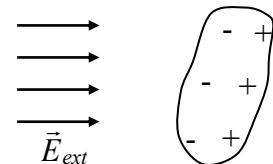
I.1 – Propriétés générales d'un conducteur

1 – Dans les conducteurs (exemple les métaux), les électrons extérieurs sont peu liés aux noyaux des atomes et peuvent se déplacer facilement entre les atomes. Ces électrons sont des charges libres.

2 – Dans les isolants (exemple les matières plastiques), les électrons sont fortement liés aux noyaux des atomes et ne peuvent pas se déplacer entre les atomes.

3 – Un conducteur est en équilibre électrostatique lorsque les charges libres qu'il contient sont au repos. Il y a des mouvements de charges à cause de l'agitation thermique, mais pas de mouvement d'ensemble.

4 – Sous l'effet d'un champ électrique \vec{E}_{ext} extérieur les charges positives et négatives, figure ci-contre, d'un conducteur se séparent. Il y'a accumulation de charges des deux côtés du conducteur.



I.2 – Conducteur chargé en équilibre

Soit un conducteur isolé et neutre, figure ci-dessous, avec

$$\rho=0$$

$$\vec{E}=\vec{0}$$

$$V=cte=V(\infty)=0 \text{ (car il n'y a pas de charges)}$$

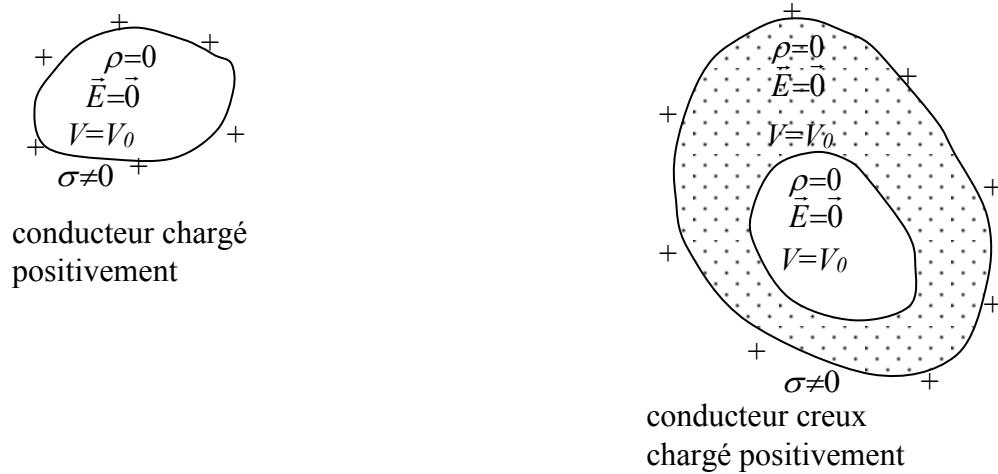
$$\begin{aligned} &\rho=0 \\ &\vec{E}=\vec{0} \\ &V=cte=0 \end{aligned}$$

conducteur
neutre et isolé

Supposons qu'on dépose une quantité de charges positives sur ce conducteur, elle va se déplacer et provoquer un déplacement des autres charges. Au bout d'un certain temps, il s'établit un nouveau équilibre électrostatique. Donc, il n'y a plus de force électrique $\vec{F}=q\vec{E}_{int}=\vec{0}$ et par conséquent $\vec{E}_{int}=\vec{0}$ (puisque on a déposé une charge $q\neq 0$ sur le conducteur) en tout point à l'intérieur du conducteur. On a aussi, d'après les résultats précédents, $\rho_{int}=\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_{int}=0$ ce qui implique que la charge posée est répartie sur la surface du conducteur.

Pour déterminer le potentiel du conducteur, on utilise la relation $\vec{E}_{int}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_{int}=\vec{0}$, ce qui donne $V_{int}=cte=V_0$ en tout point et la surface du conducteur est une équipotentielle.

Ces propriétés sont valables aussi pour un conducteur creux, figure ci-dessous.



I.3 – Champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé

Soit un conducteur chargé avec une densité de charge positive σ . Pour calculer le champ électrique, en utilisant le théorème de Gauss, au voisinage du conducteur, on choisit une surface S fermée (figure ci-dessous) cylindrique ($S=S_1+S_2+S_3$). La surface latérale S_2 et la base S_3 doivent être faibles pour que le champ \vec{E} soit normal à cette base.

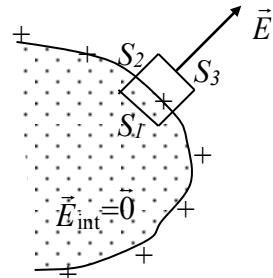
Le flux du champ à travers cette surface est donné par

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3}$$

$\phi_{S_1}=0$ car le champ à l'intérieur du conducteur est $\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$

$\phi_{S_2}=0$ car \vec{E} est perpendiculaire à la normale de S_2

$$\phi_{S_3} = \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_3} E \cdot ds = ES_3$$



La charge à l'intérieur de la surface S est

$$\sum q_{\text{int}} = \sigma S_3$$

Finalement, à partir de ces résultats et en appliquant le théorème de Gauss

$$\phi = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\phi = ES_3 = \frac{\sigma S_3}{\epsilon_0}$$

on déduit le champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé (connu aussi sous l'appellation Théorème de Coulomb)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

C'est un champ qui ne dépend que de la densité de charge sur le conducteur, normal à la surface de ce dernier.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où \vec{n} est la normale, sur la surface du conducteur, orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

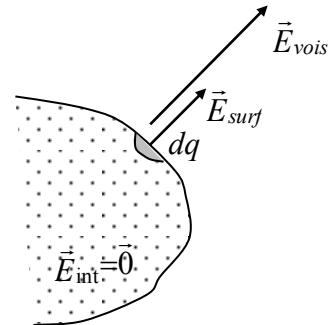
I.4 – Pression électrostatique

A partir du champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé $\vec{E}_{vois} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ et du champ à l'intérieur $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, figure ci-contre, on déduit le champ électrique sur la surface par la relation

$$E_{surf} = \frac{E_{vois} + E_{int}}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

C'est un champ normal à la surface du conducteur

$$\vec{E}_{surf} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$



où \vec{n} est la normale orientée de l'intérieur vers l'extérieur du conducteur.

D'après la force de Coulomb, une charge élémentaire $dq = \sigma ds$, sur la surface du conducteur, sera soumise à la force électrostatique proportionnelle au champ électrique sur la surface

$$d\vec{f} = dq \cdot \vec{E}_{surf}$$

C'est une force normale et dirigée vers l'extérieur de la surface du conducteur et de module

$$df = dq \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds$$

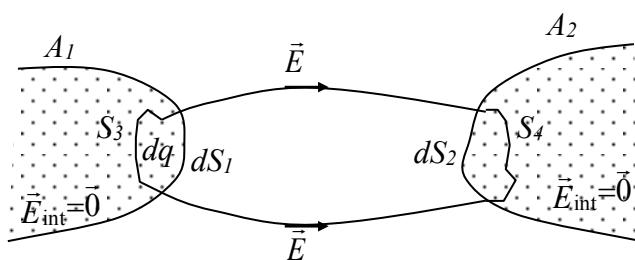
En exprimant cette force par unité de surface, on obtient la pression électrostatique exercée sur le conducteur

$$p = \frac{df}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

II – Equilibre de plusieurs conducteurs

II.1 – Éléments correspondants

Soient deux conducteurs A_1 chargé positivement et A_2 neutre, placés suivant la figure ci-dessous. Soit un tube de champ qui découpe dans A_1 la surface dS_1 et dans A_2 la surface dS_2 . Supposons que dq est la charge de l'élément de surface dS_1 .



Calculons le flux du champ \vec{E} à travers la surface fermée S (formée par la surface du tube, la surface S_3 à l'intérieur de A_1 et la surface S_4 à l'intérieur de A_2) et appliquons le théorème de Gauss.

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi_{S_3} + \phi_{tube} + \phi_{S_4} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

$\phi_{S_3} = 0$ car le champ à l'intérieur de A_1 est $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

$\phi_{S_4} = 0$ car le champ à l'intérieur de A_2 est $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

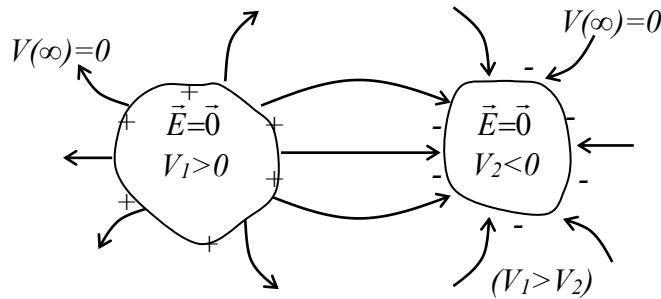
$\phi_{tube} = 0$ car \vec{E} est perpendiculaire à la normale du tube

$$\phi = 0$$

Comme le flux totale est nul $\phi = 0$ alors on a $\sum q_{int} = 0$. Or à l'intérieur de la surface S , la charge sur S_1 est non nulle $dq \neq 0$, ce qui impose la présence d'une charge dq' opposée sur la surface S_4 du conducteur A_2 .

$$dq' = -dq$$

On déduit, finalement, que les charges portées par deux éléments correspondants, dans un tube, sont opposées.



Etat d'équilibre de deux conducteurs positif et négatif

II.2 – Théorème de superposition des états d'équilibre

En superposant plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteurs, on obtient un nouvel état d'équilibre. Les densités et les charges totales sur chaque conducteur, le potentiel en tout point de l'espace sont les sommes algébriques des densités, charges et potentiels qui existaient, respectivement, dans les états d'équilibre avant la superposition. De même, il y a addition vectorielle des champs en tout point de l'espace.

Remarque : Le problème d'équilibre de conducteurs peut être résolu en calculant la fonction potentiel électrostatique $V(M)$, nulle à l'infini, satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta V(M) = 0$ en tout point extérieur aux conducteurs, $V(M) = \text{Cte}$ sur les conducteurs. Ensuite, en tout point le champ électrique est déterminé par $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$, la densité surfacique de charges sur chaque conducteur est donnée par la relation $\sigma(M) = \epsilon_0 E(M)$ et la charge totale d'un conducteur est calculée par $Q = \iint_{(\text{Conducteur})} \sigma(M) ds$.

