Les systèmes centrés

Les systèmes optiques sont le plus souvent une association de plusieurs types de surfaces ayant même axe principal.

La formation des images à travers ces systèmes passe alors par plusieurs étapes intermédiaires

1. Définition

Un système centré est un ensemble de milieux transparents séparés par des surfaces planes ou sphériques dont l'axe principal est celui de toutes les surfaces du système centré.

On distingue deux types de systèmes centrés :

- **Systèmes dioptriques** : composés seulement de dioptres
- **Systèmes catadioptriques** : composés de miroirs et de dioptres

Exemples

- Une lentille est une association de deux dioptres sphériques
- Une boule est une association d’un dioptre plan et d’un dioptre sphérique
- Un oculaire est une association de deux lentilles
- Une boule argentée sur sa face sphérique extérieure est une association d’un dioptre plan et d’un miroir sphérique concave.
- Une loupe …….

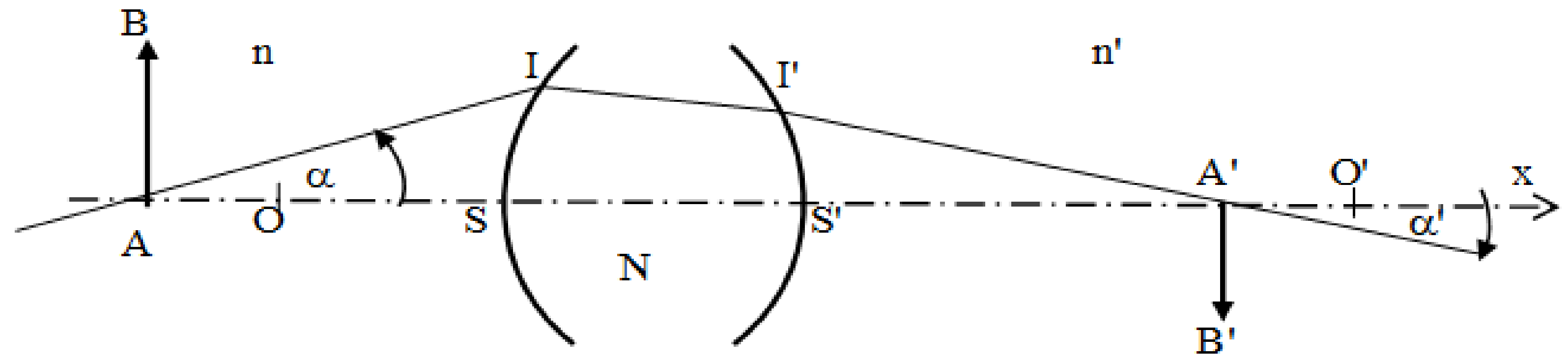


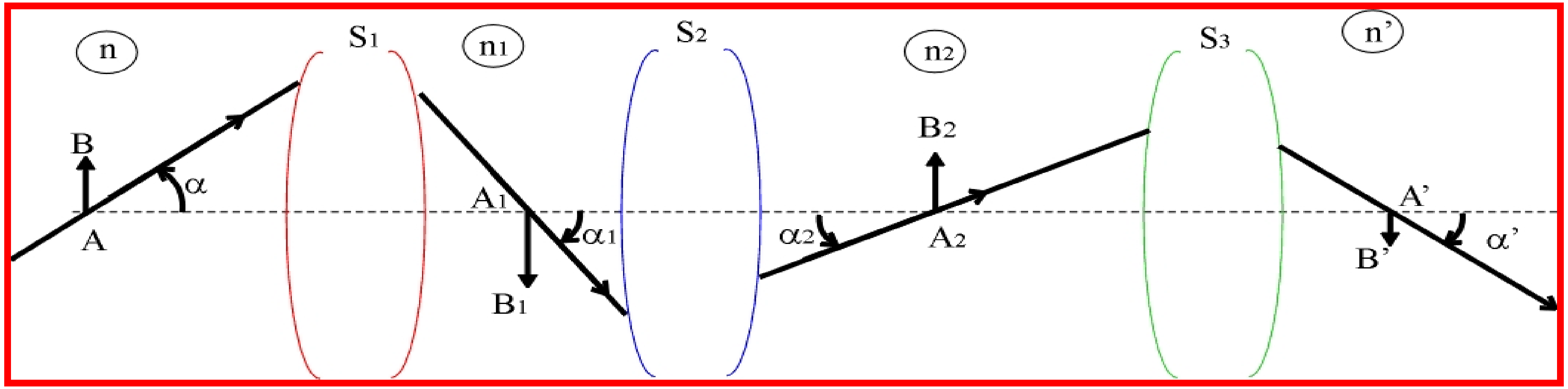
Figure 7-1 : *Système centré, définition des grandissements.*

- **Grandissement transversal:** $$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

- **Grandissement angulaire: Grossissement:** $$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Relation de Lagrange Helmholtz : L'invariant de Lagrange-Helmholtz

Au niveau de chaque composant (S1, S2, S3) sur la figure ci-dessous, la relation de Lagrange Helmholtz est vérifiée, d'où :



$$\boxed{n\,\overline{AB}\,\alpha = n_1\,\overline{A_1B_1}\,\alpha_1 = n_2\,\overline{A_2B_2}\,\alpha_2 = n'\,\overline{A'B'}\,\alpha'}$$

La relation de Lagrange Helmholtz pour le système centré s'écrit donc: $n\,\overline{AB}\,\alpha = n'\,\overline{A'B'}\,\alpha'$

A'B' étant l'image finale donnée par la succession de composants.

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\boxed{\gamma G = \frac{n}{n'}}$$

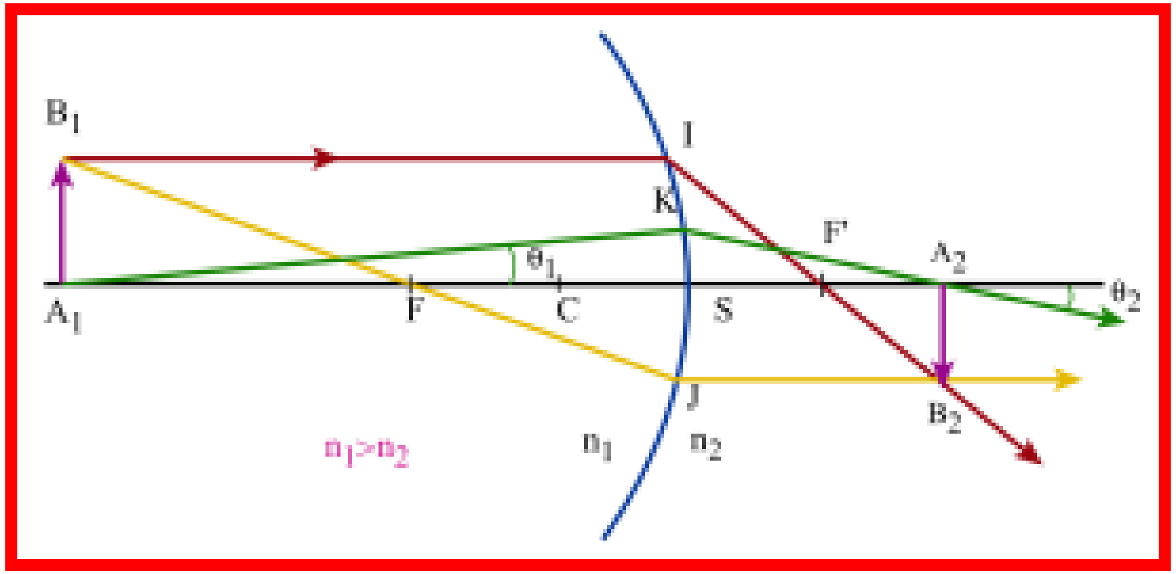
<u>Cas particulier important</u> :

Si les milieux extrêmes sont identiques n = n' d'où, $\boxed{\gamma G = 1}$

Démonstrations

Relation de Lagrange Helmholtz

$$\overline{SK} = -\overline{SA_1}\ \tan\ \theta_1 = -\overline{SA_2}\ \tan\ \theta_2$$



Dans l'approximation de Gauss: les tangentes des angles **tan(X) = X** avec les angles exprimés en radians :

$$\overline{SA_1}\ \theta_1 = \overline{SA_2}\ \theta_2$$

Si A_2B_2 est l'image de A_1B_1

nous avons vu que :

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$$

soit encore : $n_1\ .\ \overline{A_1B_1}\ .\ \overline{SA_2} = n_2\ .\ \overline{A_2B_2}\ .\ \overline{SA_1}$

on en déduit facilement le relation de Lagrange-Helmholtz :

$$n_1\ .\ \overline{A_1B_1}\ .\ \theta_1 = n_2\ .\ \overline{A_2B_2}\ .\ \theta_2$$

Eléments cardinaux

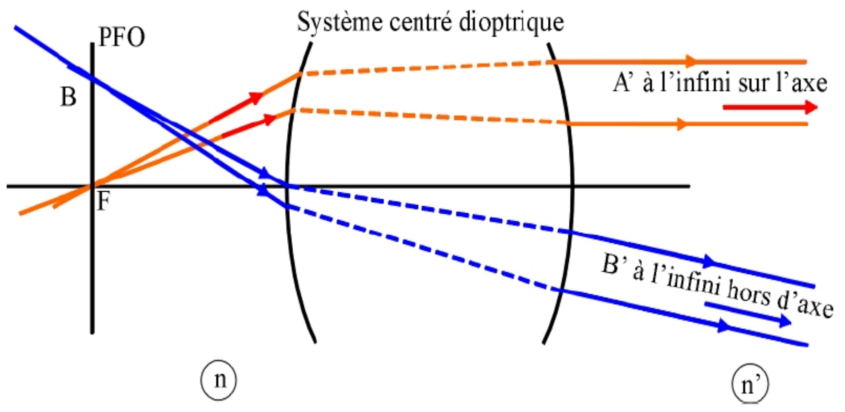
Sont les foyers, les points principaux et antiprincipaux, les points nodaux et antinodaux

1- Foyers et plans focaux

Foyer objet F: Point sur l'axe dont l'image est à l'infini (rayon émergeant parallèle à l'axe).

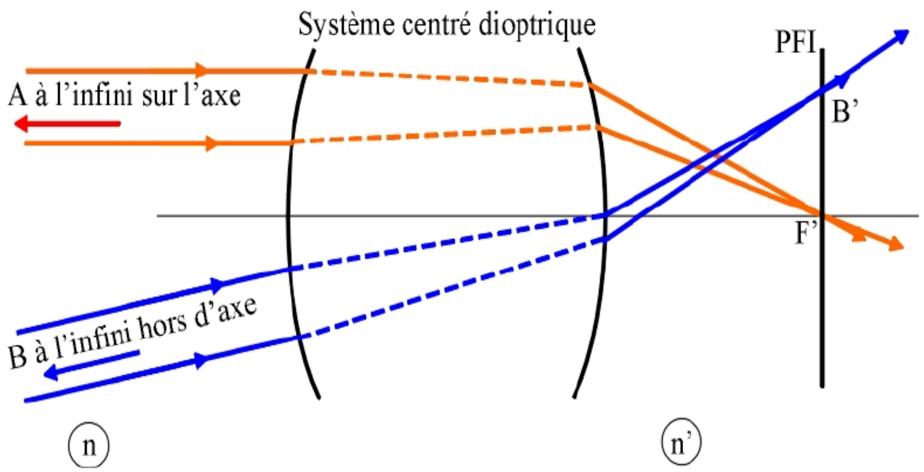
Plan focal objet: Plan perpendiculaire à l'axe passant par le foyer objet F.

Tout faisceau issu d'un point du plan focal objet (Foyers objets secondaires) émerge du système en un faisceau de rayons parallèles, inclinés par rapport à l'axe.



Tout faisceau incident parallèle, incliné par rapport à l'axe converge après traversée du système en un point du plan focal image (Foyers images secondaires).

Les foyers peuvent être réels ou virtuels selon leurs positions par rapport au système centré.

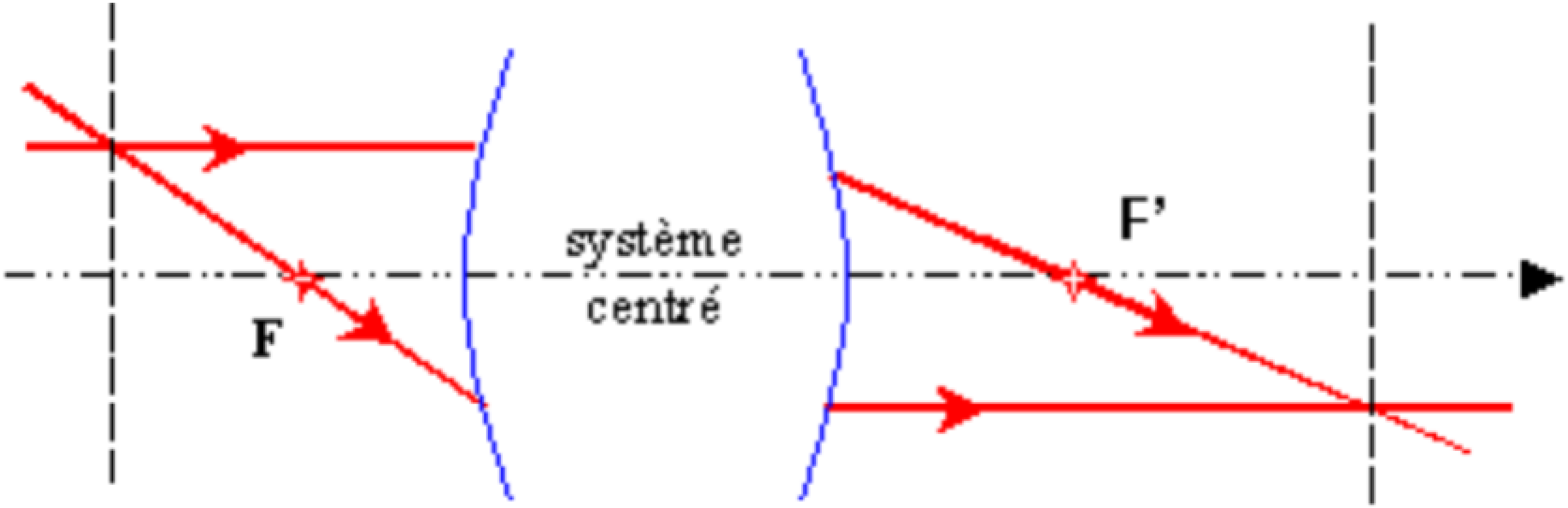


Foyer image F' : **Image sur l'axe d'un point situé à l'infini (rayon incident parallèle à l'axe).**

Plan focal image : **Plan perpendiculaire à l'axe passant par le foyer image F'**

4. Etude d’un système centré à foyer :

Un système est dit à foyer si ses foyers objet et image ne sont pas rejetés à l’infini

