Annexe

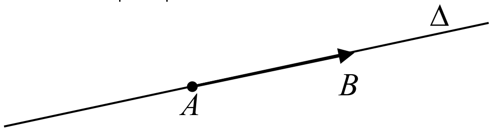
Compléments de mathématiques

I – Vecteurs et systèmes de coordonnées

I.1 – Vecteurs

I.1.1 – Définition : On appelle un vecteur toute grandeur orientée qui possède une direction et un sens (exemples vitesse d'un point matériel, champ gravitationnel, champ magnétique terrestre,…)

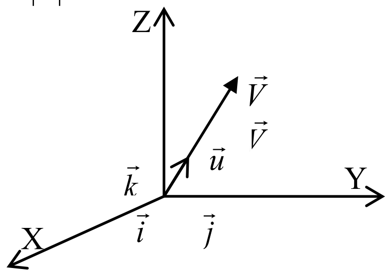
Notation : un vecteur dont l'origine est le point A et l'extrémité est le point B est noté $\overrightarrow{AB}$, son module (longueur du vecteur) est noté $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ou AB.



I.1.2 – Repérage d'un vecteur

Soient (OXYZ) un repère orthonormé direct et ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) une base de l'espace vectoriel.

i- La direction et le sens d'un vecteur $\vec{V}$ peuvent être définis par un vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{V}$. Son module est donné par $\left|\vec{V}\right| = V$. On écrit $\vec{V} = V\vec{u}$.



ii- En utilisant directement la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), ce vecteur peut être mis sous la forme

$$\vec{V} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

où x, y, z sont les composantes du vecteur $\vec{V}$. On note $\vec{V}\,_{ijk}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque :

Pour un même vecteur, si on change de base on change de composantes et pour une même base, si on change de composantes on change de vecteur.

I.2 – Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un scalaire noté

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right|.\left|\vec{V}_2\right|.\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

i- Propriétés du produit scalaire

- Si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux leurs produit scalaire est nul et inversement
  $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \;\Rightarrow\; \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0$ et $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$
- Commutativité
  $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_2.\vec{V}_1$

- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

  $\vec{V}.\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=\vec{V}.\vec{V}_1+\vec{V}.\vec{V}_2$

ii- Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée

Soient $\vec{V}_1=x_1.\vec{i}+y_1.\vec{j}+z_1.\vec{k}$ et $\vec{V}_2=x_2.\vec{i}+y_2.\vec{j}+z_2.\vec{k}$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

car pour une base orthonormée $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$

Cas particulier : Module d'un vecteur

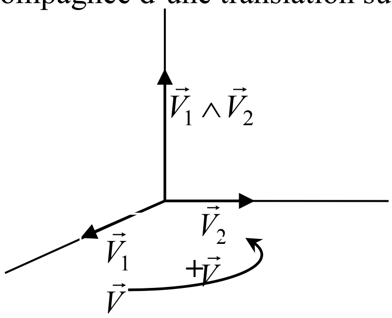
$$\vec{V}_1.\vec{V}_1=\vec{V}_1^{\,2}=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}$$

$$\left|\vec{V}_1\right|=V_1=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}$$

I.3 – Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur noté $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2$ défini par

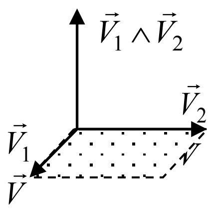
- Sa direction perpendiculaire au plan défini par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Le sens tel que le trièdre $\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)$ soit direct. C'est-à-dire toute rotation qui amène $\vec{V}_1$ vers $\vec{V}_2$ est accompagnée d'une translation suivant le vecteur $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2$.



- Son module

  $\left|\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right|=\left|\vec{V}_1\right|.\left|\vec{V}_2\right|\sin(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$

  Cette expression représente l'air (surface) du parallélogramme construit en prenant pour côté les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



i- Propriétés du produit vectoriel

- Si deux vecteurs non nuls sont parallèle leurs produit vectoriel est nul et inversement.

