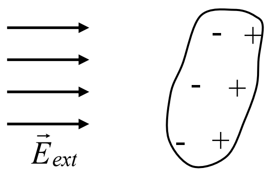
Chapitre 4

Conducteurs en équilibre et énergie électrique

I – Equilibre électrostatique d'un conducteur isolé et unique

I.1 – Propriétés générales d'un conducteur

1 – Dans les conducteurs (exemple les métaux), les électrons extérieurs sont peu liés aux noyaux des atomes et peuvent se déplacer facilement entre les atomes. Ces électrons sont des charges libres.
2 – Dans les isolants (exemple les matières plastiques), les électrons sont fortement liés aux noyaux des atomes et ne peuvent pas se déplacer entre les atomes.
3 – Un conducteur est en équilibre électrostatique lorsque les charges libres qu'il contient sont au repos. Il y a des mouvements de charges à cause de l'agitation thermique, mais pas de mouvement d'ensemble.
4 – Sous l'effet d'un champ électrique $\vec{E}_{ext}$ extérieur les charges positives et négatives, figure ci-contre, d'un conducteur se séparent. Il y'a accumulation de charges des deux côtés du conducteur.



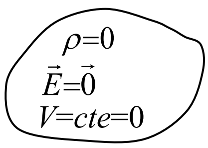
I.2 – Conducteur chargé en équilibre

Soit un conducteur isolé et neutre, figure ci-dessous, avec

$\rho=0$

$\vec{E}=\vec{0}$

$V=\text{cte}=V(\infty)=0$ (car il n'y a pas de charges)

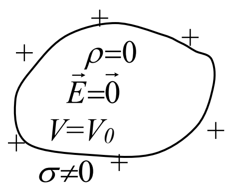


conducteur
neutre et isolé

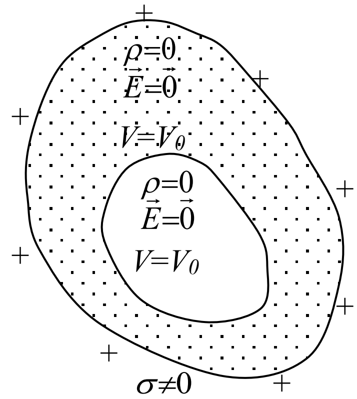
Supposons qu'on dépose une quantité de charges positives sur ce conducteur, elle va se déplacer et provoquer un déplacement des autres charges. Au bout d'un certain temps, il s'établit un nouveau équilibre électrostatique. Donc, il n'y a plus de force électrique $\vec{F}=q\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$ et par conséquent $\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$ (puisqu'on a déposé une charge $q\neq 0$ sur le conducteur) en tout point à l'intérieur du conducteur. On a aussi, d'après les résultats précédents, $\rho_{\text{int}}=\varepsilon_0 div\vec{E}_{\text{int}}=0$ ce qui implique que la charge posée est répartie sur la surface du conducteur.

Pour déterminer le potentiel du conducteur, on utilise la relation $\vec{E}_{\text{int}}=-\overrightarrow{grad}V_{\text{int}}=\vec{0}$, ce qui donne $V_{\text{int}}=cte=V_0$ en tout point et la surface du conducteur est une équipotentielle.

Ces propriétés sont valables aussi pour un conducteur creux, figure ci-dessous.



conducteur chargé positivement



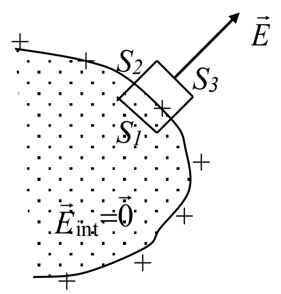
conducteur creux chargé positivement

I.3 – Champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé

Soit un conducteur chargé avec une densité de charge positive σ. Pour calculer le champ électrique, en utilisant le théorème de Gauss, au voisinage du conducteur, on choisit une surface S fermée (figure ci-dessous) cylindrique ($S=S_1+S_2+S_3$). La surface latérale S_2 et la base S_3 doivent être faibles pour que le champ $\vec{E}$ soit normal à cette base.

Le flux du champ à travers cette surface est donné par

$$\phi=\oint\!\!\oint_{(S)}\vec{E}.\vec{ds}=\phi_{S_1}+\phi_{S_2}+\phi_{S_3}$$



$\phi_{S_1}=0$ car le champ à l'intérieur du conducteur est $\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$

$\phi_{S_2}=0$ car $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale de S_2

$$\phi_{S_3}=\iint_{S_3}\vec{E}.\vec{ds}=\iint_{S_3}E.ds=E\iint_{S_3}ds=ES_3$$

La charge à l'intérieur de la surface S est

$$\sum q_{\text{int}}=\sigma S_3$$

Finalement, à partir de ces résultats et en appliquant le théorème de Gauss

$$\phi=\frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi=ES_3=\frac{\sigma S_3}{\varepsilon_0}$$

on déduit le champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé (connu aussi sous l'appellation Théorème de Coulomb)

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

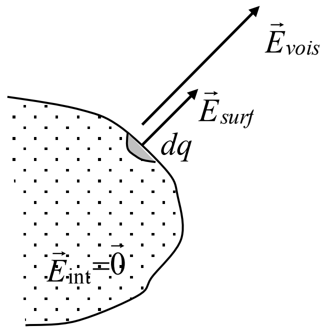
C'est un champ qui ne dépend que de la densité de charge sur le conducteur, normal à la surface de ce dernier.