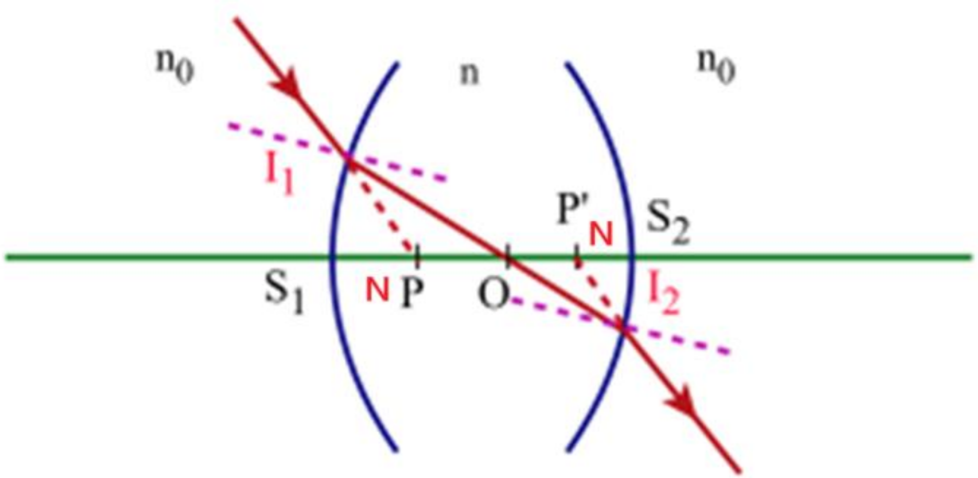


- Centre optique:

C’est le point du milieu intermédiaire tel qu’à tout rayon dont le support passe par ce point correspond un incident et un émergent parallèle. Sa position est définie par la relation :

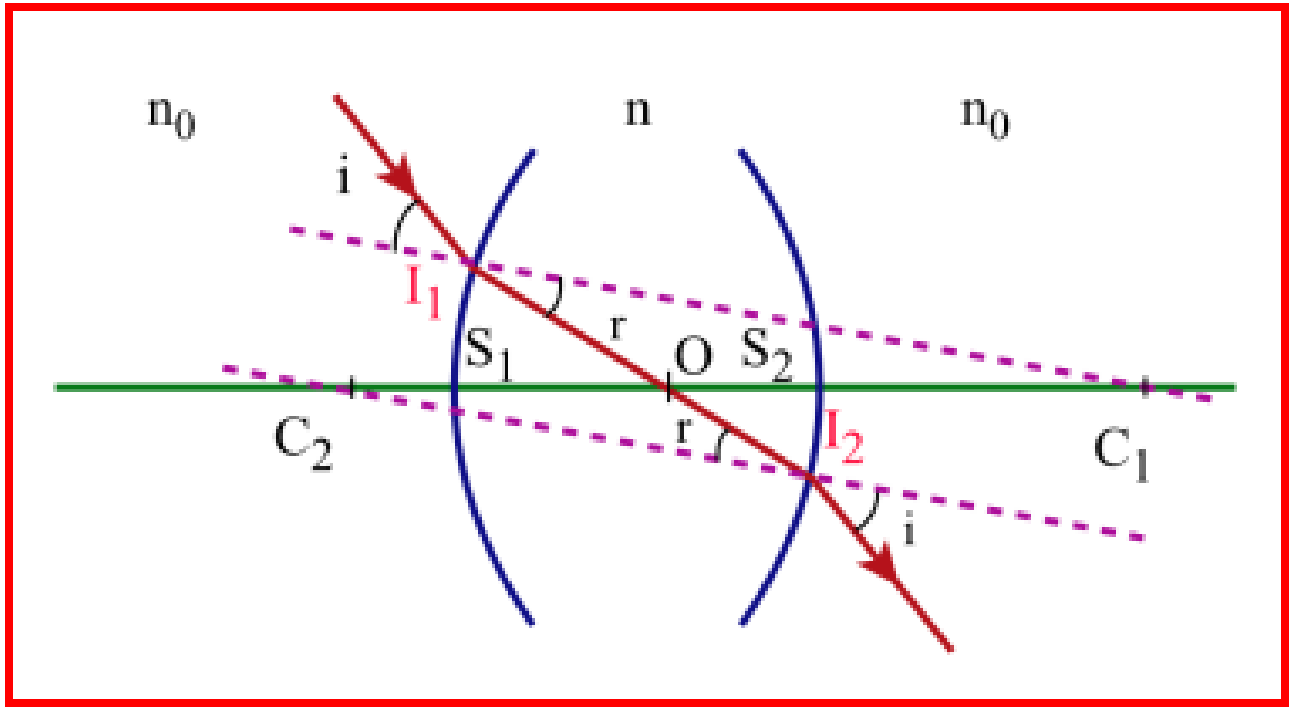
$$\boxed{\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{R_1}{R_2}}$$

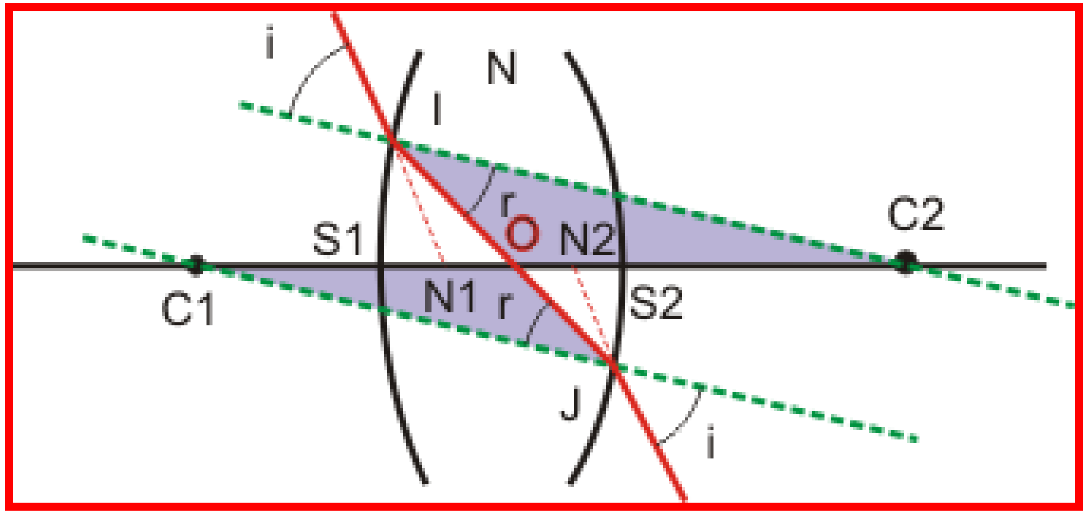
Relation valable dans le cas des milieux extrêmes identiques. le centre optique O constitue l’image du **point nodal objet** par rapport à la face d’entrée et l’objet du point nodal image par rapport à la face de sortie:

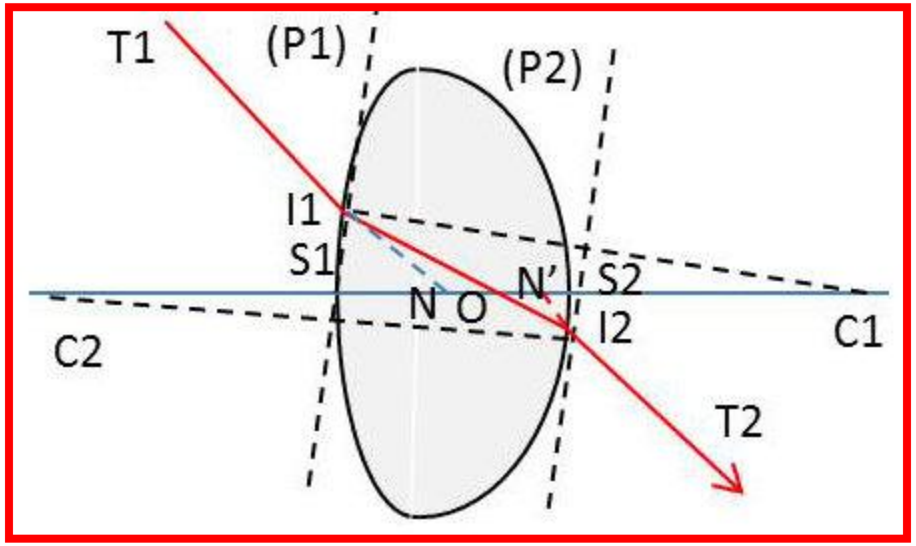


$$N \xrightarrow{D_1(n_0,\, n)} O \xrightarrow{D_2(n,\, n_0)} N'$$

Démonstration







Considérons les triangles OC_1I_1 et OC_2I_2 on a :

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}} = \frac{\overline{C_1I_1}}{\overline{C_2I_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{OC_1} - \overline{S_1C_1}}{\overline{OC_2} - \overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}} = \frac{\overline{I_1C_1}}{\overline{I_2C_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{r_1}{r_2}$$

6. Recherche directe des points principaux

Prolongeons le rayon incident T1I1, que nous supposerons cette fois peu incliné sur l'axe, jusqu'à son point de rencontre N avec cet axe.

Soit de même N' le point où le rayon émergent T2I2 rencontre l'axe.

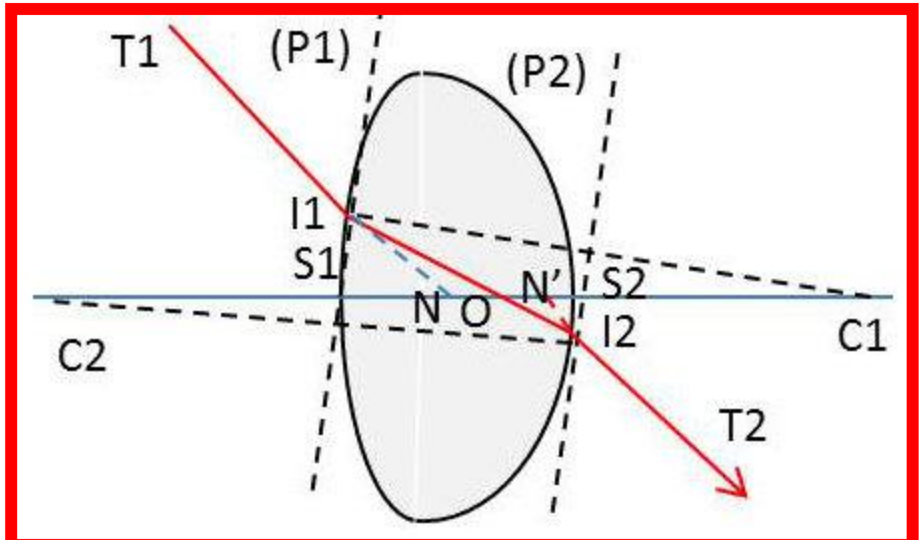
N et N' sont les points nodaux de la lentille ; ce sont aussi ses points principaux puisque les deux faces de la lentille sont baignées par le même milieu. N a pour conjugué O à travers la face d'entrée ; N' est le conjugué de O à travers la face de sortie.

Pour trouver les points N et N', c'est-à-dire les points principaux, il suffira donc :

1- de déterminer le centre optique O ;

2- de chercher le point H de l'axe dont l'image à travers le dioptre S1 est le point O (on appliquera par exemple à cet effet l'équation de conjugaison du dioptre sphérique rapportée à son sommet), c'est le point principal objet ;

3- de chercher l'image H' de O à travers le dioptre S2, c'est à la fois le point nodal image et le point principal image.



Remarque importante

1. *La lentille est biconvexe ou biconcave :* **Figure N° 1**

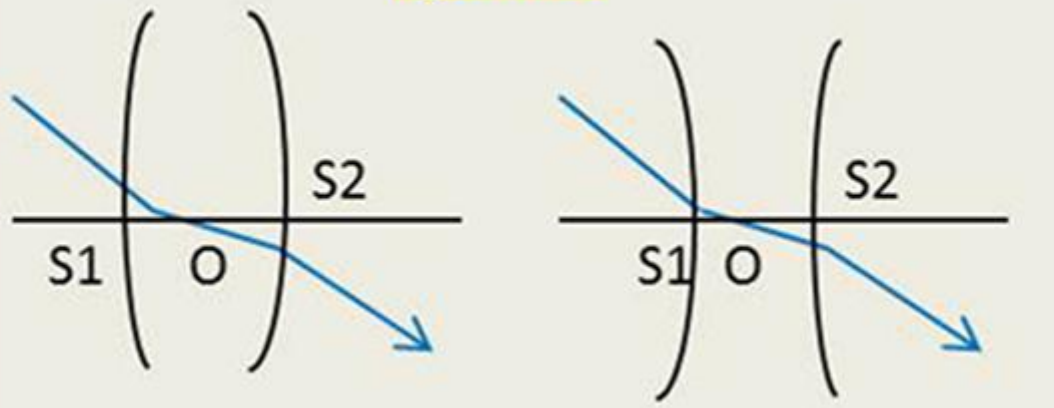
r_1, r_2 sont de signes contraires.

Il en est de même des segments $\overline{OS_1}$ et $\overline{OS_2}$.

O est entre S_1 et S_2 donc à l'intérieur de la lentille. Si la lentille est équiconvexe ou équiconcave $\overline{OS_1} = -\overline{OS_2}$.

Le point O est situé au milieu de $\overline{S_1S_2}$; c'est le centre de symétrie de la lentille.

Figure N° 1



2. *La lentille est concave convexe :* Figure N° 2

r_1, r_2 sont de même signe, les segments $\overline{OS_1}, \overline{OS_2}$ sont aussi de même signe et O est à l'extérieur de la lentille, du côté de la face la plus courbe.

Figure N° 2

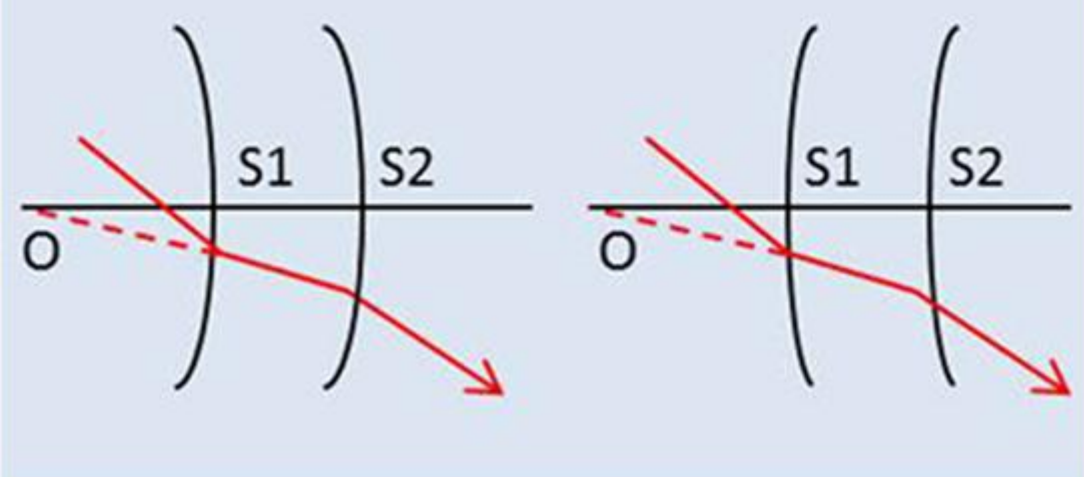
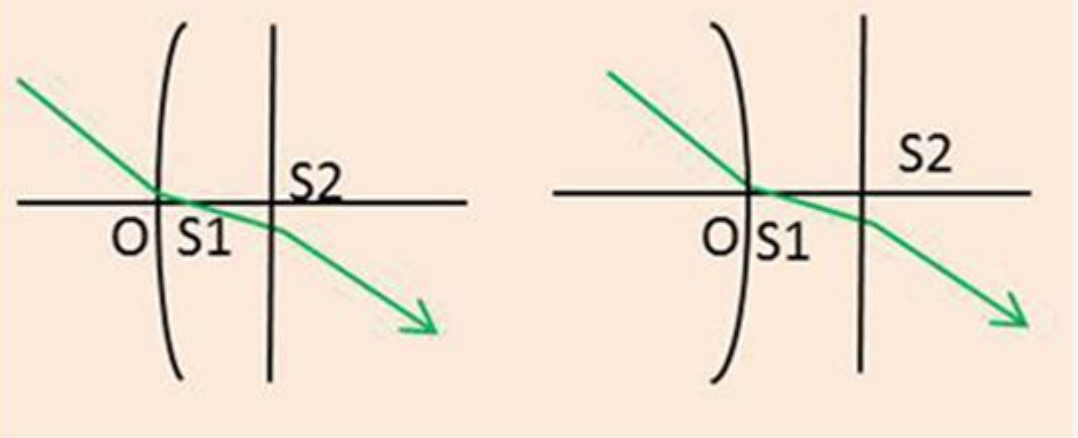


Figure N° 3



3. *La lentille est plan convexe ou plan concave :* Figure N° 3

L'un des rayons, r_1 par exemple, est infini.

