Chapitre 3
Calcul d'intégrales et de primitives

1) Primitives d'une fonction

Dans le chapitre 2, on a défini l'intégrale d'une fonction intégrable, mais on a constaté qu'il n'est pas du tout facile de la calculer avec la définition. Le but de ce chapitre est de donner différentes méthodes et techniques qui permettent de calculer des intégrales (primitives, intégration par parties et changement de variable).

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1 (primitives d'une fonction). Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemples.

1) Soient $I = \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F + 1$ est aussi une primitive de f.
2) Soient $I = [0, +\infty[$ et $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G: I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. La fonction $G + 5$ est aussi une primitive de g.
3) Soient $I = \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$. Alors $H: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \mathrm{e}^x$ est une primitive de h. La fonction $H + 3$ est aussi une primitive de h.

1) Primitives d'une fonction

Dans le chapitre 2, on a défini l'intégrale d'une fonction intégrable, mais on a constaté qu'il n'est pas du tout facile de la calculer avec la définition. Le but de ce chapitre est de donner différentes méthodes et techniques qui permettent de calculer des intégrales (primitives, intégration par parties et changement de variable).

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1 (primitives d'une fonction). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemples.

1) Soient $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F + 1$ est aussi une primitive de f.
2) Soient $I = [0, +\infty[$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. La fonction $G + 5$ est aussi une primitive de g.
3) Soient $I = \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$. Alors $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \mathrm{e}^x$ est une primitive de h. La fonction $H + 3$ est aussi une primitive de h.

1) Primitives d'une fonction

Dans le chapitre 2, on a défini l'intégrale d'une fonction intégrable, mais on a constaté qu'il n'est pas du tout facile de la calculer avec la définition. Le but de ce chapitre est de donner différentes méthodes et techniques qui permettent de calculer des intégrales (primitives, intégration par parties et changement de variable).

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1 (primitives d'une fonction). Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemples.

1) Soient $I = \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F + 1$ est aussi une primitive de f.
2) Soient $I = [0, +\infty[$ et $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. La fonction $G + 5$ est aussi une primitive de g.
3) Soient $I = \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$. Alors $H\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \mathrm{e}^x$ est une primitive de h. La fonction $H + 3$ est aussi une primitive de h.

1) Primitives d'une fonction

Dans le chapitre 2, on a défini l'intégrale d'une fonction intégrable, mais on a constaté qu'il n'est pas du tout facile de la calculer avec la définition. Le but de ce chapitre est de donner différentes méthodes et techniques qui permettent de calculer des intégrales (primitives, intégration par parties et changement de variable).

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1 (primitives d'une fonction). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemples.

1) Soient $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F + 1$ est aussi une primitive de f.
2) Soient $I = [0, +\infty[$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. La fonction $G + 5$ est aussi une primitive de g.
3) Soient $I = \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^x$. Alors $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = e^x$ est une primitive de h. La fonction $H + 3$ est aussi une primitive de h.

1) Primitives d'une fonction

Dans le chapitre 2, on a défini l'intégrale d'une fonction intégrable, mais on a constaté qu'il n'est pas du tout facile de la calculer avec la définition. Le but de ce chapitre est de donner différentes méthodes et techniques qui permettent de calculer des intégrales (primitives, intégration par parties et changement de variable).

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1 (primitives d'une fonction). Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.
Exemples.

1) Soient $I = \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F + 1$ est aussi une primitive de f.
2) Soient $I = [0, +\infty[$ et $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G: I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. La fonction $G + 5$ est aussi une primitive de g.
3) Soient $I = \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^x$. Alors $H: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \mathrm{e}^x$ est une primitive de h. La fonction $H + 3$ est aussi une primitive de h.

1) Primitives d'une fonction

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 1.2. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors toute autre primitive G de f s'écrit sous la forme $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

Preuve. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$. Comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Réciproquement, supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un **intervalle**, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G-F)(x) = c$. Autrement dit,

$$G(x) = F(x) + c$$

pour tout $x \in I$.

1) Primitives d'une fonction

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 1.2. Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors toute autre primitive G de f s'écrit sous la forme $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

Preuve. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$. Comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Réciproquement, supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un **intervalle**, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Autrement dit,

$$G(x) = F(x) + c$$

pour tout $x \in I$.

