Année universitaire : 2024-2025
Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences de Kénitra

Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Cours d'Analyse 2

Par

Pr. Ahmed Srhir

5 juin 2025

Chapitre 4
Intégrales généralisées

Motivation. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons défini la notion d'intégrale seulement pour les fonctions définies sur des intervalles **fermés et bornés** du type $[a\,,\,b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui sont **bornées** sur ces intervalles.

Or on a par exemple :

- la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 1$ est définie sur ($[0, 1]$) un intervalle **fermé et borné** mais elle **n'est pas bornée** sur cet intervalle.
- les fonctions $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 1}$ et $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sont définies sur ($\mathbb{R}$) un intervalle **non fermé et non borné** mais elles sont **bornées** sur cet intervalle.

Problème. Comment définir la notion d'intégrale si l'on supprime l'une (ou les deux) des hypothèses précédentes ?

Réponse. Le but de ce chapitre est d'étendre (i.e. de généraliser) la notion d'intégrale aux fonctions f qui sont définies sur des intervalles **quelconques** (i.e. de type $]-\infty\,,\,a[$; $]-\infty\,,\,+\infty[$; $]-\infty\,,\,a]$; $[a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,b]$; $[a\,,\,b[$; $]a\,,\,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui peuvent être aussi **non bornées** sur ces intervalles.

Motivation. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons défini la notion d'intégrale seulement pour les fonctions définies sur des intervalles **fermés et bornés** du type $[a\,,\,b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui sont **bornées** sur ces intervalles.

Or on a par exemple :

- la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 1$ est définie sur ($[0, 1]$) un intervalle **fermé et borné** mais elle **n'est pas bornée** sur cet intervalle.
- les fonctions $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 1}$ et $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sont définies sur ($\mathbb{R}$) un intervalle **non fermé et non borné** mais elles sont **bornées** sur cet intervalle.

Problème. Comment définir la notion d'intégrale si l'on supprime l'une (ou les deux) des hypothèses précédentes ?

Réponse. Le but de ce chapitre est d'étendre (i.e. de généraliser) la notion d'intégrale aux fonctions f qui sont définies sur des intervalles **quelconques** (i.e. de type $]-\infty\,,\,a[$; $]-\infty\,,\,+\infty[$; $]-\infty\,,\,a]$; $[a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,b]$; $[a\,,\,b[$; $]a\,,\,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui peuvent être aussi **non bornées** sur ces intervalles.

Motivation. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons défini la notion d'intégrale seulement pour les fonctions définies sur des intervalles **fermés et bornés** du type $[a\,,\,b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui sont **bornées** sur ces intervalles.

Or on a par exemple :

- la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 1$ est définie sur ($[0, 1]$) un intervalle **fermé et borné** mais elle **n'est pas bornée** sur cet intervalle.
- les fonctions $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 1}$ et $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sont définies sur ($\mathbb{R}$) un intervalle **non fermé et non borné** mais elles sont **bornées** sur cet intervalle.

Problème. Comment définir la notion d'intégrale si l'on supprime l'une (ou les deux) des hypothèses précédentes ?

Réponse. Le but de ce chapitre est d'étendre (i.e. de généraliser) la notion d'intégrale aux fonctions f qui sont définies sur des intervalles **quelconques** (i.e. de type $]-\infty\,,\,a[$; $]-\infty\,,\,+\infty[$; $]-\infty\,,\,a]$; $[a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,b]$; $[a\,,\,b[$; $]a\,,\,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui peuvent être aussi **non bornées** sur ces intervalles.

Motivation. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons défini la notion d'intégrale seulement pour les fonctions définies sur des intervalles **fermés et bornés** du type $[a\,,\,b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui sont **bornées** sur ces intervalles.

Or on a par exemple :

- la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 1$ est définie sur ($[0, 1]$) un intervalle **fermé et borné** mais elle **n'est pas bornée** sur cet intervalle.
- les fonctions $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 1}$ et $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sont définies sur ($\mathbb{R}$) un intervalle **non fermé et non borné** mais elles sont **bornées** sur cet intervalle.

Problème. Comment définir la notion d'intégrale si l'on supprime l'une (ou les deux) des hypothèses précédentes ?