  $\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow \sin(\vec{V}_1,\vec{V}_2)=0$ et $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\vec{0}$.
- Commutativité

  $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=-\left(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1\right)$
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

  $\vec{V}\wedge\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=\vec{V}\wedge\vec{V}_1+\vec{V}\wedge\vec{V}_2$

ii- Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée

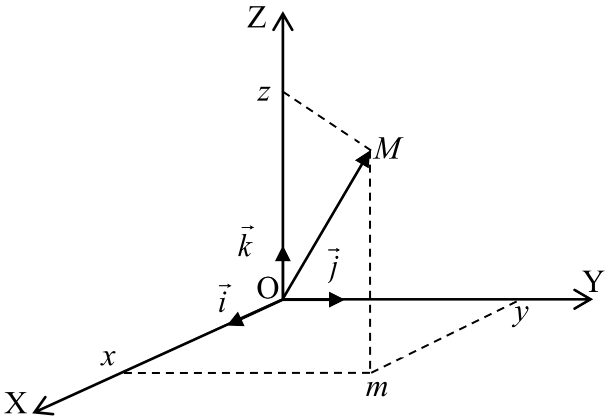
$$\begin{aligned}\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2&=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\wedge\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+\vec{z}_2\vec{k}\right)\\&=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}+\left(z_1x_2-x_1z_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

I.4 – Systèmes de coordonnées (espace à trois dimensions)

En général, on choisit un système de cordonnée en fonction de la géométrie et les symétries du corps étudié.

I.4.1 – Coordonnées cartésiennes



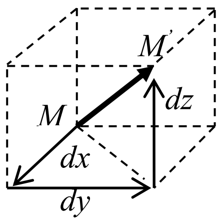
Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées x, y et z dans la base orthonormée directe ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Soient m la projection de M sur le plan OXY
x la projection de m sur l'axe OX
y la projection de m sur l'axe OY
z la projection de M sur l'axe OZ

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = (\overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}) + \overrightarrow{Oz} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- Les variables sont $(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{ijk} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

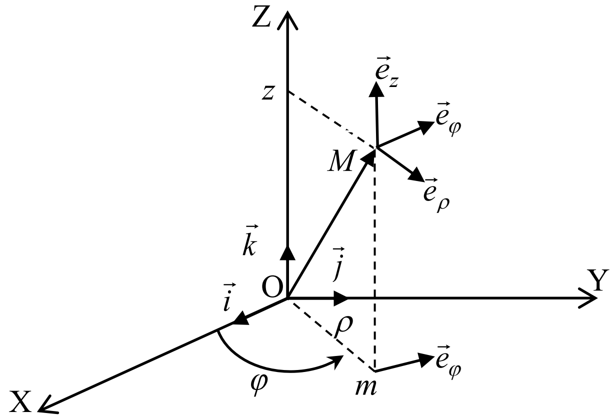
- Déplacement élémentaire associé à un point M est $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$



- Surfaces élémentaires associées à un point M sont
  $dS=dx.dy$ dans le plan ($\vec{i}$, $\vec{j}$)
  $dS=dx.dz$ dans le plan ($\vec{i}$, $\vec{k}$)
  $dS=dy.dz$ dans le plan ($\vec{j}$, $\vec{k}$)

- Volume élémentaire associé à un point M est $dv=dx.dy.dz$

I.4.2 – Coordonnées cylindriques



Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées ρ, φ et z dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

Soient m la projection de M sur le plan OXY

$\rho = |\overrightarrow{Om}|$ la distance à l'axe OZ ($0 \leq \rho < \infty$)