1) Primitives d'une fonction

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 1.2. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors toute autre primitive G de f s'écrit sous la forme $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

Preuve. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$. Comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Réciproquement, supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un **intervalle**, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Autrement dit,

$$G(x) = F(x) + c$$

pour tout $x \in I$.

1) Primitives d'une fonction

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 1.2. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors toute autre primitive G de f s'écrit sous la forme $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

Preuve. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$. Comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f.
Réciproquement, supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un **intervalle**, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Autrement dit,

$$G(x) = F(x) + c$$

pour tout $x \in I$.

1) Primitives d'une fonction

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(x)\,dx$ ou $\int f(y)\,dy$ (les lettres $t, x, y, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$. La proposition 1.2 nous dit que si G est une primitive de f, alors il existe un réel c tel que $G = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément, on verra que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 1.3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g. Alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels α, β, on a :

$$\int \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\,dt = \alpha \int f(t)\,dt + \beta \int g(t)\,dt.$$

1) Primitives d'une fonction

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(x)\,dx$ ou $\int f(y)\,dy$ (les lettres $t, x, y, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$. La proposition 1.2 nous dit que si G est une primitive de f, alors il existe un réel c tel que $G = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément, on verra que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 1.3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g. Alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels α, β, on a :

$$\int \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) dt = \alpha \int f(t)\,dt + \beta \int g(t)\,dt.$$

1) Primitives d'une fonction

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(x)\,dx$ ou $\int f(y)\,dy$ (les lettres $t, x, y, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$. La proposition 1.2 nous dit que si G est une primitive de f, alors il existe un réel c tel que $G = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément, on verra que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 1.3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g. Alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels α, β, on a :

$$\int (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int f(t)\,dt + \beta \int g(t)\,dt.$$

1) Primitives d'une fonction

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(x)\,dx$ ou $\int f(y)\,dy$ (les lettres $t, x, y, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$. La proposition 1.2 nous dit que si G est une primitive de f, alors il existe un réel c tel que $G = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément, on verra que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 1.3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g. Alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels α, β, on a :

$$\int \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\,dt = \alpha \int f(t)\,dt + \beta \int g(t)\,dt.$$

1) Primitives d'une fonction

Proposition 1.3. Soient F une fonction dérivable sur I et G une fonction dérivable sur $F(I)$. Alors la fonction $G \circ F$ est une primitive de $(G' \circ F) \cdot F'$ sur I.

Autre formulation : Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur $F(I)$. Alors la fonction $G \circ F$ est une primitive de $(g \circ F) \cdot f$ sur I.

Primitives des fonctions usuelles :

On récupère les formules de dérivées et on les inverse. On obtient les formulaires de primitives ci-dessous. Le premier concerne les « fonctions puissances ». Le deuxième formulaire concerne la « trigonométrie circulaire et les fonctions trigonométriques réciproques ». Le troisième formulaire concerne les « fonctions exponentielles » et apparentées.

1) Primitives d'une fonction

Proposition 1.3. Soient F une fonction dérivable sur I et G une fonction dérivable sur $F(I)$. Alors la fonction $G \circ F$ est une primitive de $(G' \circ F) \cdot F'$ sur I.

Autre formulation : Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur $F(I)$. Alors la fonction $G \circ F$ est une primitive de $(g \circ F) \cdot f$ sur I.

Primitives des fonctions usuelles :

On récupère les formules de dérivées et on les inverse. On obtient les formulaires de primitives ci-dessous. Le premier concerne les « fonctions puissances ». Le deuxième formulaire concerne la « trigonométrie circulaire et les fonctions trigonométriques réciproques ». Le troisième formulaire concerne les « fonctions exponentielles » et apparentées.

1) Primitives d'une fonction

Proposition 1.3. Soient F une fonction dérivable sur I et G une fonction dérivable sur $F(I)$. Alors la fonction $G \circ F$ est une primitive de $(G' \circ F) \cdot F'$ sur I.

Autre formulation : Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur $F(I)$. Alors la fonction $G \circ F$ est une primitive de $(g \circ F) \cdot f$ sur I.

Primitives des fonctions usuelles :

On récupère les formules de dérivées et on les inverse. On obtient les formulaires de primitives ci-dessous. Le premier concerne les « fonctions puissances ». Le deuxième formulaire concerne la « trigonométrie circulaire et les fonctions trigonométriques réciproques ». Le troisième formulaire concerne les « fonctions exponentielles » et apparentées.

