Année universitaire : 2023-2024
Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences de Kénitra

Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Chapitre 5 : Équations différentielles

Par

Pr. Ahmed Srhir

Motivation. Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{P} = m\,\vec{a}\,.$$

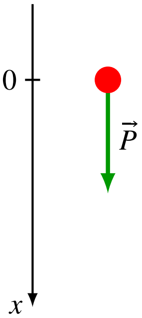
Tous les vecteurs sont verticaux donc $mg = ma$, où g est la constante de gravitation, a l'accélération verticale et m la masse. On obtient $a = g$. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient :

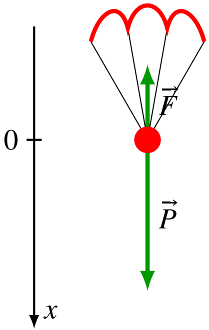
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = g \tag{1}$$

On en déduit facilement la vitesse par intégration : $v(t) = g\,t$ (en supposant que la vitesse initiale est nulle i.e. $v(0) = 0$). Ainsi la vitesse augmente de façon linéaire au cours du temps. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\cdot \tag{2}$$

Par une nouvelle intégration on obtient donc $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (en supposant que la position initiale est nulle).


0
$\vec{P}$
x


$\vec{F}$
0
$\vec{P}$
x

Le cas d'un parachutiste est plus compliqué. Le modèle précédent n'est pas applicable car il ne tient pas compte des frottements. Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -fmv$ (f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la dynamique devient

$$mg - fmv = ma,$$

ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = g - fv(t). \tag{3}$$

C'est une relation entre la vitesse v et sa dérivée : il s'agit d'une ***équation différentielle***. Il n'est pas évident de trouver quelle est la fonction v qui convient. Le but de ce chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, ce qui nous permettra d'en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

1) Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont « l'inconnue » est une fonction y dépendant d'une variable x (ou t) ; qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction inconnue et ses dérivées successives y', y'', $y^{(3)}$, . . ., et éventuellement la variable x (ou t).

On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

- les équations différentielles ordinaires (EDO) où la fonction inconnue recherchée ne dépend que d'une seule variable ;
- les équations aux dérivées partielles (EDP), où la fonction inconnue recherchée peut dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Plus précisément, on a :

Définition 1.1 (équations différentielles générales).

- On appelle *équation différentielle d'ordre* n toute équation de la forme

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{ED}$$

  avec F est une fonction de $(n+2)$ variables.
- Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (ED).

1) Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont « l'inconnue » est une fonction y dépendant d'une variable x (ou t) ; qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction inconnue et ses dérivées successives y', y'', $y^{(3)}$, . . ., et éventuellement la variable x (ou t).
On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

- les équations différentielles ordinaires (EDO) où la fonction inconnue recherchée ne dépend que d'une seule variable ;
- les équations aux dérivées partielles (EDP), où la fonction inconnue recherchée peut dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Plus précisément, on a :

Définition 1.1 (équations différentielles générales).

- On appelle *équation différentielle d'ordre n* toute équation de la forme

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(ED)}$$

  avec F est une fonction de $(n+2)$ variables.
- Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (ED).

1) Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont « l'inconnue » est une fonction y dépendant d'une variable x (ou t) ; qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction inconnue et ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \ldots$, et éventuellement la variable x (ou t).
On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

- les équations différentielles ordinaires (EDO) où la fonction inconnue recherchée ne dépend que d'une seule variable ;
- les équations aux dérivées partielles (EDP), où la fonction inconnue recherchée peut dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Plus précisément, on a :

Définition 1.1 (équations différentielles générales).

- On appelle *équation différentielle d'ordre* n toute équation de la forme

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{ED}$$

  avec F est une fonction de $(n+2)$ variables.
- Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (ED).

Exemples.

1) L'équation différentielle $y' = \sin x$ est d'ordre 1. Ses solutions sont
$$y(x) = -\cos x + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$
2) L'équation différentielle $y' = 1 + e^x$ est d'ordre 1. Ses solutions sont
$$y(x) = x + e^x + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$
3) L'équation différentielle $y' = y$ est d'ordre 1. Ses solutions sont $y(x) = ke^x$ où $k \in \mathbb{R}$.
4) L'équation différentielle $y' = 3y$ est d'ordre 1. Ses solutions sont $y(x) = ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$.
5) L'équation différentielle $y'' = \cos x$ est d'ordre 2. Ses solutions sont $y(x) = -\cos x + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
6) L'équation différentielle $y'' = y$ est d'ordre 2. Ses solutions sont
$$y(x) = ae^x + be^{-x} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Il est très facile de vérifier qu'une fonction donnée est bien une solution d'une équation différentielle.

1) Soit l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$. On vérifie que $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}$.
2) Soit l'équation différentielle $x^2y'' - 2y + 2x = 0$. On vérifie que $y(x) = kx^2 + x$ est une solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Exemples.

1) L'équation différentielle $y' = \sin x$ est d'ordre 1. Ses solutions sont
   $y(x) = -\cos x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
2) L'équation différentielle $y' = 1 + e^x$ est d'ordre 1. Ses solutions sont
   $y(x) = x + e^x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
3) L'équation différentielle $y' = y$ est d'ordre 1. Ses solutions sont $y(x) = ke^x$ où $k \in \mathbb{R}$.
4) L'équation différentielle $y' = 3y$ est d'ordre 1. Ses solutions sont $y(x) = ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$.
5) L'équation différentielle $y'' = \cos x$ est d'ordre 2. Ses solutions sont $y(x) = -\cos x + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
6) L'équation différentielle $y'' = y$ est d'ordre 2. Ses solutions sont
   $y(x) = ae^x + be^{-x}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Il est très facile de vérifier qu'une fonction donnée est bien une solution d'une équation différentielle.

1) Soit l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$. On vérifie que $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}$.
2) Soit l'équation différentielle $x^2y'' - 2y + 2x = 0$. On vérifie que $y(x) = kx^2 + x$ est une solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Remarques.