Le rapport r_1/r_2 est nul et $\overline{O_S1} = 0$. Le centre optique est alors le sommet de la face courbe.

-Plans nodaux:

Ce sont deux plans (N, N') perpendiculaire à l'axe optique pour lesquels

le grandissement angulaire vaut g= 1 . (les angles (i, r)

Les points nodaux appartenant à l'intersection de ces plans nodaux avec l'axe optique du système.

Tout rayon incident passant par N correspond à un rayon émergent parallèle passant par N'.

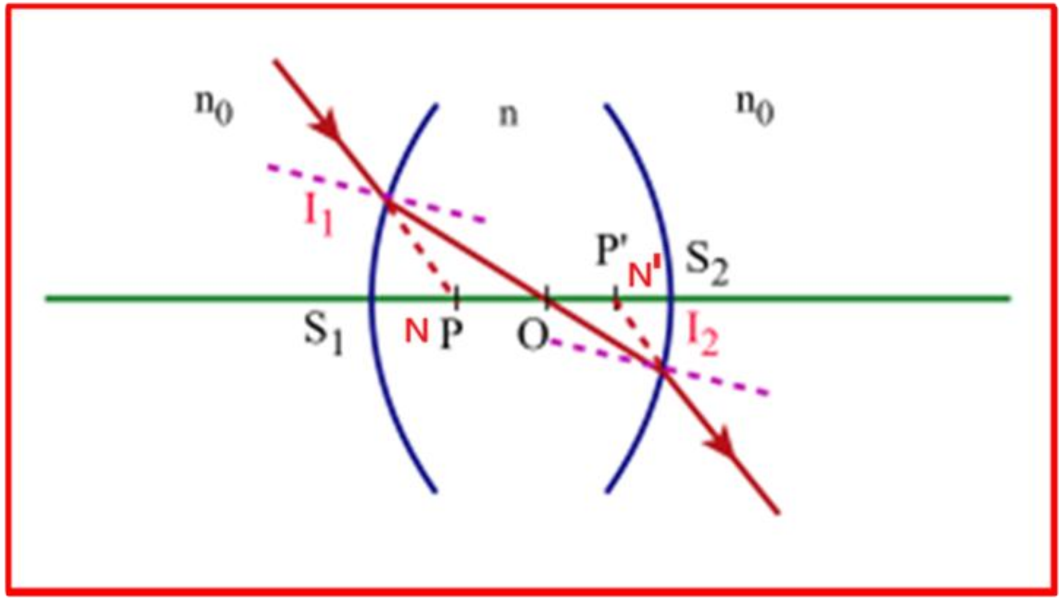


Fig a: système réel

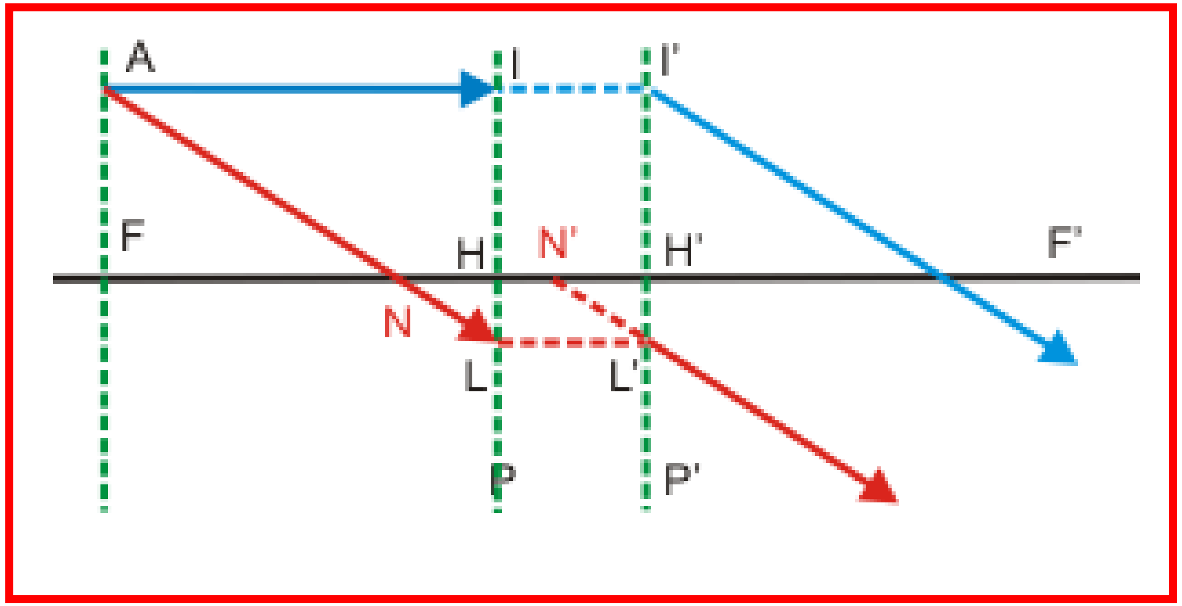
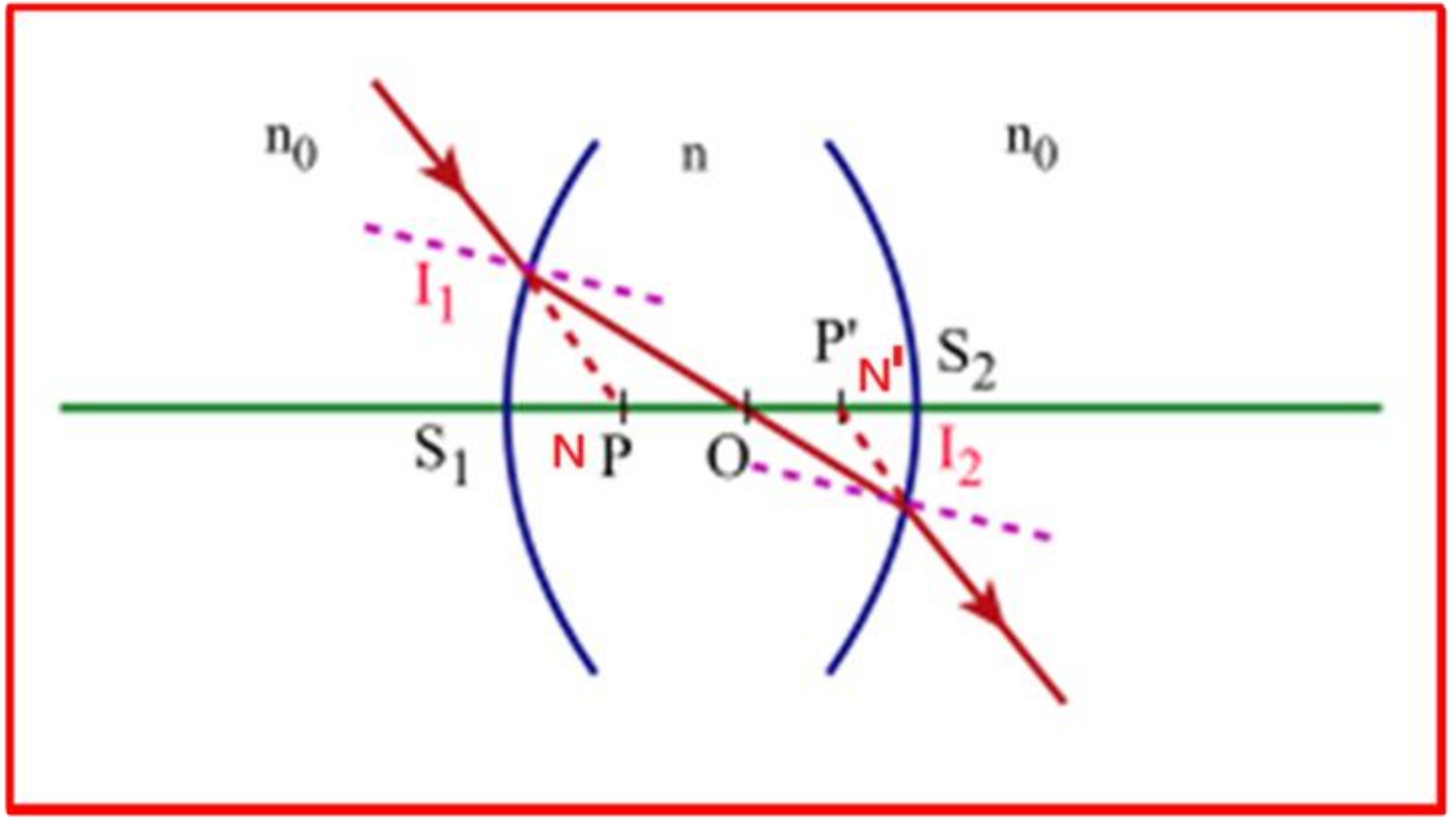


Fig b: système équivalent

Les milieux extrêmes étant identiques **les points principaux P et P' seront confondus avec les points nodaux N et N'**. (voir figure)

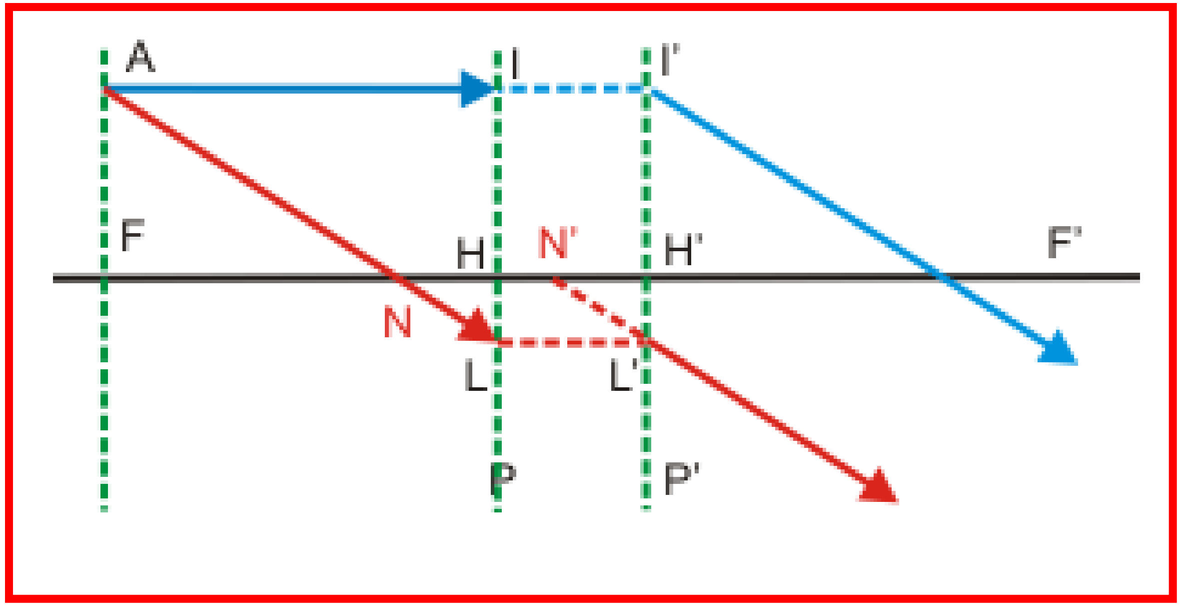
Les points principaux P et P' étant confondus avec les points nodaux N et N' on pourra dire que le centre optique O est le conjugué de P dans le premier dioptre tandis que le point P' sera le conjugué de O dans le second dioptre.



$$N \xrightarrow{D_1(n_0\,,\,n)} O \xrightarrow{D_2(n,\,n_0)} N'$$

Soit le parallélogramme (AI’F’N) et on considère **un point A** du plan focal objet (foyer objet secondaire). Un rayon AI parallèle à l'axe émerge selon I'F'. **Le rayon AN coupe l'axe optique en N est parallèle à I’F’ .** **(AN//I’F’).**

Les triangles (AFN) et (I'H'F’) sont égaux. Alors on en déduit que FN = H’F’ = f’



$f' = \overline{H'F'} = \overline{FN}$

$f = HF = F'N'$

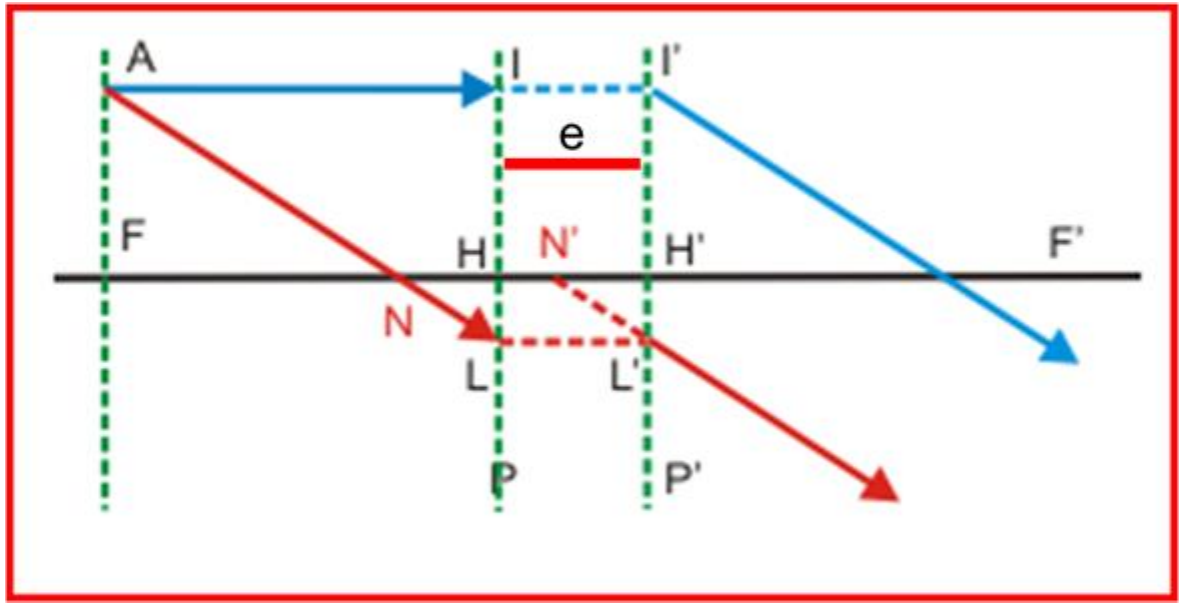
$\overline{HN} = \overline{H'N'} = \overline{H'F'} + \overline{F'N'} = f + f'$