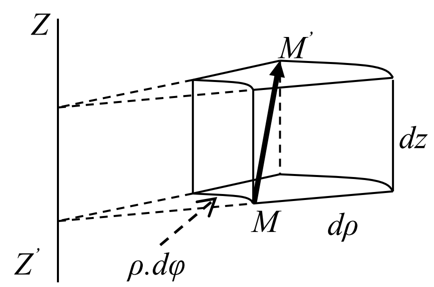
$\varphi = (OX, \overrightarrow{Om})$ l'angle dans le plan OXY entre l'axe OX et le vecteur $\overrightarrow{Om}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$z = |\overrightarrow{mM}|$ la distance entre les points m et M ($-\infty < z < +\infty$)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{k}$$

- Les variables sont (ρ, φ, z) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM}_{e_\rho, e_\varphi, e_z} \begin{cases} \rho \\ 0 \\ z \end{cases}$ et dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a $\overrightarrow{OM}_{ijk} \begin{cases} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\sin\varphi \\ z \end{cases}$

- Déplacement élémentaire associé à un point M est $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho.d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$



- Surfaces élémentaires associées à un point M sont

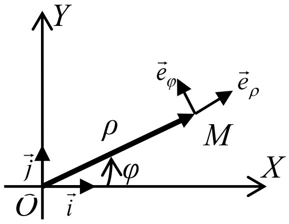
  $dS = \rho.d\rho.d\varphi$ dans le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$

  $dS = d\rho.dz$ dans le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$

  $dS = \rho.d\varphi.dz$ dans le plan $(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

- Volume élémentaire associé à un point M est $dv = \rho.d\rho.d\varphi.dz$

Cas particulier : Coordonnées polaires
Si $z=0$, le système de coordonnées cylindriques se réduit au système de coordonnées polaires planes



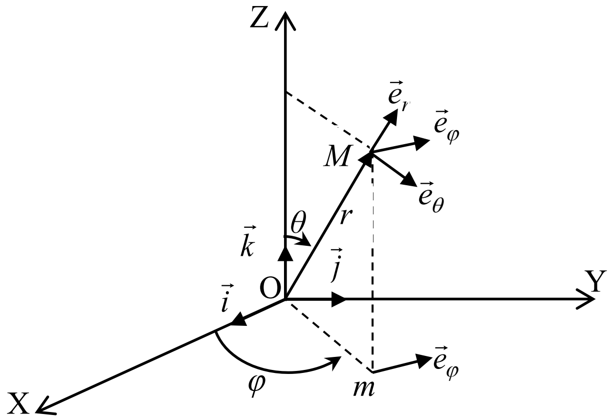
Où $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ est le rayon polaire ($0 \leq \rho < \infty$)

$\varphi = (OX, \overrightarrow{OM})$ est l'angle polaire ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{e}_\rho$ et dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) on l'exprime par $\overrightarrow{OM}_{i,j,k} \begin{pmatrix} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\sin\varphi \end{pmatrix}$

avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

I.4.3 – Coordonnées sphériques



Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées r, θ et φ dans la base orthonormée directe ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$).
Soient m la projection de M sur le plan OXY

$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ la distance par rapport à O ($0 \leq r < \infty$)

$\theta = (OZ, \overrightarrow{OM})$ l'angle entre l'axe OZ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

$\varphi = (OX, \overrightarrow{Om})$ l'angle dans le plan OXY entre l'axe OX et le vecteur $\overrightarrow{Om}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

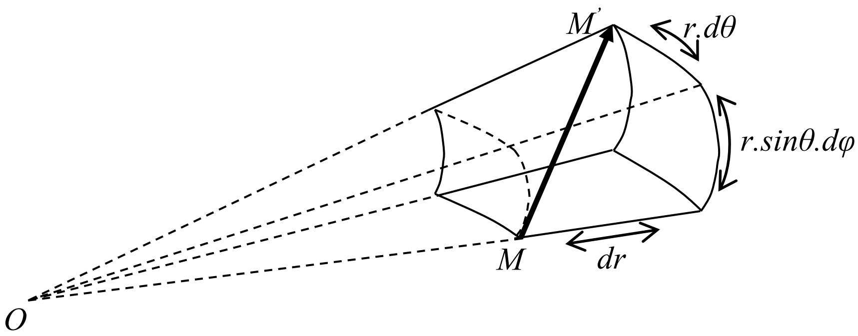
$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