III – Influence électrostatique

III.1 – Influence sur un conducteur isolé

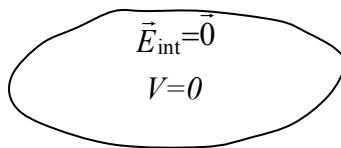
III.1.1- Par un champ extérieur

Un conducteur isolé et neutre, figure ci-dessous, dans un espace est caractérisé par

$\sigma=0$, la densité de charge est nulle et la charge $Q=\iint_S \sigma dS=0$

$\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$, le champ est nul à l'intérieur

$V=V_{\text{int}}=Cte=0$ car $\vec{E}_{\text{int}}=-\overrightarrow{\text{grad}}V_{\text{int}}=\vec{0}$ et pas de charges à l'infini



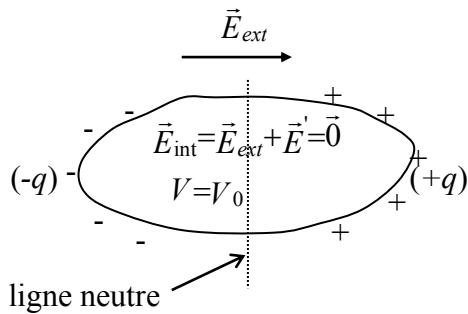
En plaçant ce conducteur dans un espace où il y a un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} , les charges du conducteur vont se répartir, sous l'influence de ce champ influençant, sur la surface de façon que \vec{E}_{int} reste nul. Alors les caractéristiques, à l'équilibre, du conducteur deviennent, figure ci-dessous,

$Q=(-q)+(+q)=0$, la charge totale du conducteur

$\vec{E}_{\text{int}}=\vec{E}_{\text{ext}}+\vec{E}'=\vec{0}$ où \vec{E}' est le champ créé par les charges séparées $(+q)$ et $(-q)$ du conducteur

$V=V_{\text{int}}=Cte=V_0$ car $\vec{E}_{\text{int}}=-\overrightarrow{\text{grad}}V_{\text{int}}=\vec{0}$ et présence de charges sur le conducteur

De plus, il y a apparition d'un plan neutre entre les charges positives et négatives séparées où la densité surfacique de charge est nulle $\sigma=0$.



III.1.2- Par un conducteur chargé

Soit un conducteur A_2 neutre ($\sigma=0$, $Q_2=0$, $V_2=0$) placé dans un espace où il y a un conducteur A_1 chargé positivement avec la charge Q_1 , figure ci-dessous. Sous l'influence du champ électrique de A_1 et en respectant les propriétés des éléments correspondants, les caractéristiques du conducteur A_2 deviennent à l'équilibre

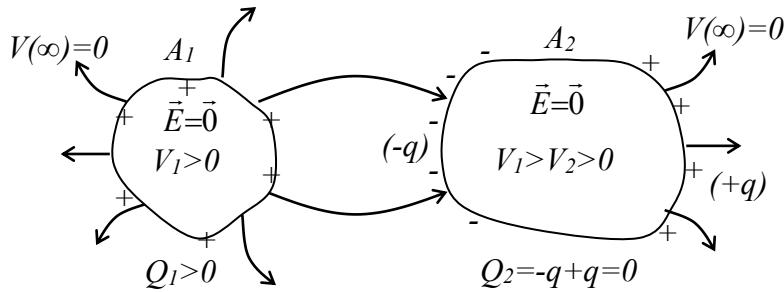
$Q_2=(-q)+(+q)=0$, la charge totale du conducteur

$\vec{E}=\vec{0}$, le champ est nul à l'intérieur

$V = V_{int} = Cte = V_2$ car $\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{grad}V_{int} = \vec{0}$ et présence de charges sur le conducteur. Le potentiel de A_2 change et devient positif $V_1 > V_2 > 0$ car les lignes de champ se dirigent vers les potentiels décroissants

Comme, toutes les lignes de champ issues de A_1 ne rejoignent pas A_2 , certaines partent à l'infini alors l'influence est partielle et on a

$$|Q_1| > |(-q)|$$



N.B : L'influence n'existe que pour les corps conducteurs.

Remarque : S'il y a plusieurs conducteurs en influence, un conducteur chargé n'a pas nécessairement un potentiel de même signe que sa charge par exemple $Q_2 = 0$ mais $V_2 > 0$.

III.2 – Influence sur un conducteur relié à la terre

Considérons le même système du §III.1-2 et relions A_2 à la terre. Par convention, le potentiel de la terre (sol) est nul

$$V_{terre} = 0$$

Comme le conducteur A_2 et la terre forment un seul conducteur, les charges positives sont compensées par les charges de la terre (réservoir inépuisable des charges). Alors, à l'équilibre, on a

$$Q_2 = (-q) < 0, \text{ la charge totale du conducteur est négative}$$

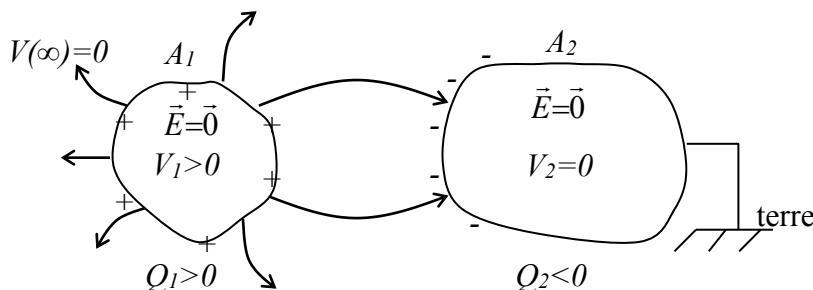
$$\vec{E} = \vec{0}, \text{ le champ est nul à l'intérieur}$$

$$V_2 = V_{terre} = 0, \text{ le potentiel de la terre}$$

Comme, toutes les lignes de champ issues de A_1 ne rejoignent pas A_2 , certaines partent à l'infini alors l'influence est partielle et on a

$$|Q_1| > |Q_2|$$

On constate que le potentiel $V_2 = 0$ mais la charge $Q_2 < 0$.



Remarque : Si la liaison entre A_2 et la terre est coupée, la charge négative Q_2 se répartit sur toute la surface du conducteur et le potentiel devient négatif $V_2 < 0$.

III.3 – Influence totale

L'influence est dite totale si le conducteur influencé entoure complètement le conducteur chargé influençant.

Soit un conducteur creux A_1 neutre ($\sigma=0$, $Q=0$, $V=0$). On place à l'intérieur de A_1 , dans la partie creuse, un conducteur A_2 chargé positivement avec une charge Q_2 suivant la figure ci-dessous. Ainsi, toutes les lignes de champ qui partent de A_2 arrivent sur A_1 et par conséquent on a une influence totale.

A l'équilibre, sous l'influence du champ électrique de A_2 et en respectant les propriétés des éléments correspondants, les caractéristiques du système sont

$$\text{Pour } A_1 : Q = Q_1 = (-Q_2) + (Q_2) = 0$$

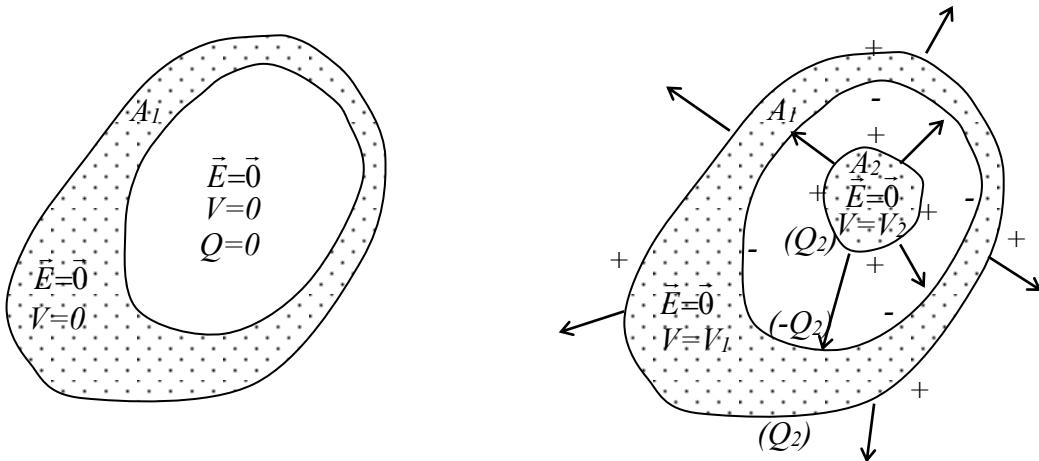
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$V = V_1 > 0$$

$$\text{Pour } A_2 : Q = Q_2 > 0$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$V = V_2 > V_1 > 0$$



III.3.1 – Écran électrique

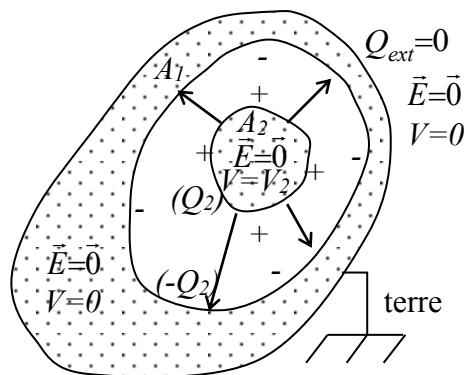
Un conducteur creux relié à la terre ($V_{(terre)}=0$) constitue un écran électrique parfait qui empêche les influences électrostatiques des corps intérieurs et extérieurs.

Reliant le conducteur A_1 du système précédent, figure ci-dessous, à la terre ($V_{(terre)}=0$). A l'équilibre, les propriétés électrostatiques dans l'espace à l'extérieur du conducteur A_1 , sont

$$Q_{ext}=0$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$V=0$$

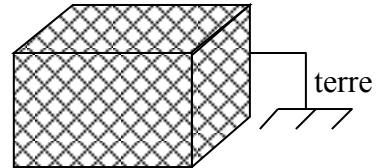


Applications :

1 – Cage de Faraday

C'est une chambre en grille métallique (surface non continue) reliée à la terre pour la protection ou le blindage électrostatique des appareils. A l'intérieur, les propriétés électrostatiques sont

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{0} \\ V &= 0\end{aligned}$$

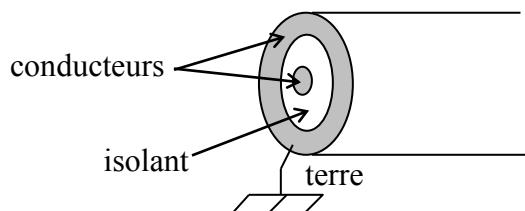


2 – Masse des appareils électriques

La plupart des appareils électriques sont placés à l'intérieur d'une carcasse métallique reliée à la terre.

3 – Câbles électriques

On utilise pour protéger (blindage électrostatique) les câbles électriques contre des influences électrostatiques, une tresse métallique reliée à la terre.