1) Primitives d'une fonction

Formulaire de primitives			
Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
0	c	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$ constante
a	ax	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$ constante
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$	
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^{+\,*}$ ou $\mathbb{R}^{-\,*}$	$n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

1) Primitives d'une fonction

Formulaire de primitives

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$k \in \mathbb{Z}$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{cotan}(x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1, 1[$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	

1) Primitives d'une fonction

Formulaire de primitives			
Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}^*$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	

1) Primitives d'une fonction

Formulaire de primitives			
Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$f'f^\alpha$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$f > 0$ sur son domaine	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$	$f \neq 0$ sur son domaine	
$\frac{f'}{f^n}$	$-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}$		$n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	$f \geqslant 0$ sur son domaine	
$f'e^f$	e^f		
$f' \sin f$	$-\cos f$		
$f' \cos f$	$\sin f$		
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{Arctan} f$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

2) Relation intégrales et primitives

Voici le résultat fondamental de ce chapitre qui permet d'exprimer une primitive au moyen d'une intégrale.

Théorème 2.1 (théorème fondamental d'Analyse). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ F_0(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est dérivable sur $[a, b]$, et $F_0'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Autrement dit, F_0 est **une primitive de f** sur $[a, b]$ telle que $F_0(a) = 0$.

2) Relation intégrales et primitives

Voici le résultat fondamental de ce chapitre qui permet d'exprimer une primitive au moyen d'une intégrale.

Théorème 2.1 (théorème fondamental d'Analyse). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [a, b],\ F_0(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est dérivable sur $[a, b]$, et $F_0'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Autrement dit, F_0 est **une primitive de f** sur $[a, b]$ telle que $F_0(a) = 0$.

2) Relation intégrales et primitives

Voici le résultat fondamental de ce chapitre qui permet d'exprimer une primitive au moyen d'une intégrale.

Théorème 2.1 (théorème fondamental d'Analyse). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b], \ F_0(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est dérivable sur $[a, b]$, et $F_0'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Autrement dit, F_0 est **une primitive de f** sur $[a, b]$ telle que $F_0(a) = 0$.

2) Relation intégrales et primitives

Preuve. Montrons que la fonction F_0 est dérivable sur $[a,b]$, et $F_0' = f$. Fixons $x_0 \in [a,b]$. D'après la relation de Chasles, on sait que

$$F_0(x) - F_0(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Donc le taux d'accroissement est

$$\frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt\cdot$$

Comme $f(x_0)$ est une constante, alors $\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = (x - x_0)f(x_0)$. Il vient que

$$\begin{aligned}\frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt \\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt.\end{aligned}$$

2) Relation intégrales et primitives

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t - x_0| < \delta \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

D'où si $|x - x_0| < \delta$, alors $|t - x_0| < \delta$ pour tout t compris entre x_0 et x, et on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \big|f(t) - f(x_0)\big|\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,dt\right| \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que F_0 est dérivable en x_0, et $F_0'(x_0) = f(x_0)$.

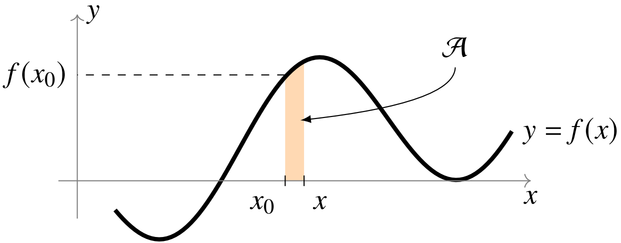
2) Relation intégrales et primitives

Interprétation géométrique du théorème 2.1.

On a vu que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \frac{\mathcal{A}}{x - x_0}$$

avec $\mathcal{A}$ est l'aire en orange. Mais cette aire est presque un rectangle, si x est suffisamment proche de x_0. Donc l'aire $\mathcal{A}$ vaut environ $(x - x_0) \cdot f(x_0)$; lorsque $x \longrightarrow x_0$ le taux d'accroissement tend donc vers $f(x_0)$. Autrement dit, $F'(x_0) = f(x_0)$.



2) Relation intégrales et primitives

Corollaire 2.2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),}$$

avec F est une primitive quelconque de f.