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est la normale, sur la surface du conducteur, orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

I.4 – Pression électrostatique

A partir du champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé $\vec{E}_{vois}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ et du champ à l'intérieur $\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$, figure ci-contre, on déduit le champ électrique sur la surface par la relation



$$E_{surf}=\frac{E_{vois}+E_{\text{int}}}{2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

C'est un champ normal à la surface du conducteur

$$\vec{E}_{surf}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est la normale orientée de l'intérieur vers l'extérieur du conducteur.

D'après la force de Coulomb, une charge élémentaire $dq=\sigma ds$, sur la surface du conducteur, sera soumise à la force électrostatique proportionnelle au champ électrique sur la surface

$$\vec{df}=dq.\vec{E}_{surf}$$

C'est une force normale et dirigée vers l'extérieur de la surface du conducteur et de module

$$df=dq.\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}ds$$

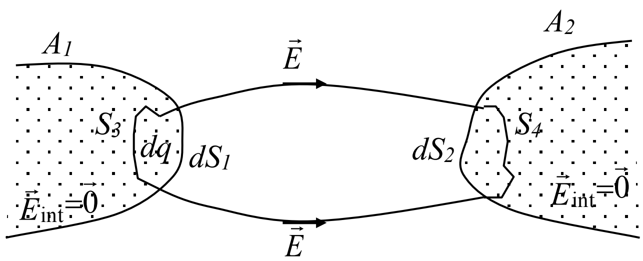
En exprimant cette force par unité de surface, on obtient la pression électrostatique exercée sur le conducteur

$$p=\frac{df}{ds}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

II – Equilibre de plusieurs conducteurs

II.1 – Eléments correspondants

Soient deux conducteurs A_1 chargé positivement et A_2 neutre, placés suivant la figure ci-dessous. Soit un tube de champ qui découpe dans A_1 la surface dS_1 et dans A_2 la surface dS_2. Supposons que dq est la charge de l'élément de surface dS_1.



Calculons le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface fermée *S* (formée par la surface du tube, la surface S_3 à l'intérieur de A_1 et la surface S_4 à l'intérieur de A_2) et appliquons le théorème de Gauss.

$$\phi=\oiint_{(S)}\vec{E}.\vec{ds}=\phi_{S_3}+\phi_{tube}+\phi_{S_4}=\frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$\phi_{S_3}=0$ car le champ à l'intérieur de A_1 est $\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$

$\phi_{S_4}=0$ car le champ à l'intérieur de A_2 est $\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$

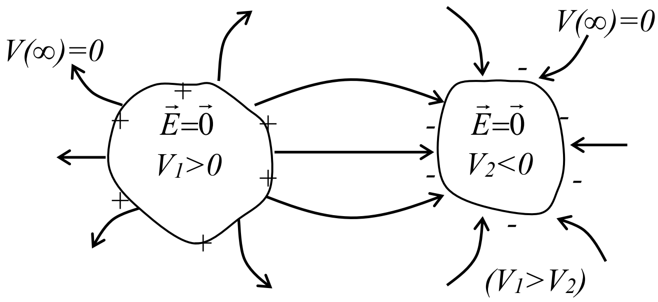
$\phi_{tube}=0$ car $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale du tube

$\phi=0$

Comme le flux totale est nul $\phi=0$ alors on a $\sum q_{\text{int}}=0$. Or à l'intérieur de la surface *S*, la charge sur S_1 est non nulle $dq\neq 0$, ce qui impose la présence d'une charge dq' opposée sur la surface S_4 du conducteur A_2.

$$dq'=-dq$$

On déduit, finalement, que les charges portées par deux éléments correspondants, dans un tube, sont opposées.



Etat d'équilibre de deux conducteurs
positif et négatif

II.2 – Théorème de superposition des états d'équilibre

En superposant plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteurs, on obtient un nouvel état d'équilibre. Les densités et les charges totales sur chaque conducteur, le potentiel en tout point de l'espace sont les sommes algébriques des densités, charges et potentiels qui existaient, respectivement, dans les états d'équilibre avant la superposition. De même, il y a addition vectorielle des champs en tout point de l'espace.

Remarque : Le problème d'équilibre de conducteurs peut être résolu en calculant la fonction potentiel électrostatique V(M), nulle à l'infini, satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta V(M)=0$ en tout point extérieur aux conducteurs, V(M)=Cte sur les conducteurs. Ensuite, en tout point le champ électrique est déterminé par $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{grad}V(M)$, la densité surfacique de charges sur chaque conducteur est donnée par la relation $\sigma(M)=\varepsilon_0 E(M)$ et la charge totale d'un conducteur est calculée par $Q=\iint_{(Conducteur)}\sigma(M)ds$.