- On a l'habitude pour les équations différentielles de noter y au lieu de $y(x)$, y' au lieu $y'(x)$,...On note donc « $y' = \sin x$ » ce qui signifie « $y'(x) = \sin x$ ».
- Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. C'est pourquoi on trouve souvent « intégrer l'équation différentielle » pour « trouver les solutions de l'équation différentielle ».
- La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = 1/x$ a pour solutions les fonctions $y(x) = \ln(x) + k$. Alors que sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y(x) = \ln(-x) + k$ (k est une constante).

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. Dans certains cas simples, on peut exprimer la ou les solutions par des formules faisant intervenir les fonctions usuelles.
Dans ce chapitre on aborde trois types d'équations :

1) Les équations différentielles du premier ordre à variables séparbles (ou séparées).
2) Les équations différentielles linéaires du premier ordre.
3) Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

2) Equations différentielles du premier ordre à variables séparbles.

Il s'agit des équations où on peut « séparer ce qui concerne y et y' d'un côté de l'equation et ce qui concerne x de l'autre ». Plus précisément, on a :

Définition 2.1 Une équation différentielle du premier ordre est dite « *à variables séparbles* » si elle peut s'écrire sous la forme :

$$g(y) \cdot y' = f(x) \quad ou \quad y' = f(x)/g(y)$$

avec f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemples.

1) L'équation différentielle $yy' = 1$ est à variables séparbles. Les variables sont déjà séparées.
2) L'équation différentielle $y^2y' = x$ est à variables séparbles. Les variables sont déjà séparées.
3) L'équation $y' = y^2$ est une équation différentielle à variables séparbles. On sépare les variables en écrivant $y'/y^2 = 1$.
4) L'équation $y' = y^2 - y$ est une équation différentielle à variables séparbles. On sépare les variables en écrivant $y'/(y^2 - y) = 1$. C'est l'équation de population.
5) L'équation différentielle $y' = \sin(xy)$ n'est pas à variables séparbles. On peut essayer de prendre l'arcsin, mais ça ne donne rien.

2) Equations différentielles du premier ordre à variables séparbles.

Il s'agit des équations où on peut « séparer ce qui concerne y et y' d'un côté de l'equation et ce qui concerne x de l'autre ». Plus précisément, on a :

Définition 2.1 Une équation différentielle du premier ordre est dite « *à variables séparbles* » si elle peut s'écrire sous la forme :

$$g(y) \cdot y' = f(x) \quad ou \quad y' = f(x)/g(y)$$

avec f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemples.

1) L'équation différentielle $yy' = 1$ est à variables séparbles. Les variables sont déjà séparées.
2) L'équation différentielle $y^2y' = x$ est à variables séparbles. Les variables sont déjà séparées.
3) L'équation $y' = y^2$ est une équation différentielle à variables séparbles. On sépare les variables en écrivant $y'/y^2 = 1$.
4) L'équation $y' = y^2 - y$ est une équation différentielle à variables séparbles. On sépare les variables en écrivant $y'/(y^2 - y) = 1$. C'est l'équation de population.
5) L'équation différentielle $y' = \sin(xy)$ n'est pas à variables séparbles. On peut essayer de prendre l'arcsin, mais ça ne donne rien.

2) Equations différentielles du premier ordre à variables séparbles.

Il s'agit des équations où on peut « séparer ce qui concerne y et y' d'un côté de l'equation et ce qui concerne x de l'autre ». Plus précisément, on a :

Définition 2.1 Une équation différentielle du premier ordre est dite « *à variables séparbles* » si elle peut s'écrire sous la forme :

$$g(y) \cdot y' = f(x) \quad ou \quad y' = f(x)/g(y)$$

avec f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemples.

1) L'équation différentielle $yy' = 1$ est à variables séparbles. Les variables sont déjà séparées.
2) L'équation différentielle $y^2y' = x$ est à variables séparbles. Les variables sont déjà séparées.
3) L'équation $y' = y^2$ est une équation différentielle à variables séparbles. On sépare les variables en écrivant $y'/y^2 = 1$.
4) L'équation $y' = y^2 - y$ est une équation différentielle à variables séparbles. On sépare les variables en écrivant $y'/(y^2 - y) = 1$. C'est l'équation de population.
5) L'équation différentielle $y' = \sin(xy)$ n'est pas à variables séparbles. On peut essayer de prendre l'arcsin, mais ça ne donne rien.

Méthode de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à variables séparbles.

On a :

$$\begin{aligned} y' = \frac{f(x)}{g(y)} &\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ &\Longrightarrow g(y)dy = f(x)dx \\ &\Longrightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx. \end{aligned}$$

Par suite, si G et F désignent respectivement une primitive de g et de f, on aura

$$G(y) = F(x) + c$$

où c est une constante réelle. Dans le cas particulier où la fonction G est bijective, donc admet une fonction réciproque G^{-1}. La solution y s'exprime dans ce cas en fonction de x comme :

$$y = G^{-1}(F(x) + K).$$

Exemple 1. L'équation différentielle $y' = x^2 y + x^2$ est à variables séparées. En effet, on peut la ramener à la forme

$$\frac{y'}{y+1} = x^2.$$

En passant ensuite aux primitives, on a

$$\ln|y+1| = \frac{1}{3}x^3 + k,$$

ce qui conduit à

$$y = \pm e^k e^{\frac{x^3}{3}} - 1$$

avec $\pm e^k$ est une constante arbitraire non nulle. Finalement, les solutions générales de l'équation différentielle $y' = x^2 y + x^2$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = c\, e^{\frac{x^3}{3}} - 1$$

c étant une constante réelle quelconque.

