Université Ibn Tofail **A.U. 2024-2025**
Faculté des Sciences **MIP, S2**
Département de Mathématiques,
Kénitra

Série 1, Algèbre 2

Exercice 1. Etudier les propositions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner des contre exemples pour celles qui sont fausses.
a) $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle et de la loi externe : $\lambda.(x, y) = (\lambda x, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b) $\mathbb{C}^3$ muni de l'addition usuelle et de la loi externe sur $\mathbb{C}$ définie par, $\lambda.(x, y, z) = (\lambda x, y, z)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
c) L'ensemble des polynômes à coefficients réels divisibles par $X^3 + 1$, muni de l'addition usuelle des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. On considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y + 5z = 0, \}$$

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = (a - b, 2b, a + 3b), a, b \in \mathbb{R}, \}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x.y = 0\}$$

1) Parmi ces ensembles, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.
2) Donner une base pour chaque sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, on considère les vecteurs

$$e'_1 = (1, 2, -1, -2), e'_2 = (2, 3, 0, -1), e'_3 = (1, 3, -1, 0), e'_4 = (1, 2, 1, 4).$$

a) Montrer que la famille $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Calculer les coocrdonnées du vecteur $v = (7, 14, -1, 2)$ dans B'.

Exercice 4. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y + z = 0 \ et \ 2x + iy - z = 0\}$$

a) Montrer que F est $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Donner une base de F et en déduire sa dimension.

Exercice 5. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ engendré par les vecteurs (polynômes)suivants

$$P_1 = X^2, P_2 = (X-1)^2 \ \ et \ P_3 = (X+1)^2.$$

a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F.
b) Compléter la famille (P_1, P_2, P_3) en une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et en déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 6. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les applications

$$f_n(x) = \sin(nx), n \geq 1.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre.
b) En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 7. 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, définie par
$f(x, y) = (x - y, x, x + y)$ est linéaire.
2. Montrer que f est injective mais non surjective.
3. Détermier une base de Imf, (l'image de f.)

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.
1. Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = ((1, 0, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que la famille $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Calculer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$.
c) Déterminer A' la matrice de f dans la base B'.
3. a) Déterminer les matrices P et P^{-1} où P est la matrice de passage de la base B à la base B'.
b) En utilisant la formule de changement de bases, calculer à nouveau la matrice A'.