Réponse. Le but de ce chapitre est d'étendre (i.e. de généraliser) la notion d'intégrale aux fonctions f qui sont définies sur des intervalles **quelconques** (i.e. de type $]-\infty\,,\,a[$; $]-\infty\,,\,+\infty[$; $]-\infty\,,\,a]$; $[a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,+\infty[$; $]a\,,\,b]$; $[a\,,\,b[$; $]a\,,\,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$) et qui peuvent être aussi **non bornées** sur ces intervalles.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle **quelconque** de $\mathbb{R}$ mais non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est ***localement intégrable*** sur I si f est intégrable sur tout intervalle **fermé borné** $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Proposition 1.2. On a les propriétés suivantes :

- toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- toute fonction monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- ltoute fonction monotone par morceaux sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle **quelconque** de $\mathbb{R}$ mais non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est ***localement intégrable*** sur I si f est intégrable sur tout intervalle **fermé borné** $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Proposition 1.2. On a les propriétés suivantes :

- toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- toute fonction monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- ltoute fonction monotone par morceaux sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle **quelconque** de $\mathbb{R}$ mais non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est ***localement intégrable*** sur I si f est intégrable sur tout intervalle **fermé borné** $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Proposition 1.2. On a les propriétés suivantes :

- toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- toute fonction monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.
- ltoute fonction monotone par morceaux sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.

1) Définition de l'intégrale généralisée

En particulier, on a :

Exemples. 1) La fonction $f : \,]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1/x$ est localement intégrable sur $]0,1]$.
2) La fonction $g : \,]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1/x^2 - 1$ est localement intégrable sur $]-1,1[$.
3) les fonctions $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2+1}$ et $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple. La fonction $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Définition de l'intégrale généralisée

En particulier, on a :

Exemples. 1) La fonction $f : \,]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1/x$ est localement intégrable sur $]0,1]$.
2) La fonction $g : \,]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1/x^2 - 1$ est localement intégrable sur $]-1,1[$.
3) les fonctions $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2+1}$ et $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple. La fonction $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Définition 1.2 (intégrale généralisée). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente (ou existe) si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on note
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente (ou n'existe pas).

1) Définition de l'intégrale généralisée

Remarque.

- Convergence équivaut donc à limite existe et est finie. Divergence signifie soit que la limite n'existe pas, soit que la limite est infinie.
- Remarquons aussi que la définition est cohérente avec l'intégrale (de Riemann) d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $[a,b]$ tout entier (au lieu de $[a,b[$).

  En effet, on sait que la fonction $x \overset{F_0}{\longmapsto} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$. Il vient en particulier que $F_0(b) = \displaystyle\lim_{x \to b^-} F_0(x)$. C'est-à-dire l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc dans ce cas, les deux intégrales coïncident.

  Ainsi l'intégrale généralisée est bien une généralisation et une extention de l'intégrale (de Riemann) vue dans les chapitres 2 et 3.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Remarque.

- Convergence équivaut donc à limite existe et est finie. Divergence signifie soit que la limite n'existe pas, soit que la limite est infinie.
- Remarquons aussi que la définition est cohérente avec l'intégrale (de Riemann) d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $[a, b]$ tout entier (au lieu de $[a, b[$).

  En effet, on sait que la fonction $x \overset{F_0}{\longmapsto} \displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ est continue sur $[a, b]$. Il vient en particulier que $F_0(b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_0(x)$. C'est-à-dire l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ est égale à $\lim\limits_{x \to b^-} \displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Donc dans ce cas, les deux intégrales coïncident.

  Ainsi l'intégrale généralisée est bien une généralisation et une extention de l'intégrale (de Riemann) vue dans les chapitres 2 et 3.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ converge. En effet pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^x = \arctan x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ existe et est finie. Ce qui montre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Notation. On peut utiliser la notation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty}$$

à condition de se souvenir que $\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x - \arctan 0.$

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ converge. En effet pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^x = \arctan x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ existe et est finie. Ce qui montre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$$

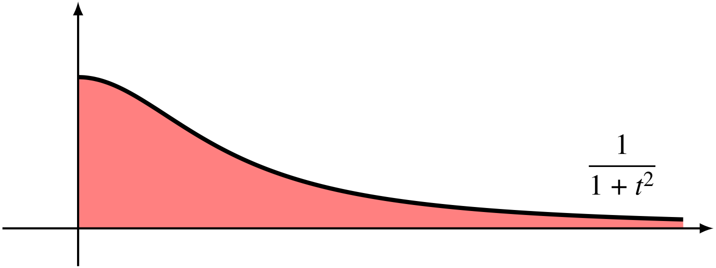
Notation. On peut utiliser la notation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty}$$

à condition de se souvenir que $\displaystyle\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \arctan 0.$

1) Définition de l'intégrale généralisée

Interprétation géométrique de l'exemple 1.



On voit que le domaine sous la courbe n'est pas borné, mais cependant son aire est finie !