Exemple 2. L'équation différentielle $(1+x^2)y' = xy$ est à variables séparées. En effet, on peut la ramener à la forme

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+1}.$$

En passant ensuite aux primitives, on a

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k,$$

ce qui conduit à

$$y = \pm e^k \sqrt{x^2+1}$$

avec $\pm e^k$ est une constante arbitraire non nulle. Finalement, les solutions générales de l'équation différentielle $(1+x^2)y' = xy$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = c\sqrt{x^2+1}$$

c étant une constante réelle quelconque.

Exemple 3. L'équation différentielle $x^2y' = e^{-y}$ est à variables séparées. En effet, on peut la ramener à la forme

$$y'e^y = \frac{1}{x^2} \quad \text{(en supposant } x \neq 0\text{)}.$$

On intègre des deux côtés, on obtient

$$e^y = -\frac{1}{x} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ constantte telle que $-\frac{1}{x} + c > 0$. Ce qui permet d'obtenir y :

$$y(x) = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

qui est une solution sur chaque intervalle I où elle est définie et dérivable. Cet intervalle dépend de la constante c : si $c < 0$, $I =]\frac{1}{c}, 0[$; si $c = 0$, $I =]-\infty, 0[$; si $c > 0$, $I =]\frac{1}{c}, +\infty[$.

Remarque. Une équation différentielle du 1^{er} odre à variables séparbles est dite « *autonome* » si elle ne dépend pas de x. Autrement dit, si elle est de la forme $y' = g(y)$.

3) Equations différentielles linéaires du premier ordre.

Définition 3.1 (équations différentielles linéaires du premier ordre).

- On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = f(x) \tag{E$_1$}$$

  où les a_0, a_1 et f sont des fonctions réelles continues sur un ouvert intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

  Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes y et y'.
- Une équation différentielle linéaire du premier ordre est *homogène* (ou *sans second membre*) si la fonction f ci-dessus est la fonction nulle. Autrement dit,

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = 0. \tag{EH$_1$}$$

- Une équation différentielle linéaire du premier ordre est *à coefficients constants* si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes. Autrement dit,

$$a_0y + a_1y' = f(x)$$

  où les a_i sont des constantes réelles et f une fonction continue.

3) Equations différentielles linéaires du premier ordre.

Définition 3.1 (équations différentielles linéaires du premier ordre).

- On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = f(x) \tag{E$_1$}$$

  où les a_0, a_1 et f sont des fonctions réelles continues sur un ouvert intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

  Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes y et y'.
- Une équation différentielle linéaire du premier ordre est *homogène* (ou *sans second membre*) si la fonction f ci-dessus est la fonction nulle. Autrement dit,

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = 0. \tag{EH$_1$}$$

- Une équation différentielle linéaire du premier ordre est *à coefficients constants* si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes. Autrement dit,

$$a_0y + a_1y' = f(x)$$

  où les a_i sont des constantes réelles et f une fonction continue.

Exemples.

1) $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
2) $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3) $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre ; mais elle n'est pas du premier ordre. Elle est du second ordre.
4) $y'^2 - y = x$ ou $y^2 \cdot y' - y = 0$ *ne sont pas* des équations différentielles linéaires.

Il y a en général plusieurs solutions à une équation différentielle. Pour espérer caractériser une solution, il faut ajouter une condition initiale qui décrit le système à un instant initial. Dans ce cadre le théorème de Cauchy-Lipschitz suivant affirme en effet l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles avec conditions initiales :

Théorème 3.2 (théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (E_1) admet une et une unique solution y sur I vérifiant la conditions initiale :

$$y(x_0) = y_0.$$

Exemples.

1) $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
2) $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3) $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre ; mais elle n'est pas du premier ordre. Elle est du second ordre.
4) $y'^2 - y = x$ ou $y^2 \cdot y' - y = 0$ *ne sont pas* des équations différentielles linéaires.

Il y a en général plusieurs solutions à une équation différentielle. Pour espérer caractériser une solution, il faut ajouter une condition initiale qui décrit le système à un instant initial. Dans ce cadre le théorème de Cauchy-Lipschitz suivant affirme en effet l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles avec conditions initiales :

Théorème 3.2 (théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (E_1) admet une et une unique solution y sur I vérifiant la conditions initiale :

$$y(x_0) = y_0.$$

Exemples.

1) $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
2) $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3) $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre ; mais elle n'est pas du premier ordre. Elle est du second ordre.
4) $y'^2 - y = x$ ou $y^2 \cdot y' - y = 0$ *ne sont pas* des équations différentielles linéaires.

Il y a en général plusieurs solutions à une équation différentielle. Pour espérer caractériser une solution, il faut ajouter une condition initiale qui décrit le système à un instant initial. Dans ce cadre le théorème de Cauchy-Lipschitz suivant affirme en effet l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles avec conditions initiales :

Théorème 3.2 (théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (E_1) admet une et une unique solution y sur I vérifiant la conditions initiale :

$$y(x_0) = y_0.$$

Ce théorème de Cauchy-Lipschitz illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

Remarque 1. Toute équation différentielle linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

En effet, si la fonction a_0 (de la définition 3.1) n'est pas identiquement nulle sur I alors il existe un sous-intervalle $J \subseteq$ tel que $a_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$ (car a_0 est continue sur I). La division par a_0 (dans l'intervalle J) permet de retrouver la forme normalisée.

Remarque 2. Toute équation différentielle linéaire homogène du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

où a est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Ce théorème de Cauchy-Lipschitz illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

Remarque 1. Toute équation différentielle linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

En effet, si la fonction a_0 (de la définition 3.1) n'est pas identiquement nulle sur I alors il existe un sous-intervalle $J \subseteq$ tel que $a_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$ (car a_0 est continue sur I). La division par a_0 (dans l'intervalle J) permet de retrouver la forme normalisée.

Remarque 2. Toute équation différentielle linéaire homogène du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

où a est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Ce théorème de Cauchy-Lipschitz illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

Remarque 1. Toute équation différentielle linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

En effet, si la fonction a_0 (de la définition 3.1) n'est pas identiquement nulle sur I alors il existe un sous-intervalle $J \subseteq$ tel que $a_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$ (car a_0 est continue sur I). La division par a_0 (dans l'intervalle J) permet de retrouver la forme normalisée.