Notation. On note $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, on sait que F_0 est une primitive de f ; F_0 est même la primitive qui s'annule en a car $F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Si F est une autre primitive de f, on sait que $F = F_0 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante. Ainsi

$$F(b) - F(a) = F_0(b) + c - \left(F_0(a) + c\right) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Ce qui prouve le résultat.

2) Relation intégrales et primitives

Corollaire 2.2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a),}$$

avec F est une primitive quelconque de f.

Notation. On note $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, on sait que F_0 est une primitive de f ; F_0 est même la primitive qui s'annule en a car $F_0(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$. Si F est une autre primitive de f, on sait que $F = F_0 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante. Ainsi

$$F(b) - F(a) = F_0(b) + c - \big(F_0(a) + c\big) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Ce qui prouve le résultat.

2) Relation intégrales et primitives

Corollaire 2.2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),}$$

avec F est une primitive quelconque de f.

Notation. On note $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, on sait que F_0 est une primitive de f ; F_0 est même la primitive qui s'annule en a car $F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Si F est une autre primitive de f, on sait que $F = F_0 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante. Ainsi

$$F(b) - F(a) = F_0(b) + c - \big(F_0(a) + c\big) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Ce qui prouve le résultat.

2) Relation intégrales et primitives

Exemples. 1) Pour la fonction $f\colon\ [0\,,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$, une primitive est $F(x) = e^x$. D'où

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2) Pour la fonction $g\colon\ [0\,,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, une primitive est $G(x) = G(x) = \frac{x^3}{3}\cdot$ D'où

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot$$

3) Si f est une fonction quelconque de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

Remarque. 1) La fonction $x \longmapsto F_0(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est *l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

2) On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.

2) Relation intégrales et primitives

Exemples. 1) Pour la fonction $f\colon [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$, une primitive est $F(x) = e^x$. D'où

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2) Pour la fonction $g\colon [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, une primitive est $G(x) = G(x) = \frac{x^3}{3}\cdot$ D'où

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot$$

3) Si f est une fonction quelconque de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

Remarque. 1) La fonction $x \longmapsto F_0(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est *l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

2) On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.

2) Relation intégrales et primitives

Exemples. 1) Pour la fonction $f:\ [0\ ,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$, une primitive est $F(x) = e^x$. D'où

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2) Pour la fonction $g:\ [0\ ,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, une primitive est $G(x) = G(x) = \dfrac{x^3}{3}\cdot$ D'où

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot$$

3) Si f est une fonction quelconque de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

Remarque. 1) La fonction $x \longmapsto F_0(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est *l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

2) On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.

2) Relation intégrales et primitives

Corollaire 2.3 (condition suffisante d'existence de primitive). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, alors f admet au moins une primitive sur I.

Remarque. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer la fonction $f : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Alors la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$, mais elle n'admet pas de primitive sur $[0, 1]$.

En effet, par l'absurde si F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, 1/2[$ et $F(x) = x - 1/2$ pour $x \in [1/2, 1]$. Mais alors on obtient une contradiction car F n'est pas dérivable en $1/2$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

Exercices.

- Trouver les primitives des fonctions : $x^3 - x^7$, $\cos x + e^x$, $\sin(2x)$, $1 + \sqrt{x + x, 1}/\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x, 1/x} + 1$.
- Trouver les primitives des fonctions : $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x/2)$, $1/1 + 4x^2$, $1/\sqrt{1 + x^2} - 1/\sqrt{1 - x^2}$.
- Trouver toutes les primitives de $x \mapsto 1/x^2$ (préciser les intervalles et les constantes).
- Calculer les intégrales $\int_0^1 x^n\,dx$, $\int_0^1 \frac{\pi}{4}.dx/1 + x^2$, $\int_1^e 1 - x/x^2\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} dx/x^2 - 1$.

2) Relation intégrales et primitives

Corollaire 2.3 (condition suffisante d'existence de primitive). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, alors f admet au moins une primitive sur I.

Remarque. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer la fonction $f : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Alors la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$, mais elle n'admet pas de primitive sur $[0, 1]$.

En effet, par l'absurde si F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, 1/2[$ et $F(x) = x - 1/2$ pour $x \in [1/2, 1]$. Mais alors on obtient une contradiction car F n'est pas dérivable en $1/2$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

Exercices.