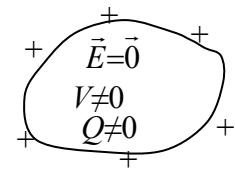


IV – Condensateurs

IV.1 – Capacité d'un conducteur isolé et unique

La capacité d'un conducteur, figure ci-dessous, isolé et unique est le quotient de sa charge Q par son potentiel V .

$$C = \frac{Q}{V}$$



Unité (S.I) : Farad (F)

$$\text{et sous-multiples } 1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$$

$$1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$$

$$1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$$

conducteur chargé positivement

si $Q > 0$ alors $\sigma > 0$ et $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} > 0$ et par conséquent les lignes de champ partent du conducteur vers l'infini où le potentiel est nul, d'où $V > 0$.

si $Q < 0$ alors $\sigma < 0$ et $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} < 0$ et par conséquent les lignes de champ arrivent sur le conducteur à partir de l'infini où le potentiel est nul, d'où $V < 0$.

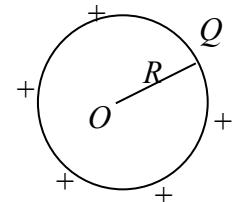
On déduit que la capacité d'un conducteur isolé et unique est toujours positive $C > 0$.

Pour un conducteur sphérique de rayon R et de charge Q , le potentiel est donné par l'expression

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

et la capacité est calculée par

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$



On remarque que cette capacité ne dépend que de la forme géométrique du conducteur.

Cas particulier : Capacité de la terre

En supposant la terre un conducteur sphérique isolé et unique (pas de d'influences) de rayon $R = 6400$ km, sa capacité est égale à

$$C_{terre} \approx 700\mu\text{F}$$

On déduit que le Farad est une très grande unité, d'où l'utilisation de ses sous-multiples.

IV.2 – Capacités et coefficients d'influence de conducteurs en équilibre

Soient n conducteurs A_1, A_2, \dots, A_n aux potentiels V_1, V_2, \dots, V_n portant les charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n en équilibre électrostatique. Cet état peut être obtenu par la superposition de n états d'équilibre intermédiaires. Pour le $i^{\text{ème}}$ état, on suppose que tous les potentiels sont nuls sauf celui du $i^{\text{ème}}$ conducteur V_i et la charge sur chaque conducteur est proportionnelle à V_i .

	V_1	V_2	...	V_i	...	V_n	Q_1	Q_2	...	Q_i	...	Q_n
1 ^{er} état	1	0	...	0	...	0	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$...	$C_{i1}V_1$...	$C_{n1}V_1$
2 ^{ème} état	0	1	...	0	...	0	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$...	$C_{i2}V_2$...	$C_{n2}V_2$
.												
i ^{ème} état	0	0	...	1	...	0	$C_{1i}V_i$	$C_{2i}V_i$...	$C_{ii}V_i$...	$C_{ni}V_i$
.											.	
n ^{ième} état	0	0	...	0	...	1	$C_{1n}V_n$	$C_{2n}V_n$...	$C_{in}V_n$...	$C_{nn}V_n$

Les charges produites par la superposition des n états d'équilibre sur chaque conducteur sont données par

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n$$

.

.

.

$$Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n$$

et qu'on peut réécrire pour le i^{ème} conducteur sous la forme

$$Q_i = \sum_j^n C_{ij}V_j$$

La charge sur un conducteur est une fonction linéaire des potentiels des n conducteurs en influence électrostatique.

C_{ij} est un coefficient d'influence du conducteur A_j sur le conducteur A_i , il est homogène à une capacité (en Farad).

C_{ii} est la capacité (en Farad) de A_i en présence des autres conducteurs (différente de la capacité de A_i isolé et unique).

Remarque :

1 – Les coefficients d'influence vérifient les conditions

$$C_{ii} > 0$$

$$C_{ij} < 0$$

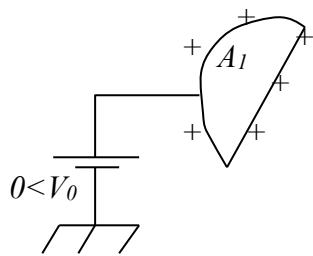
$$C_{ij} = C_{ji}$$

2 – Quand $n=2$, deux conducteurs, on parle de condensateur.

IV.3 – Condensation de charges électriques

Soit un conducteur A_1 isolé et chargé positivement par une source permanente, figure ci-dessous, de potentiel $V_0 > 0$. Cette charge est exprimée en fonction de la capacité C_0 par la relation

$$Q_0 = C_0 V_0$$



On rapproche de A_1 un autre conducteur A_2 neutre et relié à la terre ($V_{(terre)}=0$) suivant la figure ci-dessous. D'après les résultats précédents, le conducteur chargé A_1 influence le conducteur A_2 en attirant des charges négatives sur sa surface. Ces charges négatives vont influencer A_1 , à leur tour, et attirer des charges positives supplémentaires qui seront fournies par la source V_0 . La charge du conducteur A_1 va augmenter sous cette influence.

Ainsi, on a un phénomène de condensation de charge exprimée par

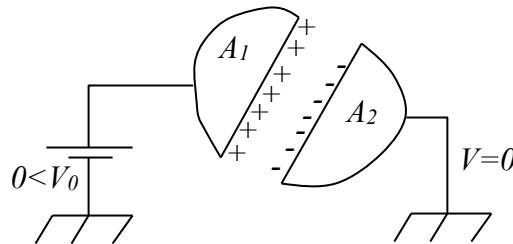
$$|Q_1| > |Q_0|$$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = C_{11}V_0 \text{ car } V_1 = V_0 \text{ et } V_2 = V_{(terre)} = 0$$

Comparée à $Q_0 = C_0 V_0$, on déduit que le capacité d'un conducteur augmente en présence d'un autre conducteur

$$C_{11} > C_0$$

L'ensemble des deux conducteurs constitue un condensateur, A_1 et A_2 sont les armatures du condensateur.



IV.4 – Capacité d'un condensateur

Soit un condensateur, figure ci-dessous, dont l'armature interne est A_1 et l'armature externe est A_2 .

Les charges sur les deux conducteurs sont données par

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

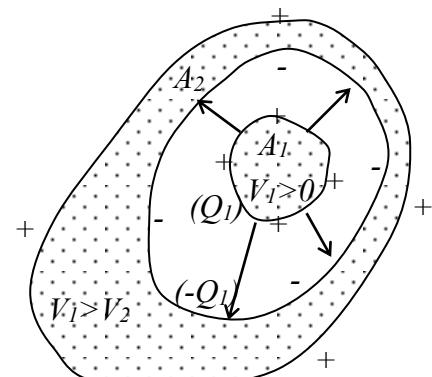
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

si le conducteur A_2 est relié à la terre ($V_2=0$), on a

$$Q_1 = C_{11}V_1$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 = -Q_1$$

D'où $C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C$



Par définition, la constante C est la capacité du condensateur.

En remplaçant, les coefficients d'influence par cette constante dans les expressions des charges, on obtient

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = C(V_1 - V_2) \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 = -CV_1 + C_{22}V_2 = -C(V_1 - V_2) - CV_2 + C_{22}V_2 = -Q_1 + (C_{22} - C)V_2 \end{aligned}$$

Ainsi, les charges sont données par les relations

$$\begin{aligned} Q_1 &= C(V_1 - V_2) \\ Q_2 &= -Q_1 + C'V_2 \end{aligned}$$

où

$C'V_2$ est la charge de la face externe de l'armature externe A_2 .

C' est la capacité du conducteur A_2 isolé (si $Q_1=0$ alors $Q_2=C'V_2$).

Finalement, la capacité d'un condensateur est exprimée par

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$$

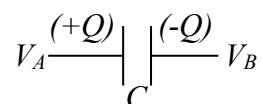
avec Q_1 est la charge de l'armature interne et $(V_1 - V_2)$ est la différence de potentiel entre les armatures.

IV.5 – Groupement de condensateurs

Un condensateur est représenté par l'élément de la figure ci-dessous.

La charge du condensateur est reliée à la différence de potentiel entre les armatures par la relation

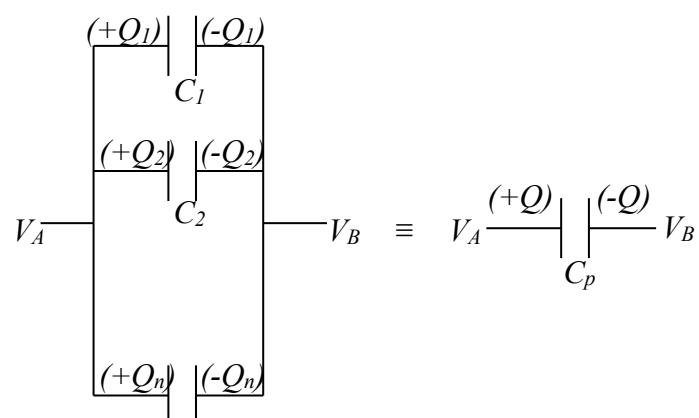
$$Q = C(V_A - V_B) \text{ avec } Q > 0 \text{ et } V_A > V_B$$



1 – Condensateurs en parallèle

$$V = V_A - V_B$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \\ &= C_1 V + C_2 V + \dots + C_n V \\ &= (C_1 + C_2 + \dots + C_n) V \\ &= C_p V \end{aligned}$$



d'où

$$C_p = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

V est la même pour tous les condensateurs

2 – Condensateurs en série

$$V_A \frac{(+Q)}{C_1} \left| \begin{matrix} (-Q) \\ V_1 \end{matrix} \right| \frac{(+Q)}{C_2} \left| \begin{matrix} (-Q) \\ V_2 \end{matrix} \right| \dots \frac{(+Q)}{C_{n-1}} \left| \begin{matrix} (-Q) \\ V_{n-1} \end{matrix} \right| \frac{(+Q)}{C_n} \left| \begin{matrix} (-Q) \\ V_B \end{matrix} \right| \equiv V_A \frac{(+Q)}{C_s} \left| \begin{matrix} (-Q) \\ V_B \end{matrix} \right|$$

$$V = V_A - V_B$$

$$V_A - V_B = (V_A - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_B)$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

$$V_A - V_B = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q = \frac{Q}{C_s}$$

d'où

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Q est la même pour tous les condensateurs

$$V = \sum V_i$$

V – Energie électrique

V.1 – Energie électrostatique d'une charge

L'énergie électrostatique d'une charge est, par définition, l'énergie qu'on doit fournir pour amener cette charge depuis l'infini où le potentiel est nul jusqu'à la position M où le potentiel est $V(M)$, en luttant contre les forces électrostatiques par une succession d'états d'équilibre. Cette énergie est une énergie potentielle car elle est liée à la position de la charge dans l'espace.