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet pour tout $0 \leqslant x < 1$, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \Big[\arcsin t\Big]_0^x = \arcsin x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ existe et est finie. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$

Exemple 3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x)$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Définition 1.3 (intégrale généralisée). Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $]a\,,\,b]$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (ou existe) si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on note
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente (ou n'existe pas).

1) Définition de l'intégrale généralisée

Définition 1.4 (intégrale généralisée). Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$ et $f :]a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $]a\,,\,b[$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes (avec $c \in\,]a\,,\,b[$ constante quelconque). Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente (ou n'existe pas).

Remarque. Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$, l'existence de $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne prouve pas la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Par exemple, il suffit de considérer une fonction impaire continue. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge, mais $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x > 0$.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Définition 1.4 (intégrale généralisée). Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$ et $f :]a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $]a\,,\,b[$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes (avec $c \in]a\,,\,b[$ constante quelconque). Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente (ou n'existe pas).

Remarque. Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$, l'existence de $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ ne prouve pas la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$. Par exemple, il suffit de considérer une fonction impaire continue. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ \mathrm{d}t$ diverge, mais $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\ \mathrm{d}t = 0$ pour tout $x > 0$.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, pour tout $0 < x \leqslant 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t\Big]_x^1 = -\ln x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, pour tout $0 < x \leqslant 1$:

$$\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x - x\ln x - 1) = -1$. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut aussi ici écrire

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_0^1 = -1.$$

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, pour tout $0 < x \leqslant 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t\Big]_x^1 = -\ln x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, pour tout $0 < x \leqslant 1$:

$$\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x - x\ln x - 1) = -1$. Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut aussi ici écrire

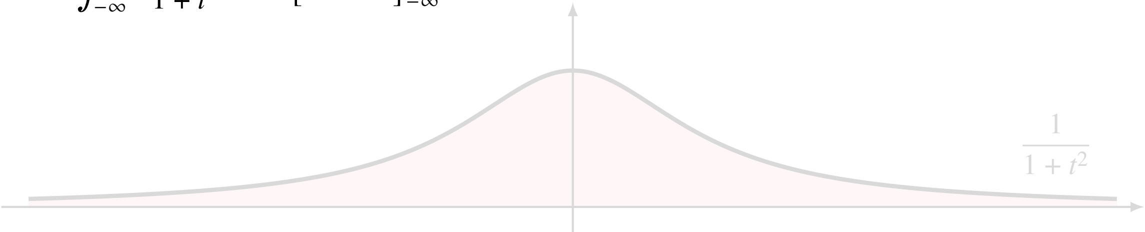
$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_0^1 = -1.$$

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a déjà vu que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, pour tout $x<0$ on a :

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_x^0 = -\arctan x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par suite, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

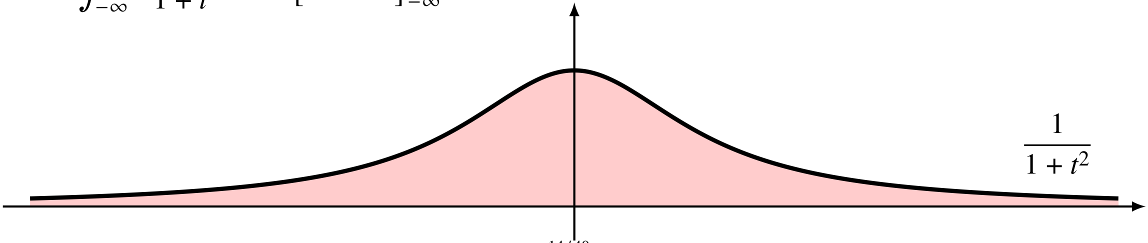


1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a déjà vu que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, pour tout $x < 0$ on a :

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_x^0 = -\arctan x.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par suite, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$



1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemple 4. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, on a l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge car pour tout $x > 0$ on a

$$\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

De plus, on a $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$

Mais l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge car pour tout $x < 0$, on a :

$$\int_x^0 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_x^0 = e^{-x} - 1,$$

et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -\infty} (e^{-x} - 1) = +\infty.$

1) Définition de l'intégrale généralisée

Remarque (fausse intégrale généralisée).

- Si $\underline{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b]$ et admet une limite **finie** à droite en a, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

  En effet, on a f est prolongeable par continuité en une fonction $\hat{f}$ continue sur $[a, b]$ et égale à f sur $]a, b]$. Donc $\displaystyle\int_a^b \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ existe. De plus, pour tout $x \in]a, b]$, $\displaystyle\int_x^b \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. D'où

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \longrightarrow a^+} \int_x^b \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On dit qu'il s'agit d'une fausse intégrale généralisée (ou que l'intégrale est propre).