III – Influence électrostatique

III.1 – Influence sur un conducteur isolé

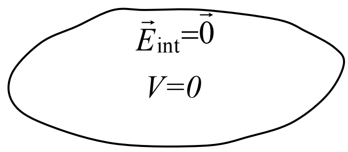
III.1.1- Par un champ extérieur

Un conducteur isolé et neutre, figure ci-dessous, dans un espace est caractérisé par

$\sigma=0$, la densité de charge est nulle et la charge $Q=\iint_{(S)}\sigma ds=0$

$\vec{E}_{\text{int}}=\vec{0}$, le champ est nul à l'intérieur

$V=V_{int}=Cte=0$ car $\vec{E}_{\text{int}}=-\overrightarrow{grad}V_{\text{int}}=\vec{0}$ et pas de charges à l'infini



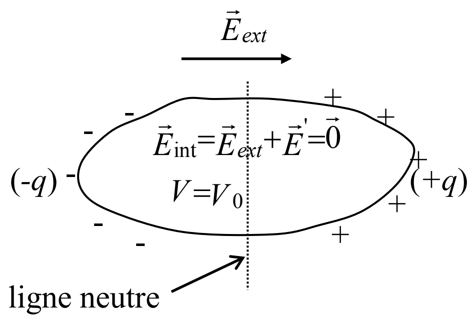
En plaçant ce conducteur dans un espace où il y a un champ électrique extérieur $\vec{E}_{ext}$, les charges du conducteur vont se répartir, sous l'influence de ce champ influençant, sur la surface de façon que $\vec{E}_{\text{int}}$ reste nul. Alors les caractéristiques, à l'équilibre, du conducteur deviennent, figure ci-dessous,

$Q=(-q)+(+q)=0$, la charge totale du conducteur

$\vec{E}_{\text{int}}=\vec{E}_{ext}+\vec{E}'=\vec{0}$ où $\vec{E}'$ est le champ créé par les charges séparées $(+q)$ et $(-q)$ du conducteur

$V=V_{int}=Cte=V_0$ car $\vec{E}_{\text{int}}=-\overrightarrow{grad}V_{\text{int}}=\vec{0}$ et présence de charges sur le conducteur

De plus, il y a apparition d'un plan neutre entre les charges positives et négatives séparées où la densité surfacique de charge est nulle $\sigma=0$.



III.1.2- Par un conducteur chargé

Soit un conducteur A_2 neutre ($\sigma=0$, $Q_2=0$, $V_2=0$) placé dans un espace où il y a un conducteur A_1 chargé positivement avec la charge Q_1, figure ci-dessous. Sous l'influence du champ électrique de A_1 et en respectant les propriétés des éléments correspondants, les caractéristiques du conducteur A_2 deviennent à l'équilibre

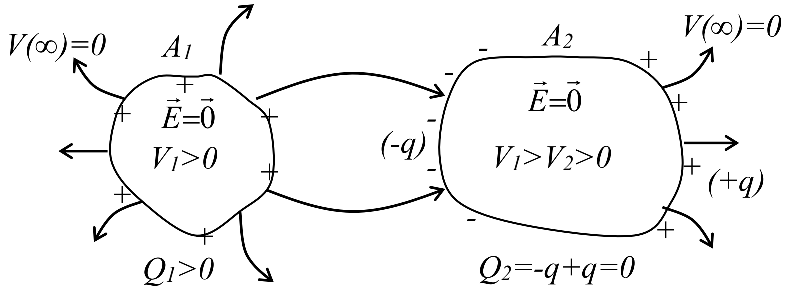
$Q_2=(-q)+(+q)=0$, la charge totale du conducteur

$\vec{E}=\vec{0}$, le champ est nul à l'intérieur

$V=V_{int}=Cte=V_2$ car $\vec{E}_{\text{int}}=-\overrightarrow{grad}V_{\text{int}}=\vec{0}$ et présence de charges sur le conducteur. Le potentiel de A_2 change et devient positif $V_1>V_2>0$ car les lignes de champ se dirigent vers les potentiels décroissants

Comme, toutes les lignes de champ issues de A_1 ne rejoignent pas A_2, certaines partent à l'infini alors l'influence est partielle et on a

$$|Q_1|>|(-q)|$$



N.B : L'influence n'existe que pour les corps conducteurs.

Remarque : S'il y a plusieurs conducteurs en influence, un conducteur chargé n'a pas nécessairement un potentiel de même signe que sa charge par exemple $Q_2=0$ mais $V_2>0$.

III.2 – Influence sur un conducteur relié à la terre

Considérons le même système du §III.1-2 et relions A_2 à la terre. Par convention, le potentiel de la terre (sol) est nul

$$V_{terre}=0$$

Comme le conducteur A_2 et la terre forment un seul conducteur, les charges positives sont compensées par les charges de la terre (réservoir inépuisable des charges). Alors, à l'équilibre, on a

$Q_2=(-q)<0$, la charge totale du conducteur est négative

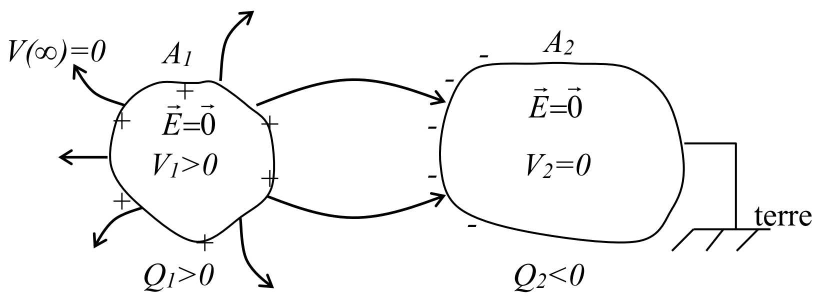
$\vec{E}=\vec{0}$, le champ est nul à l'intérieur

$V_2=V_{terre}=0$, le potentiel de la terre

Comme, toutes les lignes de champ issues de A_1 ne rejoignent pas A_2, certaines partent à l'infini alors l'influence est partielle et on a

$$Q_1>|Q_2|$$

On constate que le potentiel $V_2=0$ mais la charge $Q_2<0$.