- Trouver les primitives des fonctions : $x^3 - x^7$, $\cos x + e^x$, $\sin(2x)$, $1 + \sqrt{x} + x$, $1/\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $1/x + 1$.
- Trouver les primitives des fonctions : $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x/2)$, $1/1 + 4x^2$, $1/\sqrt{1 + x^2} - 1/\sqrt{1 - x^2}$.
- Trouver toutes les primitives de $x \mapsto 1/x^2$ (préciser les intervalles et les constantes).
- Calculer les intégrales $\int_0^1 x^n\,dx$, $\int_0^1 \frac{\pi}{4}.dx/1 + x^2$, $\int_1^e 1 - x/x^2\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} dx/x^2 - 1$.

2) Relation intégrales et primitives

Corollaire 2.3 (condition suffisante d'existence de primitive). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, alors f admet au moins une primitive sur I.

Remarque. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer la fonction $f : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Alors la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$, mais elle n'admet pas de primitive sur $[0, 1]$.

En effet, par l'absurde si F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, 1/2[$ et $F(x) = x - 1/2$ pour $x \in [1/2, 1]$. Mais alors on obtient une contradiction car F n'est pas dérivable en $1/2$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

Exercices.

- Trouver les primitives des fonctions : $x^3 - x^7$, $\cos x + e^x$, $\sin(2x)$, $1 + \sqrt{x + x,\ 1}/\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x,\ 1/x} + 1$.
- Trouver les primitives des fonctions : $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x/2)$, $1/1 + 4x^2$, $1/\sqrt{1 + x^2} - 1/\sqrt{1 - x^2}$.
- Trouver toutes les primitives de $x \mapsto 1/x^2$ (préciser les intervalles et les constantes).
- Calculer les intégrales $\int_0^1 x^n\,dx$, $\int_0^1 \frac{\pi}{4}.dx/1 + x^2$, $\int_1^e 1 - x/x^2\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} dx/x^2 - 1$.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

Théorème 3.1 (intégration par parties). Soient $u, v \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$. Alors

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.}$$

Notation. Le crochet $\big[F(x)\big]_a^b$ est par définition $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F(x)\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

Théorème 3.1 (intégration par parties). Soient $u, v \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$. Alors

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.}$$

Notation. Le crochet $\big[F(x)\big]_a^b$ est par définition $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F(x)\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

Théorème 3.1 (intégration par parties). Soient $u, v\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$. Alors

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.}$$

Notation. Le crochet $\big[F(x)\big]_a^b$ est par définition $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F(x)\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

La preuve est très simple :

Preuve. Par hypothèse, les fonctions u et v sont dérivables sur $[a\,,\,b]$. Il en est de même de la fonction uv, et on a :

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{3}$$

De plus, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$. Donc les fonctions $u'v$ et uv' sont continues sur $[a\,,\,b]$. On intègre les deux membres de l'égalité (3) sur $[a\,,\,b]$, on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x) = \big[u(x)v(x)\big]_a^b.$$

D'où le résultat.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

L'utilisation de l'intégration par parties repose sur l'idée suivante : on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f s'écrivant comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais si l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple) alors par la formule d'intégration par parties on aura l'intégrale de f.

Exemples. 1) Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On alors que $u'(x) = 1$ et une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 \; - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

2) Calcul de $\int_1^e x\ln x\,dx$. On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$. Donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$. Donc

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\cdot x\,dx &= \int_1^e uv' \\
&= [uv]_1^e - \int_1^e u'v \\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx \\
&= \left(\ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}
$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

3) Calcul de $\int \arcsin x \, dx$. Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\arcsin x = 1 \cdot \arcsin x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u(x) = \arcsin x$ et $v'(x) = 1$. D'où $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x) = x$. Donc

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \arcsin x \, dx &= \big[x \arcsin x\big] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \big[x \arcsin x\big] - \big[-\sqrt{1-x^2}\big] \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

On va apprendre à changer de variable dans une intégrale. L'idée générale est la même que pour une intégration par parties : transformer le problème du calcul d'une intégrale en le problème du calcul d'une autre intégrale plus simple.

Théorème 3.2 (changement de variable). Soient $\varphi\colon [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow [a\,,\,b]$ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha\,,\,\beta]$ (i.e. φ est « le changement de variable ») et $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

En particulier, si φ est bijective alors

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

On va apprendre à changer de variable dans une intégrale. L'idée générale est la même que pour une intégration par parties : transformer le problème du calcul d'une intégrale en le problème du calcul d'une autre intégrale plus simple.