- Les variables sont (r, θ, φ) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM}_{e_r, e_\theta, e_\varphi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et dans ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on a $\overrightarrow{OM}_{ijk}\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$

- Déplacement élémentaire associé à un point M est

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$



- Surfaces élémentaires associées à un point M sont

$dS = r.dr.d\theta$ dans le plan ($\vec{e}_r , \vec{e}_\theta$)

$dS = r.\sin\theta.dr.d\varphi$ dans le plan ($\vec{e}_r , \vec{e}_\varphi$)

$dS = r^2.\sin\theta.d\theta.d\varphi$ dans le plan ($\vec{e}_\theta , \vec{e}_\varphi$)

- Volume élémentaire associé à un point M est $dv = r^2.\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$

II – Analyse vectorielle

II.1 – Champs scalaire ou vectoriel

i- On dit qu'on a un champ scalaire dans une région si à chaque point de l'espace *M(x,y,z)* est associé une fonction scalaire *f(M)=f(x,y,z)* par exemple champ de température, champ de densité, etc.

ii- On dit qu'on a un champ vectoriel dans une région si à chaque point de l'espace *M(x,y,z)* est associé un vecteur $\vec{V}(M) = V_x.\vec{i} + V_y.\vec{j} + V_z.\vec{k}$ par exemple champ électrique, champ de pesanteur, etc.

II.2 – Opérateurs différentiels

II.2.1- Gradient d'un champ scalaire

Soit *f(x,y,z)* une fonction scalaire, calculons sa différentielle totale en coordonnées cartésiennes

$$df(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

On remarque que c'est un produit scalaire de deux vecteurs le vecteur déplacement $\vec{dl}\ \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{ijk}$ et d'un vecteur gradient de *f(x,y,z)* noté $\overrightarrow{grad}\ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix}_{ijk}$

d'où $df(x,y,z) = \overrightarrow{grad}f.\vec{dl}$ et

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}.\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}.\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}.\vec{k}$$

Le gradient est un vecteur attaché à une fonction scalaire. Il nous renseigne sur la variation de *f(x,y,z)* au voisinage d'un point *M(x,y,z)*.

Cas important : **Potentiel scalaire**

En coordonnées cartésiennes, un champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)$ de composantes (V_x, V_y, V_z) dérive d'un potentiel scalaire *U(x,y,z)* si en tout point de définition du vecteur $\vec{V}$ on a

$$\vec{V}(x,y,z) = -\overrightarrow{grad}U$$

avec $V_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z}$, $V_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{z,x}$ et $V_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y}$

II.2.2- Divergence d'un champ vectoriel

Soit $\vec{V}(x,y,z)$ un champ de vecteur de composantes (V_x, V_y, V_z). Par définition la divergence de $\vec{V}$ est donnée en coordonnées cartésiennes par

$$div\vec{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$

La divergence est un scalaire attaché à une fonction vectorielle.

II.2.3- Rotationnel d'un champ vectoriel

Par définition le rotationnel de $\vec{V}(x,y,z)$ en coordonnées cartésiennes est donné par

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right).\vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).\vec{k}$$

Le rotationnel est un vecteur attaché à une fonction vectorielle.