Remarque : Si la liaison entre A_2 et la terre est coupée, la charge négative Q_2 se répartit sur toute la surface du conducteur et le potentiel devient négative $V_2<0$.

III.3 – Influence totale

L'influence est dite totale si le conducteur influencé entoure complètement le conducteur chargé influençant.

Soit un conducteur creux A_1 neutre ($\sigma=0$, $Q=0$, $V=0$). On place à l'intérieur de A_1, dans la partie creuse, un conducteur A_2 chargé positivement avec une charge Q_2 suivant la figure ci-dessous. Ainsi, toutes les lignes de champ qui partent de A_2 arrivent sur A_1 et par conséquent on a une influence totale.

A l'équilibre, sous l'influence du champ électrique de A_2 et en respectant les propriétés des éléments correspondants, les caractéristiques du système sont

Pour A_1 : $Q=Q_1=(-Q_2)+(Q_2)=0$

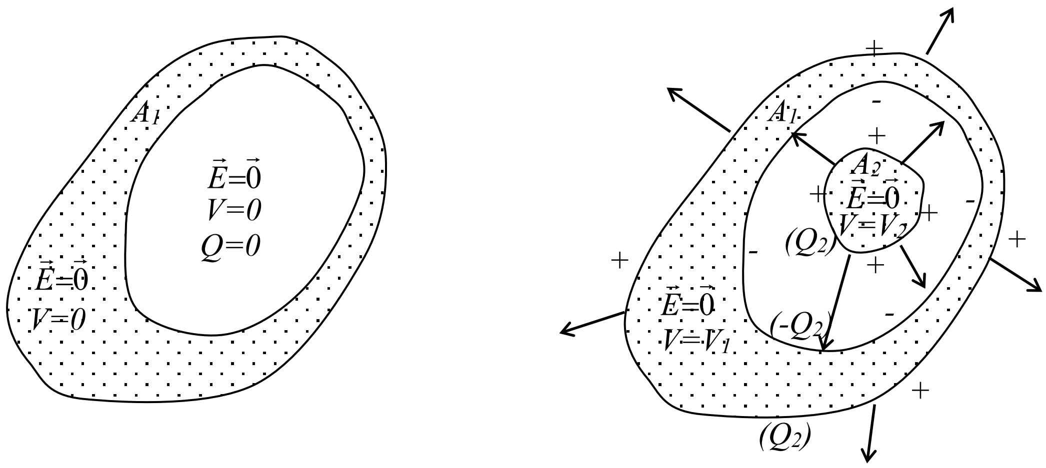
$\vec{E}=\vec{0}$

$V=V_1>0$

Pour A_2 : $Q=Q_2>0$

$\vec{E}=\vec{0}$

$V=V_2>V_1>0$



III.3.1 – Ecran électrique

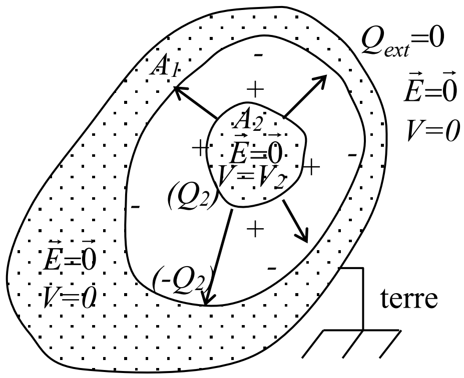
Un conducteur creux relié à la terre ($V_{(terre)}=0$) constitue un écran électrique parfait qui empêche les influences électrostatiques des corps intérieurs et extérieurs.

Reliant le conducteur A_1 du système précédent, figure ci-dessous, à la terre ($V_{(terre)}=0$). A l'équilibre, les propriétés électrostatiques dans l'espace à l'extérieur du conducteur A_1, sont

$Q_{ext}=0$

$\vec{E}=\vec{0}$

$V=0$



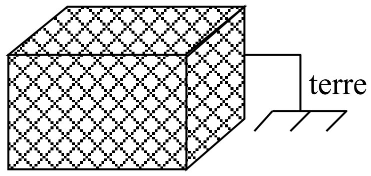
Applications :

1 – Cage de Faraday

C'est une chambre en grille métallique (surface non continue) reliée à la terre pour la protection ou le blindage électrostatique des appareils. A l'intérieur, les propriétés électrostatiques sont

$\vec{E}=\vec{0}$

$V=0$

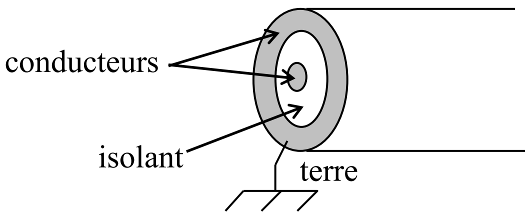


2 – Masse des appareils électriques

La plupart des appareils électriques sont placés à l'intérieur d'une carcasse métallique reliée à la terre.

3 – Câbles électriques

On utilise pour protéger (blindage électrostatique) les câbles électriques contre des influences électrostatiques, une tresse métallique reliée à la terre.

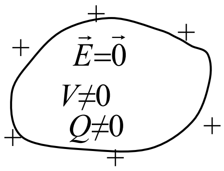


IV – Condensateurs

IV.1 – Capacité d'un conducteur isolé et unique

La capacité d'un conducteur, figure ci-dessous, isolé et unique est le quotient de sa charge Q par son potentiel V.

