Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Solution de la série n° 1

Exercice 1. On a la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Donc la formule de Taybor-Lagrange permet d'affirmer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} \cdot f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)} + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c). \tag{1.1}$$

Or par hypothèse, on a $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$. Donc la formule (1.1) devient :

$$0 = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c). \tag{1.2}$$

En divisant (1.2) par $(b-a)^{n+1}/(n+1)!$ (car $(b-a)^{n+1} \neq 0$), on conclut qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f^{(n+1)}(c) = 0.$$

Exercice 2. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On sait que la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. (Notons qu'elle est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). D'après la formule de Mac-Laurin-Lagrange, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \theta \in]0,1[\text{ tel que } e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta \cdot x}.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \theta \in]0,1[\text{ tel que } \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta \cdot x}. \tag{2.1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} 0 < \theta < 1 &\implies \theta \cdot x < x \\ &\implies e^{\theta \cdot x} < e^x \qquad \text{(car la fonction exp est strictement croissante).} \end{aligned}$$

De même si $x < 0$, alors $0 < -x$. D'où $x < 0 < -x$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 < \theta < 1 &\implies \theta \cdot x < \theta \cdot (-x) < -x \\ &\implies e^{\theta \cdot x} < e^{-x} \qquad \text{(car la fonction exp est strictement croissante).} \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule (2.1) devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}. \tag{2.2}$$

2) L'inégalité (2.2) appliquée à $x = 1$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$, il vient du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = 0.$$

C'est-à-dire que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Exercice 3. $*$) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3.(x-3)(x+1) \ \text{ et } \ f''(x) = 6.(x-1).$$

D'où

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

La fonction f admet donc deux points critiques en 3 et en -1. De plus, on a :

$$f''(-1) < 0 \ \text{ et } \ f''(3) > 0.$$

Par suite, f admet un minimum local en 3 et un maximum local en -1.
$**$) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = e^x + \ln x - e \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x + \frac{1}{x}\cdot$$

D'où

$$g'(x) = 0 \iff x = 1.$$

Ainsi g admet un point critique en 1. De plus, on a $g''(1) > 0$. Par suite, g admet un minimum local en 1.
Remarque. La fonction g admet un seul extrumum (minimum) local. Donc c'est un extrumum global.

Exercice 4. 1) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de même classe. (Notons que elle est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). Sa dérivée seconde est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Remarquons que l'inégalité en question est vraie si $a = 0$ ou $b = 0$. Supposons donc que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Posons $\alpha = \ln a$ et $\beta = \ln b$. D'après la convexité de f, on a :

$$\forall t \in [0,1],\ \ f(t.\alpha + (1-t).\beta) \leqslant t.f(\alpha) + (1-t).f(\beta).$$

En particulier pour $t = 1/2 \in [0,1]$, on a :

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqslant \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot$$

C'eat-à-dire

$$\ln\left(1 + e^{\ln(\sqrt{ab})}\right) \leqslant \ln\left(\sqrt{e^{\ln a}+1}\right) + \ln\left(\sqrt{e^{\ln b}+1}\right).$$

En prenant l'exponentielle de cette dernière inégalité et en tenant compte de sa croissance, on a donc :

$$1 + \sqrt{ab} \leqslant (\sqrt{1+a}) \cdot (\sqrt{1+b}).$$

Exercice 5. 1) Rappelons qu'ne fonction qui admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ peut ne pas être définie en 0, mais sa limite en 0 existe et est finie (égale au terme constant a_0 de ce DL). Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, il vient que la fonction ln n'admet pas un $\mathrm{DL}_n(0)$.
2) $*$) La fonction f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. En effet, on peut écrire :

$$f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + x^2(x\ln x),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Donc f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.
$**$) Supposons par l'absurde que f admet un $\mathrm{DL}_3(0)$. D'après l'unicité de la DL, on aurait donc

$$f(x) = a_3 \cdot x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x),$$

avec $a_3 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Doù $x^3.\ln x = x^3.(a_3 + \varepsilon(x))$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}(a_3 + \varepsilon(x)) = a_3$. Contradiction. Par suite, f n'admet pas un $\mathrm{DL}_3(0)$.

Exercice 6. **1)** On écrit d'abord les $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

En faisant la somme de ces deux DL, on obtient :

$$e^x + \frac{1}{1-x} = 2 + 2 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

2) On a d'abord les $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto \cos x$ et de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ sont donnés par :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

En faisant le produit du polynôme $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ et du polynôme $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{24}$, et en ne gardant que les monômes de degré $\leqslant 4$, on obtient :

$$\cos(x) \cdot \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

3) On remarque que $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}} = \sin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Or les $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ sont :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o\left(x^4\right).$$

On procède comme dans (2), on obtient :

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^3 - \frac{11}{48}x^4 + o\left(x^4\right).$$

5) Il s'agit ici d'une composition de DL. On a d'abord $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$. Donc on pent faire ce DL. On a :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o\left(t^4\right) \qquad \text{et} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto e^{\sin x}$ est obtenu en remplaçant dans la partie polynomiale du $\mathrm{DL}_4(0)$ de $t \longmapsto e^t$ la variable t par $x - \dfrac{x^3}{6}$, et en ne conservant que les monômes de degré $\leqslant 4$. On obtient :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

Exercice 7. **1)** On fait le changement de variable $t = x - \dfrac{\pi}{7}\cdot$ On a alors $x \to \dfrac{\pi}{7} \iff t \to 0$. On a aussi

$$\cos x = \cos(t + \pi/4) = \cos t \cdot \cos \pi/4 - \sin t \cdot \sin \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos t - \sin t).$$

Or les $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de cos et sin sont :