Le travail des forces électrostatiques (résultat précédent) au cours du déplacement de la charge q de l'infini à la position M est donné par l'expression

$$W = q(V_{(\infty)} - V(M)) = q(0 - V(M)) = -qV(M)$$

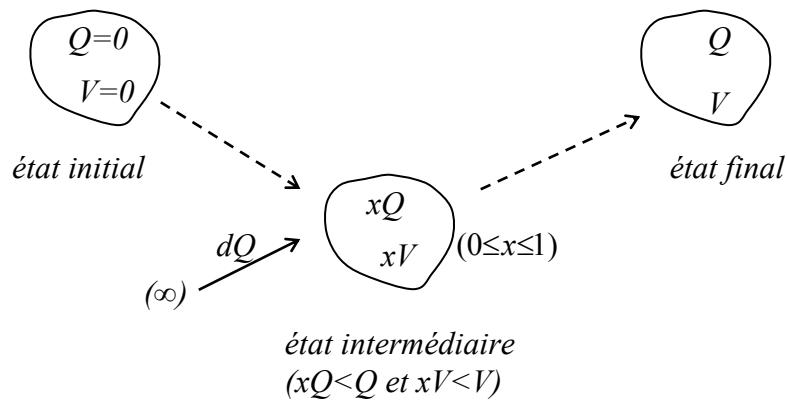
Alors, l'énergie électrostatique U (ou énergie potentielle) de la charge q à la position M est donnée par l'opposé de ce travail W

$$U = qV(M)$$

V.2 – Energie d'un conducteur isolé

L'énergie électrostatique d'un conducteur est l'énergie qu'il faut fournir pour charger ce conducteur par une succession d'états d'équilibre infiniment voisins (transformation réversible).

Soit un conducteur, figure ci-dessous, neutre et isolé. Pour le charger avec la charge Q , on va apporter sur le conducteur, à potentiel constant, une quantité infinitésimale de charge dQ depuis l'infini.



Ainsi, dans un état intermédiaire, le potentiel du conducteur aura une valeur proportionnelle à la valeur finale V

$$V_{(inter)} = xV \text{ avec } (0 \leq x \leq 1)$$

De même, on considère que la charge augmente progressivement sur le conducteur (dont le potentiel $V_{(inter)}$ est constant) de la quantité

$$dQ = Qdx$$

Alors, l'accroissement de l'énergie est donné par

$$dU = dQ \cdot (xV) = Qdx \cdot (xV) = QV \cdot xdx$$

Finalement, l'énergie électrostatique du conducteur chargé est définie par

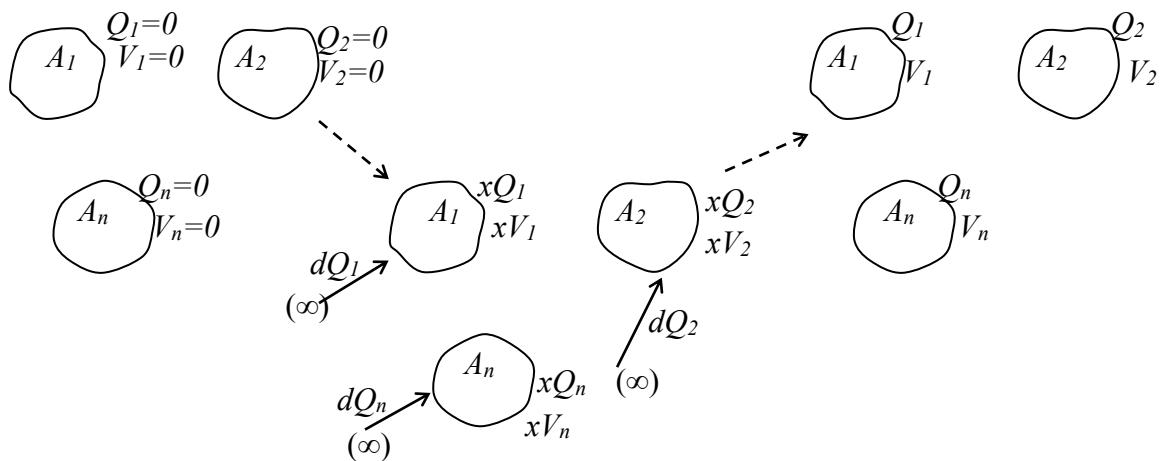
$$U = \sum dU = \int_0^1 QV x dx = QV \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} QV$$

Pour un conducteur chargé et isolé de capacité C , on a l'expression suivante

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

V.3 – Energie d'un système de conducteurs

Soient un système de n conducteurs chargés (figure ci-dessous) en équilibre électrostatique. Pour calculer l'énergie électrostatique totale de ce système, on utilise la même démarche que précédemment pour chaque conducteur.



L'accroissement de l'énergie est donné par la somme

$$\begin{aligned} dU &= dQ_1.(xV_1) + dQ_2.(xV_2) + \dots + dQ_n.(xV_n) \\ dU &= Q_1dx.(xV_1) + Q_2dx.(xV_2) + \dots + Q_ndx.(xV_n) \\ dU &= Q_1V_1.xdx + Q_2V_2.xdx + \dots + Q_nV_n.xdx \end{aligned}$$

Finalement, l'énergie électrostatique d'un système de n conducteurs chargés est exprimée par

$$U = (Q_1V_1 + Q_2V_2 + \dots + Q_nV_n) \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

V.4 – Energie d'un système de charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles dans un espace. Une charge q_i placée en un point M_i sera soumise au potentiel créé par les autres charges. Par conséquent, l'énergie électrostatique de ce système est une énergie d'interaction mutuelle.

L'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

où

$V_i = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_j}{r_{ij}}$ est le potentiel créé au point M_i (où se trouve la charge q_i), par toutes les charges q_j placées aux points M_j du système sauf q_i .

V.5 – Energie d'une distribution continue de charges

V.5.1 – Distribution volumique

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(P) V(P) . dv$$

où $\rho(P)$ et $V(P)$ sont la densité de charges et le potentiel électrique au point P , du conducteur, associé à l'élément de volume dv .

V.5.2 – Distribution surfacique

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(P) V(P) . ds$$

où $\sigma(P)$ et $V(P)$ sont la densité de charges et le potentiel électrique au point P , du conducteur, associé à l'élément de surface ds .

V.5.3 – Distribution linéaire

$$U = \frac{1}{2} \int_L \lambda(P) V(P) . dl$$

où $\lambda(P)$ et $V(P)$ sont la densité de charges et le potentiel électrique au point P , du conducteur, associé à l'élément de longueur dl .

V.6 – Energie d'un condensateur

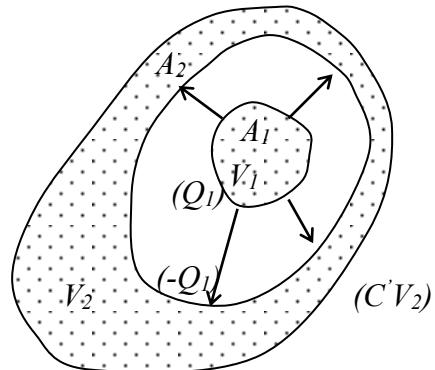
Soit un condensateur, formé par deux conducteurs en influence totale, chargé et isolé en équilibre électrostatique.

La charge et le potentiel de l'armature interne A_1 sont

$$\frac{Q_1}{V_1}$$

La charge et le potentiel de l'armature externe A_2 sont

$$\frac{Q_2 = -Q_1 + C'V_2}{V_2}$$



L'énergie électrostatique du condensateur est donnée par

$$U = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} [Q_1 (V_1 - V_2) + C' V_2^2]$$

si $Q_2 = -Q_1 = -Q$, alors cette énergie devient

$$U = \frac{1}{2} (Q V_1 - Q V_2) = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$V_1 \xrightarrow[C]{(+Q)} \left| \right| \xrightarrow[C]{(-Q)} V_2$

V.7 – Localisation de l'énergie électrostatique

Soit un corps continu de volume (V) chargé, avec une densité de charge volumique ρ , dans un espace.

Ce corps chargé possède une énergie électrostatique donnée par l'expression

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dv$$

L'expression de cette énergie en fonction du champ électrique est

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V V \operatorname{div} \vec{E} dv$$

avec $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$ (1^{ère} équation de Maxwell)

En utilisant la relation

$$\operatorname{div}(V\vec{E}) = V \cdot \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} V} = V \cdot \operatorname{div} \vec{E} - E^2$$

on obtient

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V [\operatorname{div}(V\vec{E}) + E^2] dv$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\iiint_V \operatorname{div}(V\vec{E}) dv + \iiint_V E^2 dv \right]$$

Cette énergie est la somme de deux termes. En utilisant le théorème d'Ostrogradski (annexe II.3), on exprime le premier terme par le flux du vecteur ($V\vec{E}$) à travers la surface (S)

$$\iiint_V \operatorname{div}(V\vec{E}) dV = \oint_S V\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Si (S) est une surface sphérique centrée sur la masse chargée et de rayon $R \rightarrow \infty$ alors cette distribution de charge volumique sera vue à partir de cette surface (espace) comme une charge ponctuelle.

Par conséquent, le potentiel se comporte comme une fonction inversement proportionnelle à R ($V \approx \frac{1}{R}$), le champ se comporte comme une fonction inversement proportionnelle à R^2 ($E \approx \frac{1}{R^2}$), la surface se comporte comme une fonction proportionnelle à R^2 ($S \approx R^2$) et le flux se comporte comme une fonction inversement proportionnelle à R ($\phi = \oint_S V\vec{E} \cdot d\vec{s} \approx \frac{1}{R} \rightarrow 0$).

Finalement, l'énergie électrostatique est répartie dans un espace où il y a un champ électrique

$$U = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

N.B : l'espace d'intégration inclut aussi le volume de la masse chargée.

On définit, la densité locale d'énergie électrostatique par l'expression

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Partie 2

Magnétostatique

Chapitre 5

Magnétostatique

IV-1-Introduction

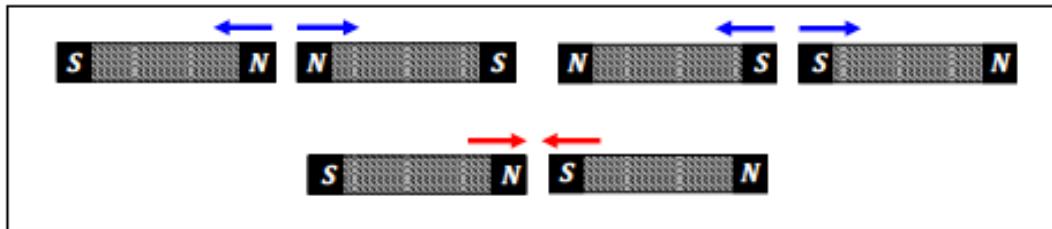
IV-1-1 Propriétés des aimants.