$C=\frac{Q}{V}$



conducteur chargé positivement

Unité (S.I) : Farad (F)

et sous-multiples $1\mu F=10^{-6}F$
$1nF=10^{-9}F$
$1pF=10^{-12}F$

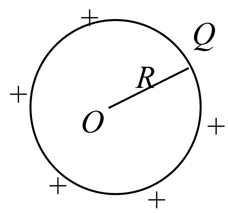
si $Q>0$ alors $\sigma>0$ et $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}>0$ et par conséquent les lignes de champ partent du conducteur vers l'infini où le potentiel est nul, d'où $V>0$.

si $Q<0$ alors $\sigma<0$ et $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}<0$ et par conséquent les lignes de champ arrivent sur le conducteur à partir de l'infini où le potentiel est nul, d'où $V<0$.

On déduit que la capacité d'un conducteur isolé et unique est toujours positive $C>0$.

Pour un conducteur sphérique de rayon R et de charge Q, le potentiel est donné par l'expression

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



et la capacité est calculée par

$$C=\frac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$$

On remarque que cette capacité ne dépend que de la forme géométrique du conducteur.

Cas particulier : Capacité de la terre

En supposant la terre un conducteur, sphérique isolé et unique (pas de d'influences) de rayon R=6400 km, sa capacité est égale à

$$C_{terre}\cong 700\mu F$$

On déduit que le Farad est une très grande unité, d'où l'utilisation de ses sous-multiples.

IV.2 – Capacités et coefficients d'influence de conducteurs en équilibre

Soient n conducteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aux potentiels $V_1, V_2, \ldots, V_n$ portant les charges $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ en équilibre électrostatique. Cet état peut être obtenu par la superposition de n états d'équilibre intermédiaires. Pour le i^{ème} état, on suppose que tous les potentiels sont nuls sauf celui du i^{ème} conducteur V_i et la charge sur chaque conducteur est proportionnelle à V_i.

	V_1	V_2	…	V_i	…	V_n	Q_1	Q_2	…	Q_i	…	Q_n
1er état	1	0	…	0	…	0	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	…	$C_{i1}V_1$	…	$C_{n1}V_1$
2ème état	0	1	…	0	…	0	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$	…	$C_{i2}V_2$	…	$C_{n2}V_2$
. . .												
ième état	0	0	…	1	…	0	$C_{1i}V_i$	$C_{2i}V_i$	…	$C_{ii}V_i$	…	$C_{ni}V_i$
. . .											. . .	
nième état	0	0	…	0	…	1	$C_{1n}V_n$	$C_{2n}V_n$	…	$C_{in}V_n$	…	$C_{nn}V_n$

Les charges produites par la superposition des *n* états d'équilibre sur chaque conducteur sont données par

$$Q_1= C_{11}V_1+ C_{12}V_2+\ldots+ C_{1n}V_n$$
$$Q_2= C_{21}V_1+ C_{22}V_2+\ldots+ C_{2n}V_n$$
$$\vdots$$
$$Q_n= C_{n1}V_1+ C_{n2}V_2+\ldots+ C_{nn}V_n$$

et qu'on peut réécrire pour le $i^{\text{ème}}$ conducteur sous la forme

$$Q_i=\sum_j^n C_{ij}V_j$$

La charge sur un conducteur est une fonction linéaire des potentiels des *n* conducteurs en influence électrostatique.

C_{ij} est un coefficient d'influence du conducteur A_j sur la conducteur A_i, il est homogène à une capacité (en Farad).

C_{ii} est la capacité (en Farad) de A_i en présence des autres conducteurs (différente de la capacité de A_i isolé et unique).

Remarque :

1 – Les coefficients d'influence vérifient les conditions

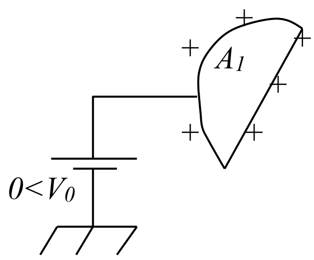
$$C_{ii} >0$$
$$C_{ij}<0$$
$$C_{ij}=C_{ji}$$

2 – Quand n=2 , deux conducteurs, on parle de condensateur.

IV.3 – Condensation de charges électriques

Soit un conducteur A_1 isolé et chargé positivement par une source permanente, figure ci-dessous, de potentiel $V_0>0$. Cette charge est exprimée en fonction de la capacité C_0 par la relation

$$Q_0=C_0V_0$$



On rapproche de A_1 un autre conducteur A_2 neutre et relié à la terre ($V_{(terre)}$=0) suivant la figure ci-dessous. D'après les résultats précédents, le conducteur chargé A_1 influence le conducteur A_2 en attirant des charges négatives sur sa surface. Ces charges négatives vont influencer A_1, à leur tour, et attirer des charges positives supplémentaires qui seront fournies par la source V_0. La charge du conducteur A_1 va augmenter sous cette influence.