Remarque 2. Toute équation différentielle linéaire homogène du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

où a est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Ce théorème de Cauchy-Lipschitz illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

Remarque 1. Toute équation différentielle linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E_1}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

En effet, si la fonction a_0 (de la définition 3.1) n'est pas identiquement nulle sur I alors il existe un sous-intervalle $J \subseteq$ tel que $a_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$ (car a_0 est continue sur I). La division par a_0 (dans l'intervalle J) permet de retrouver la forme normalisée.

Remarque 2. Toute équation différentielle linéaire homogène du premier ordre peut se mettre sous la forme (normalisée) suivante :

$$y' = a(x)y \tag{EH_1}$$

où a est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

I) Résolution de l'équation homogène

On va commencer par résoudre l'équation dans le cas où a est une constante et $b = 0$. Puis a sera une fonction (et toujours $b = 0$).

Théorème 3.3. Soit a un nombre réel fixé. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay \tag{ECC$_1$}$$

sont toutes les fonctions y définies par :

$$\boxed{y(x) = ke^{ax}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque.

- L'équation différentielle eqref admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante k).
- La constante k peut être nulle. Dans ce cas, on obtient la « solution nulle » : $y = 0$ sur $\mathbb{R}$, qui est une solution évidente de l'équation différentielle.
- Le théorème 3.3 peut aussi s'interpréter ainsi : si y_0 est une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle eqref, alors toutes les autres solutions y sont des multiples de y_0. Plus précisément, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle).

I) Résolution de l'équation homogène

On va commencer par résoudre l'équation dans le cas où a est une constante et $b = 0$. Puis a sera une fonction (et toujours $b = 0$).

Théorème 3.3. Soit a un nombre réel fixé. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay \qquad (\text{ECC}_1)$$

sont toutes les fonctions y définies par :

$$\boxed{y(x) = ke^{ax}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque.

- L'équation différentielle eqref admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante k).
- La constante k peut être nulle. Dans ce cas, on obtient la « solution nulle » : $y = 0$ sur $\mathbb{R}$, qui est une solution évidente de l'équation différentielle.
- Le théorème 3.3 peut aussi s'interpréter ainsi : si y_0 est une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle eqref, alors toutes les autres solutions y sont des multiples de y_0. Plus précisément, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle).

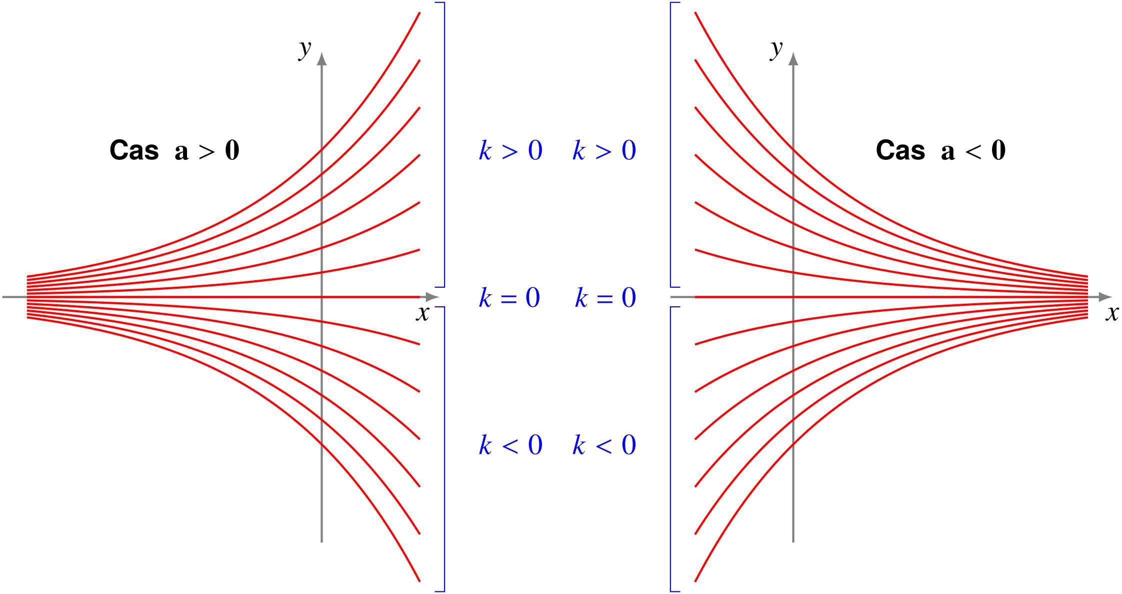


Figure – Courbes (ou lignes) intégrales de l'équation différentielle $y' = ay$.

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle : $2y' - 3y = 0$. On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{3}{2}y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{\frac{3}{2}x}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Le théorème suivant affirme que, si a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Théorème 3.4. Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions sur I de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

sont les fonctions y définies par :

$$\boxed{y(x) = ke^{A(x)}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $A : \ \longrightarrow I\mathbb{R}$ une primitive de a.

Si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax$ et on

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle : $2y' - 3y = 0$. On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{3}{2}y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{\frac{3}{2}x}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Le théorème suivant affirme que, si a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Théorème 3.4. Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions sur I de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y \qquad (\text{EH}_1)$$

sont les fonctions y définies par :

$$\boxed{y(x) = ke^{A(x)}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $A : \longrightarrow I\mathbb{R}$ une primitive de a.

Si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax$ et on

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle : $2y' - 3y = 0$. On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{3}{2}y\cdot$ Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{\frac{3}{2}x}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Le théorème suivant affirme que, si a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Théorème 3.4. Soit $a\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions sur I de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

sont les fonctions y définies par :

$$\boxed{y(x) = ke^{A(x)}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $A\colon \longrightarrow I\mathbb{R}$ une primitive de a.