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + o\left(t^{2n}\right) \quad \text{et} \quad \sin t = t - \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot t^{2n-1} + o\left(t^{2n}\right).$$

Donc le $\mathrm{DL}_{2n}(\pi/4)$ de f est donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}t^{2n-1} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}\right) + o\left(t^{2n}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - (x - \pi/4) - \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x - \pi/4)^{2n}\right] + o\left((x-\pi/4)^{2n}\right). \end{aligned}$$

2) On fait le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}\cdot$ On a alors : $x \to +\infty \iff t \to 0^+$. Il vient que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \qquad \text{car } x>0\\ &= \sqrt{1+t}.\end{aligned}$$

Or le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $t \longmapsto \sqrt{1+t}$ est :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o\left(t^3\right).$$

Donc le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de f est donné par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 8.1) Lorsque $x \to 0$, la limite de $\dfrac{\sin x - x}{x^2}$ se présente sous une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}\cdot$ En utilisant un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction sin, on a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\cdot\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. D'où $\dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3!} + \varepsilon(x)$. Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{3!} + \varepsilon(x)\right)\\ &= -\frac{1}{6} \qquad \text{car } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.\end{aligned}$$

2) On a affaire ici à une F.I. du type 1^∞. On a d'abord

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}.$$

Or

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + \ln a\cdot x + x\cdot\varepsilon(x) \text{ et } b^x = e^{x\ln b} = 1 + \ln b\cdot x + x\cdot\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. D'où

$$\frac{a^x+b^x}{2} = 1 + \left(\frac{\ln a + \ln b}{2}\right)\cdot x + x\cdot\varepsilon(x).$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)\cdot x = 0$, on peut substituer dans $\ln(1+t) = t + t\cdot\varepsilon(t)$. Il vient que

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}\ln(ab)\right]\cdot x + x\cdot\varepsilon(x).$$

D'où

$$e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} = e^{\ln\left(\sqrt{ab}\right)+\varepsilon(x)}.$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = e^{\ln\left(\sqrt{ab}\right)} = \sqrt{ab}.$$

3) On a affaire ici à une F.I. du type $\dfrac{0}{0}\cdot$ Les $\mathrm{DL}_2(0)$ des fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \sin x$ sont donnés par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \sin x = x + x^2\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. D'où

$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}=-\frac{x}{2}+x\cdot\varepsilon(x).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}=0.$$

4) On a affaire ici à une F.I. du type $\frac{0}{0}\cdot$ On calcul le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x\longmapsto\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, on trouve

$$\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}+\frac{11}{24}x^2+o(x^2).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}\cdot$$

5) On a affaire ici à une F.I. du type $+\infty-\infty$. On a :

$$\sqrt{x^2+3x+2}+x=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x=-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)\quad\text{car } x<0.$$

Or

$$\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $\lim_{x\to-\infty}\varepsilon(1/x)=0$. D'où

$$\sqrt{x^2+3x+2}+x=-x\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{x}+\frac{1}{x}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{3}{2}-\varepsilon(1/x).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x=\frac{-3}{2}.$$

6) On a affaire ici à une F.I. du type $\frac{0}{0}\cdot$ On calcul le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x\longmapsto\dfrac{\ln(1+x)+1-e^x}{1-\cos x}$, on trouve

$$\frac{\ln(1+x)+1-e^x}{1-\cos x}=-2+\frac{x}{3}+o(x).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+1-e^x}{1-\cos x}=-2.$$

Exercice 9. 1) 1^re^ méthode. On remarque que f est la composée de la fonction $x\overset{g}{\longmapsto}x+x^2$ et de la fonction $t\overset{h}{\longmapsto}\sqrt{1+t}$. Puisque $\lim_{x\to 0}g(x)=0$, le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f existe. On a d'abord les $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x\overset{g}{\longmapsto}x+x^2$ et $t\longmapsto\sqrt{1+t}$ sont donnés par :

$$g(x)=x+x^2+o(x^2)\qquad\text{et}\qquad\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right).$$

Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f est obtenu en remplaçant dans la partie polynomiale du $\mathrm{DL}_2(0)$ de $t\overset{h}{\longmapsto}\sqrt{1+t}$ la variable t par $x+x^2$, et en ne conservant que les monômes de degré $\leqslant 2$. On obtient :

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\frac{1}{2}\left(x+x^2\right)-\frac{1}{8}\left(x+x^2\right)+o\left(x^2\right)\\&=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

2^e^ méthode. Posons $t=x+x^2$. Il vient que si $x\to 0$, alors $t\to 0$. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $t\longmapsto\sqrt{1+t}$ s'écrit alors :

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right).$$

Or $t^2 = x^2 + o\left(x^2\right)$ et $o\left(t^2\right) = o\left(x^2\right)$. D'où

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + x^2\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) + o\left(x^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

2) D'après le cours une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ est donc $y = 1 + \dfrac{1}{2}x$. De plus, on a :

$$f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{8}x^2 + o\left(x^2\right) = x^2 \cdot \left(\frac{3}{8} + o(1)\right),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} o(1) = 0$. Il vient que

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}\cdot x\right)\right] = 0^+.$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en 0.

3) Pour déterminer l'équation de l'asymptote en $+\infty$ de $\mathcal{C}_f$, on doit d'abord calculer le DL$(+\infty)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}\cdot$ En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \sqrt{\frac{1+x+x^2}{x^2}} \qquad \text{car} \quad x > 0 \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On a $x \to +\infty \iff 1/x \to 0^+$. Or d'après la question 1), on a :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= xf\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

L'équation de l'asymptote en $+\infty$ de $\mathcal{C}_f$ est donc $y = x + \dfrac{1}{2}\cdot$ De plus, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{8} + o(1)\right), \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} o(1) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0^+.$$

Par suite, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de son asymptote en $+\infty$.