Ainsi, on a un phénomène de condensation de charge exprimée par

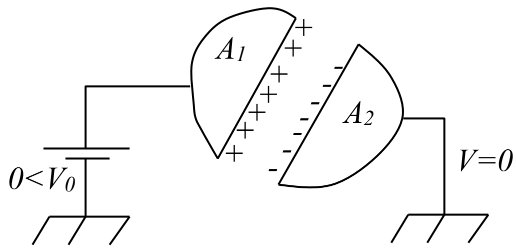
$$|Q_1|>|Q_0|$$

$Q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2=C_{11}V_0$ car $V_1=V_0$ et $V_2=V_{(terre)}=0$

Comparée à $Q_0=C_0V_0$, on déduit que le capacité d'un conducteur augmente en présence d'un autre conducteur

$$C_{11}>C_0$$

L'ensemble des deux conducteurs constitue un condensateur, A_1 et A_2 sont les armatures du condensateur.



IV.4 – Capacité d'un condensateur

Soit un condensateur, figure ci-dessous, dont l'armature interne est A_1 et l'armature externe est A_2.

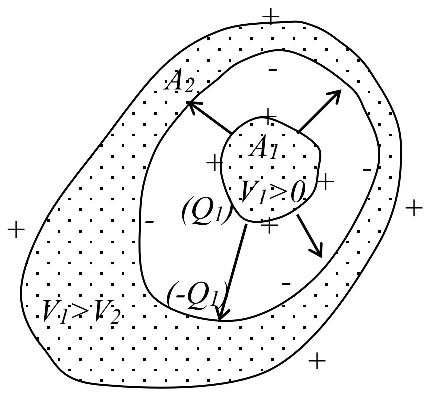
Les charges sur les deux conducteurs sont données par

$$Q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2$$
$$Q_2=C_{21}V_1+C_{22}V_2$$

si le conducteur A_2 est relié à la terre (V_2=0), on a

$$Q_1=C_{11}V_1$$
$$Q_2=C_{21}V_1=-Q_1$$

D'où $C_{11}= - C_{21}= - C_{12} = C$



Par définition, la constante C est la capacité du condensateur.

En remplaçant, les coefficients d'influence par cette constante dans les expressions des charges, on obtient

$$Q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2=C(V_1-V_2)$$
$$Q_2=C_{21}V_1+C_{22}V_2=-CV_1+C_{22}V_2=-C(V_1-V_2)-CV_2+C_{22}V_2=-Q_1+(C_{22}-C)V_2$$

Ainsi, les charges sont données par les relations

$$Q_1=C(V_1-V_2)$$
$$Q_2=-Q_1+C'V_2$$

où

$C'V_2$ est la charge de la face externe de l'armature externe A_2.
C' est la capacité du conducteur A_2 isolé (si $Q_1=0$ alors $Q_2=C'V_2$).

Finalement, la capacité d'un condensateur est exprimée par

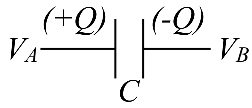
$$C=\frac{Q_1}{V_1-V_2}$$

avec Q_1 est la charge de l'armature interne et (V_1-V_2) est la différence de potentiel entre les armatures.

IV.5 – Groupement de condensateurs
Un condensateur est représenté par l'élément de la figure ci-dessous.

La charge du condensateur est reliée à la différence de potentiel entre les armatures par la relation

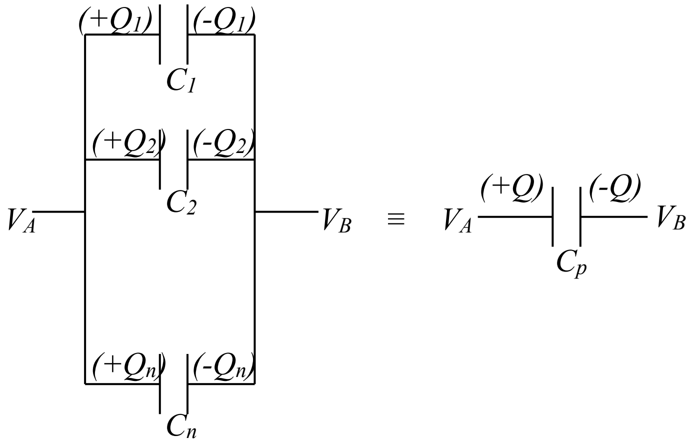
$Q=C(V_A-V_B)$ avec $Q>0$ et $V_A>V_B$



1 – Condensateurs en parallèle

$$V=V_A-V_B$$

$$Q=Q_1+Q_2+\ldots+Q_n$$
$$=C_1V+C_2V+\ldots+C_nV$$
$$=(C_1+C_2+\ldots+C_n)V$$
$$=C_pV$$



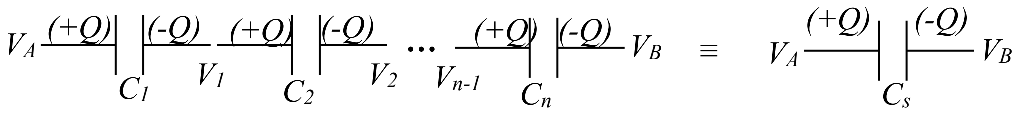
d'où

$$C_p=\sum_{i=1}^{n}C_i$$

$$Q=\sum_{i=1}^{n}Q_i$$

V est la même pour tous les condensateurs

2 – Condensateurs en série



$$V=V_A-V_B$$
$$V_A-V_B=(V_A-V_1)+(V_1-V_2)+\ldots+(V_{n-1}-V_B)$$
$$V_A-V_B=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+\ldots+\frac{Q}{C_n}$$
$$V_A-V_B=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}\right)Q=\frac{Q}{C_s}$$

d'où

$$\frac{1}{C_s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

Q est la même pour tous les condensateurs

$$V=\sum V_i$$

V – Energie électrique

V.1 – Energie électrostatique d'une charge

L'énergie électrostatique d'une charge est, par définition, l'énergie qu'on doit fournir pour amener cette charge depuis l'infini où le potentiel est nul jusqu'à la position *M* où le potentiel est *V(M)*, en luttant contre les forces électrostatiques par une succession d'états d'équilibre. Cette énergie est une énergie potentielle car elle est liée à la position de la charge dans l'espace.