  Exemples : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1 - x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

- Si $\underline{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]a, b]$ et **bornée** au voisinage de a alors l'intégrale converge, là aussi c'est une fausse intégrale généralisée.

1) Définition de l'intégrale généralisée

Exemples : $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 e^x \cdot \cos\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) \mathrm{d}x.$

Exercices.

- Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer le point de singularité, dire si l'intégrale converge, et si c'est le cas, calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, \mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \cos t \,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{1}{t-1}\, \mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{\ln 2} e^t \,\mathrm{d}t$$

- Même exercice pour ces intégrales ayant deux points incertains :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \int_{-\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t.$$

2) Propriétés des intégrales généralisées

Lorsqu'elle converge, cette nouvelle intégrale (généralisée) vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale (de Riemann) usuelle, à commencer par la linéarité :

Proposition 2.1 (linéarité). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux constantes. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente, et on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. La réciproque de la proposition 2.1 est fausse, il est possible de trouver deux fonctions f, g telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f + g$ converge, sans que $\int_a^{+\infty} f$, ni $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Lorsqu'elle converge, cette nouvelle intégrale (généralisée) vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale (de Riemann) usuelle, à commencer par la linéarité :

Proposition 2.1 (linéarité). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux constantes. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente, et on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. La réciproque de la proposition 2.1 est fausse, il est possible de trouver deux fonctions f, g telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f + g$ converge, sans que $\int_a^{+\infty} f$, ni $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Lorsqu'elle converge, cette nouvelle intégrale (généralisée) vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale (de Riemann) usuelle, à commencer par la linéarité :

Proposition 2.1 (linéarité). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux constantes. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente, et on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. La réciproque de la proposition 2.1 est fausse, il est possible de trouver deux fonctions f, g telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f + g$ converge, sans que $\int_a^{+\infty} f$, ni $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 2.2 (relation de Chasles). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ et $\alpha \in [a\,,\,b[$ une constante. Alors les deux intégrales généralisées intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Si elles sont convergentes, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

« **Être de même nature** » signifie que les deux intégrales généralisées sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.

Le relation de Chasles implique donc que la convergence d'une intégrale généralisée dépend seulement du comportement de la fonction au voisinage du point de singularité.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 2.2 (relation de Chasles). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ et $\alpha \in [a, b[$ une constante. Alors les deux intégrales généralisées intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Si elles sont convergentes, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

« **Être de même nature** » signifie que les deux intégrales généralisées sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.

Le relation de Chasles implique donc que la convergence d'une intégrale généralisée dépend seulement du comportement de la fonction au voisinage du point de singularité.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 2.3 (croissance de l'intégrales généralisée). Si les deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors

$$f \leqslant g \text{ sur } [a\,,\,b[\quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, l'intégrale généralisée convergente d'une fonction positive est positive :

$$f \geqslant 0 \text{ sur } [a\,,\,b[\quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Remarque. Les trois résultats précédents et tous les résultats suivants restent valables pour les fonctions définies sur des autres types d'intervalles comme $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$ ou non bornés comme $[a\,,\,+\infty[$, $]a\,,\,+\infty[$, $]-\infty\,,\,a[$, $]-\infty\,,\,a]$, ou $]-\infty\,,\,+\infty[$.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 2.3 (croissance de l'intégrales généralisée). Si les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors

$$f \leqslant g \text{ sur } [a\,,\,b[\quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, l'intégrale généralisée convergente d'une fonction positive est positive :

$$f \geqslant 0 \text{ sur } [a\,,\,b[\quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Remarque. Les trois résultats précédents et tous les résultats suivants restent valables pour les fonctions définies sur des autres types d'intervalles comme $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$ ou non bornés comme $[a\,,\,+\infty[$, $]a\,,\,+\infty[$, $]-\infty\,,\,a[$, $]-\infty\,,\,a]$, ou $]-\infty\,,\,+\infty[$.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 2.3 (croissance de l'intégrales généralisée). Si les deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors

$$f \leqslant g \text{ sur } [a\,,\,b[\quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, l'intégrale généralisée convergente d'une fonction positive est positive :

$$f \geqslant 0 \text{ sur } [a\,,\,b[\quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Remarque. Les trois résultats précédents et tous les résultats suivants restent valables pour les fonctions définies sur des autres types d'intervalles comme $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$ ou non bornés comme $[a\,,\,+\infty[$, $]a\,,\,+\infty[$, $]-\infty\,,\,a[$, $]-\infty\,,\,a]$, ou $]-\infty\,,\,+\infty[$.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 2.3 (croissance de l'intégrales généralisée). Si les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors

$$f \leqslant g \text{ sur } [a\,,\,b[\quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, l'intégrale généralisée convergente d'une fonction positive est positive :

$$f \geqslant 0 \text{ sur } [a\,,\,b[\quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Remarque. Les trois résultats précédents et tous les résultats suivants restent valables pour les fonctions définies sur des autres types d'intervalles comme $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$ ou non bornés comme $[a\,,\,+\infty[$, $]a\,,\,+\infty[$, $]-\infty\,,\,a[$, $]-\infty\,,\,a]$, ou $]-\infty\,,\,+\infty[$.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Théorème 2.4 (intégration par parties). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $u, v \colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\, b[$ telles que $\lim\limits_{x \to b^-} (u(x)v(x))$ existe et soit finie. Alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u\,v\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on fait une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. Or on vu que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, on sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} (u(t)v(t)) = \lim\limits_{t \to +\infty} (-t\,e^{-t}) = 0$.

2) Propriétés des intégrales généralisées

Théorème 2.4 (intégration par parties). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $u, v \colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\,b[$ telles que $\lim\limits_{x \to b^-} (u(x)v(x))$ existe et soit finie. Alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u\,v\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on fait une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. Or on vu que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, on sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} (u(t)v(t)) = \lim\limits_{t \to +\infty} (-t\,e^{-t}) = 0.$

2) Propriétés des intégrales généralisées

Donc d'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Théorème 2.5 (changement de variables). Soient $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha\,,\,\beta[\longrightarrow [a\,,\,b[$ une fonction de classe C^1. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Propriétés des intégrales généralisées

Donc d'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Théorème 2.5 (changement de variables). Soient $f\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [\alpha\,,\,\beta[\longrightarrow [a\,,\,b[$ une fonction de classe C^1. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Propriétés des intégrales généralisées

Donc d'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Théorème 2.5 (changement de variables). Soient $f\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [\alpha\,,\,\beta[\longrightarrow [a\,,\,b[$ une fonction de classe C^1. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Propriétés des intégrales généralisées

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge. En effet, on fait un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$. D'où $x = t^2$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}\cdot$ Notons que $\varphi : t \longmapsto x = t^2$ est une bijection de classe C^1 de $]0, 1]$ sur $]0, 1]$. Or on vu que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. Donc d'après le théorème changement de variables, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, et on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = 4.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Proposition 3.1 (primitive). Soient $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ et F une primitive quelconque de f. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} F(x)$ existe et est finie. On a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\longrightarrow b^-} F(x) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b.$$

Remarque. La Proposition 3.1 reste valable pour les fonctions définies sur des autres types d'intervalles comme $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$ ou non bornés comme $[a\,,\,+\infty[$, $]a\,,\,+\infty[$, $]-\infty\,,\,a[$, $]-\infty\,,\,a]$, ou $]-\infty\,,\,+\infty[$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Proposition 3.1 (primitive). Soient $f\colon [a\,,\,b[\,\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ et F une primitive quelconque de f. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow b^-} F(x)$ existe et est finie. On a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\longrightarrow b^-} F(x) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b.$$

Remarque. La Proposition 3.1 reste valable pour les fonctions définies sur des autres types d'intervalles comme $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$ ou non bornés comme $[a\,,\,+\infty[$, $]a\,,\,+\infty[$, $]-\infty\,,\,a[$, $]-\infty\,,\,a]$, ou $]-\infty\,,\,+\infty[$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente. En effet, on a la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2\ln x}{x}$. Mais on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ existent et finies, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \pi.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente. En effet, on a la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2\ln x}{x}$. Mais on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ existent et finies, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \pi.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente. En effet, on a la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2\ln x}{x}$. Mais on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ existent et finies, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \pi.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Théorème 3.2 (intégration par parties). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $u, v\colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\, b[$ telles que $\lim\limits_{x \to b^-} (u(x)v(x))$ existe et soit finie. Alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u\,v\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.3 (changement de variables). Soient $f\colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [\alpha\,,\, \beta[\longrightarrow [a\,,\, b[$ une fonction de classe C^1. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Théorème 3.2 (intégration par parties). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $u, v\colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\, b[$ telles que $\lim\limits_{x \to b^-} (u(x)v(x))$ existe et soit finie. Alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u\,v\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.3 (changement de variables). Soient $f\colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [\alpha\,,\, \beta[\longrightarrow [a\,,\, b[$ une fonction de classe C^1. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Théorème 3.2 (intégration par parties). Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $u, v\colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\, b[$ telles que $\lim\limits_{x \to b^-} (u(x)v(x))$ existe et soit finie. Alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u\,v\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.3 (changement de variables). Soient $f\colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [\alpha\,,\, \beta[\longrightarrow [a\,,\, b[$ une fonction de classe C^1. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée pour laquelle le cacul de primitive n'est pas évident ainsi que l'IPP et le changement de variable, on utilise des critères pour se ramener à des intégrales généralisées dont la nature est bien connue (appelées intégrales généralisées de référence).