Distance interstice du système

Soit N' le conjugué de N. **(NN'L'L) est un parallélogramme**

donc : **NN' = LL' = HH' = e**. **Alors e est dit l'interstice du système**.

$$e = HH' = NN' = \text{L'interstice du système}$$



$$f' = \overline{H'F'} = \overline{FN}$$

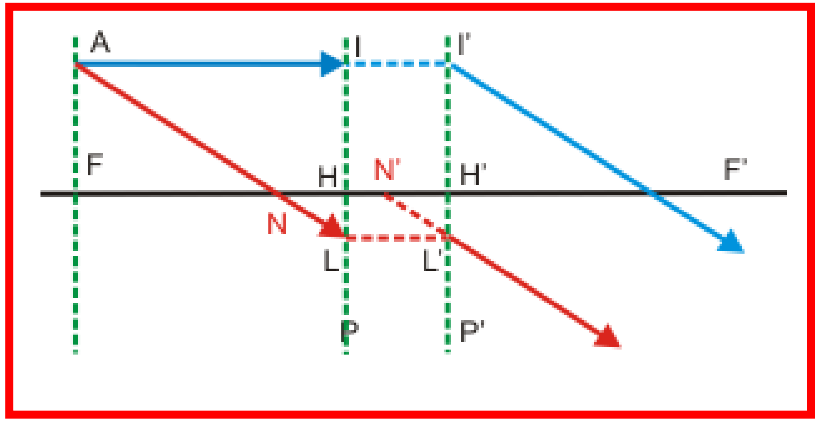
$$f = HF = F'N'$$

$$\overline{H'N'} = \overline{HN} = \overline{H'F'} + \overline{F'N'} = \overline{f} + f'$$

Distances focales

Distance focale objet: $f = \overline{HF}$

Distance focale image: $f' = \overline{H'F'}$



Vergence ***en dioptries ou m^{-1}***

V> 0 ----→ système **convergent**
V< 0 ----→ système **divergent**

Relation de Lagrange:

Le rapport des distances focales d'un système centré est égal au rapport des indices des milieux extrêmes changés de signe

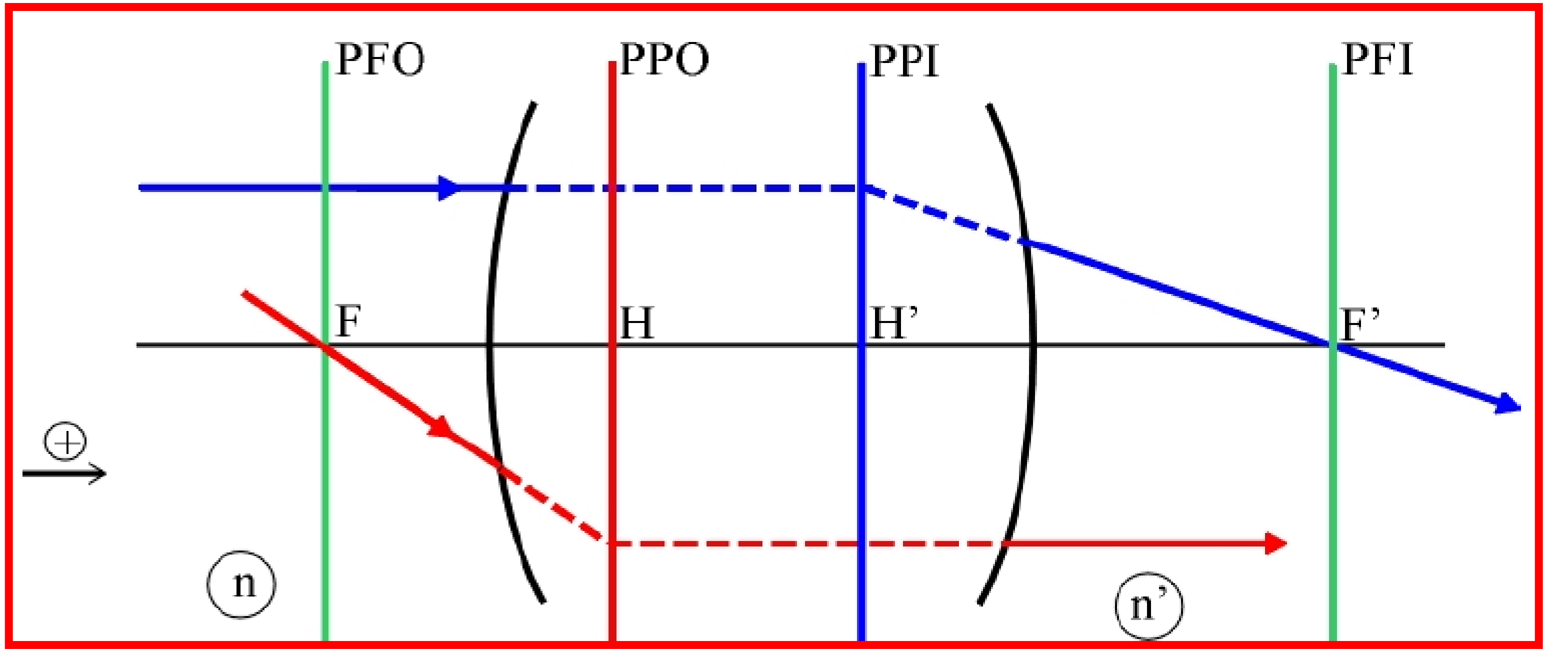
$$V = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

a) Définitions

- Plans et points principaux

Plan principal image (PPI) : lieu géométrique des points d'intersection des rayons incidents parallèles à l'axe avec les rayons émergents correspondants (passant par F'). Le point d'intersection du PPI avec l'axe est le **point principal image H**'.

Plan principal objet (PPO) : lieu géométrique des points d'intersection des rayons incidents passant par F avec les rayons émergents correspondants parallèles à l'axe. Le point d'intersection du PPO avec l'axe est le **point principal objet H**.



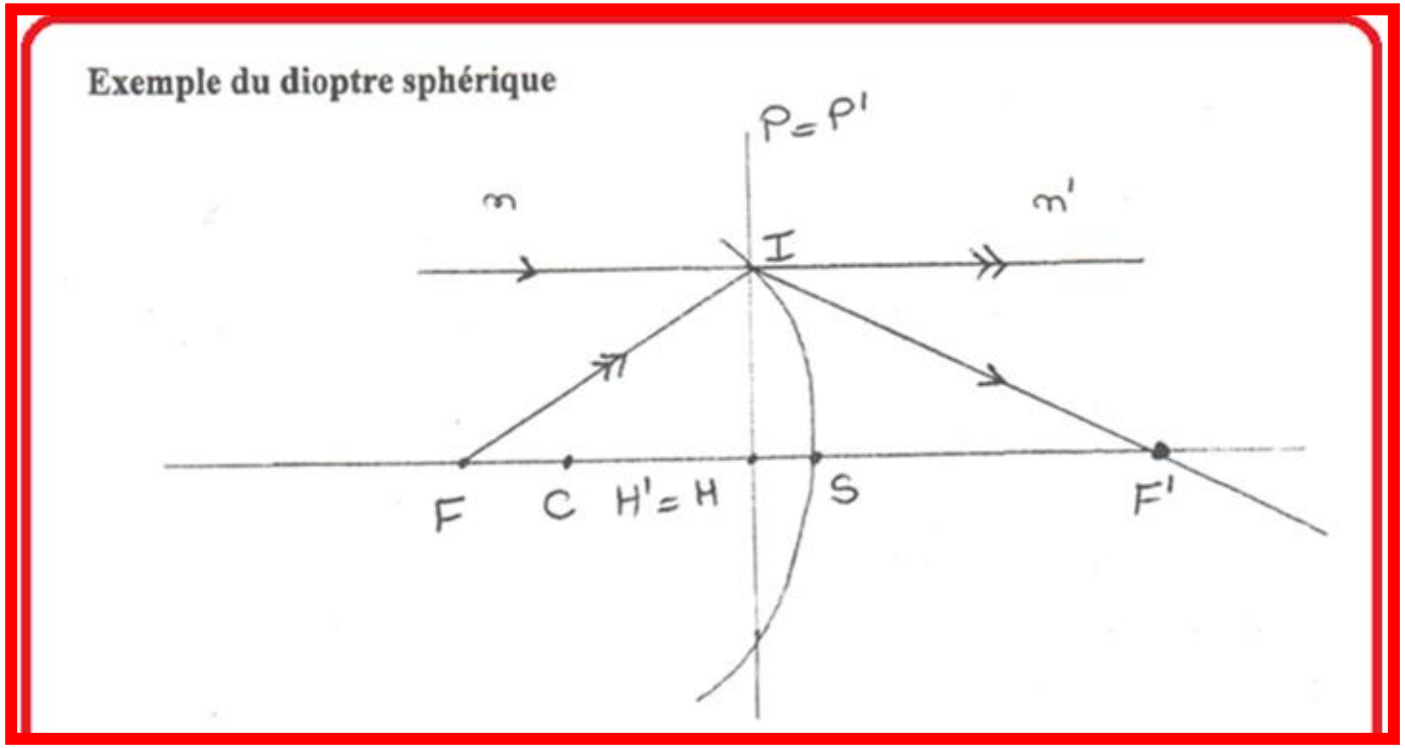
Propriétés

-Les plans principaux sont conjugués l'un de l'autre et le grandissement entre ces 2 plans est égal à 1.

-Cas particulier: Dioptre sphérique

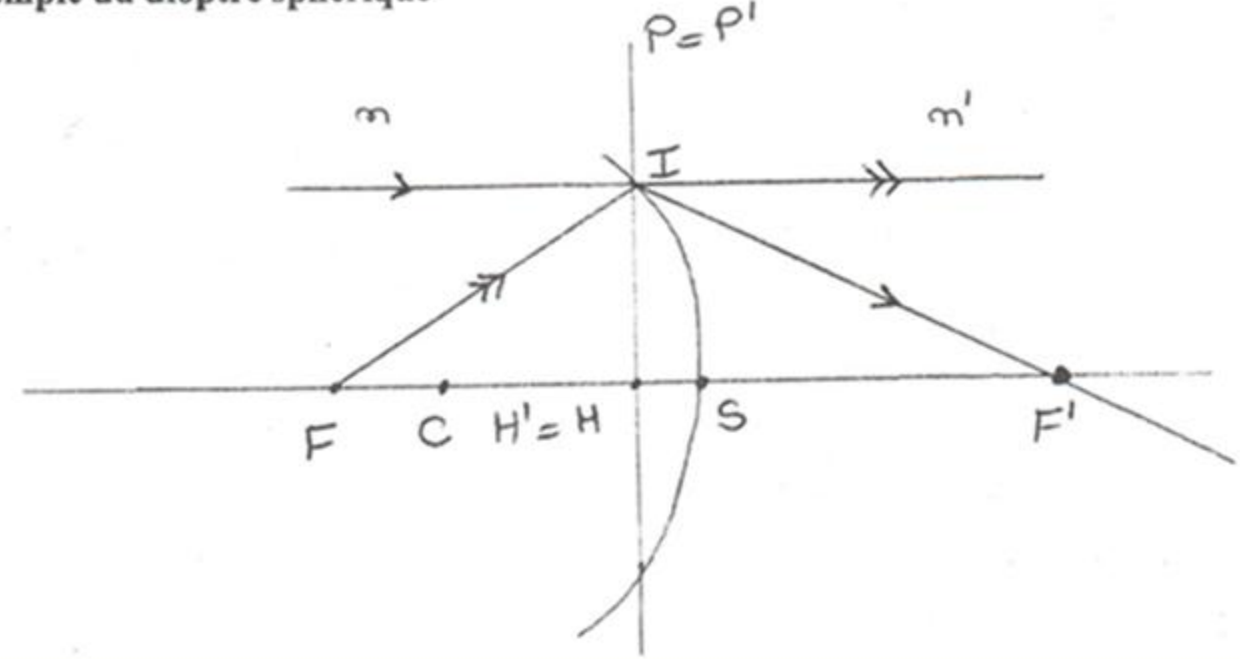
Dans l'approximation de Gauss, les points principaux du dioptre sphérique H et H' sont confondus et très proche du sommet S; donc nous aurons l'approximation suivante **H = H' = S.**

H=H'# S



Le calcul de e:

Exemple du dioptre sphérique



Dans les conditions de Gauss, I # S. Soit H = H' = S

Calcul des distances focales :

f = HF = SF,   f' = H'F' = SF'

La relation de conjugaison avec origine en S : n'/ SA' - n / SA = (n' – n) / SC

F = A si A' = ∞ , SF = n SC / (n-n')

F' = A' , A = ∞ , f' = SF' = n' SC / (n'-n)

Et l'interstice e = HH' = 0

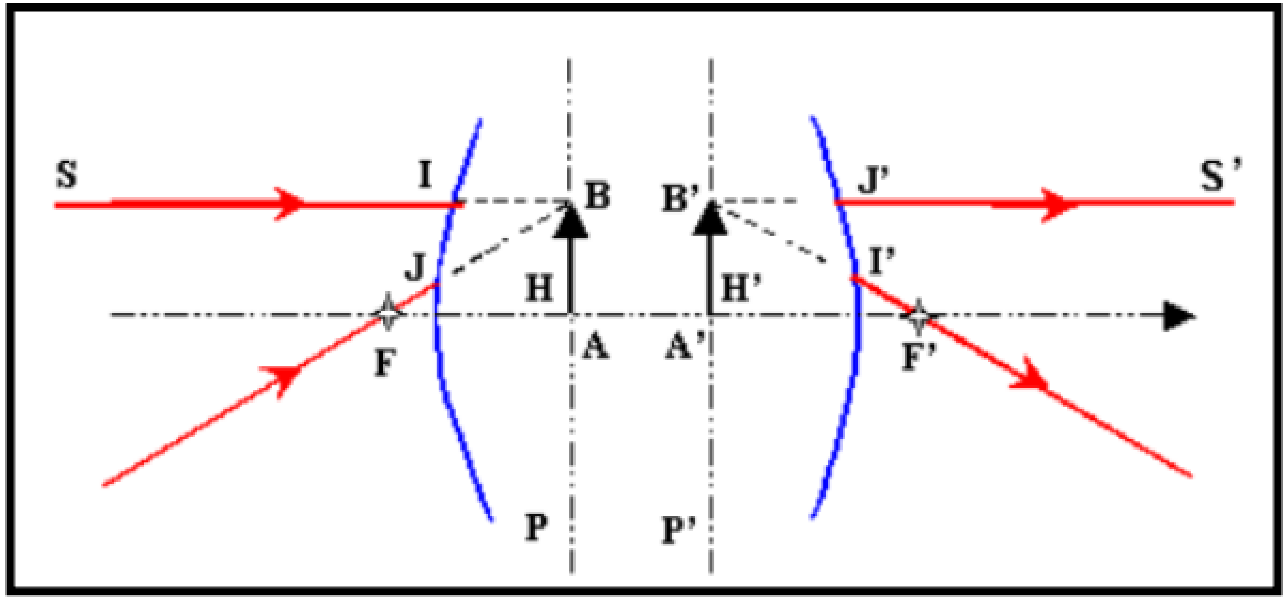
un **objet HB plan et perpendiculaire à l'axe principal**.

