Corrigé de l'Examen d'Optique Géométrique

SMAI-S2 / 2022-2023

Solution Proposée

Juin 2023

Questions de cours (3 pts)

1. **Définir un système centré et donner ses caractéristiques**
   Un **système optique centré** est un ensemble de dioptres et/ou de miroirs possédant un axe de symétrie de révolution commun, appelé **axe optique**. Dans les conditions de l'approximation de Gauss (rayons paraxiaux), le stigmatisme est approché.

   Les **caractéristiques** d'un système centré sont définies par ses **points cardinaux** :
   - **Les foyers** : le foyer objet F et le foyer image F'.
   - **Les points principaux** : le point principal objet H et le point principal image H'. Les plans passant par H et H' et perpendiculaires à l'axe optique sont les plans principaux, où le grandissement transversal vaut $+1$.
   - **Les points nodaux** : le point nodal objet N et le point nodal image N'. Un rayon incident passant par N émerge du système en passant par N' avec la même direction. Si les indices des milieux extrêmes sont identiques ($n_1 = n_2$), les points nodaux sont confondus avec les points principaux ($N \equiv H$ et $N' \equiv H'$).
2. **Donner la relation de conjugaison dans une lentille divergente**
   La relation de conjugaison de Descartes pour une lentille mince, qu'elle soit convergente ou divergente, s'écrit de la même manière. En notant O le centre optique de la lentille, A un point objet sur l'axe et A' son image :

   $$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

   Où f' est la distance focale image de la lentille. Pour une **lentille divergente**, la distance focale image f' est **négative** ($f' < 0$).
3. **Donner la relation de Newton dans un système centré**
   La relation de conjugaison de Newton s'exprime en utilisant les foyers du système centré. Pour un couple de points conjugués (A, A') sur l'axe optique :

   $$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f \cdot f'$$

   Où F et F' sont les foyers objet et image, et f et f' sont les distances focales objet et image du système ($f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{H'F'}$).

Exercice 1 (6 pts)

On considère un dioptre sphérique de rayon $\overline{SC} = -20$ mm, séparant deux milieux d'indices $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$.

1. **Le dioptre est-il concave ou convexe ? Justifier.**
   Le rayon de courbure est $\overline{SC} = -20$ mm < 0. Par convention, le sommet S est l'origine de l'axe optique et la lumière se propage de la gauche vers la droite. Puisque $\overline{SC}$ est négatif, le centre de courbure C est situé à gauche du sommet S. La surface du dioptre est donc "creusée" du côté de la lumière incidente. Le dioptre est **concave**.
2. **Calculer sa vergence. Le dioptre est-il convergent ou non ?**
   La vergence V d'un dioptre sphérique est donnée par :

$$V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

   Avec $\overline{SC} = -20$ mm $= -0.02$ m.

$$V = \frac{1.5 - 1}{-0.02} = \frac{0.5}{-0.02} = -25 \text{ dioptries ()}$$

   Comme la vergence est **négative** ($V < 0$), le dioptre est **divergent**.
3. **Déterminer le foyer objet F et sa distance focale objet f.**
   La distance focale objet f est donnée par la relation $\overline{SF} = f$.

$$f = \overline{SF} = \frac{-n_1\overline{SC}}{n_2 - n_1} = \frac{-1 \times (-20 \text{ mm})}{1.5 - 1} = \frac{20}{0.5} = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$$

   Le foyer objet F est situé à 4 cm **à droite** du sommet S.
4. **Déterminer le foyer image F' et sa distance focale image f'.**
   La distance focale image f' est donnée par la relation $\overline{SF'} = f'$.

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n_2\overline{SC}}{n_2 - n_1} = \frac{1.5 \times (-20 \text{ mm})}{1.5 - 1} = \frac{-30}{0.5} = -60 \text{ mm} = -6 \text{ cm}$$

   Le foyer image F' est situé à 6 cm **à gauche** du sommet S.
5. On place un objet $\overline{AB}$ de 1 cm à $\overline{SA} = 4$ cm.
   (a) **Déterminer par calcul la position de $\overline{SA'}$.**
   On utilise la relation de conjugaison du dioptre sphérique :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

   On remarque que la position de l'objet $\overline{SA} = 4$ cm coïncide avec la position du foyer objet F calculée précédemment ($\overline{SF} = 4$ cm). Par définition, l'image d'un objet placé au foyer objet se forme **à l'infini**.