II.2.4- Laplaciens scalaire et vectoriel

Soient *f(x,y,z)* une fonction scalaire et $\vec{V}(x,y,z)$ un vecteur. Le Laplacien en coordonnées cartésiennes est donné par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

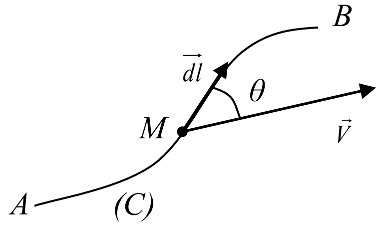
$$\Delta\vec{V} = \Delta V_x.\vec{i} + \Delta V_y.\vec{j} + \Delta V_z.\vec{k}$$

II.3 – Intégrales vectorielles

II.3.1- Circulation d'un vecteur

On appelle circulation du vecteur $\vec{V}$ le long de la courbe (C) de A à B, l'intégrale curviligne notée

$$\zeta(\vec{V}) = \int_{AB} \vec{V}.\vec{dl} = \int_{AB} V.dl.\cos\theta$$



Cas particulier : Circulation d'un vecteur $\vec{V}$ qui dérive d'un potentiel scalaire

Si $\vec{V}(M) = -\overrightarrow{grad}U(M)$

sa circulation le long d'un chemin AB est donnée par

$$\zeta(\vec{V}) = \int_A^B \vec{V}(M).\vec{dl} = -\int_A^B \overrightarrow{gradU(M)}.\vec{dl} = -\int_A^B dU(M) = U_A - U_B$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des points initial A et final B. Par conséquent, la circulation sur un contour fermé est donc nulle quel que soit (C)

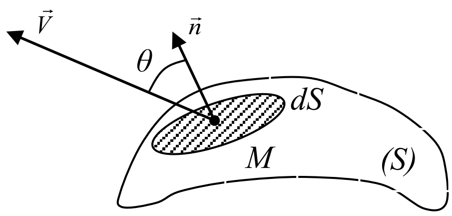
$$\oint_{(C)} \vec{V}(M).\vec{dl} = 0$$

II.3.2- Flux d'un vecteur à travers une surface

En définissant un vecteur unitaire $\vec{n}$ orienté de la face intérieure à la face extérieure, alors un élément de surface est donné par $\vec{dS} = \vec{n}.dS$

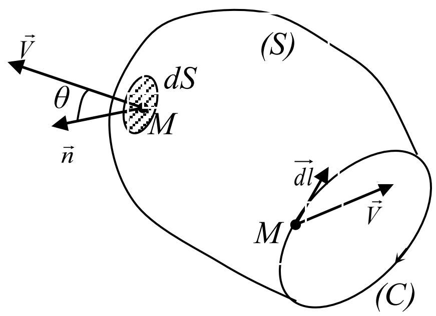
On appelle flux totale de $\vec{V}$ à travers une surface (S) l'expression

$$\Phi = \iint_{(S)} d\Phi = \iint_{(S)} \vec{V}(M).\vec{dS} = \iint_{(S)} V(M).dS.\cos\theta$$



II.3.3- Théorème de Stokes

Soit (C) une courbe fermée et orientée dans un sens et soit (S) une surface qui s'appuie sur (C) et dont la normale $\vec{n}$ est engendrée par l'orientation de (C) en appliquant la règle du tire-bouchon.



La circulation d'un vecteur $\vec{V}$ sur le contour (C) est égale au flux de $\overrightarrow{rot}\vec{V}$ à travers la surface (S) s'appuyant sur (C)

$$\oint_{(C)} \vec{V}(M).\vec{dl} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V}(M).\vec{dS} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V}(M).\vec{n}.dS$$

Conséquence :

Si $\vec{V}(M) = -\overrightarrow{grad}U(M) \Rightarrow \oint_{(C)} \vec{V}(M).\vec{dl} = 0 \ \ \forall (C)$

et par la suite

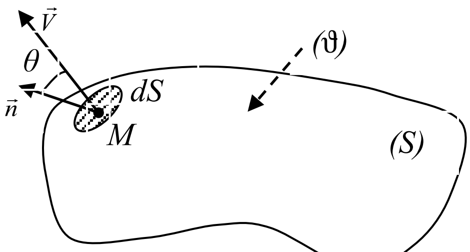
$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V}(M).\overrightarrow{dS} = 0 \ \ \forall (S)$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire est $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$

$$\vec{V}(M) = -\overrightarrow{grad}U(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{V}(M) = \vec{0}$$

II.3.4- Théorème d'Ostragradski ou Green

Soit une surface (S) fermée limitant un volume (ϑ) et orientée suivant $\vec{n}$ vers l'extérieur.