Si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax$ et on

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle : $2y' - 3y = 0$. On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{3}{2}y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{\frac{3}{2}x}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Le théorème suivant affirme que, si a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Théorème 3.4. Soit $a \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions sur I de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

sont les fonctions y définies par :

$$\boxed{y(x) = ke^{A(x)}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $A \colon \longrightarrow I\mathbb{R}$ une primitive de a.

Si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax$ et on

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle $x^2 y' = y$. On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2} y$. Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$. Or une primitive de a est $A(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi les solutions cherchées sont

$$y(x) = k e^{-\frac{1}{x}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque (principe de linéarité). Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier d'ordre

$$a_0(x) y + a_1(x) y' = 0 \qquad (E_0)$$

alors quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi une solution de cette équation.

C'est une simple vérification. On peut reformuler la proposition en disant que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle $x^2 y' = y$. On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2} y\cdot$ Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}\cdot$ Or une primitive de a est $A(x) = -\frac{1}{x}\cdot$ Ainsi les solutions cherchées sont

$$y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque (principe de linéarité). Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier d'ordre

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = 0 \tag{E_0}$$

alors quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi une solution de cette équation.

C'est une simple vérification. On peut reformuler la proposition en disant que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle $x^2y' = y$. On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2}y\cdot$ Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}\cdot$ Or une primitive de a est $A(x) = -\frac{1}{x}\cdot$ Ainsi les solutions cherchées sont

$$y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque (principe de linéarité). Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier d'ordre

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = 0 \tag{E_0}$$

alors quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi une solution de cette équation.

C'est une simple vérification. On peut reformuler la proposition en disant que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire du premier d'ordre mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 1er avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 3.5 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_1$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_1$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_1$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire du premier d'ordre mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 1$^{\text{er}}$ avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 3.5 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_1$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_1$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_1$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire du premier d'ordre mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 1er avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 3.5 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_1$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_1$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_1$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire du premier d'ordre mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 1er avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 3.5 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_1$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_1$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_1$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

Ainsi pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :

- trouver une solution particulière y_p de l'équation (E$_1$),
- trouver une solution générale y de l'équation homogène associée

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

Ce qui donne :

Corollaire 3.6 (l'ensemble des solutions). Si y_p est une solution particulière de (E$_1$). Alors l'ensemble des solutions générales de (E$_1$) est formé des fonctions $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$y(x) = y_p(x) + ke^{A(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $x \longmapsto A(x)$ est une primitive de $x \longmapsto a(x)$.

Ainsi pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E$_1$}$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :

- trouver une solution particulière y_p de l'équation (E$_1$),
- trouver une solution générale y de l'équation homogène associée

$$y' = a(x)y \tag{EH$_1$}$$

Ce qui donne :

Corollaire 3.6 (l'ensemble des solutions). Si y_p est une solution particulière de (E$_1$). Alors l'ensemble des solutions générales de (E$_1$) est formé des fonctions $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$y(x) = y_p(x) + ke^{A(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $x \longmapsto A(x)$ est une primitive de $x \longmapsto a(x)$.

Ainsi pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E_1}$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :

- trouver une solution particulière y_p de l'équation (E_1),
- trouver une solution générale y de l'équation homogène associée

$$y' = a(x)y \tag{EH_1}$$

Ce qui donne :

Corollaire 3.6 (l'ensemble des solutions). Si y_p est une solution particulière de (E_1). Alors l'ensemble des solutions générales de (E_1) est formé des fonctions $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$y(x) = y_p(x) + ke^{A(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et $x \longmapsto A(x)$ est une primitive de $x \longmapsto a(x)$.

Recherche d'une solution particulière

Méthode de variation de la constante : c'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive.

La solution générale de l'équation homogène $y' = a(x)y$ est donnée par

$$y(x) = ke^{A(x)}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_p soit une solution de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$.

Donc y_p est une solution de (E_1) si et seulement si

$$\begin{aligned} k'(x)e^{A(x)} = b(x) &\iff k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \\ &\iff k(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ce qui donne une solution particulière $y_p(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x\right) e^{A(x)}$ de (E_1) sur I. La solution générale de (E_1) est donnée par

$$y(x) = y_p(x) + ke^{A(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple. Soit l'équation différentielle $y' + y = e^x + 1$. L'équation homogène associée est $y' = -y$ dont les solutions générales sont les fonctions

$$y(x) = ke^{-x}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.
Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_p(x) = k(x)e^{-x}$. On doit trouver $k(x)$ afin que y_p vérifie l'équation différentielle $y' + y = e^x + 1$.
En effet, on a

$$\begin{aligned} y_p'(x) + y_p(x) = e^x + 1 &\iff (k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} = e^x + 1 \\ &\iff k'(x)e^{-x} = e^x + 1 \\ &\iff k'(x) = e^{2x} + e^x \\ &\iff k(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + c. \end{aligned}$$

On fixe $c = 0$ (n'importe quelle valeur convient) :

$$y_p(x) = k(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^x\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 1.$$

Avec cette solution particulière, les solutions générales de l'équation $y' + y = e^x + 1$ s'obtiennent en additionnant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

4) Equations différentielles linéaires du second ordre à ceofficients constants.

Définition 4.1 (équations différentielles linéaires du second ordre à ceofficients constants).

- On appelle équation différentielle du 2ième ordre à coefficients constants une équation différentielle du type
$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
- L'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E$_2$) est l'équation différentielle définie par :
$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH$_2$}$$

Exemples.

1) $y'' + 5y = e^x$ est une équation différentielle linéaire du 2ième ordre à coefficients constants.
2) $y' + 5y = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3) $2y''' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants ; mais elle n'est pas du 2ième ordre. Elle est du 3ième ordre.
4) $y'^2 - y = x$ est une équation différentielle du 2ième ordre mais qui n'est pas linéaire.

4) Equations différentielles linéaires du second ordre à ceofficients constants.