La correspondance de plan à plan dans les systèmes centrés, **donnera une image H'B' plane et perpendiculaire** à l'axe principal.

Pour tout système centré à foyer

l'objet virtuel HB est situé sur le plan P ⇒ **une image H'B' virtuelle située sur un plan P'**

le grandissement égale à 1.



- AB appartient alors au plan principal objet P: lieu des points d'intersection des incidents parallèles à l'axe avec les émergents correspondants passants par le foyer F'
- A'B' appartient alors au plan principal image P': lieu des points d'intersection des incidents passants par F' et des émergents // à l'axe principal.
- H est le point d'intersection du plan principal objet avec l'axe principal
- H ' est le point d'intersection du plan principal image avec l'axe principal,

la distance focale

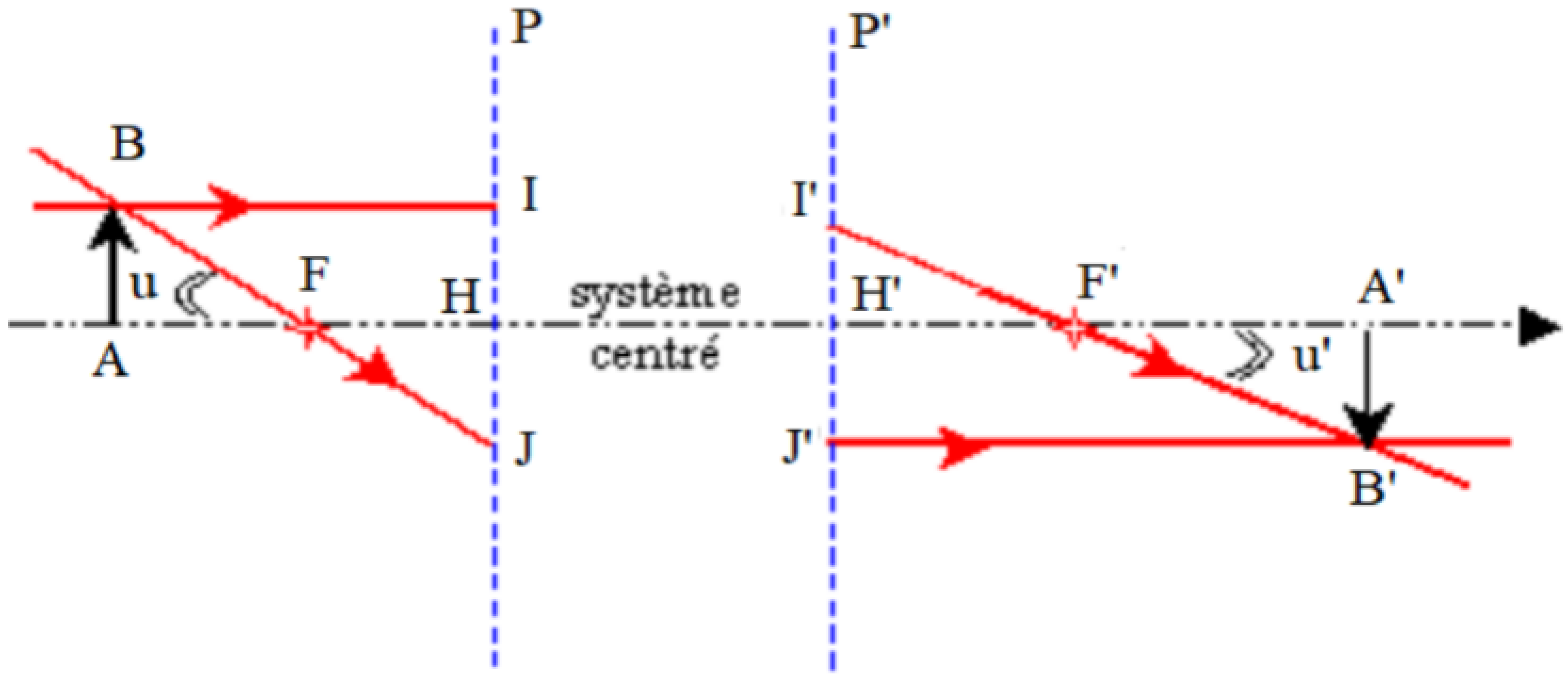
Distance focale objet **f = HF** et la distance **focale image f ' = H 'F'.**

L'ensemble des points (F, F', H et H') sont appelés les points cardinaux d'un système centré .

III. Construction de l'image d'un objet AB à travers un système centré :

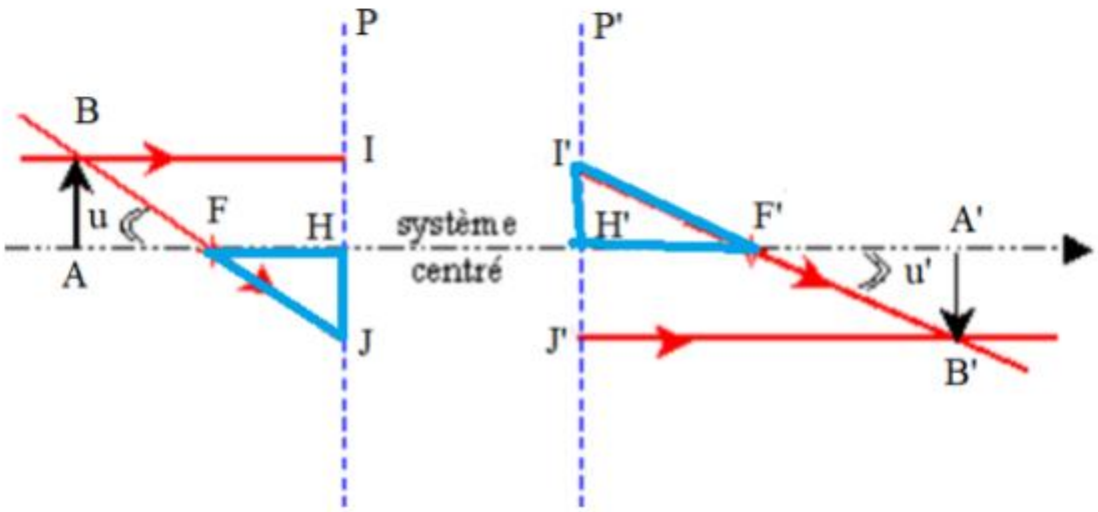
1. Formule de conjugaison d'un système centré :

On considère un système centré de points cardinaux (F, F', H et H') et soit un objet AB réel situé sur l'axe principal du système.



Formules de conjugaison avec Origines aux points principaux H et H'

Exprimons (JH/JI)



On considère les triangles semblables (BIJ) et (HFJ), nous avons :

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{JI}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{IB}} \quad \text{avec } \overline{IB} = \overline{HA} \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{IJ}} \quad \boxed{1}$$

On considère les triangles semblables (H'F'I') et (J'B'I'), nous avons :

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{J'B'}} = \frac{\overline{H'I'}}{\overline{J'I'}} \quad \text{avec } \overline{J'B'} = \overline{H'A'} \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{JI}} \quad \boxed{2}$$

Formules de conjugaison avec Origines aux points principaux H et H’

En sommant membre à membre les équations (1) et (2) on obtient :

Système Centré a pour indices (n/N/n’)

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{IJ}} \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{JI}} \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{IJ}} + \frac{\overline{HI}}{\overline{JI}} = \frac{\left(\overline{HJ} - \overline{HI}\right)}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{\mathrm{IJ}}}{\overline{\mathrm{IJ}}} = 1$$

Démonstration N°1

Donc : $\dfrac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1$

Formules de conjugaison avec Origines aux points principaux H et H'

Démonstration N°2

$$\overline{FA} = \overline{FH} + \overline{HA} \qquad \overline{F'A'} = \overline{F'H'} + \overline{H'A'}$$

LA relation de Newton devient :

$$\left(\overline{FH} + \overline{HA}\right)\left(\overline{F'H'} + \overline{H'A'}\right) = \overline{HF}\,\overline{H'F'}$$

$$\Rightarrow \overline{FH}\,\overline{F'H'} + \overline{FH}\,\overline{H'A'} + \overline{HA}\,\overline{F'H'} + \overline{HA}\,\overline{H'A'} = \overline{HF}\,\overline{H'F'}$$

On divise par $\overline{HA}\,\overline{H'A'} \Rightarrow \dfrac{\overline{FH}}{\overline{HA}} + \dfrac{\overline{F'H'}}{\overline{H'A'}} + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} - 1 = 0$$

Or $\overline{HF} = -\dfrac{n}{n'}\overline{H'F'}$

Donc: $\Rightarrow -\dfrac{n}{n'}\dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{HA}} + \dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1$

$$\Rightarrow -\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n'}{\overline{H'A'}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}}$$

Système Centré a pour indices (n/N/n')

$$\boxed{\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{\overline{HF}}}$$

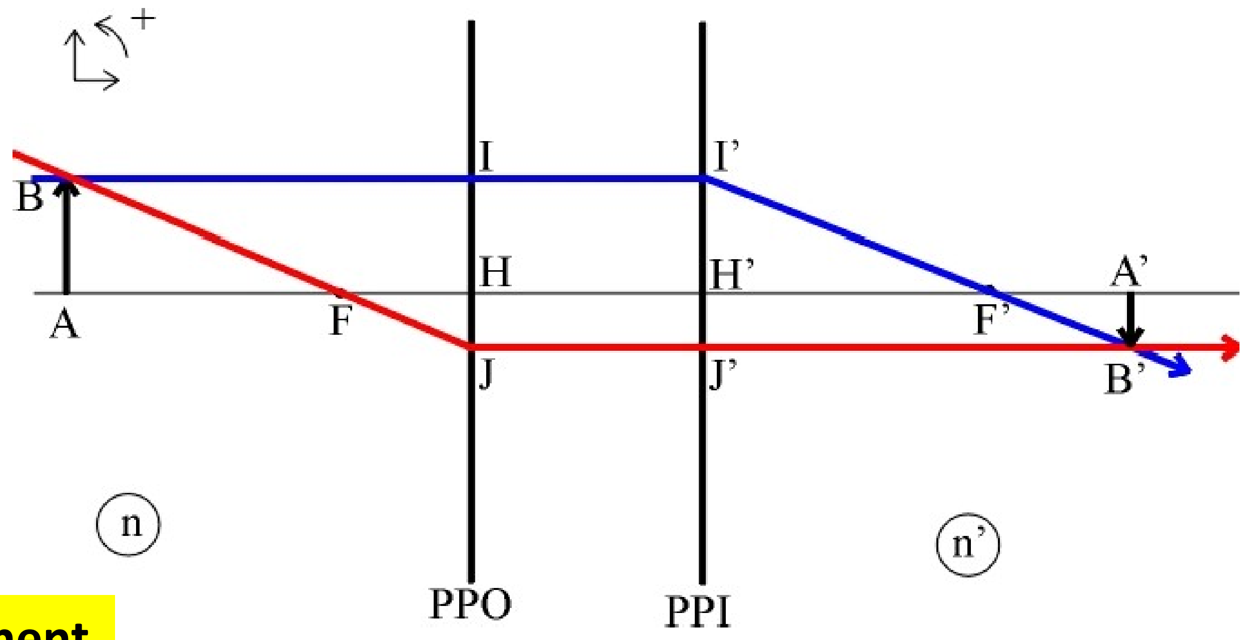
Relation de Descartes Pour les systèmes centrés

L'origine des proximités est prise l'une sur H et l'autre sur H'. La convergence C est

$C = \dfrac{n'}{\overline{H'F'}}$ en dioptries ou m^{-1}.

Image d’un objet plan par un système centré

On suppose que les positions de H, H’, F, F’ sont connues.



Formules du grandissement

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{FA}} = -\frac{f}{\overline{FA}} \quad \textbf{(a)}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{H'I'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'H'}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \quad \textbf{(b)}$$

Formules de conjugaison avec origines aux Foyers F et F’

L’égalité entre la formule (a) Et la formule (b) donne :

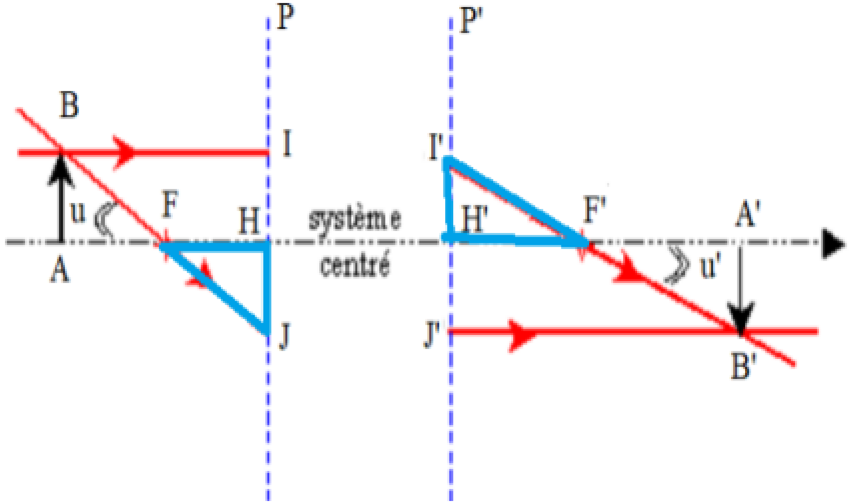
$$\overline{F'A'}\,\overline{FA} = f\,f'$$

Dans la formule (a) et (b) je remplace A’B’ puis AB

Même démonstration = tag (u)

C'est la relation de conjugaison des systèmes centrés à foyers avec origine aux points principaux H et H'. Si on pose f = HF et f' = H'F' alors cette formule devient :

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1 \qquad \textbf{Alors} \quad : \frac{f}{\overline{HA}} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1$$



Grandissement

Dans les triangles AB F et A'B'F on a :

$$\tan u = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{H'J'}}{\overline{HF}} \quad \text{ce qui donne} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f}{\overline{AF}}$$

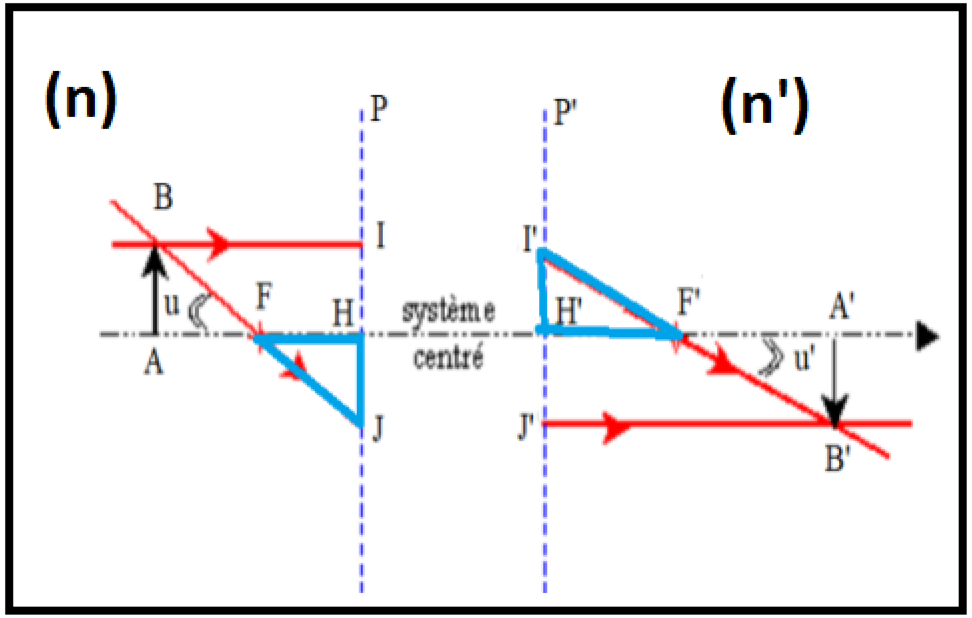
$$\tan u' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{H'I'}}{\overline{H'F'}} = \frac{\overline{AB}}{f'} \quad \text{ce qui donne} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'F'}}{f'}$$

2. La vergence d'un système centré :

$$V_S = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$: exprimée en dioptrie (m^{-1}).