Intégrales de référence :

1) Intégrales généralisées de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé. Alors

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

2) Intégrales généralisées de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux nombres réels fixés. Alors

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ (où $a > 1$) converge si $\alpha > 1$ ou si ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$ (où $0 < a < 1$) converge si $\alpha < 1$ ou si ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée pour laquelle le cacul de primitive n'est pas évident ainsi que l'IPP et le changement de variable, on utilise des critères pour se ramener à des intégrales généralisées dont la nature est bien connue (appelées intégrales généralisées de référence).

Intégrales de référence :

1) Intégrales généralisées de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé. Alors

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

2) Intégrales généralisées de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux nombres réels fixés. Alors

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ (où $a > 1$) converge si $\alpha > 1$ ou si ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$ (où $0 < a < 1$) converge si $\alpha < 1$ ou si ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée pour laquelle le cacul de primitive n'est pas évident ainsi que l'IPP et le changement de variable, on utilise des critères pour se ramener à des intégrales généralisées dont la nature est bien connue (appelées intégrales généralisées de référence).

Intégrales de référence :

1) Intégrales généralisées de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé. Alors

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

2) Intégrales généralisées de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux nombres réels fixés. Alors

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ (où $a > 1$) converge si $\alpha > 1$ ou si ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$ (où $0 < a < 1$) converge si $\alpha < 1$ ou si ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ diverge car $\dfrac{1}{4} < 1$.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$ converge car $\dfrac{2}{3} < 1$.

Exemple 3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ est divergente, car c'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = -2 < 1$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ diverge car $\dfrac{1}{4} < 1$.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$ converge car $\dfrac{2}{3} < 1$.

Exemple 3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ est divergente, car c'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = -2 < 1$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ diverge car $\dfrac{1}{4} < 1$.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$ converge car $\dfrac{2}{3} < 1$.

Exemple 3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ est divergente, car c'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = -2 < 1$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

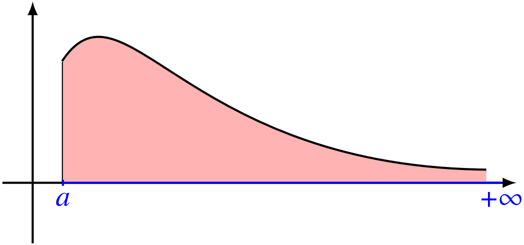
Nous considérons ici que les fonctions de signe constant. Quitte à changer f par $-f$ si f est négatif, on supposera dans toute cette sous-section que la fonction est positive sur son intervalle d'intégration.

Remarquons que puisque la fonction f est positive, alors la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x (d'après la croissance de l'intégrale). Quand x tend vers b, ou bien $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée, et donc l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; ou bien $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Nous considérons ici que les fonctions de signe constant. Quitte à changer f par $-f$ si f est négatif, on supposera dans toute cette sous-section que la fonction est positive sur son intervalle d'intégration.

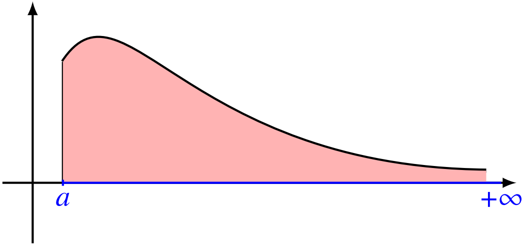


Remarquons que puisque la fonction f est positive, alors la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction croissante de x (d'après la croissance de l'intégrale). Quand x tend vers b, ou bien $\int_a^x f(t)\,dt$ est majorée, et donc l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ; ou bien $\int_a^x f(t)\,dt$ tend vers $+\infty$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Nous considérons ici que les fonctions de signe constant. Quitte à changer f par $-f$ si f est négatif, on supposera dans toute cette sous-section que la fonction est positive sur son intervalle d'intégration.