Définition 4.1 (équations différentielles linéaires du second ordre à ceofficients constants).

- On appelle équation différentielle du 2ième ordre à coefficients constants une équation différentielle du type
$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
- L'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E$_2$) est l'équation différentielle définie par :
$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH$_2$}$$

Exemples.

1) $y'' + 5y = e^x$ est une équation différentielle linéaire du 2ième ordre à coefficients constants.
2) $y' + 5y = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3) $2y''' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants ; mais elle n'est pas du 2ième ordre. Elle est du 3ième ordre.
4) $y'^2 - y = x$ est une équation différentielle du 2ième ordre mais qui n'est pas linéaire.

4) Equations différentielles linéaires du second ordre à ceofficients constants.

Définition 4.1 (équations différentielles linéaires du second ordre à ceofficients constants).

- On appelle équation différentielle du 2ième ordre à coefficients constants une équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- L'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E_2) est l'équation différentielle définie par :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH$_2$}$$

Exemples.

1) $y'' + 5y = e^x$ est une équation différentielle linéaire du 2ième ordre à coefficients constants.
2) $y' + 5y = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3) $2y''' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants; mais elle n'est pas du 2ième ordre. Elle est du 3ième ordre.
4) $y'^2 - y = x$ est une équation différentielle du 2ième ordre mais qui n'est pas linéaire.

Il y a en général plusieurs solutions à une équation différentielle. Pour espérer caractériser une solution, il faut ajouter une condition initiale qui décrit le système à un instant initial. Dans ce cadre le théorème de Cauchy-Lipschitz suivant affirme en effet l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles avec conditions initiales :

Théorème 4.2 (théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation ($\mathrm{E}_2$) admet une et une unique solution y sur I vérifiant les conditions initiales :

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_1 .$$

Ce théorème illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

Il y a en général plusieurs solutions à une équation différentielle. Pour espérer caractériser une solution, il faut ajouter une condition initiale qui décrit le système à un instant initial. Dans ce cadre le théorème de Cauchy-Lipschitz suivant affirme en effet l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles avec conditions initiales :

Théorème 4.2 (théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation ($\mathrm{E}_2$) admet une et une unique solution y sur I vérifiant les conditions initiales :

$$y(x_0) = y_0 \;\text{ et }\; y'(x_0) = y_1 .$$

Ce théorème illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

I) Résolution de l'équation homogène

On cherche une solution de l'équation (EH_2) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 &\iff (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 4.3 (équation caractéristique). L'équation algébrique

$$ar^2 + br + c = 0$$

s'appelle *l'équation caractéristique* associée à l'équation différentielle (EH_2).

I) Résolution de l'équation homogène

On cherche une solution de l'équation (EH_2) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 &\iff (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 4.3 (équation caractéristique). L'équation algébrique

$$ar^2 + br + c = 0$$

s'appelle *l'équation caractéristique* associée à l'équation différentielle (EH_2).

I) Résolution de l'équation homogène

On cherche une solution de l'équation (EH_2) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 &\iff (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 4.3 (équation caractéristique). L'équation algébrique

$$ar^2 + br + c = 0$$

s'appelle *l'équation caractéristique* associée à l'équation différentielle (EH_2).

Solutions de l'équation homogène :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (EH_2). Alors on a :

1) Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de l'équation (EH_2) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

2) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de l'équation (EH_2) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

3) Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de l'équation (EH_2) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = e^{\alpha x}.\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

Exemples.

1) Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r+1)(r-2) = 0$ car $\Delta > 0$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$ car $\Delta = 0$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$ car $\Delta < 0$). D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = e^x.(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 2$^{\text{ième}}$ avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 4.4 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_2$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_2$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_2$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 2$^{\text{ième}}$ avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 4.4 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_2$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_2$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_2$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 2[ième] avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 4.4 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_2$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_2$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_2$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

II) Résolution de l'équation avec second membre

Nous traitons maintenant le cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants mais avec un second membre, c'est-à-dire

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E$_2$}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire du 2$^{\text{ième}}$ avec second membre, on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition suivant :

Proposition 4.4 (l'ensemble des solutions). L'ensemble des solutions de (E$_2$) est formé des fonctions

$$y_p + y$$

avec y_p une solution particulière de l'équation (E$_2$) et y une solution générale de l'équation homogène (EH$_2$).

Tout le problème est donc à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.

Recherche d'une solution particulière :

On va d'abord donner deux méthodes dans des cas particuliers très importants et ensuite une méthode générale.

1) second membre du type $\mathbf{e}^{\alpha \mathbf{x}}\mathbf{P}(\mathbf{x})$:

Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_0(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$$

où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_0(x) = e^{\alpha x}Q(x)$, on prend $m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$, on prend $m = 1$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = x^2e^{\alpha x}Q(x)$, on prend $m = 2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Recherche d'une solution particulière :
On va d'abord donner deux méthodes dans des cas particuliers très importants et ensuite une méthode générale.

1) second membre du type $\mathbf{e^{\alpha x}P(x)}$:
Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_0(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$$

où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_0(x) = e^{\alpha x}Q(x)$, on prend $m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$, on prend $m = 1$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = x^2e^{\alpha x}Q(x)$, on prend $m = 2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Recherche d'une solution particulière :
2) second membre du type $\mathbf{e}^{\alpha \mathbf{x}}\big(\mathbf{P_1}(\mathbf{x})\cos(\beta\mathbf{x}) + \mathbf{P_2}(\mathbf{x})\sin(\beta\mathbf{x})\big)$:

Si $f(x) = e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_0(x) = e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$,
  si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = xe^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$,
  si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Exemple 1. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, avec deux racines réelles distinctes $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Donc les solutions de l'équation proposée sont les les fonctions

