Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques,
Kénitra

A.U. 2024-2025
MIP, S2

Série 2, Algèbre 2

Exercice 1.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 en fonction de A et I_3 (la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

Exercice 2.

Montrer que :
1) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, le produit $A.^t(A)$ est une matrice carrée symétrique.
2) Si A est une matrice symétrique ou antisymétrique, alors A^2 est symétrique.
3) Toute matrice carrée symétrique peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 3.

On considére les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = A - I_3.$$

1. Calculer B^n, pour $n \geq 1$.
2. En déduire la valeur de A^n, pour $n \geq 1$.

Exercice 4.

1. Montrer sans développer les calculs que les déterminants suivants sont nuls :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ a+b & b+c & a+c \end{vmatrix}.$$

2. a) Calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer le déterminant suivant :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.

On considère les matrices suivantes

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; et \; A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de B.
2. Déduire de la question précédente le déterminant de A.
3. Déduire de la question précédente le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{pmatrix}.$

1. Calculer le déterminant de A_m.
2. Pour quelles valeurs de m, A_m est inversible ,
3. Calculer le rang de A_m, selon les valeurs de m.

Exercice 7. (**Déterminant de Vandermonde**)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Le déterminant de Vandermonde est défini par

$$V_n(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$