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie, la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme. Comme pour l'électricité, la contribution des grecs à l'étude du magnétisme fut purement linguistique.

Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : les pôles. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents.

Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles. Elles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau contenue dans une récipient gradué.

L'expérience montre que : Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.

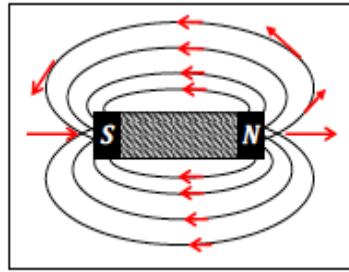


IV-1-2 Champ magnétique.

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un champ magnétique de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique note \vec{B} . Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.



Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud. Dans le système M.K.S.A rationalisé, le champ magnétique est mesuré en **tesla (T)**, en hommage au savant serbe Nikola Tesla (1856-1943), inventeur de l'alternateur.

IV-1-3 La force magnétique

IV-1-3-1 Force de Lorentz

La force agissant sur une charge ponctuelle q dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse \vec{v} . Cette force \vec{F} est décomposée en deux composantes, la composante électrique \vec{F}_e (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique \vec{F}_m (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement \vec{B} qui s'exprime en tesla (T). La force magnétique \vec{F}_m est décrite par :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

cette force a pour module :

$$F = q v B |\sin(\vec{v}, \vec{B})|$$

Généralement :

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée force de Lorentz ; elle s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse \vec{v} . Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini.

L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique \vec{B} , contrairement au champ électrique \vec{E} , n'exerce aucune force sur une charge immobile.

➤ Caractéristiques de la force de Lorentz

Direction : perpendiculaire à $q \vec{v}$ et à \vec{B} donc au plan formé par $q \vec{v}$ et à \vec{B} .

Sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite :

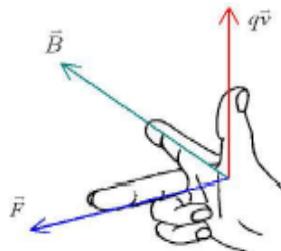


Figure en perspective

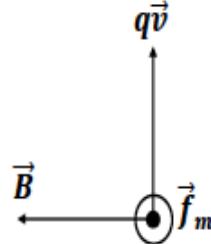


Figure schématique

- **Pouce** : sens de $q \vec{v}$ (= sens de \vec{v} si $q > 0$; = sens opposé à \vec{v} si $q < 0$)
- **Index** : sens de \vec{B} .
- **Majeur** : sens de \vec{F}_m

Norme : $F_m = qvB \sin \alpha$

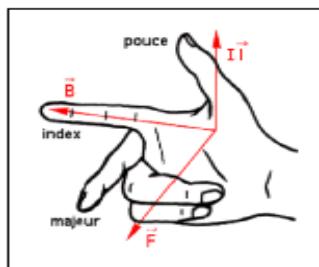
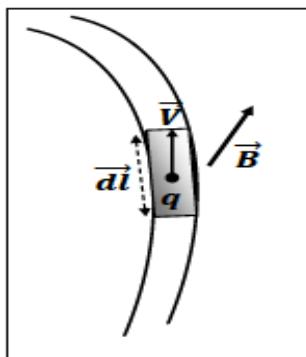
où q est la charge (C), v est la vitesse de la charge (m/s), B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T) et α est l'angle formé par $q \vec{v}$ et \vec{B} .

- si $\alpha = 90^\circ$ alors $F_m = qvB$ (force maximale)
- si $\alpha = 0$ alors $F_m = 0$

IV-1-3-2 Force de Laplace

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant I , est placé dans un champ magnétique \vec{B} , chaque élément $d\vec{l}$ du fil subit l'action d'une force qui s'appelle la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}$ donnée par :

$$\overrightarrow{dF} = I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$



Nous allons démontrer la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz trouvée précédemment.

Considérons donc un fil parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique \vec{B} . Ce courant I étant associé au déplacement des charges le long du fil à la vitesse v , chaque charge électronique q subit la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. S'il y a n charges par unité de volume, le nombre de charges élémentaires contenues dans un volume infinitésimal $d\tau$ est égal à $n d\tau$ et la force \vec{dF} agissant sur cet élément de volume est donc :

$$\vec{dF} = n q d\tau \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La densité de courant par définition est donnée par:

$$\vec{j} = n q \vec{v}$$

la force \vec{dF} agissant sur l'élément de volume $d\tau$ est égale à :

$$\vec{dF} = d\tau \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Si le fil est de section uniforme S , le volume $d\tau$ correspond à une longueur $d\vec{l}$ de fil, tel que:

$$d\tau = \vec{S} \cdot d\vec{l}$$

L'expression de "la force de Laplace" est donnée alors par:

$$\vec{dF} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Caractéristiques de la force de Laplace

Un conducteur de longueur l placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant I , est soumis à une force de Laplace \vec{F} :

- **Direction** : perpendiculaire au plan formé par le conducteur et B
- **Sens** : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite

Pouce : sens du courant

Index : sens de \vec{B}

Majeur : sens de \vec{F}

- **Norme** : $F = IBl \sin \alpha$

où I est l'intensité de courant (A)

B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T)

α est l'angle formé par B par rapport au conducteur.

- si $\alpha = 90^\circ$ alors $F = IBl$ (force maximale)
- si $\alpha = 0$ alors $F = 0$

IV-2 Expression du champ magnétique

IV-2-1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen est donné par l'expression suivante:



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

L'unité du champ magnétique dans le système international est le **Tesla (T)**. Une autre unité appartenant au système CGS, le **Gauss (G)**, est également très souvent utilisée :

$$1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla.}$$

Le facteur μ_0 est la **perméabilité du vide** : il décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités internationaux MKSA est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H. m}^{-1} \text{ (H pour Henry)}$$

IV-2-2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ magnétique.

Considérons N particules de charges q_i situées en des points P_i et de vitesse \vec{v}_i . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \vec{P_i M}}{\|\vec{P_i M}\|^3}$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume V donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules, il est avantageux d'utiliser une description continue. Il faut donc définir des distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique. Mais des distributions continues de quoi ?

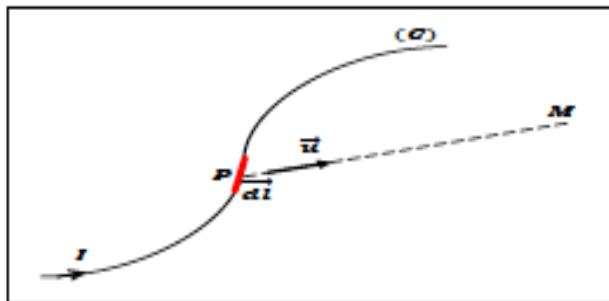
Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire, situé autour d'un point P quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge dq animée d'une vitesse moyenne \vec{v} . Le champ magnétique résultant s'écrit alors:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dq \vec{v} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

où l'intégrale porte sur le volume V total embrassé par ces charges.

IV-2-3 Champ magnétique créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Soit un élément infiniment petit parcouru par un courant I



Le champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant $I \cdot d\mathbf{l}$ au point M à la distance $\|\overrightarrow{PM}\| = r$ est donné par la loi Biot et Savart :

$$\overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\mathbf{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Formule de Biot et Savart :

En un point M quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent I est :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cdot d\mathbf{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Cette loi permet de donner :

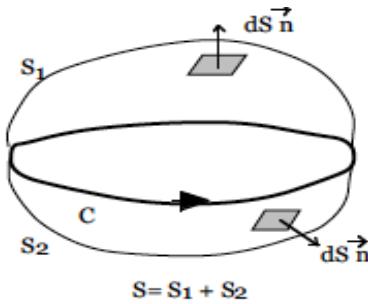
- **Le sens de \overrightarrow{dB} :** $(\overrightarrow{dB}, \overrightarrow{dl}, \vec{u})$ forme un trièdre directe
- **La direction de \overrightarrow{dB} :** $\overrightarrow{dB} \perp (\overrightarrow{dl}, \vec{u})$
- **Le module de \overrightarrow{dB} :** $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl |\sin(\overrightarrow{dl}, \vec{u})|}{r^2}$

IV-3 Loi fondamentales de la magnétostatique

IV-3-1 Flux du champ magnétique

IV-3-1-1 Conservation du flux magnétique

Considérons une surface fermée S quelconque, s'appuyant sur une courbe C fermée et orientée, c'est à dire pour laquelle on peut définir localement un élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{n}$ dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur (convention).



Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée vaut

$$\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Cette loi est générale et reste valable même en régime variable.

La conservation du flux magnétique est une propriété très importante et montre une différence fondamentale entre le champ magnétique et le champ électrostatique. Nous avons vu, avec le théorème de Gauss, que le flux du champ électrostatique dépend des charges électriques contenues à l'intérieur de la surface

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Si la charge totale est positive, le flux est positif et il « sort » de cette surface un champ électrostatique (source). Si la charge est négative, le flux est négatif et le champ « rentre », converge vers la surface (puits). Cette propriété reste d'ailleurs également valable en régime variable. Rien de tel n'a jamais été observé pour le champ magnétique. On ne connaît pas de charge magnétique analogue à la charge électrique (se serait un « monopôle magnétique ») : tout le champ qui rentre dans une surface fermée doit également en ressortir. La source la plus élémentaire de champ magnétique est un dipôle (deux polarités), comme l'aimant dont on ne peut dissocier le pôle nord du pôle sud.

On peut aisément montrer que le flux à travers une surface \$S\$ s'appuyant sur un contour fermé \$C\$ est indépendant du choix de cette surface. Prenons deux surfaces \$S_1\$ et \$S_2\$ s'appuyant sur \$C\$ et telles que \$S = S_1 + S_2\$ soit une surface fermée. En orientant cette surface vers l'extérieur, la conservation du flux magnétique impose

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} = 0$$

donc \$\phi_{S_1} = -\phi_{S_2}\$, ce qui rentre d'un côté ressort de l'autre. La différence de signe provient de la convention d'orientation de la normale : le flux est le même dans les deux cas.