Le travail des forces électrostatiques (résultat précédent) au cours du déplacement de la charge *q* de l'infini à la position *M* est donné par l'expression

$$W=q(V_{(\infty)}-V(M))=q(0-V(M))=-qV(M)$$

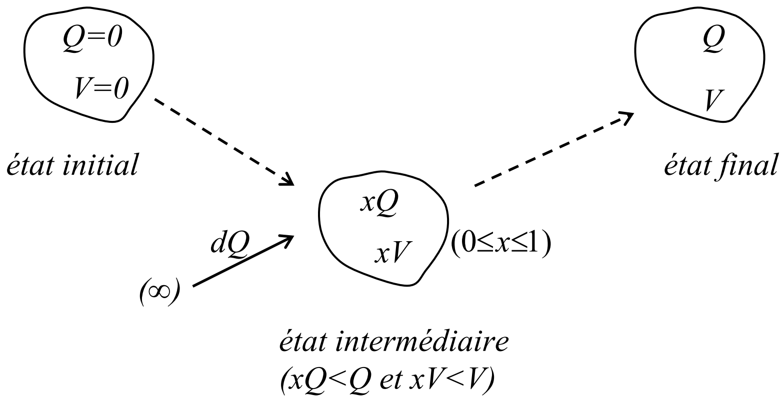
Alors, l'énergie électrostatique *U* (ou énergie potentielle) de la charge *q* à la position *M* est donnée par l'opposé de ce travail *W*

$$U=qV(M)$$

V.2 – Energie d'un conducteur isolé

L'énergie électrostatique d'un conducteur est l'énergie qu'il faut fournir pour charger ce conducteur par une succession d'états d'équilibre infiniment voisins (transformation réversible).

Soit un conducteur, figure ci-dessous, neutre et isolé. Pour le charger avec la charge *Q*, on va apporter sur le conducteur, à potentiel constant, une quantité infinitésimale de charge *dQ* depuis l'infini.



Ainsi, dans un état intermédiaire, le potentiel du conducteur aura une valeur proportionnelle à la valeur finale V

$V_{(inter)}= xV$ avec $(0 \leq x \leq 1)$

De même, on considère que la charge augmente progressivement sur le conducteur (dont le potentiel $V_{(inter)}$ est constant) de la quantité

$dQ = Qdx$

Alors, l'accroissement de l'énergie est donné par

$dU= dQ.(xV) =Qdx.(xV)=QV.xdx$

Finalement, l'énergie électrostatique du conducteur chargé est définie par

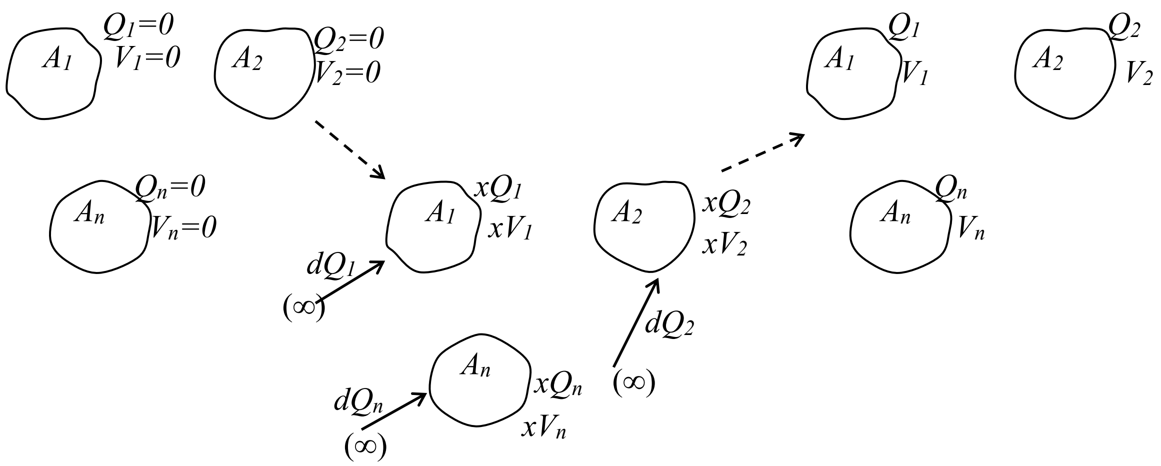
$$U=\sum dU=\int_0^1 QVxdx=QV\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}QV$$

Pour un conducteur chargé et isolé de capacité C, on a l'expression suivante

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

V.3 – Energie d'un système de conducteurs

Soient un système de n conducteurs chargés (figure ci-dessous) en équilibre électrostatique. Pour calculer l'énergie électrostatique totale de ce système, on utilise la même démarche que précédemment pour chaque conducteur.