Théorème 3.2 (changement de variable). Soient $\varphi\colon [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow [a\,,\,b]$ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha\,,\,\beta]$ (i.e. φ est « le changement de variable ») et $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

En particulier, si φ est bijective alors

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

On va apprendre à changer de variable dans une intégrale. L'idée générale est la même que pour une intégration par parties : transformer le problème du calcul d'une intégrale en le problème du calcul d'une autre intégrale plus simple.

Théorème 3.2 (changement de variable). Soient $\varphi\colon [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow [a\,,\,b]$ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha\,,\,\beta]$ (i.e. φ est « le changement de variable ») et $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

En particulier, si φ est bijective alors

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Remarque. Voici un moyen simple de s'en souvenir :

- On pose $x = \varphi(t)$, et on dérive $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$. Donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
- On multiplie par $f(x) = f(\varphi(t))$, on obtient : $f(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
- On intègre en remarquant que lorsque x varie de $\varphi(\alpha)$ à $\varphi(\beta)$, alors la variable t varie de α à β.

Preuve. Puisque f est continue sur $[a\,,\,b]$, alors elle admet une primitive F. Donc $F'(x) = f(x)$. D'après la formule de la dérivation de la fonction composée $F \circ \varphi$, on a :

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Ainsi $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Il vient que

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[(F \circ \varphi)(t)\big]_\alpha^\beta = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = \big[F(x)\big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Ce qui montre le théorème 3.2.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Remarque. Voici un moyen simple de s'en souvenir :

- On pose $x = \varphi(t)$, et on dérive $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$. Donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
- On multiplie par $f(x) = f(\varphi(t))$, on obtient : $f(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
- On intègre en remarquant que lorsque x varie de $\varphi(\alpha)$ à $\varphi(\beta)$, alors la variable t varie de α à β.

Preuve. Puisque f est continue sur $[a\,,\,b]$, alors elle admet une primitive F. Donc $F'(x) = f(x)$. D'après la formule de la dérivation de la fonction composée $F \circ \varphi$, on a :

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Ainsi $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Il vient que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[(F \circ \varphi)(t)\right]_{\alpha}^{\beta} = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = \big[F(x)\big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Ce qui montre le théorème 3.2.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Exemples. 1) Soit à calculer $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. On ne connait pas de primitive de $1/1+\sqrt{x}$. L'IPP ne marche pas aussi. La difficulté est à cause de la présence de $\sqrt{x}$. Faisons le changement de variable $t=\sqrt{x}$. D'où $x=t^2$ (i.e. $\varphi(t)=t^2$ dans la formule, et ainsi de classe C^1). Ensuite $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t$. On remplace donc d$x$ par $2t\,\mathrm{d}t$. Le terme $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ devient $\dfrac{1}{1+t}2t\,\mathrm{d}t$. Enfin lorsque x varie de 0 à 4, la variable t varie de 0 à 2. Il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{1}{1+t}2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{(t+1-1)}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \left[2(t-\ln(t+1))\right]_0^2\\ &= 2(2-\ln 3).\end{aligned}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

2) Soit à calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$. On ne connait pas de primitive de $1/\mathrm{e}^x + 1$. L'IPP ne marche pas aussi. La difficulté est à cause de la présence de e^x. On fait un changement de variable en posant $t = e^x$. D'où $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 \\
&= \ln\left(\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

3) Soit à calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$. On ne connait pas de primitive de $\sqrt{1-x^2}$. L'IPP ne marche pas aussi. La difficulté provient de la présence de racine carrée. On fait le changement de variable $x = \sin(t)$. D'où $\mathrm{d}x = \cos t\, \mathrm{d}t$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(t)|.\cos t\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t \quad \text{car } \cos \text{ est positive sur } [-\pi/2, \pi/2] \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Corollaire 3.3. Soient $a > 0$ et $f : [-a\,,\,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a\,,\,a]$. On a

1) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Preuve. 1) On a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dans le premier intégrale, on fait le changement de variable $x = -t$. D'où $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\,\mathrm{d}t) + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $\mathrm{T} \neq 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le corollaire signifie que quand on intègre une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur une période, on peut choisir cet intervalle.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Corollaire 3.3. Soient $a > 0$ et $f : [-a\,,\,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a\,,\,a]$. On a

1) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x$.

2) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Preuve. 1) On a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dans le premier intégrale, on fait le changement de variable $x = -t$. D'où $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) + \int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $T \neq 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Le corollaire signifie que quand on intègre une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur une période, on peut choisir cet intervalle.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Corollaire 3.3. Soient $a > 0$ et $f : [-a\,,\, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a\,,\, a]$. On a

1) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x$.

2) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x = 0$.

Preuve. 1) On a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dans le premier intégrale, on fait le changement de variable $x = -t$. D'où $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\,\mathrm{d}t) + \int_{0}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\;\mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $\mathrm{T} \neq 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\;\mathrm{d}x = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(x)\;\mathrm{d}x$.

Le corollaire signifie que quand on intègre une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur une période, on peut choisir cet intervalle.

3) Méthodes de calcul d'intégrales

Corollaire 3.3. Soient $a > 0$ et $f : [-a\,,\,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a\,,\,a]$. On a

1) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Preuve. 1) On a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dans le premier intégrale, on fait le changement de variable $x = -t$. D'où $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Il vient que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\,\mathrm{d}t) + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $\mathrm{T} \neq 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le corollaire signifie que quand on intègre une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur une période, on peut choisir cet intervalle.

4) Primitives de fractions rationnelles

On sait intégrer beaucoup de fonctions simples. Par exemple toutes les fonctions polynomiales : si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

alors

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Il faut savoir cependant que beaucoup de fonctions ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions

usuelles. Par exemple la primitive

$$\int e^{x^2}\ \mathrm{d}x$$

ne peut pas s'exprimer comme somme, produit, inverse ou composition de fonctions que vous connaissez.

Mais de façon remarquable, il y a toute une famille de fonctions que l'on saura intégrer : les fractions rationnelles.

4) Primitives de fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles particulières de la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c},$$

avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)}$, et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

On a donc

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

4) Primitives de fractions rationnelles

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}.$$

On a alors

$$\int f(x)\ dx = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln |x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$, $]x_0, +\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple. Soit $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x^2 + x + 1}\cdot$ Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\dfrac{g'}{g}$ (dont une primitive est $\ln |g|$).

4) Primitives de fractions rationnelles

On a

$$f(x) = \frac{2x+1+1}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

On peut intégrer la fraction $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+x+1\right| + c = \ln(x^2+x+1) + c.$$

Regardons maintenant l'autre partie $\dfrac{1}{x^2+x+1}$, on va l'écrire sous la forme $\dfrac{1}{t^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan t$). En effet, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4} + 1} = \frac{1}{(x+\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{4}{3}(x+\dfrac{1}{2})^2) + 1\right]} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1}.\end{aligned}$$

4) Primitives de fractions rationnelles

On pose le changement de variable $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ (et donc $\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$) pour trouver

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Finalement :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

4) Primitives de fractions rationnelles

Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle (avec $P(x), Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels).
Alors d'après le théorème de la décomposition en éléments simples, la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme :

- d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière de P/Q),
- d'éléments simples de la forme $\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^i}$, avec $\gamma, x_0 \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- d'éléments simples de la forme $\dfrac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^k}$, où $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $b^2 - 4ac < 0$.

Autrement dit, on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum \frac{\gamma_i}{(x-x_0)^i} + \sum \frac{\alpha_k x + \beta_k}{(a_k x^2 + b_k x + c_k)^k}.$$

4) Primitives de fractions rationnelles

1) On sait intégrer facilement le polynôme $E(x)$.

2) Intégration de l'élément simple $\dfrac{\gamma_i}{(x-x_0)^i}$:

- Si $i=1$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma_i\,dx}{x-x_0} = \gamma_i \ln|x-x_0| + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).
- Si $i \geqslant 2$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma_i\,dx}{(x-x_0)^i} = \gamma_i \int (x-x_0)^{-i}\,dx = \frac{\gamma_i}{-i+1}(x-x_0)^{-i+1} + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).