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

Exemple 2. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = (ax+b)e^x$. En remplaçant dans l'équation, on a

$$\begin{aligned}
& (ax + 2a + b)e^x - 5(ax + a + b)e^x + 6(ax + b)e^x = 4xe^x \\
\Longleftrightarrow \quad & (a - 5a + 6a)x + 2a + b - 5(a + b) + 6b = 4x \\
\Longleftrightarrow \quad & 2a = 4 \ \text{ et } \ -3a + 2b = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & a = 2 \ \text{ et } \ b = 3
\end{aligned}$$

Donc $y_0(x) = (2x+3)e^x$. Les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

Exemple 1. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, avec deux racines réelles distinctes $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Donc les solutions de l'équation proposée sont les les fonctions

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

Exemple 2. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = (ax+b)e^x$. En remplaçant dans l'équation, on a

$$\begin{aligned}
& (ax + 2a + b)e^x - 5(ax + a + b)e^x + 6(ax + b)e^x = 4xe^x \\
\Longleftrightarrow \quad & (a - 5a + 6a)x + 2a + b - 5(a + b) + 6b = 4x \\
\Longleftrightarrow \quad & 2a = 4 \ \text{ et } \ -3a + 2b = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & a = 2 \ \text{ et } \ b = 3
\end{aligned}$$

Donc $y_0(x) = (2x+3)e^x$. Les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

On cherche maintenant λ, μ tels que $y(0) = 1, y'(0) = 0$. C'est-à-dire que $3 + \lambda + \mu = 1$, $5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. Donc $\lambda = -1, \mu = -1$, c'est-à-dire que

$$y(x) = (2x + 3)e^x - e^{2x} - e^{3x}.$$

Exemple 3. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$. Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = x(ax + b)e^{2x}.$$

En remplaçant dans l'équation comme dans l'exemple 2, on trouve $y_0(x) = x(-2x - 4)e^{2x}$. Par suite les solutions générales de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$y(x) = x(-2x - 4)e^{2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

On cherche maintenant λ, μ tels que $y(0) = 1, y'(0) = 0$. C'est-à-dire que $3 + \lambda + \mu = 1$, $5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. Donc $\lambda = -1, \mu = -1$, c'est-à-dire que

$$y(x) = (2x + 3)e^x - e^{2x} - e^{3x}.$$

Exemple 3. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$. Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = x(ax + b)e^{2x}.$$

En remplaçant dans l'équation comme dans l'exemple 2, on trouve $y_0(x) = x(-2x - 4)e^{2x}$. Par suite les solutions générales de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$y(x) = x(-2x - 4)e^{2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

3) Méthode de variation des constantes :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes (i.e. libre) de l'équation homogène (EH_2), on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions vérifiant le système suivant :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda' y_1 + \mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' & = & \dfrac{f(x)}{a}. \end{array} \right.$$

Le système (S) se résout facilement, ce qui donne λ' et μ', puis λ et μ par intégration.

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle $] - \pi/, \pi/2[$.
Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$sont les les fonctions

$$\lambda \cos x + \mu \sin x$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$$

3) Méthode de variation des constantes :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes (i.e. libre) de l'équation homogène (EH$_2$), on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions vérifiant le système suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' & = & \dfrac{f(x)}{a}. \end{cases}$$

Le système (S) se résout facilement, ce qui donne λ' et μ', puis λ et μ par intégration.

Exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle $]-\pi/, \pi/2[$.
Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$sont les les fonctions

$$\lambda \cos x + \mu \sin x$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$$

où cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ sont des fonctions à déterminer et qui vérifient le système (S) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda' \cos x + \mu' \sin x & = & 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x & = & \dfrac{1}{\cos x}. \end{array}\right.$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda' \cos x \sin x + \mu' \sin^2 x & = & 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu' \cos^2 x & = & 1. \end{array}\right.$$

Donc par somme $\mu' = 1$. Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$.

On peut vérifier (pour se rassurer) que $y_0(x) = \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$ est une solution de l'équation. Par suite, les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x$$

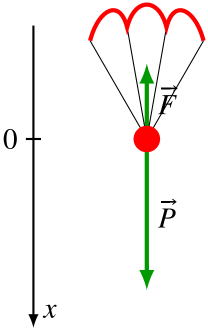
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

5) Exemples de la Physique

I) Parachutiste : Revenons sur l'exemple du parachutiste de l'introduction : sa vitesse verticale vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g - fv(t)$$

où g (la constante de gravitation) et f (le coefficient de frottement) sont des constantes.

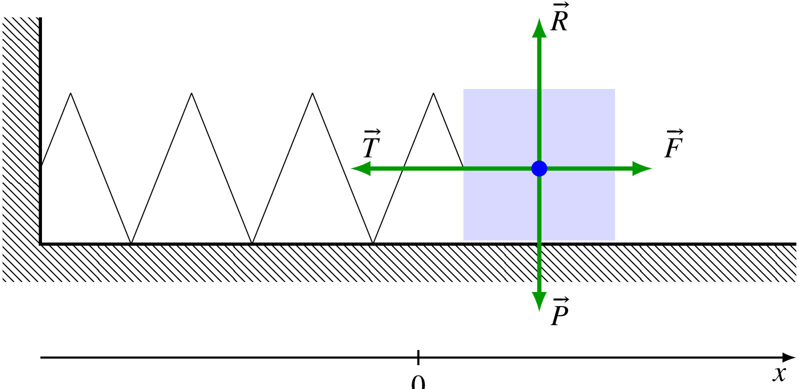


Nous avons maintenat tous les ingrédients pour déterminer la vitesse v.