L'accroissement de l'énergie est donné par la somme

$$dU = dQ_1.(xV_1) + dQ_2.(xV_2) + \ldots + dQ_n.(xV_n)$$
$$dU = Q_1dx.(xV_1) + Q_2dx.(xV_2) + \ldots + Q_ndx.(xV_n)$$
$$dU = Q_1V_1.xdx + Q_2V_2.xdx + \ldots + Q_nV_n.xdx$$

Finalement, l'énergie électrostatique d'un système de *n* conducteurs chargés est exprimée par

$$U = \left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + \ldots + Q_nV_n\right)\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i$$

V.4 – Energie d'un système de charges ponctuelles

Soient *n* charges ponctuelles dans un espace. Une charge q_i placée en un point M_i sera soumise au potentiel créé par les autres charges. Par conséquent, l'énergie électrostatique de ce système est une énergie d'interaction mutuelle.

L'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles est donnée par

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i$$

où

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}\frac{q_j}{r_{ij}}$$ est le potentiel créé au point M_i (où se trouve la charge q_i), par toutes les charges q_j placées aux points M_j du système sauf q_i.

V.5 – Energie d'une distribution continue de charges

V.5.1 – Distribution volumique

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{(V)} \rho(P).V(P).dv$$

où $\rho(P)$ et $V(P)$ sont la densité de charges et le potentiel électrique au point *P*, du conducteur, associé à l'élément de volume *dv*.

V.5.2 – Distribution surfacique

$$U = \frac{1}{2}\iint_{(S)} \sigma(P).V(P).ds$$

où $\sigma(P)$ et $V(P)$ sont la densité de charges et le potentiel électrique au point *P*, du conducteur, associé à l'élément de surface *ds*.

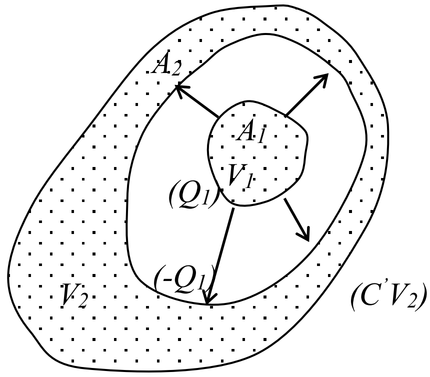
V.5.3 – Distribution linéaire

$$U = \frac{1}{2}\int_{(L)} \lambda(P).V(P).dl$$

où $\lambda(P)$ et $V(P)$ sont la densité de charges et le potentiel électrique au point *P*, du conducteur, associé à l'élément de longueur *dl*.

V.6 – Energie d'un condensateur

Soit un condensateur, formé par deux conducteurs en influence totale, chargé et isolé en équilibre électrostatique.



La charge et le potentiel de l'armature interne A_1 sont

Q_1

V_1

La charge et le potentiel de l'armature externe A_2 sont

$Q_2 = -Q_1 + C'V_2$

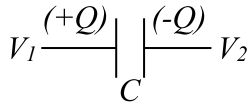
V_2

L'énergie électrostatique du condensateur est donnée par

$$U = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2) = \frac{1}{2}\left[Q_1(V_1 - V_2) + C'V_2^2\right]$$

si $Q_2 = -Q_1 = -Q$, alors cette énergie devient

$$U = \frac{1}{2}(QV_1 - QV_2) = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



V.7 – Localisation de l'énergie électrostatique

Soit un corps continu de volume (V) chargé, avec une densité de charge volumique ρ, dans un espace.
Ce corps chargé possède une énergie électrostatique donnée par l'expression

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{(V)} \rho V dv$$

L'expression de cette énergie en fonction du champ électrique est

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{(V)} \rho V dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{(V)} V div\vec{E} dv$$

avec $\rho = \varepsilon_0 div\vec{E}$ (1ère équation de Maxwell)

En utilisant la relation

$$div(V\vec{E}) = V.div\vec{E} + \vec{E}.\overrightarrow{grad}V = V.div\vec{E} - E^2$$

on obtient

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{(V)}\left[div(V\vec{E}) + E^2\right]dv$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\iiint_{(V)} div(V\vec{E})dv + \iiint_{(V)} E^2 dv\right]$$

Cette énergie est la somme de deux termes. En utilisant le théorème d'Ostrogradski (annexe II.3), on exprime le premier terme par le flux du vecteur ($V.\vec{E}$) à travers la surface (S)

$$\iiint_{(V)} div(V\vec{E})dv = \oiint_{(S)} V\vec{E}.d\vec{s}$$

Si (S) est une surface sphérique centrée sur la masse chargée et de rayon $R \to \infty$ alors cette distribution de charge volumique sera vue à partir de cette surface (espace) comme une charge ponctuelle.

Par conséquent, le potentiel se comporte comme une fonction inversement proportionnelle à R ($V \approx \frac{1}{R}$), le champ se comporte comme une fonction inversement proportionnelle à R^2 ($E \approx \frac{1}{R^2}$), la surface se comporte comme une fonction proportionnelle à R^2 ($S \approx R^2$) et le flux se comporte comme une fonction inversement proportionnelle à R ($\phi = \oiint_{(S)} V\vec{E}.d\vec{s} \approx \frac{1}{R} \to 0$).

Finalement, l'énergie électrostatique est répartie dans un espace où il y a un champ électrique

$$U = \iiint_{espace} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dv$$

N.B : l'espace d'intégration inclut aussi le volume de la masse chargée.

On définit, la densité locale d'énergie électrostatique par l'expression

$$\frac{dU}{dv} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$