IV-4 Circulation du champ magnétique

IV-4-1 Circulation du champ autour d'un fil infini

Le champ \$\vec{B}\$ créé par un fil infini (Exercice 1 (Série4)) en un point \$M(r, \theta, z)\$ s'écrit en coordonnées cylindriques

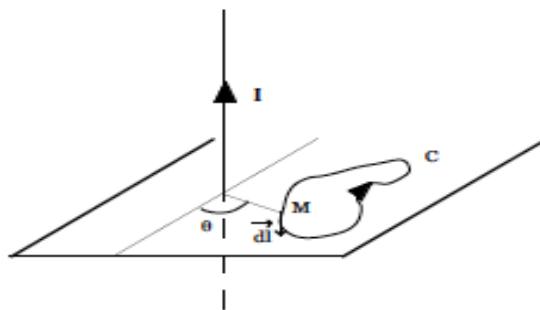
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Considérons maintenant une courbe fermée quelconque C . Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit $d\vec{l} = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$. La circulation élémentaire de \vec{B} est définie par :

$$dC = \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

La circulation de \vec{B} sur la courbe fermée C vaut alors :

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \oint \frac{d\theta}{2\pi}$$



- Si C n'enlace pas le fil $\oint d\theta = 0$
- Si C enlace le fil une fois $\oint d\theta = 2\pi$
- Si C enlace le fil N fois $\oint d\theta = 2N\pi$

IV-5 Théorème d'Ampère

La circulation de \vec{B} sur une courbe fermée est donc directement reliée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe. C'est Ampère qui, en recherchant une explication du magnétisme dans une théorie de la dynamique des courants, découvrit cette propriété du champ magnétique démontrée ici sur un cas particulier à partir de la loi de Biot et Savart.

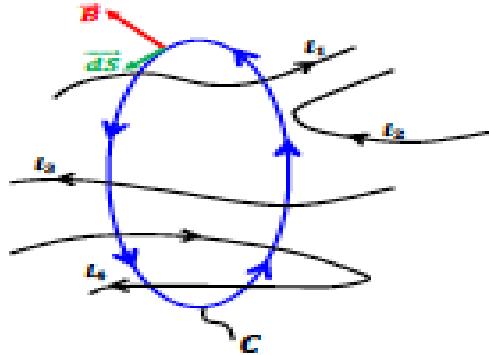
Théorème : La circulation de B le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{int}$$

Cette relation fondamentale est l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ électrostatique : elle relie le (\vec{B} ou \vec{E}) à ses sources (le courant I ou la charge Q) dans le vide (à l'intérieur d'un matériau il faut les corriger). Cependant, à la différence du théorème de Gauss, elle n'est valable qu'en régime permanent (courant continu).

Remarque : Avant d'appliquer le théorème d'Ampère, il faut d'abord déterminer la direction de \vec{B} en utilisant la symétrie. Ensuite choisir un contour fermé qui permet le calcul simple de la circulation. En général, si \vec{B} est un champ tournant (suivant \vec{u}_θ) on choisit un cercle, sinon un rectangle.

Exemple :



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{int}} = \mu_0 (i_1 + i_3 + i_4 - i_2) = \mu_0 (i_1 + i_3)$$

➤ Forme locale du théorème d'Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

Par le théorème de circulation, on a :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Donc :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{forme locale du théorème d'Ampère})$$

IV-6 Les trois façons de calculer le champ magnétique

Les trois méthodes employer pour calculer le champ magnétique :

- **La formule de Biot et Savart** : elle n'est pratique que lorsqu'on sait faire l'addition vectorielle des champs $d\vec{B}$ créés par un petit élément du circuit (souvent des circuits filiformes).
- **La conservation du flux** : à n'utiliser que si l'on connaît déjà son expression dans une autre région de l'espace.
- **Le théorème d'Ampère** : il faut être capable de calculer la circulation du champ sur contour choisi. Cela nécessite donc une symétrie relativement simple des courants. Dans tous les cas, il faut prendre en compte les propriétés de symétrie de la densité de courant.

Annexe

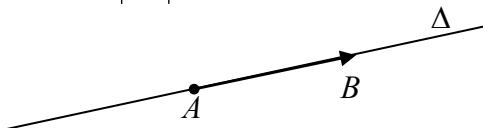
Compléments de mathématiques

I – Vecteurs et systèmes de coordonnées

I.1 – Vecteurs

I.1.1 – Définition : On appelle un vecteur toute grandeur orientée qui possède une direction et un sens (exemples vitesse d'un point matériel, champ gravitationnel, champ magnétique terrestre,...)

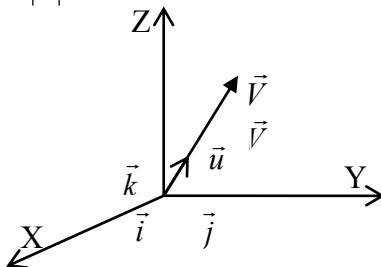
Notation : un vecteur dont l'origine est le point A et l'extrémité est le point B est noté \overrightarrow{AB} , son module (longueur du vecteur) est noté $|\overrightarrow{AB}|$ ou AB .



I.1.2 – Repérage d'un vecteur

Soient $(OXYZ)$ un repère orthonormé direct et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel.

i- La direction et le sens d'un vecteur \vec{V} peuvent être définis par un vecteur unitaire \vec{u} porté par \vec{V} . Son module est donné par $|\vec{V}| = V$. On écrit $\vec{V} = V\vec{u}$.



ii- En utilisant directement la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ce vecteur peut être mis sous la forme

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

où x, y, z sont les composantes du vecteur \vec{V} . On note $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ijk}$ et $|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque :

Pour un même vecteur, si on change de base on change de composantes et pour une même base, si on change de composantes on change de vecteur.

I.2 – Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un scalaire noté

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

i- Propriétés du produit scalaire

- Si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux leurs produit scalaire est nul et inversement
 $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0$ et $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

- Commutativité

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$$

- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

$$\vec{V} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V} \cdot \vec{V}_1 + \vec{V} \cdot \vec{V}_2$$

- ii- Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée

Soient $\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

car pour une base orthonormée $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

Cas particulier : Module d'un vecteur

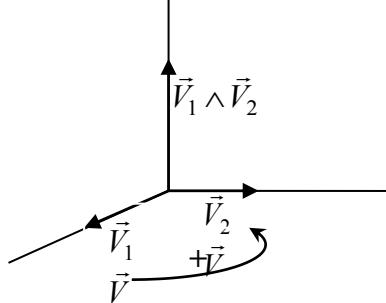
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = \vec{V}_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$|\vec{V}_1| = V_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

I.3 – Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un vecteur noté $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ défini par

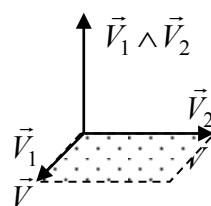
- Sa direction perpendiculaire au plan défini par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
- Le sens tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ soit direct. C'est-à-dire toute rotation qui amène \vec{V}_1 vers \vec{V}_2 est accompagnée d'une translation suivant le vecteur $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.



- Son module

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Cette expression représente l'aire (surface) du parallélogramme construit en prenant pour côté les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .



i- Propriétés du produit vectoriel

- Si deux vecteurs non nuls sont parallèle leurs produit vectoriel est nul et inversement.

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \text{ et } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}.$$

- Commutativité

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)$$

- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

$$\vec{V} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V} \wedge \vec{V}_1 + \vec{V} \wedge \vec{V}_2$$

ii- Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \wedge (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

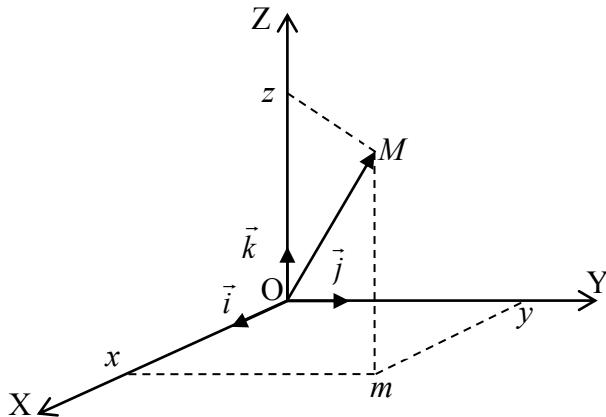
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

I.4 – Systèmes de coordonnées (espace à trois dimensions)

En général, on choisit un système de coordonnée en fonction de la géométrie et les symétries du corps étudié.

I.4.1 – Coordonnées cartésiennes



Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées x , y et z dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient m la projection de M sur le plan OXY

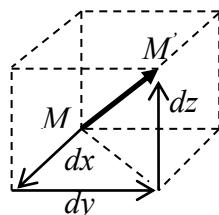
x la projection de m sur l'axe OX

y la projection de m sur l'axe OY

z la projection de M sur l'axe OZ

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = (\overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}) + \overrightarrow{Oz} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- Les variables sont $(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ijk}$
- Déplacement élémentaire associé à un point M est $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$



- Surfaces élémentaires associées à un point M sont

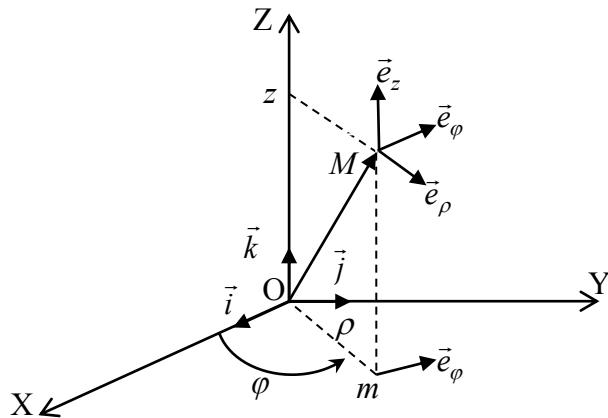
$$dS = dx \cdot dy \text{ dans le plan } (\vec{i}, \vec{j})$$

$$dS = dx \cdot dz \text{ dans le plan } (\vec{i}, \vec{k})$$

$$dS = dy \cdot dz \text{ dans le plan } (\vec{j}, \vec{k})$$

- Volume élémentaire associé à un point M est $dv = dx \cdot dy \cdot dz$

I.4.2 – Coordonnées cylindriques



Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées ρ , φ et z dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

Soient m la projection de M sur le plan OXY

$$\rho = |\overrightarrow{Om}| \text{ la distance à l'axe OZ } (0 \leq \rho < \infty)$$

$$\varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}) \text{ l'angle dans le plan OXY entre l'axe OX et le vecteur } \overrightarrow{Om} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

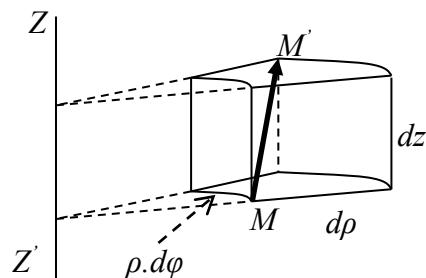
$$z = |\overrightarrow{mM}| \text{ la distance entre les points } m \text{ et } M \quad (-\infty < z < +\infty)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{k}$$