- **Équation homogène.** Les solutions de l'équation homogène $v'(t) = -fv(t)$ sont les
$$v(t) = ke^{-ft}$$
avec $k \in \mathbb{R}$ une constante quelconque.
- **Solution particulière.** On cherche une solution particulière $v_p(t) = k(t)e^{-ft}$ de l'équation $v' = g - fv$ par la méthode de variation de la constante : $v_p'(t) = k'(t)e^{-ft} - fk(t)e^{-ft}$. Pour que v_p soit solution de l'équation différentielle il faut et il suffit donc que $k'(t)e^{-ft} = g$. D'où $k'(t) = ge^{ft}$. Donc par exemple, $k(t) = \frac{g}{f}e^{ft}$. Ainsi $v_p(t) = \frac{g}{f}$.
- **Solutions générales.** La solution générale de l'équation est donc
$$v(t) = \frac{g}{f} + ke^{-ft}$$
avec $k \in \mathbb{R}$ une constante quelconque.
- **Condition initiale.** Si à l'instant $t = 0$ le parachute se lance avec une vitesse initiale nulle (c'est-à-dire $v(0) = 0$), alors sa vitesse est :
$$v(t) = \frac{g}{f} - \frac{g}{f}e^{-ft}.$$

II) Oscillateur mécanique : Une masse est attachée à un ressort. Les forces qui s'appliquent à cette masse sont :

- Un poids $\vec{P}$,
- une réaction $\vec{R} = -\vec{P}$ qui s'oppose au poids,
- une force de rappel $\vec{T}$,
- une force de frottement $\vec{F}$.



Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}+\vec{F}=m\,\vec{a}$$

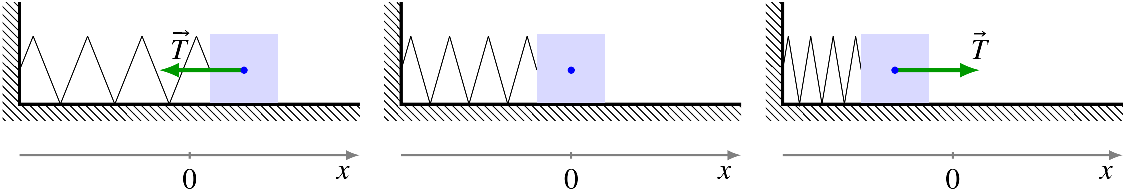
Remarquons que la réaction s'opposant au poids, on a donc $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$, et l'équation devient alors :

$$\vec{T}+\vec{F}=m\,\vec{a}\,.$$

Force de rappel : la force de rappel est une force horizontale. Elle est nulle à la position d'équilibre, qui sera pour nous l'origine $x=0$. Si on écarte davantage la masse du mur, la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe vers la position d'équilibre (vers la gauche sur le dessin). Si on rapproche la masse du mur, le ressort se comprime, et la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe encore vers la position d'équilibre (cette fois vers la droite sur le dessin). On modélise la force de rappel par

$$\vec{T}=-kx\,\vec{i}$$

où x est la position de la masse (on peut avoir $x\geqslant 0$ ou $x\leqslant 0$), et $k>0$ est une constante qui dépend du ressort.



Oscillateur mécanique non amorti : On suppose d'abord qu'il n'y a pas de frottement : $\vec{F} = \vec{0}$. Le principe fondamental de la dynamique (considéré uniquement sur l'axe horizontal) s'écrit alors :

$$-kx(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{k}{m} = 0$ dont les solutions sont les nombres complexes

$$r_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } r_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot$$

Nous sommes dans le cas $\Delta = -4\frac{k}{m} < 0$. Les solutions de cette équation caractéristique sont de la forme $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot$ Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big)$$

Dans notre situation (la fonction inconnue est x et la variable est le temps t), on a donc

$$x(t) = \lambda\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right) + \mu\sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.

Oscillateur mécanique amorti : On rajoute une force de frottement $\vec{F} = -fm\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ qui est proportionnelle à la vitesse et s'oppose au déplacement (f est le coefficient de frottement). Le principe fondamental de la dynamique devient :

$$-kx(t) - fm\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\cdot$$

Il s'agit maintenat de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$y'' + fy' + \frac{k}{m}y = 0.$$

L'équation caractéristique est cette fois $r^2 + fr + \frac{k}{m} = 0\cdot$ Son discriminant est $\Delta = f^2 - 4\frac{k}{m}\cdot$
Supposons que le coefficient de frottement f soit faible, c'est-à-dire que $\Delta = f^2 - 4\frac{k}{m} < 0\cdot$
Comme dans le cas sans frottement. On note $\delta = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4\frac{k}{m} - f^2}\cdot$

Les deux solutions sont

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta.$$

avec $\alpha = -\dfrac{f}{2}$ et $\beta = \dfrac{\delta}{2} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{f^2}{4}}$. Les solutions de l'équation différentielle sont encore de la forme :

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big).$$

Ce qui donne ici :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2}t}\left(\lambda \cos\left(\tfrac{\delta}{2}t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\delta}{2}t\right)\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques.
Cette fois la solution n'est plus périodique, mais correspond à un mouvement oscillant amorti, qui tend vers la position d'équilibre $x = 0$.

Exercices

Exercice 1. 1) Résoudre l'équation différentielle $y' + y\ln 2 = 0$.

2) Trouver la solution vérifiant $y(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. 1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 5$.

2) Trouver la solution vérifiant $y(0) = -\frac{1}{3}$.

Exercice 3. 1) Trouver une solution évidente, puis résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$.

2) Trouver la solution vérifiant $y(1) = 2$.

Exercice 4. 1) Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$.

2) Même question pour l'équation différentielle $y' + 2y = \sin(3x)e^{-2x}$.

Exercices

Exercice 5. 1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

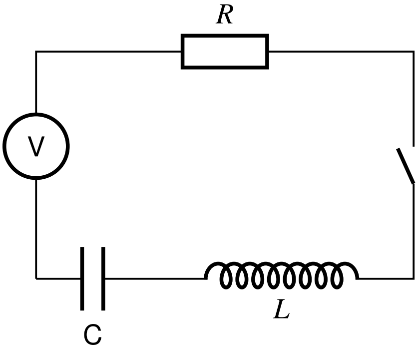
2) Trouver la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

3) Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$.

Exercice 6. 1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 0$.

2) Trouver la solution vérifiant $y(-1) = 1$ et $y'(-1) = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = e^x$.


R
V
C
L