Remarquons que puisque la fonction f est positive, alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x (d'après la croissance de l'intégrale). Quand x tend vers b, ou bien $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée, et donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; ou bien $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Proposition 3.4. Soit $f : [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a\,,\, b[$ et positive. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a\,,\, b[$.

Voici maintenant un premier critère pour tester la convergence ou la divergence d'une intégrale généralisée.

Théorème 3.5 (théorème de comparaison). Soient $f, g : [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,,\, b[$. On a les propriétés suivantes :

- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Proposition 3.4. Soit $f : [a\,,\,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ et positive. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a\,,\,b[$.

Voici maintenant un premier critère pour tester la convergence ou la divergence d'une intégrale généralisée.

Théorème 3.5 (théorème de comparaison). Soient $f, g : [a\,,\,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,,\,b[$. On a les propriétés suivantes :

- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Proposition 3.4. Soit $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ et positive. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a\,,\,b[$.

Voici maintenant un premier critère pour tester la convergence ou la divergence d'une intégrale généralisée.

Théorème 3.5 (théorème de comparaison). Soient $f, g : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,,\,b[$. On a les propriétés suivantes :

- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on a $\dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. Or on sait que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc d'après le théorème de comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, on a $t \longmapsto \dfrac{e^{t}}{t}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus, on a $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{e^{t}}{t}$ pour tout $t \in]0,1]$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Exemple 1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on a $\dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. Or on sait que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc d'après le théorème de comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, on a $t \longmapsto \dfrac{e^{t}}{t}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus, on a $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{e^{t}}{t}$ pour tout $t \in]0,1]$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge car pour tout $0 < x \leqslant 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_x^1 = -\ln(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Donc d'après le théorème de comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Corollaire 3.6. Soient $f, g\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f \underset{b^-}{=} o(g)$ (c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$). On a les propriétés suivantes :

- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge car pour tout $0 < x \leqslant 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_x^1 = -\ln(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Donc d'après le théorème de comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Corollaire 3.6. Soient $f, g : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f \underset{b^-}{=} o(g)$ (c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$). On a les propriétés suivantes :

- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. On a $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Or on sait que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc d'après le corollaire 3.6, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3.7 (théorème des équivalents). Soient $f, g\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ (c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$). Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Autrement dit, elles convergent en même temps ou divergent en même temps.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. On a $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Or on sait que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc d'après le corollaire 3.6, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3.7 (théorème des équivalents). Soient $f, g\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ (c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$). Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Autrement dit, elles convergent en même temps ou divergent en même temps.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. On a $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Or on sait que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc d'après le corollaire 3.6, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3.7 (théorème des équivalents). Soient $f, g\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et positives et telles que $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ (c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$). Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Autrement dit, elles convergent en même temps ou divergent en même temps.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.1) Cas des fonctions de signe constant

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, on a $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}$ est continue et positive sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$. De plus, on a $\dfrac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \sim_0 \dfrac{t}{t^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\cdot$ Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge car pour tout $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a :

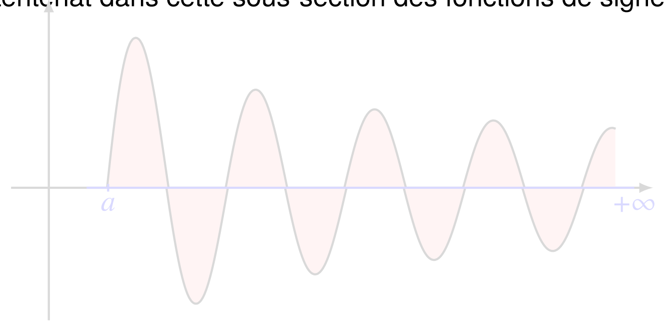
$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_x^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Donc d'après le théorème des équivalents, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

on considère maintentenat dans cette sous-section des fonctions de signe quelconque.

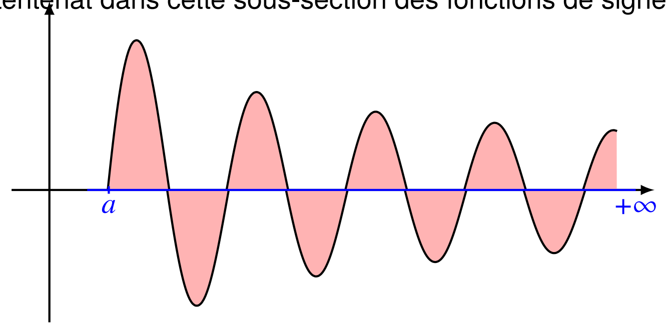


Définition 3.7. Soit $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

on considère maintentenat dans cette sous-section des fonctions de signe quelconque.