   Vérifions par le calcul :

$$\frac{1.5}{\overline{SA'}} - \frac{1}{4 \text{ cm}} = \frac{1.5 - 1}{-2 \text{ cm}} = \frac{0.5}{-2} = -0.25 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1.5}{\overline{SA'}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

   Ceci implique que $\overline{SA'} \to \infty$. L'image $\overline{A'B'}$ est rejetée à l'infini.

   (b) **Déterminer par calcul la taille de $\overline{A'B'}$.**
   Puisque l'image se forme à l'infini, sa taille linéaire $\overline{A'B'}$ est **infinie**. On pourrait parler de sa taille angulaire, mais la taille linéaire demandée est infinie.

(c) **Calculer le grandissement du dioptre.**
Le grandissement transversal γ_t est donné par :

$$\gamma_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Comme $\overline{SA'} \to \infty$, le grandissement est **infini**.

(d) **Discuter la valeur trouvée de ce grandissement.**
Un grandissement infini signifie que les rayons lumineux issus d'un point B de l'objet (hors de l'axe) émergent du dioptre parallèles entre eux. Pour un observateur, l'image semble infiniment grande et est située à l'infini. C'est le cas typique lorsqu'un objet est placé dans le plan focal objet d'un système optique.

Exercice 2 (11 pts)

1er cas : Miroir sphérique concave

Miroir concave de centre C, sommet S, rayon $\overline{SC} = -30$ cm. Objet $\overline{AB}$ de hauteur 1 cm.

1. **Donner la position du foyer F.**
Pour un miroir sphérique, les foyers objet F et image F' sont confondus et situés au milieu du segment $[SC]$.

$$f' = \overline{SF'} = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{-30 \text{ cm}}{2} = -15 \text{ cm}$$

Le foyer F est situé à 15 cm en avant du miroir.

2. **Déterminer l'image $\overline{A'B'}$ (position, nature, sens, taille) pour :**
On utilise la relation de conjugaison des miroirs sphériques (origine au sommet S) et la formule du grandissement :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma_t = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

- **Cas $\overline{SA} = -60$ cm** :
  - **Position** : $\frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{-15} - \frac{1}{-60} = \frac{-4+1}{60} = \frac{-3}{60} = -\frac{1}{20} \implies \overline{SA'} = -20$ cm.
  - **Nature** : $\overline{SA'} < 0$, l'image est devant le miroir, elle est donc **réelle**.
  - **Grandissement** : $\gamma_t = -\frac{-20}{-60} = -\frac{1}{3}$.
  - **Sens** : $\gamma_t < 0$, l'image est **inversée** (renversée).
  - **Taille** : $\overline{A'B'} = \gamma_t \times \overline{AB} = -\frac{1}{3} \times 1$ cm $= -0.33$ cm. La taille est de 0.33 cm.
- **Cas $\overline{SA} = -20$ cm** :
  - **Position** : $\frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{-15} - \frac{1}{-20} = \frac{-4+3}{60} = -\frac{1}{60} \implies \overline{SA'} = -60$ cm.
  - **Nature** : $\overline{SA'} < 0$, l'image est **réelle**.
  - **Grandissement** : $\gamma_t = -\frac{-60}{-20} = -3$.
  - **Sens** : $\gamma_t < 0$, l'image est **inversée**.
  - **Taille** : $\overline{A'B'} = -3 \times 1$ cm $= -3$ cm. La taille est de 3 cm.
- **Cas $\overline{SA} = 10$ cm** :
  - **Position** : $\frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{-15} - \frac{1}{10} = \frac{-2-3}{30} = \frac{-5}{30} = -\frac{1}{6} \implies \overline{SA'} = -6$ cm.
  - **Nature** : $\overline{SA'} < 0$, l'image est **réelle**.
  - **Grandissement** : $\gamma_t = -\frac{-6}{10} = 0.6$.

— **Sens** : $\gamma_t > 0$, l'image est **droite** (dans le même sens que l'objet).
— **Taille** : $\overline{A'B'} = 0.6 \times 1$ cm $= 0.6$ cm. La taille est de 0.6 cm.

3. **Préciser dans chaque cas la nature de l'objet.**
   — Cas $\overline{SA} = -60$ cm < 0 : L'objet est situé avant le miroir, c'est un **objet réel**.
   — Cas $\overline{SA} = -20$ cm < 0 : C'est un **objet réel**.
   — Cas $\overline{SA} = 10$ cm > 0 : L'objet est situé après le miroir, c'est un **objet virtuel**. Les rayons incidents convergent vers un point A derrière le miroir.