Un système centré est **convergent si sa vergence est positive : Vs > 0**

Un système centré est **divergent si sa vergence est négative : Vs < 0**



IV. Association de deux systèmes centrés à foyers :

1. Association de deux systèmes dioptriques :

Quand on associe deux systèmes centrés de manière à ce que leurs axes principaux soient confondus on obtient un seul système S centré équivalent.

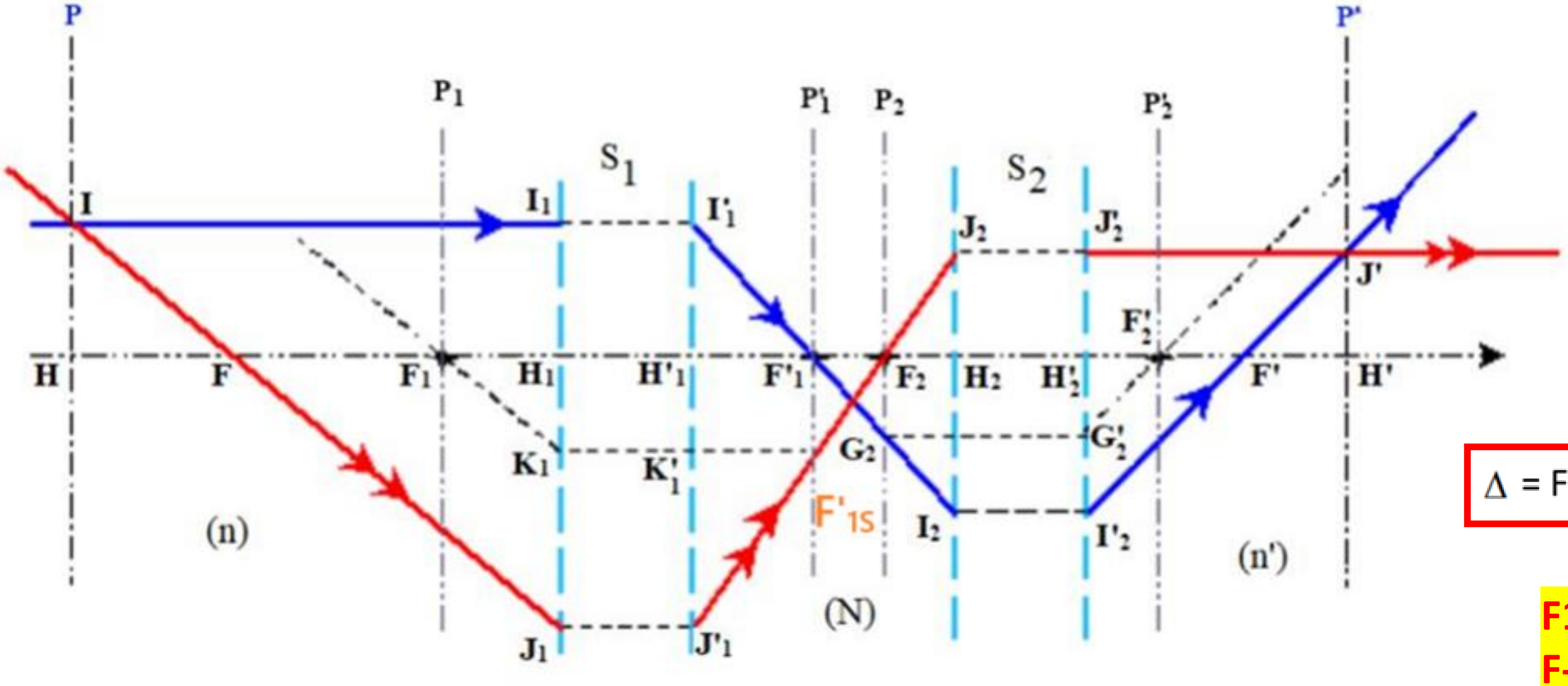
Soient 2 systèmes centrés S1 et S2 de points cardinaux (H1, F1, H' 1, F' 1) et (H2, F2, H' 2, F' 2)

Déterminer

Pour le **système S équivalent les points cardinaux (H, H', F et F').**

a. Construction géométrique :

$$f_1 = \overline{H_1F_1} \quad , \quad f_2 = \overline{H_2F_2} \quad , \quad f_1' = \overline{H_1'F_1'} \quad , \quad f_2' = \overline{H'_2F_2'}$$



$$\Delta = F'_1F_2$$

$$e = \overline{H'_1H_2}$$

$$\Delta = e + f_2 - f'_1$$

$$\boxed{\Delta = F'_1F_2 = F'_1H'_1 + H'_1H_2 + H_2F_2}$$

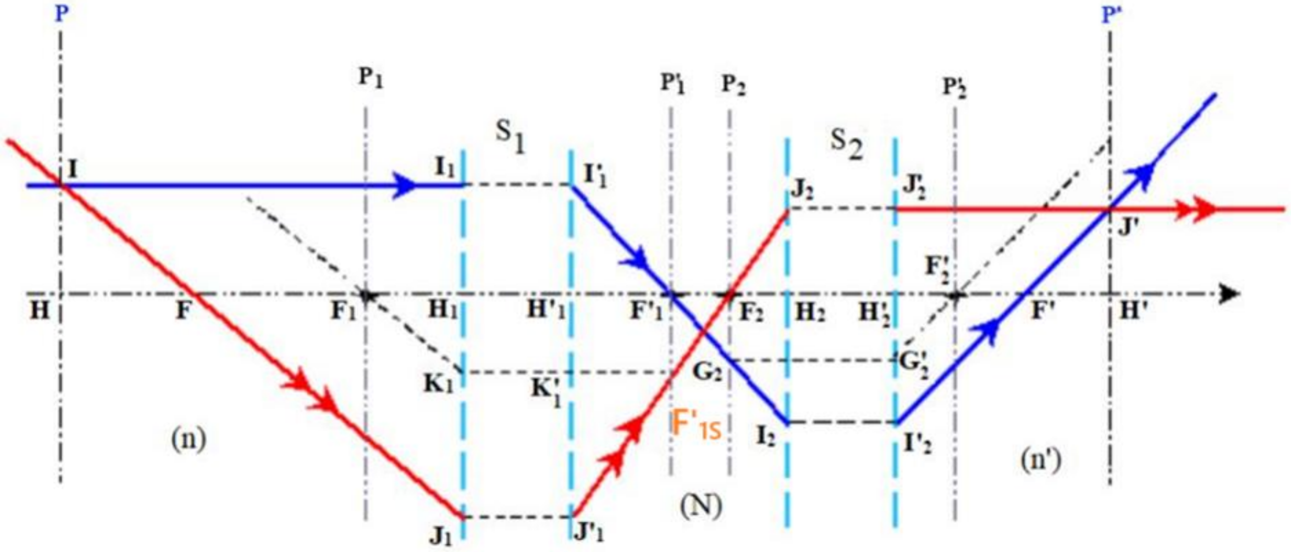
F1-----F'1 par Syst S1
F-------F2 par Syst S1
F'1----- F' par syst S2
F2------F'2 par syst S2
F1------F'2 par syst total
F-------F' par syst total

G_2 : foyer secondaire: Tout rayon passant par G_2 émerge // rayon passant par F'_2

$J_1F//K_1F_1$: J'_1J_2 passe par le foyer secondaire Image de S_1

a. Construction géométrique :

$f_1 = \overline{H_1F_1}$, $f_2 = \overline{H_2F_2}$, $f_1' = \overline{H_1'F_1'}$, $f_2' = \overline{H'_2F_2'}$



$\Delta = F'_1F_2$

$e = \overline{H'_1H_2}$

$\Delta = e + f_2 - f'_1$

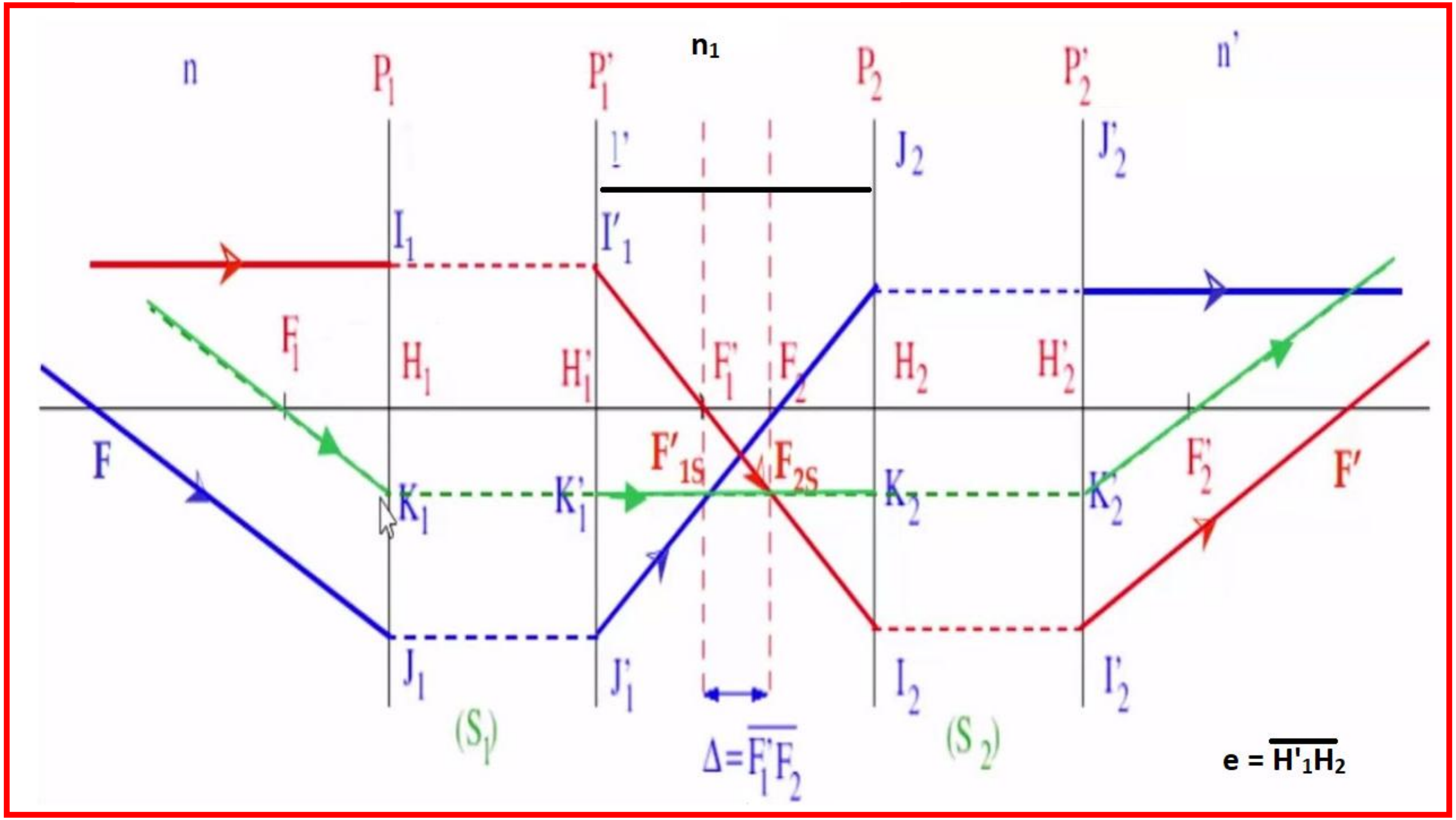
G_2 : foyer secondaire: Tout rayon passant par G_2 émerge // rayon passant par F'_2

$J_1F // K_1F_1$: J'_1J_2 passe par le foyer secondaire Image de S_1

a. Construction géométrique :

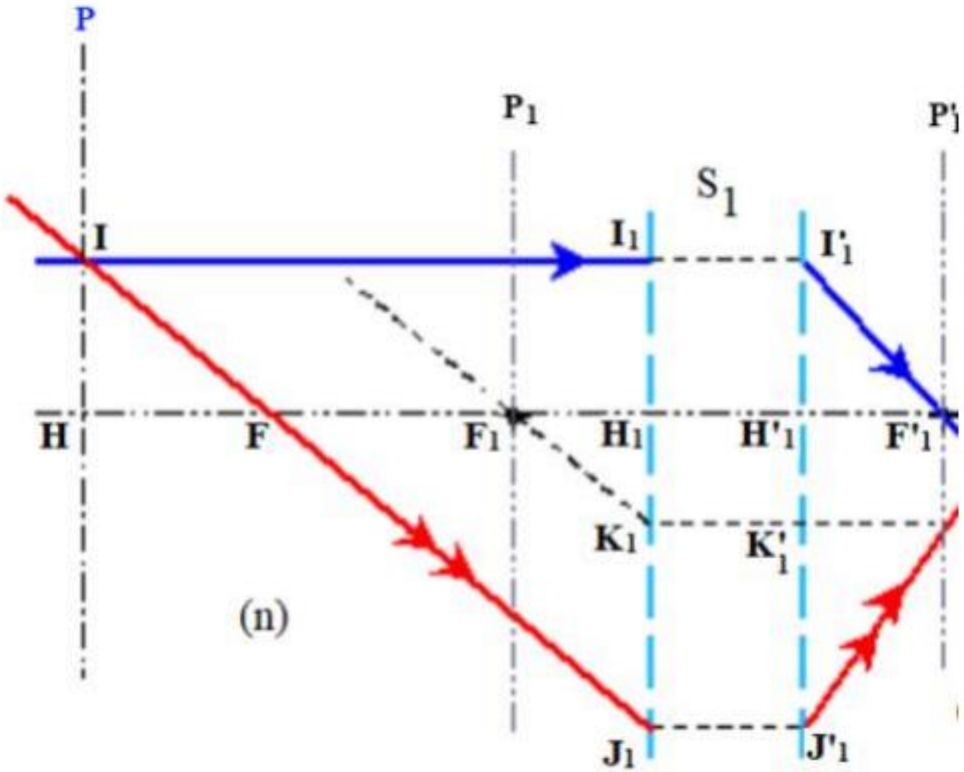
$f_1 = \overline{H_1F_1}$, $f_2 = \overline{H_2F_2}$, $f_1' = \overline{H_1'F_1'}$, $f_2' = \overline{H'_2F_2'}$

