Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Série n° 3

Exercice 1. 1) Déterminer les primitives (sur des intervalles à préciser) des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$. b) $f_2(x) = \sin(2x)$. c)* $f_3(x) = \cos(3x+\pi)$. d)* $f_4(x) = (2x+1)^3$. e) $f_5(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}\cdot$

2) Même question pour les fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2+1}\cdot$ b)* $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\cdot$ c) $f_3(x) = \dfrac{\ln x}{x}\cdot$ d)* $f_4(x) = \cos x \sin^2 x$. e) $f_5(x) = \dfrac{1}{x\ln x}\cdot$

Exercice 2. Soit $f\colon [0\,,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0\,,\pi]$ telle que $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in\,]0\,,\pi[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 3. 1) Calculer les intégrales suivantes en justifiant leurs existence :

a)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. c)* $\displaystyle\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$. d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x-2}\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x$. f)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

2) Même question pour les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$. c)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. d)* $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arctan(x^2)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. 1) Déterminer les primitives (sur des intervalles à préciser) des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \ln x$. b)* $f_2(x) = \arctan(x)$. c) $f_3(x) = x\arctan(x)$. d)* $f_4(x) = x^2\ln x$. e) $f_5(x) = (\ln x)^2$.

2) Même question pour les fonctions suivantes :

a)* $f_1(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\cdot$ b) $f_2(x) = x(\arctan(x))^2$. c) $f_3(x) = 4x^2\mathrm{e}^{2x}$. d)* $f_5(x) = x^2\sin x$.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 0$.

1) On pose

$$a = \int_0^x \mathrm{e}^t\cos(2t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b = \int_0^x \mathrm{e}^t\sin(2t)\,\mathrm{d}t.$$

Etablir une relation entre a et b. En déduire les valeurs de a et b.

2) Considérons maintenant

$$I = \int_0^x \mathrm{e}^t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^x \mathrm{e}^t\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 6. 1) Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variables convenable :

a)* $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$. c)* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$. d)* $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

2) Même question pour les intégrales suivantes :

a)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. b)* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. c)* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$. d)* $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7*. Considérons la fonction $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}\cdot$$

1) Vérifier que F est définie sur $\mathbb{R}$; et qu'elle est impaire.
2) Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée. En déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_F$ de F en son point d'absscisse 0.
4) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) < 2$. En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$.
5) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_F$ de F.

Exercice 8* (Intégrales de Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathtt{d}x$ et $0 < W_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\cdot$
2) Montrer que (W_n) est strictement décroissante. En déduire que (W_n) est convergente.
3) Établir une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}. En déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.
4)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{W_n}{W_{n-1}} < 1$. Montrer aussi que (nW_nW_{n-1}) est constante.
5)* Donner un équivalent de W_n. En déduire un équivalant de C_{2n}^n.

Exercice 9. 1) Donner les primitives (en précisant leurs intervalles de définition) des fonctions suivantes :
a)* $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}\cdot$ b) $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}\cdot$ c)* $f_3(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^2}\cdot$ d) $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}\cdot$ e) $f_5(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\cdot$
2) Même question pour les fonctions suivantes :
a) $f_1(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}\cdot$ b)* $f_2(x) = \dfrac{2x}{x^2-x+1}\cdot$ c)* $f_3(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}\cdot$ d) $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3-1}\cdot$
3) Même question pour les fonctions suivantes :
a) $f_1(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\cdot$b)* $f_2(x) = \frac{1}{x^3-2x^2-x+2}\cdot$c)* $f_3(x) = \dfrac{4x^2}{x^4-1}\cdot$d) $f_4(x) = \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\cdot$e)* $f_5(x) = \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\cdot$

Exercice 10. 1) Donner les primitives (en précisant leurs intervalles de définition) des fonctions suivantes :
a) $f_1(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}\cdot$ b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot$ c)* $f_3(x) = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{x-2}}\cdot$ d)* $f_4(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\cdot$ e) $f_5(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\cdot$
2) Même question pour les fonctions suivantes :
a) $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot$ b) $f_2(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$.

Exercice 11. 1) Donner les primitives (en précisant leurs intervalles de définition) des fonctions suivantes :
a) $f_1(x) = \sin^2 x \cos^5 x$. b)* $f_1(x) = \sin^5 x \cos^4 x$. c) $f_2(x) = \cos^2 x \sin^4 x$. d)* $f_2(x) = \cos^3 x \sin^3 x$.
2) Même question pour les fonctions suivantes :
a)* $f_1(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{2+\sin x+\cos x}\cdot$ b) $f_2(x) = \dfrac{1}{1+2\cos x}\cdot$ c)* $f_3(x) = \dfrac{1}{\cos x}\cdot$ d) $f_5(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\cdot$

---

* : **La correction de cette question ne sera pas donné en classe.**