2ème cas

Le miroir concave est de rayon $R = 1$ m.

4. **Quelle est sa distance focale ?**
   Le miroir est concave, donc son rayon de courbure algébrique est négatif : $\overline{SC} = -R = -1$ m $= -100$ cm. La distance focale est :

$$f' = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{-100 \text{ cm}}{2} = -50 \text{ cm}$$

6. **Où doit-on mettre un objet pour avoir une image nette sur un écran placé à $D = 5$ m du miroir ?**
   L'image se forme sur un écran, elle est donc réelle. Sa position est à $D = 5$ m en avant du miroir. La position de l'image est donc $\overline{SA'} = -D = -5$ m $= -500$ cm. On cherche la position de l'objet $\overline{SA}$:

$$\frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{-50} - \frac{1}{-500} = \frac{-10+1}{500} = -\frac{9}{500} \text{ cm}^{-1}$$

$$\overline{SA} = -\frac{500}{9} \text{ cm} \approx -55.56 \text{ cm}$$

   L'objet doit être placé à environ 55.56 cm en avant du miroir.

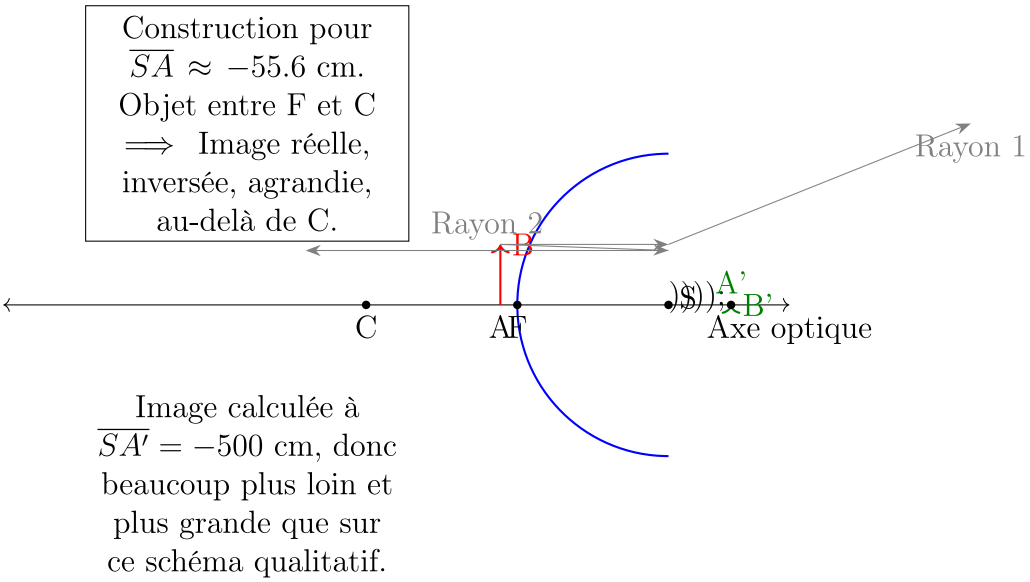
7. **Quel est le grandissement ?**
   Le grandissement transversal est :

$$\gamma_t = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{-500 \text{ cm}}{-500/9 \text{ cm}} = -9$$

   L'image est réelle ($\overline{SA'} < 0$), inversée ($\gamma_t < 0$) et 9 fois plus grande que l'objet.

8. **Vérifier ces calculs et effectuer la construction.**
   Les calculs sont cohérents. L'objet est placé entre le foyer F ($\overline{SF} = -50$ cm) et le centre de courbure C ($\overline{SC} = -100$ cm). L'image doit se former au-delà de C, être réelle, inversée et plus grande, ce qui correspond à nos résultats ($\overline{SA'} = -500$ cm et $\gamma_t = -9$).

   Construction géométrique : (Schéma non à l'échelle pour la lisibilité)


Construction pour $\overline{SA} \approx -55.6$ cm. Objet entre F et C $\Longrightarrow$ Image réelle, inversée, agrandie, au-delà de C.
Rayon 1
Rayon 2
B
A'
B'
C
A
F
Axe optique
Image calculée à $\overline{SA'} = -500$ cm, donc beaucoup plus loin et plus grande que sur ce schéma qualitatif.