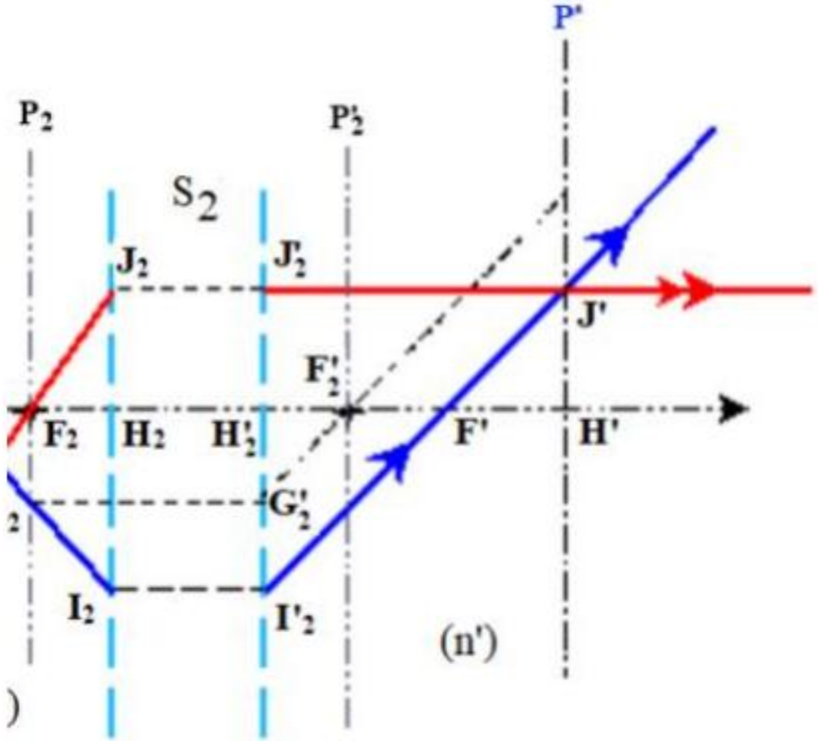
$\Delta = \overline{F'_1F_2}$; $e = \overline{H_1' H_2}$; $\Delta = e + f_2 - f'_1$



F1-----F'1 par Syst S1
F-------F2 par Syst S1
F'1----- F par syst S2
F2------F'2 par syst S2

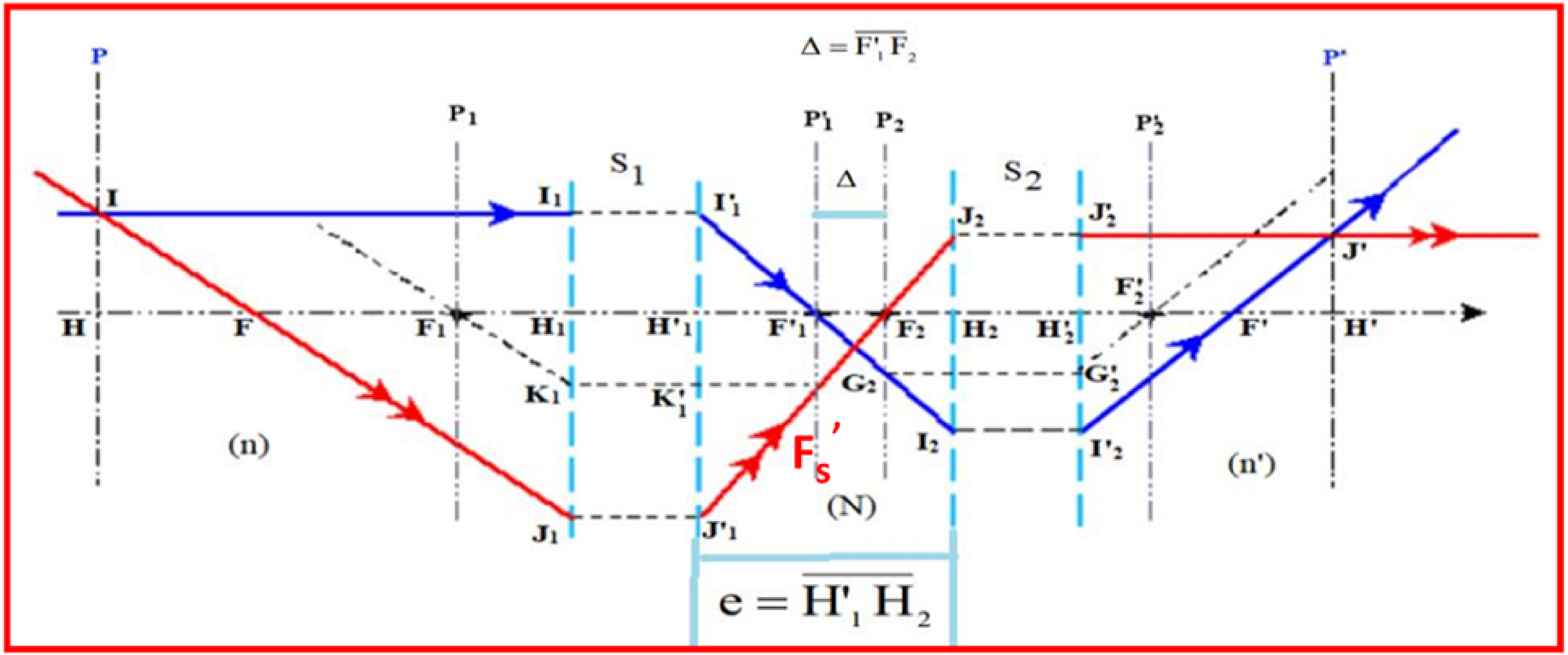
Schémas simplifiées





Explications :

- les indices de réfraction des milieux extrêmes sont n et n’
- l'indice du milieu compris entre S_1 et S_2 est N.
- **Bleu :** L’incident II_1 // à l’axe principal émerge en $I'_1F'_1$ à la traversée du système S_1.
- **Bleu :** $I'_1F'_1I_2$ est alors un nouveau incident qui va émerger en I'_2F' // à $G'_2F'_2$.
- **Rouge**: Le rayon J'_2J'// à l’axe principal est l’émergent d’un faisceau incident $J'_1F_2J_2$ traversant le système S
- **Rouge:** $J'_1F_2J_2$ est un émergent d’un incident FJ_1, qui est // à F_1K_1, incident passant par le foyer objet de S_1.

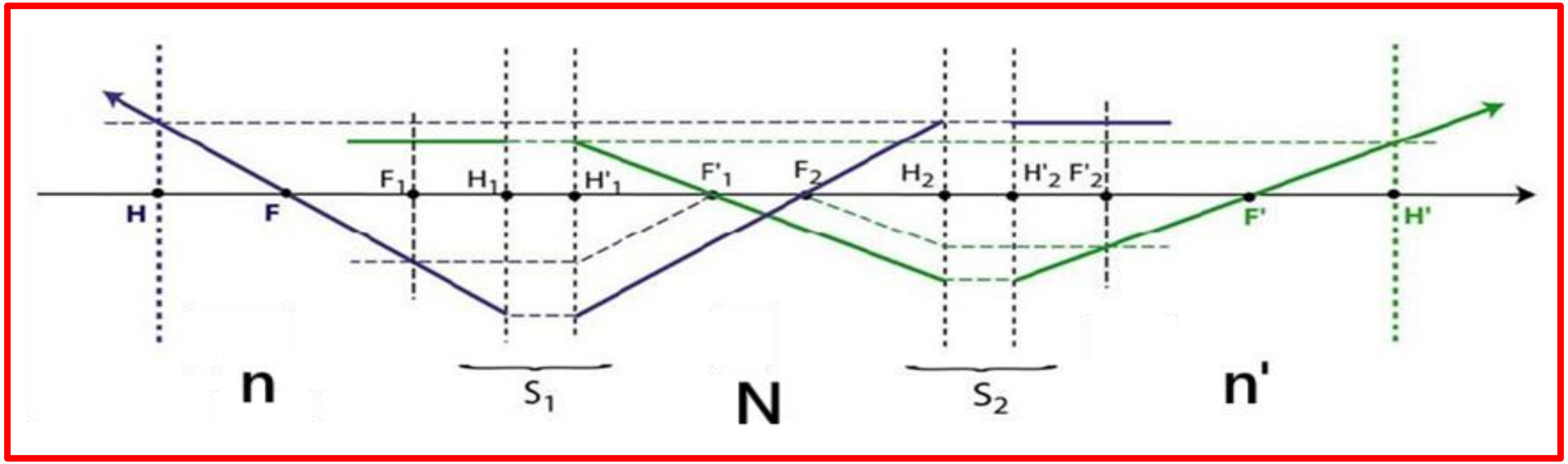


Explications :

- les indices de réfraction des milieux extrêmes sont n et n'
- l'indice du milieu compris entre S_1 et S_2 est N.
- L'incident II_1 // à l'axe principal émerge en $I'_1F'_1$ à la traversée du système S_1.
- $I'_1F'_1I_2$ est alors un nouveau incident qui va émerger en I'_2F' // à $G'_2F'_2$.
- Le rayon J'_2J'// à l'axe principal est l'émergent d'un faisceau incident $J'_1F_2J_2$ traversant le système S_2.
- $J'_1F_2J_2$ est un émergent d'un incident FJ_1, qui est // à F_1K_1, incident passant par le foyer objet de S_1.
- On appelle l'intervalle optique Δ du système équivalent S, la quantité $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$
- On appelle l'épaisseur du système équivalent S, la quantité H'_1H_2: $e = \overline{H'_1 H_2}$

$$\Delta = e + f_2 - f'_1$$

Association de deux systèmes centrés dioptriques par construction géométrique



Soient deux systèmes centrés S1 d'indice (n, N) et S2 d'indice (N, n'), caractérisés par leurs éléments cardinaux respectifs et leurs vergences V1 et V2.

Pour S1: $f_1 = -\frac{n}{V_1}$ *et* $f_1' = \frac{N}{V_1}$ Et pour S2: $f_2 = -\frac{N}{V_2}$ *et* $f_2' = \frac{n'}{V_2}$

Relation de conjugaison avec origines aux plans principaux H et H'

$$\overline{FA} = \overline{FH} + \overline{HA} \qquad \overline{F'A'} = \overline{F'H'} + \overline{H'A'}$$

LA relation de Newton devient :

$$\left(\overline{FH} + \overline{HA}\right)\left(\overline{F'H'} + \overline{H'A'}\right) = \overline{HF}\,\overline{H'F'}$$

$$\Rightarrow \overline{FH}\,\overline{F'H'} + \overline{FH}\,\overline{H'A'} + \overline{HA}\,\overline{F'H'} + \overline{HA}\,\overline{H'A'} = \overline{HF}\,\overline{H'F'}$$

On divise par $\overline{HA}\,\overline{H'A'} \Rightarrow \dfrac{\overline{FH}}{\overline{HA}} + \dfrac{\overline{F'H'}}{\overline{H'A'}} + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} - 1 = 0$$

Or $\overline{HF} = -\dfrac{n}{n'}\overline{H'F'}$

Donc : $\Rightarrow -\dfrac{n}{n'}\dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{HA}} + \dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1$

$$\Rightarrow -\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n'}{\overline{H'A'}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}}$$

$$\boxed{\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{\overline{HF}}}$$

Relation de Descartes
Pour les systèmes
centrés

L'origine des proximités est prise l'une sur H et l'autre sur H'. La convergence C est

$C = \dfrac{n'}{\overline{H'F'}}$ en dioptries ou m^{-1}.

2. La vergence de deux systèmes centrés à foyers

$$f' = \overline{H'F'} = -\frac{f'_2 f'_1}{\Delta}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = HF$$

La Vergence du système S équivalent :

$$V_S = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = -n'\frac{\Delta}{f'_2 f'_1} \qquad (*)$$

Les vergences V_{S1} et V_{S2} des deux systèmes S_1 et S_2 respectivement sont données par :

$$V_{S1} = \frac{N}{f_1'} = -\frac{n}{f_1} \quad ; \quad V_{S2} = \frac{n'}{f_2'} = -\frac{N}{f_2}$$

En remplaçant Δ par son expression dans l'équation (*) et en développant V_S, on trouve

$$V_S = V_{S1} + V_{S2} - e\frac{V_{S1} \cdot V_{S2}}{N}$$

C'est la formule de Gullstrand, avec e est l'épaisseur et N l'indice du milieu compris entre S1 et S2

Exercice1 : Système dioptrique

Soient deux dioptres sphériques que l'on représente sur la figure ci-dessous

On pose : $\overline{S_1C_1} = -\overline{S_2C_2} = \overline{C_1C_2} = R \qquad (n_1 = 1 \text{ et } n_2 = 1{,}5)$

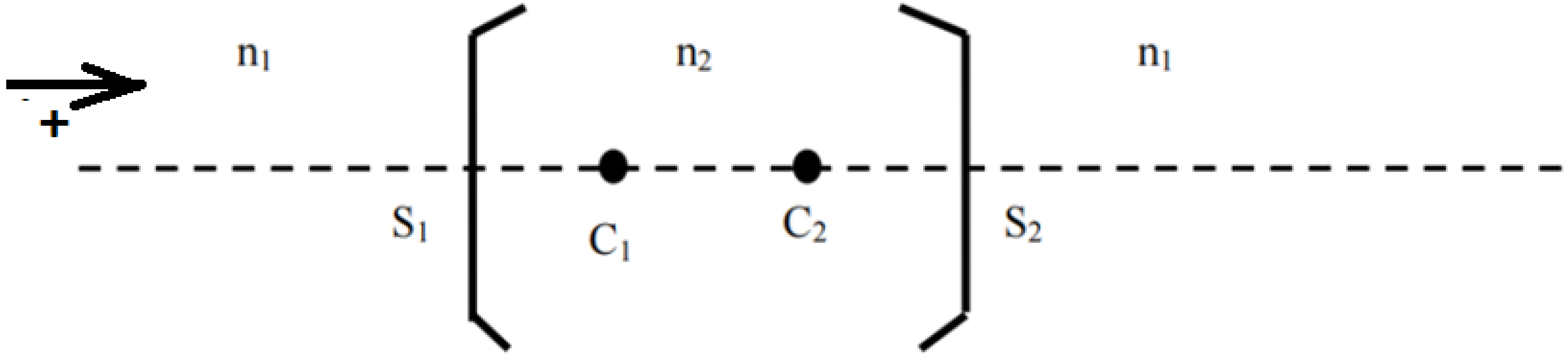
1- Déterminer les positions des foyers de chacun des dioptres.