- Les variables sont $(\rho, \varphi, z) \Rightarrow \overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} \rho \\ 0 \text{ et dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ on a } \overrightarrow{OM} \\ z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z \end{cases}$$

- Déplacement élémentaire associé à un point M est $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$



- Surfaces élémentaires associées à un point M sont

$$dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \text{ dans le plan } (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$$

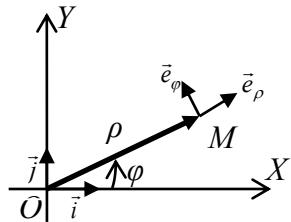
$$dS = d\rho \cdot dz \text{ dans le plan } (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$$

$$dS = \rho \cdot d\varphi \cdot dz \text{ dans le plan } (\vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$$

- Volume élémentaire associé à un point M est $dv = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$

Cas particulier : Coordonnées polaires

Si $z=0$, le système de coordonnées cylindriques se réduit au système de coordonnées polaires planes



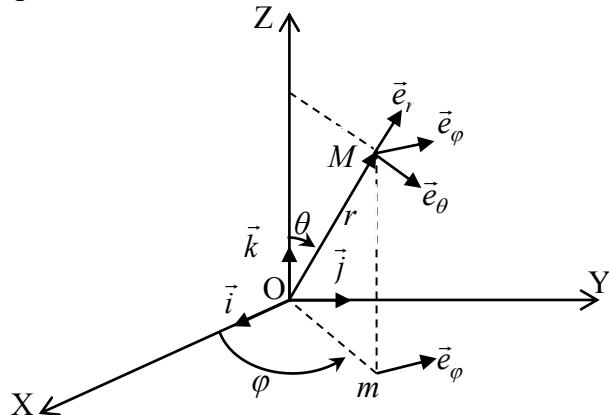
Où $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ est le rayon polaire ($0 \leq \rho < \infty$)

$\varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$ est l'angle polaire ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{e}_\rho$ et dans la base (\vec{i}, \vec{j}) on l'exprime par $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}_{i,j,k}$

avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

I.4.3 – Coordonnées sphériques



Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées r, θ et φ dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

Soient m la projection de M sur le plan OXY

$r = |\overrightarrow{OM}|$ la distance par rapport à O ($0 \leq r < \infty$)

$\theta = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM})$ l'angle entre l'axe OZ et le vecteur \overrightarrow{OM} ($0 \leq \theta \leq \pi$)

$\varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om})$ l'angle dans le plan OXY entre l'axe OX et le vecteur \overrightarrow{Om} ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

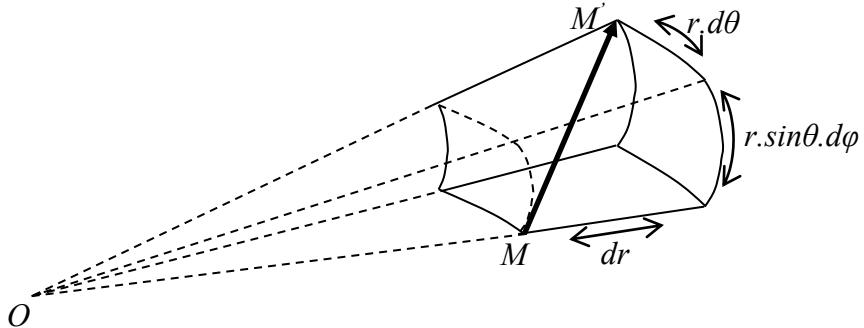
$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r$$

- Les variables sont $(r, \theta, \varphi) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{e_r, e_\theta, e_\varphi}$

et dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a $\overrightarrow{OM} \underset{ijk}{=} \begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases}$

- Déplacement élémentaire associé à un point M est

$$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = dr \vec{e}_r + r \cdot d\theta \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \vec{e}_\varphi$$



- Surfaces élémentaires associées à un point M sont

$$dS = r \cdot dr \cdot d\theta \text{ dans le plan } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$$

$$dS = r \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\varphi \text{ dans le plan } (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$$

$$dS = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \text{ dans le plan } (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

- Volume élémentaire associé à un point M est $dV = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$

II – Analyse vectorielle

II.1 – Champs scalaire ou vectoriel

i- On dit qu'on a un champ scalaire dans une région si à chaque point de l'espace $M(x,y,z)$ est associé une fonction scalaire $f(M) = f(x,y,z)$ par exemple champ de température, champ de densité, etc.

ii- On dit qu'on a un champ vectoriel dans une région si à chaque point de l'espace $M(x,y,z)$ est associé un vecteur $\vec{V}(M) = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$ par exemple champ électrique, champ de pesanteur, etc.

II.2 – Opérateurs différentiels

II.2.1- Gradient d'un champ scalaire

Soit $f(x,y,z)$ une fonction scalaire, calculons sa différentielle totale en coordonnées cartésiennes

$$df(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{z,x} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} dz$$

On remarque que c'est un produit scalaire de deux vecteurs

le vecteur déplacement $d\vec{l}$
$$ijk \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$
 et d'un vecteur gradient de $f(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\text{grad}}$
$$ijk \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{y,z}$$
, z,x , x,y

d'où $df(x,y,z) = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \vec{dl}$ et

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{z,x} \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{k}$$

Le gradient est un vecteur attaché à une fonction scalaire. Il nous renseigne sur la variation de $f(x,y,z)$ au voisinage d'un point $M(x,y,z)$.

Cas important : Potentiel scalaire

En coordonnées cartésiennes, un champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)$ de composantes (V_x, V_y, V_z) dérive d'un potentiel scalaire $U(x,y,z)$ si en tout point de définition du vecteur \vec{V} on a

$$\vec{V}(x,y,z) = -\overrightarrow{\text{grad}}U$$

avec $V_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z}$, $V_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{z,x}$ et $V_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{x,y}$

II.2.2- Divergence d'un champ vectoriel

Soit $\vec{V}(x,y,z)$ un champ de vecteur de composantes (V_x, V_y, V_z) . Par définition la divergence de \vec{V} est donnée en coordonnées cartésiennes par

$$\text{div}\vec{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)_{y,z} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)_{z,x} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)_{x,y}$$

La divergence est un scalaire attaché à une fonction vectorielle.

II.2.3- Rotationnel d'un champ vectoriel

Par définition le rotationnel de $\vec{V}(x,y,z)$ en coordonnées cartésiennes est donné par

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Le rotationnel est un vecteur attaché à une fonction vectorielle.

II.2.4- Laplacien scalaire et vectoriel

Soient $f(x,y,z)$ une fonction scalaire et $\vec{V}(x,y,z)$ un vecteur. Le Laplacien en coordonnées cartésiennes est donné par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

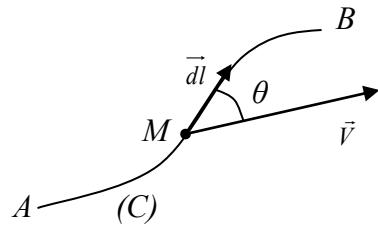
$$\Delta \vec{V} = \Delta V_x \vec{i} + \Delta V_y \vec{j} + \Delta V_z \vec{k}$$

II.3 – Intégrales vectorielles

II.3.1- Circulation d'un vecteur

On appelle circulation du vecteur \vec{V} le long de la courbe (C) de A à B , l'intégrale curviligne notée

$$\zeta(\vec{V}) = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} V \cdot dl \cos \theta$$



Cas particulier : Circulation d'un vecteur \vec{V} qui dérive d'un potentiel scalaire

$$\text{Si } \vec{V}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

sa circulation le long d'un chemin AB est donnée par

$$\zeta(\vec{V}) = \int_A^B \vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}U(M) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dU(M) = U_A - U_B$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des points initial A et final B . Par conséquent, la circulation sur un contour fermé est donc nulle quel que soit (C)

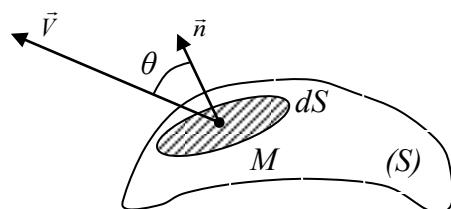
$$\oint_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = 0$$

II.3.2- Flux d'un vecteur à travers une surface

En définissant un vecteur unitaire \vec{n} orienté de la face intérieure à la face extérieure, alors un élément de surface est donné par $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$

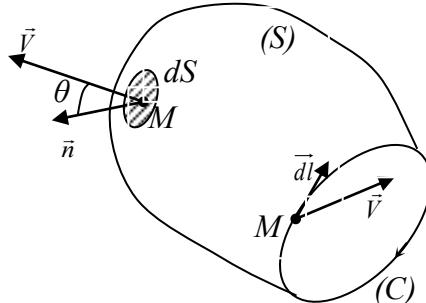
On appelle flux totale de \vec{V} à travers une surface (S) l'expression

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{V}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_S V(M) \cdot dS \cos \theta$$



II.3.3- Théorème de Stokes

Soit (C) une courbe fermée et orientée dans un sens et soit (S) une surface qui s'appuie sur (C) et dont la normale \vec{n} est engendrée par l'orientation de (C) en appliquant la règle du tire-bouchon.



La circulation d'un vecteur \vec{V} sur le contour (C) est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ à travers la surface (S) s'appuyant sur (C)

$$\oint_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Conséquence :

$$\text{Si } \vec{V}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}U(M) \Rightarrow \oint_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall(C)$$

et par la suite

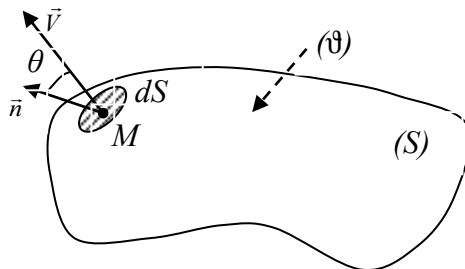
$$\iint_S \vec{rot} \vec{V}(M) \cdot \vec{dS} = 0 \quad \forall(S)$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire est $\vec{rot} \vec{V} = \vec{0}$

$$\vec{V}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}U(M) \Leftrightarrow \vec{rot} \vec{V}(M) = \vec{0}$$

II.3.4- Théorème d'Ostragradski ou Green

Soit une surface (S) fermée limitant un volume (ϑ) et orientée suivant \vec{n} vers l'extérieur.