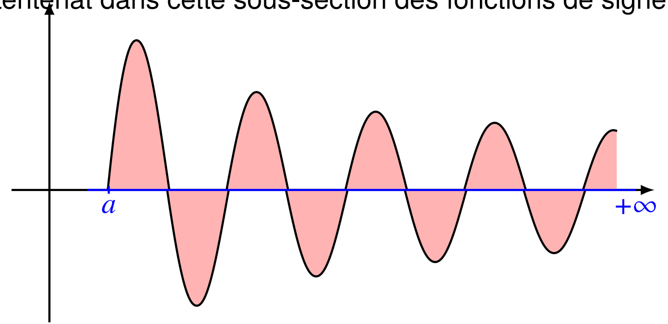


Définition 3.7. Soit $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

on considère maintentenat dans cette sous-section des fonctions de signe quelconque.



Définition 3.7. Soit $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Théorème 3.8. Soit $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. La réciproque du théorème 3.8 est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Contre-exemple. On va voir plus tard que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente. Il suffit de voir que

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\forall\, t \geqslant 1,\quad \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Théorème 3.8. Soit $f : [a\,,\,b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. La réciproque du théorème 3.8 est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Contre-exemple. On va voir plus tard que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente. Il suffit de voir que

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\forall\, t \geqslant 1,\ \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Théorème 3.8. Soit $f : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. La réciproque du théorème 3.8 est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Contre-exemple. On va voir plus tard que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente. Il suffit de voir que

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\forall\, t \geqslant 1,\quad \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Théorème 3.8. Soit $f : [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. La réciproque du théorème 3.8 est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Contre-exemple. On va voir plus tard que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente. Il suffit de voir que

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Théorème 3.8. Soit $f\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable de signe quelconque. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. La réciproque du théorème 3.8 est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Contre-exemple. On va voir plus tard que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente. Il suffit de voir que

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

3.2) Cas des fonctions de signe quelconque

Comme application du théorème de comparaison, on a le critère suivant de Riemann :

Corollaire 3.9 (critère de Riemann). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés tels que $a < b$. On a les propriétés :

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = k$ existe et soit finie. On a :

- Si $\alpha > 1$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \leqslant 1$ et $k \neq 0$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

2) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ telle que $\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = k$ existe et soit finie. On a :

- Si $\alpha < 1$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \geqslant 1$ et $k \neq 0$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 1$. Donc d'après le critère de Riemann (ici $\alpha = 2 > 1$), l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Exemple 2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente. En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]-1,0]$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+1)^1 f(x) = \frac{-1}{2}$. Donc d'après le critère de Riemann (ici $\alpha = 1 \leqslant 1$ et $k \neq 0$), l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Exemple 1. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 1$. Donc d'après le critère de Riemann (ici $\alpha = 2 > 1$), l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Exemple 2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente. En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]-1,0]$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+1)^1 f(x) = \frac{-1}{2}\cdot$ Donc d'après le critère de Riemann (ici $\alpha = 1 \leqslant 1$ et $k \neq 0$), l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Pour montrer qu'une intégrale généralisée converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant :

Théorème 5.3 (règle d'Abel). Soient $f, g \colon [a\,,\, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables sur $[a\,,\, b[$ telles que :

i) f est décroissante, positive et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 0$;

ii) il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a\,,\, b[$, $\left| \int_a^x g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant M$.

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente. En effet, on a

$$\frac{\sin t}{t} = f(t)g(t)$$

avec $f(t) = 1/t$ et $g(t) = \sin t$ pour tout $t \geqslant 1$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

Pour montrer qu'une intégrale généralisée converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant :

Théorème 5.3 (règle d'Abel). Soient $f, g : [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables sur $[a\,,\,b[$ telles que :

i) f est décroissante, positive et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 0$;

ii) il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a\,,\,b[$, $\left| \int_a^x g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant M$.

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente. En effet, on a

$$\frac{\sin t}{t} = f(t)g(t)$$

avec $f(t) = 1/t$ et $g(t) = \sin t$ pour tout $t \geqslant 1$.

3) Critères de convergence des intégrales généralisées

On a d'abord les deux fonctions f et g sont localement intégrables sur $[1\,,\,+\infty[$. De plus, on a $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante, positive et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0\cdot$ On a aussi

$$\forall\, x \geqslant 1,\ \left|\int_1^x \sin t \,\mathrm{d}t\right| = |\cos 1 - \cos x| \leqslant 2.$$

Donc d'après la règle d'Abel, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.