Le flux d'un vecteur $\vec{V}$ à travers une surface fermée (S) est égale à l'intégrale triple de la divergence de $\vec{V}$ sur le volume (ϑ) limité par cette surface.

$$\oiint_{(S)} \vec{V}(M).\overrightarrow{dS} = \iiint_{(\vartheta)} div\vec{V}(M).d\tau$$

Conséquence : Flux conservatif

Si $\vec{V}$ est à flux conservatif on a

$$\oiint_{(S)} \vec{V}(M).\overrightarrow{dS} = 0 \ \ \forall (S)$$

et par la suite

$$\iiint_{(\vartheta)} div\vec{V}(M).d\tau = 0 \ \ \forall (\vartheta)$$

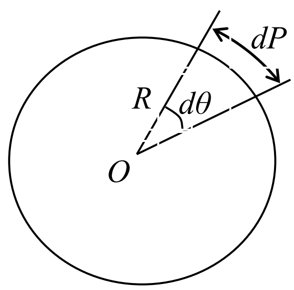
La condition nécessaire et suffisante de conservabilité du flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ est $div\vec{V}(M) = 0$

$$\vec{V} \text{ à flux conservatif} \Leftrightarrow div\vec{V}(M) = 0$$

III – Angle solide

III.1 – Angle plan

Soit un cercle de centre O, de rayon R et de périmètre (P)



L'angle plan élémentaire $d\theta$ est défini par le rapport

$$d\theta = \frac{dP}{R}$$

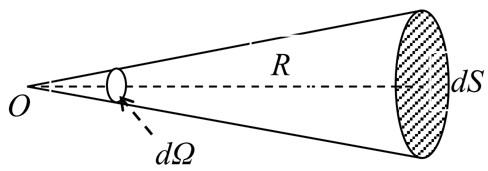
où dP est un arc de cercle en mètre et R est le rayon du cercle en mètre.

L'unité de ce rapport (sans dimension) est le radian (rd).

III.2 – Angle solide

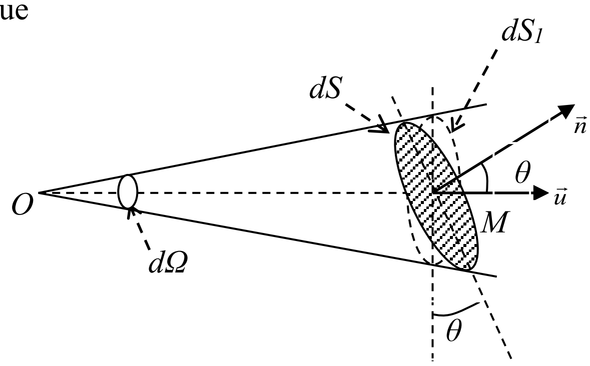
Par analogie, on définit un angle élémentaire dans l'espace en remplaçant l'arc dP par une surface élémentaire dS ($\forall M \in dS$ est à la distance R du point O) par le rapport (sans dimension)

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$



Cet angle est appelé l'angle solide sous lequel on voit l'élément de surface dS à partir de O. Son unité est le stéradian (Sr).

Cas général : dS est quelconque



$$d\Omega = \frac{dS_1}{(OM)^2} = \frac{dS.\cos\theta}{(OM)^2} = \frac{dS.\vec{n}.\vec{u}}{(OM)^2}$$

En considérant le vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ d'où

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{(OM)^2}$$

L'angle solide totale sous lequel on voit toute la surface (S) à partir du point O est donné par

$$\Omega = \iint_{(S)} \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{(OM)^2} = \iint_{(S)} \frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3}\overrightarrow{dS}$$