2- Déterminer les plans principaux de chacun des dioptres.

3- Déterminer les foyers du système

4- Quelles relations doivent vérifier les distances focales du système.

5- Déterminer géométriquement la position du plan principal image et en déduire la position du plan principal objet. Vérifier ce dernier résultat à partir de construction géométrique.



Correction de l'exercice 1

Pour le 1er dioptre

1- a- Position des foyers F_1 et F'_1 du 1er dioptre

$$\underset{(n_1)}{A} \xrightarrow{D_1(S_1,\, C_1)} \underset{(n_2)}{A_1} \xrightarrow{D_2(S_2,\, C_2)} \underset{(n_1)}{A'} \quad (\text{ avec : } \overline{S_1C_1} = -\,\overline{S_2C_2} = \overline{C_1C_2} = R)$$

Formules de conjugaison :

$$\text{Pour } D_1 : \quad \frac{n_1}{\overline{S_1A}} - \frac{n_2}{\overline{S_1A_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{S_1C_1}} = \frac{n_1 - n_2}{R} \qquad (1)$$

$$\text{Pour } D_2 : \quad \frac{n_2}{\overline{S_2A_1}} - \frac{n_1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{S_2C_2}} = \frac{n_1 - n_2}{R} \qquad (2)$$

$$\boxed{\overline{S_1F_1} = \frac{n_1\overline{S_1C_1}}{n_1 - n_2} = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2}} \qquad \textbf{AN :} \quad \boxed{\overline{S_1F_1} = -\,2\,R}$$

$$\boxed{\overline{S_1F'_1} = \frac{n_2\overline{S_1C_1}}{n_2 - n_1} = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}} \qquad \textbf{AN :} \quad \boxed{\overline{S_1F'_1} = 3\,R}$$

Pour le 2eme dioptre

b- Position des foyers F_2 et F'_2 du 2ème dioptre

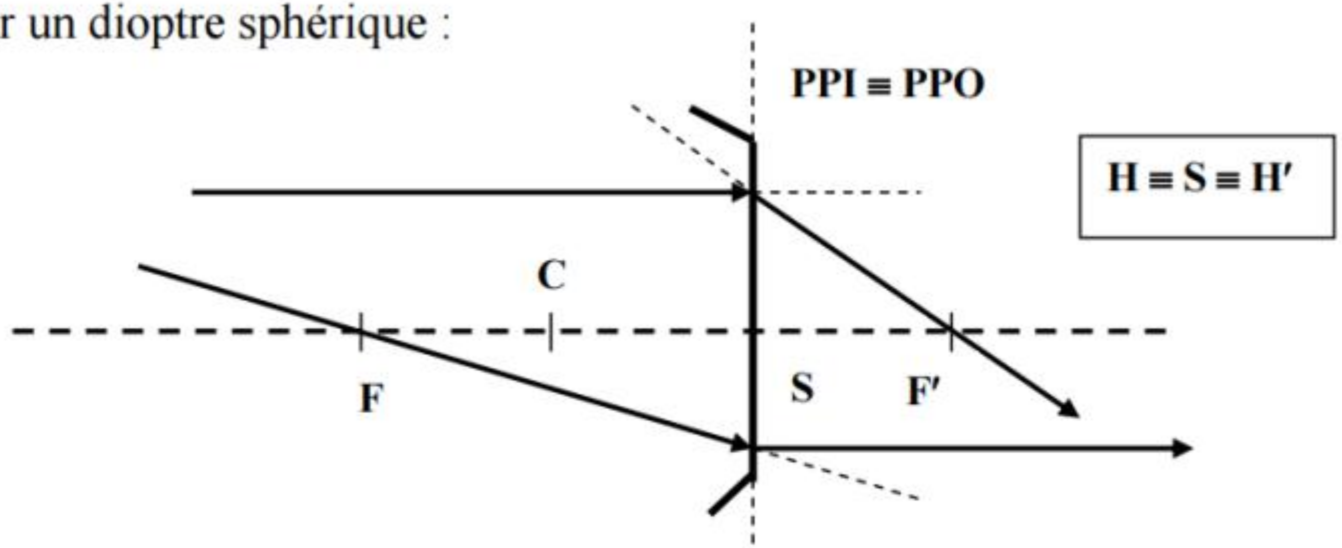
$$\boxed{\overline{S_2F_2} = \frac{n_2\overline{S_2C_2}}{n_2-n_1} = \frac{n_2R}{n_1-n_2}}$$

AN : $\boxed{\overline{S_2F_2} = -3\,R}$

$$\boxed{\overline{S_2F'_2} = \frac{n_1\overline{S_2C_2}}{n_1-n_2} = \frac{n_1R}{n_2-n_1}}$$

AN : $\boxed{\overline{S_2F'_2} = 2\,R}$

2- Pour un dioptre sphérique :



Donc les plans principaux sont confondus et passent par le sommet S du D.S :

Pour D_1 (S_1,C_1) : $H_1 \equiv S_1 \equiv H_1'$

Pour D_2 (S_2,C_2) : $H_2 \equiv S_2 \equiv H_2'$

3- Déterminons les foyers du système : (F et F')

- **Foyer objet F :**

$$A \xrightarrow{D_1 (S_1, C_1)} A_1 \xrightarrow{D_2 (S_2, C_2)} A'$$

$$A \equiv F \longrightarrow A_1 \equiv F_2 \longrightarrow A' \to \infty$$

Voir cours Système centré
(F/S1 a pour image F2)
(F1/S1 a pour image F'1)

F_2 est l'image de F à travers le 1er dioptre (D_1)

Appliquons la formule de Newton à $D_1 \Rightarrow \overline{F_1F} \,.\, \overline{F'_1F_2} = \overline{S_1F_1} \,.\, \overline{S_1F'_1} = f_1 f'_1$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1 f'_1}{\overline{F'_1F_2}}}$$

AN : $f_1 = \overline{S_1F_1} = -2R$; $f'_1 = \overline{S_1F'_1} = 3R$ et $\overline{F'_1F_2} = -3R$.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_1F} = 2R} \Rightarrow F \equiv S_1 \equiv F_2$$

Appliquons la formule de Newton à $D_1 \Rightarrow \overline{F_1F} \, . \, \overline{F_1'F_2} = \overline{S_1F_1} \, . \, \overline{S_1F_1'} = f_1 \, f_1'$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1 \, f_1'}{\overline{F_1'F_2}}}$$

AN : $f_1 = \overline{S_1F_1} = -2\,R$; $f_1' = \overline{S_1F_1'} = 3\,R$ et $\overline{F_1'F_2} = -3R$.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_1F} = 2R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \equiv S_1 \equiv F_2}$$

$\overline{F_1'F_2} = F_1S_1 + S_1S_2 + S_2F_2$

$= -3R + 3R - 3R$

$= -3R$

$F_1F = 2R = \overline{F_1S_1} \Rightarrow$

$F \equiv S_1 \equiv F_2$

- **Foyer image F′**

$$A \xrightarrow{D_1\,(S_1,\,C_1)} A_1 \xrightarrow{D_2\,(S_2,\,C_2)} A'$$

$$A \to \infty \longrightarrow A_1 \equiv F'_1 \longrightarrow A' \to F'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_1 \xrightarrow{D_2} F' \\ F_2 \xrightarrow{D_2} F'_2 \end{array} \right.$$

F' est l'image de F'_1 à travers "D_2"

Appliquons la formule de Newton à $D_2 \Rightarrow$ $\overline{F_2F'_1}\;\overline{F'_2F'} = \overline{S_2F_2}\;\overline{S_2F'_2} = f_2 f'_2$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F'_2F'} = \frac{f_2 f'_2}{\overline{F_2F'_1}}}$$

AN : $f_2 = \overline{S_2F_2} = -\,3\,R$; $f'_2 = \overline{S_2F'_2} = 2\,R$ et $\overline{F_2F'_1} = 3R$.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F'_2F'} = -\,2R} \qquad \Rightarrow \qquad F' \equiv S_2 \equiv F'_1$$

$$\overline{F_2F'_1} = F_2S_2 + S_2S_1 + S_1F'_1$$
$$= \cancel{3R} - \cancel{3R} + 3R$$

4- La relation entre les distances focales du système :

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{HF}} = -1 \quad \text{(Les milieux extrêmes sont identiques)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{H'F'} = -\overline{HF}}$$

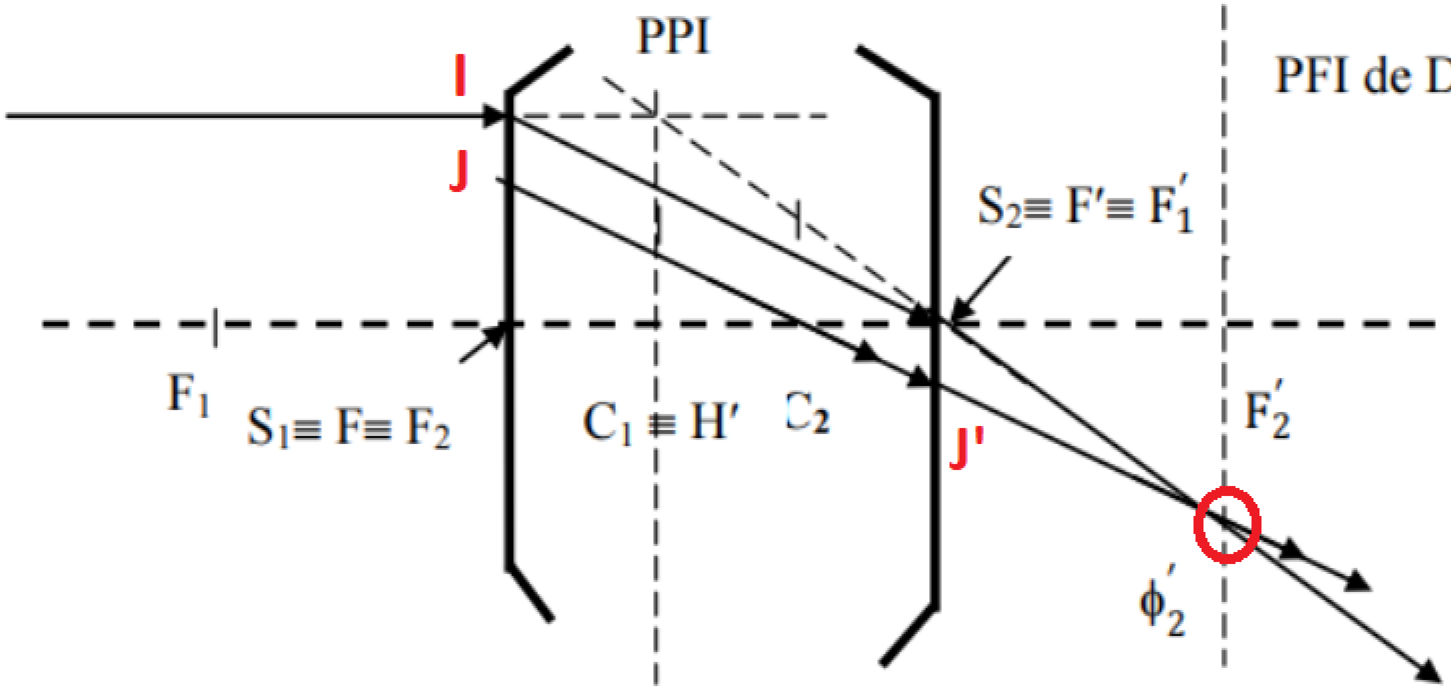
HF = distance focale objet du syteme total

H'F' = distance focale image du systeme total

parce que pour un dioptre (systeme optique

f/f' = -n/n'

5- Détermination du plan principal image :



D1 donne: S1=F=F2
D2 donne: S2=F'=F'1

Foyer secondaire $= \phi'_2$

question N° 4

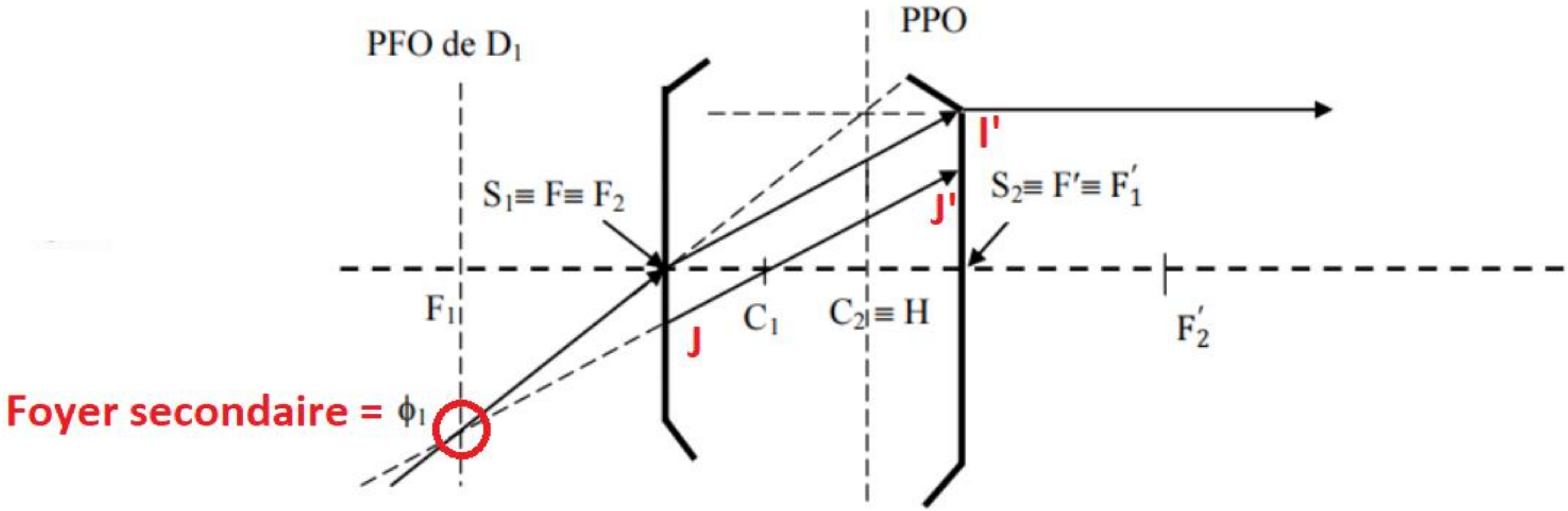
$$\boxed{\overline{H'F'} = - \overline{HF}}$$

D'après la construction géométrique, on mesure : $\overline{H'F'} = 2\,R \Rightarrow \overline{HF} = -\,2R$

JJ' // IS_2 donc ils convergent vers un point foyer secondaire (D_2).

JJ' passe par le centre C_2 du Dioptre D_2

- Détermination du plan principal objet (Vérification géométrique) :



S_1I' // JJ' donc ils se rencontrent au foyer objet secondaire
JJ' passe par centre C_1 du dioptre D_1