Le flux d'un vecteur \vec{V} à travers une surface fermée (S) est égale à l'intégrale triple de la divergence de \vec{V} sur le volume (ϑ) limité par cette surface.

$$\iint_S \vec{V}(M) \cdot \vec{dS} = \iiint_{(\vartheta)} \text{div} \vec{V}(M) \cdot d\tau$$

Conséquence : Flux conservatif

Si \vec{V} est à flux conservatif on a

$$\iint_S \vec{V}(M) \cdot \vec{dS} = 0 \quad \forall(S)$$

et par la suite

$$\iiint_{(\vartheta)} \text{div} \vec{V}(M) \cdot d\tau = 0 \quad \forall(\vartheta)$$

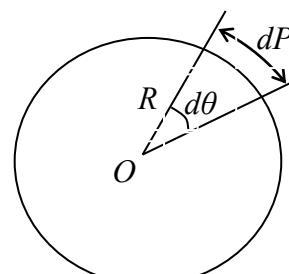
La condition nécessaire et suffisante de conservabilité du flux d'un champ de vecteurs \vec{V} est $\text{div} \vec{V}(M) = 0$

$$\vec{V} \text{ à flux conservatif} \Leftrightarrow \text{div} \vec{V}(M) = 0$$

III – Angle solide

III.1 – Angle plan

Soit un cercle de centre O , de rayon R et de périmètre (P)



L'angle plan élémentaire $d\theta$ est défini par le rapport

$$d\theta = \frac{dP}{R}$$

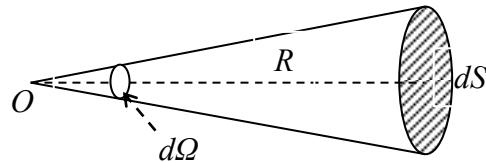
où dP est un arc de cercle en mètre et R est le rayon du cercle en mètre.

L'unité de ce rapport (sans dimension) est le radian (rd).

III.2 – Angle solide

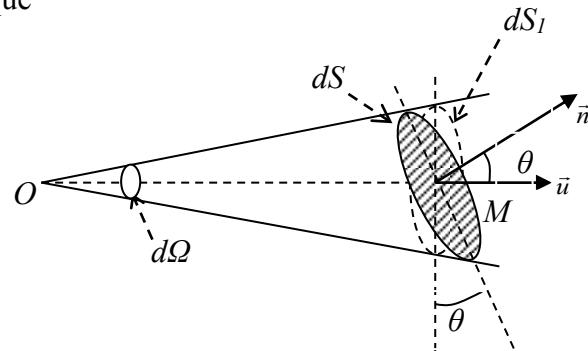
Par analogie, on définit un angle élémentaire dans l'espace en remplaçant l'arc dP par une surface élémentaire dS ($\forall M \in dS$ est à la distance R du point O) par le rapport (sans dimension)

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$



Cet angle est appelé l'angle solide sous lequel on voit l'élément de surface dS à partir de O . Son unité est le stéradian (Sr).

Cas général : dS est quelconque



$$d\Omega = \frac{dS_1}{(OM)^2} = \frac{dS \cdot \cos\theta}{(OM)^2} = \frac{dS \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}}{(OM)^2}$$

En considérant le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|}$ d'où

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{(OM)^2}$$

L'angle solide totale sous lequel on voit toute la surface (S) à partir du point O est donné par

$$\Omega = \iint_{(S)} \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{(OM)^2} = \iint_{(S)} \frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3} \overrightarrow{dS}$$

Série N° 1

Exercice 1

Déterminer la charge Q d'un disque de rayon R , chargé avec une densité surfacique uniforme σ , en utilisant l'élément de surface ds .

Exercice 2

Une sphère de rayon R est chargée avec une densité volumique homogène ρ tel que

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{si } r < R \\ \rho(r) = 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

r et ρ_0 désignent respectivement la distance du point considéré au centre O de la sphère et la densité de charge en O .

Déterminer la charge électrique totale de la sphère.

Exercice 3

Trois corps ponctuels portant la même quantité d'électricité $q=+10 \mu\text{C}$ sont placés aux sommets A , B et C d'un triangle équilatéral de côté $a=10 \text{ cm}$. On donne $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$.

1°- Donner l'expression littérale de la force d'interaction électrique entre deux charges. Calculer la valeur de cette force.

2°- Déterminer la force $\vec{F}(C)$ qui résulte de l'action des charges q_A et q_B sur la charge q_C .

Exercice 4

Un disque de rayon R et de centre O est uniformément chargé avec une densité positive σ . Un point M situé sur son axe est repéré par la distance $OM=z$.

Déterminer la force électrique $\vec{F}(M)$ exercée par le disque sur une charge q positive placée en ce point.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé (OXY), on place à chacun des points $A(-d,0)$ et $B(d,0)$ une charge ponctuelle ($q>0$).

Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé au point $M(0,y)$.

Exercice 6

Soit une circonference chargée positivement avec une densité linéaire et homogène λ , de rayon R et de centre O .

1°- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en un point M sur son axe de révolution, à la distance z de O ?

2°- Déterminer la position M pour que ce champ électrique soit à sa valeur maximale.

Série N° 2

Exercice 1

Soit une sphère de rayon R et de centre O uniformément chargée avec une densité volumique positive uniforme ρ . Un point M de l'espace est repéré par la distance $OM=r$.

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique \vec{E} créé en ce point M .

Exercice 2

Soit un cylindre de révolution l'axe OZ , de rayon R , infiniment long et portant une charge surfacique positive uniforme σ . A l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.

Exercice 3

Soit un plan infini d'épaisseur négligeable chargé avec une densité de charge surfacique positive et uniforme σ . En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique créé en un point d'un axe perpendiculaire au plan.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé (OXY), on place aux points $A(-d,0)$, $B(d,0)$ et $C(0,-d)$, respectivement, trois charges ($q_A>0$), ($q_B=q_A$) et ($q_C<0$). Déterminer le potentiel électrique $V(y)$ créé en un point M de l'axe OY ($\overrightarrow{OM}=\vec{yj}$).

Exercice 5

Soit un disque de rayon R et de centre O chargé avec une densité de charges surfacique uniforme et positive σ . Déterminer le potentiel électrostatique $V(z)$ créé par ce système en un point M de son axe de révolution ($OM=z$).

Exercice 6

Une sphère de rayon R est uniformément chargée avec une densité surfacique positive σ .

1°- Montrer qu'en tout point extérieur à la sphère, le champ électrostatique est radial et identique à celui que créerait la charge totale de la sphère placée en son centre.

2°- Déterminer la valeur du champ à l'intérieur de la sphère et tracer le graphe $E(r)$.

3°- En déduire le potentiel électrostatique en tout point de l'espace et tracer son graphe $V(r)$.

Série N° 3

Exercice 1

Une sphère conductrice pleine (S_1) de rayon R_1 est portée au potentiel V_1 . Une deuxième sphère creuse (S_2) conductrice de rayon $R_2 > R_1$ est concentrique à S_1 . La sphère S_2 est portée au potentiel V_2 .

- 1°- Donner les expressions de la charge Q_1 de la sphère S_1 , de la charge Q'_2 portée par la surface intérieure de S_2 et de la charge Q''_2 portée par la surface extérieure de S_2 .
- 2°- En déduire les coefficients de capacité et d'influence. Vérifier que $C_{11} > 0$, $C_{22} > 0$, $C_{12} < 0$ et que $C_{11} + C_{12} = 0$.
- 3°- Que se passe-t-il si on porte les deux sphères au même potentiel V_2 ?

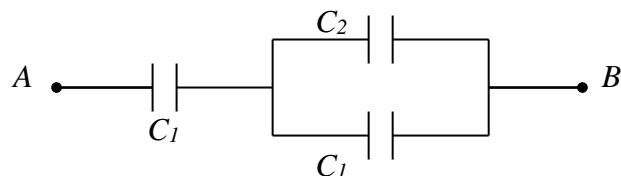
Exercice 2

Un condensateur cylindrique de longueur L formé par deux cylindres (A_1) et (A_2), coaxiaux de rayons R_1 et R_2 respectivement ($R_1 < R_2$), porte une charge Q . Les potentiels de A_1 et A_2 sont respectivement V_1 et V_2 . En considérant $L \gg R_2$ afin de négliger les effets de bord, déterminer la capacité C de ce condensateur.

Exercice 3

Trois condensateurs sont associés suivant la figure ci-dessous.

- 1°- Quelle valeur doit avoir C_2 pour que la valeur équivalente de la capacité du système soit égale à C_1 sachant que $C_1 = 3 \mu\text{F}$.
- 2°- On applique entre A et B une tension $U_0 = 400$ volts. Quelles sont la charge et la tension pour chaque condensateur dans le cas où C_1 et C_2 ont les valeurs de la question 1°.



Exercice 4

Déterminer de deux manières différentes l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon R chargée avec une densité volumique uniforme ρ :

- 1°- En utilisant l'expression de l'énergie en fonction du potentiel.
- 2°- En utilisant l'expression de la densité locale d'énergie.

Exercice 5

Un condensateur est formé par deux armatures planes horizontales circulaires de surface S , parallèle entre elles, de rayon R et distantes de e . On charge le condensateur au moyen d'un générateur de tension V . Donner les résultats en fonction de R .

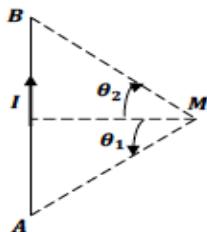
- 1°- Déterminer la charge Q prise par le condensateur (sa capacité est $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$).
- 2°- Déterminer l'énergie W_c emmagasinée par le condensateur.
- 3°- Quelle est la densité W de cette énergie. En déduire l'intensité E du champ électrique.
- 4°- Déterminer l'énergie W_G fournie par le générateur. Comparer la avec W_c et interpréter le résultat.

Série N° 4

Exercice 1 :

Calculer le champ magnétique créé par un segment parcouru par un courant d'intensité I en un point M situé à la distance a du segment. On appellera θ_1 et θ_2 les angles entre la perpendiculaire au fil issue de M et les droites joignant M aux extrémités du segment.

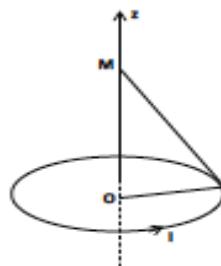
- 1) Donner l'expression du champ magnétique dans le cas du fil rectiligne infini.
- 2) Retrouver la question précédente (champ créé par un fil rectiligne infini) en appliquant le théorème d'Ampère.



Exercice 2 :

Soit une spire filiforme de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

- 1) déterminer le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire situé à une distance z du centre de celle-ci.
- 2) tracer la courbe $B(z)$.



Exercice 3 :

On considère un cylindre infini de rayon R parcouru par un courant de vecteur densité de courant uniforme :

$$\vec{j} = j_0 \vec{k} \quad \text{avec} \quad j_0 > 0$$

on s'intéresse au champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par cette distribution de courant en tout point M de l'espace

- 1) Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du vecteur champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ ainsi que les variables dont il dépend.
- 2) Par application du théorème d'Ampère, déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