3) Intégration de l'élément simple $\dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$: On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

4) Primitives de fractions rationnelles

- Si $k = 1$, calcul de $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx$. En effet, on a :
$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c_0 = \ln|ax^2+bx+c| + c_0.$$
- Si $k \geqslant 2$, calcul de $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. En effet, on a :
$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)^k}\,dx = \frac{1}{-k+1}g(x)^{-k+1}+c_0 = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1}+c_0.$$
- Si $k = 1$, calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. Par un changement de variable $t = px+q$, on se ramène à calculer une primitive du type $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c_0$.
- Si $k \geqslant 2$, calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. On effectue le changement de variable $t = px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.

4) Primitives de fractions rationnelles

Par exemple calculons I_2. Partant de $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1}$, on pose $f = \frac{1}{t^2+1}$ et $g' = 1$. La formule d'intégration par parties $\int fg' = [fg] - \int f'g$ donne (avec $f' = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$ et $g = t$) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{t^2+1} = \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + \int \frac{2t^2\,dt}{(t^2+1)^2} = \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}dt \\ &= \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2. \end{aligned}$$

On en déduit $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan t$, alors

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + c_0.$$

4) Primitives de fractions rationnelles

Exemple 1. Calcul des primitives $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,dx$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$.

On remarque que $\dfrac{2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-2-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Il vient que

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,dx = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ constante et le domaine est $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

Exemple 2. Calcul des primitives $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$.

On reconnait $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+x-2$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx &= \ln|x^2+x-2| + c\\ &= \ln|(x-1)(x+2)| + c\end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et le domaine est $]-\infty,-2]\cup]1,+\infty[$.

4) Primitives de fractions rationnelles

Exemple 3. Calcul des primitives $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-1}\cdot$

La décomposition en élements simples de la fraction rationnelle $1/(x^3-1)$ s'écrit :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}\cdot$$

Par les méthodes de décomposition de E.S., on trouve $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{3}$ et $c = -\dfrac{2}{3}\cdot$ D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\end{aligned}$$

Il vient que

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et le domaine est $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

4) Primitives de fractions rationnelles

Exemple 4. Calcul des primitives $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}\cdot$

On a $\dfrac{3x+2}{x^2+x+1} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(2x+4/3)}{x^2+x+1} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(2x+1)}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}\cdot$ Or on a d'une part

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+1).$$

D'autre part, on a $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\cdot$ D'où

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\cdot$$

Finalement, on a

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante et le domaine est $\mathbb{R}$.

5) Primitives se ramenant aux fractions rationnelles

5.1) Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

5.1.1) Polynômes trigonométriques. On peut calculer les primitives de la forme

$$\int P(\sin x, \cos x)\, dx$$

avec P est un polynôme. Par linéarité, on s'intéresse au calcul des primitives de

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx,$$

avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash \{(0, 0)\}$. On distingue deux cas :

- Si p (resp. q) est impair : on utilise le changement de variable $t = \cos x$ (resp. $t = \sin x$).
- Si p et q sont pairs, on linéarise les monômes trigonométriques $\cos^p x \sin^q x$.

Exemple 1. Calcul de $\displaystyle\int \sin x \cos^2 x\ \mathrm{d}x$. L'exposant de $\sin x$ est impair, le changement de variable qui convient est $t = \cos x$. Il vient que $\mathrm{d}t = -\sin x\ \mathrm{d}x$. Ainsi

$$\int \cos^2 x \sin x\ \mathrm{d}x = -\int t^2\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{3}\right] = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

5) Primitives se ramenant aux fractions rationnelles

5.1) Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Exemple 2. Calcul de $\displaystyle\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$. L'exposant de $\sin x$ est impair, le changement de variable qui convient est $t = \cos x$. Il vient que $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x &= -\int \cos x \cdot (-\sin x \, \mathrm{d}x) \\ &= -\int t \, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^2}{2}\right] \\ &= -\frac{\cos^2 x}{2} + c. \end{aligned}$$

Notons que puisque l'exposant de $\cos x$ est aussi impair, on peut ici dans ce cas utiliser le changement de variable $t = \sin x$.

5) Primitives se ramenant aux fractions rationnelles

5.1) Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Exemple 3. Calcul de $\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx$. On linéarise. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^2 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{6ix} - 2e^{4ix} - e^{2ix} + 4 - e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(\cos(6x) - 2\cos(4x) - \cos(2x) + 2\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \frac{1}{32}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{\sin(4x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} + 2x + c\right).$$