Chapitre 3

Potentiel électrique

I – Potentiel créé par une charge ponctuelle

Le potentiel électrique est défini à partir de la circulation du champ électrique $\vec{E}$ le long d'une trajectoire donnée (annexe II.3).

La circulation élémentaire du champ $\vec{E}$ suivant une courbe L , figure ci-dessous, est donnée par l'expression

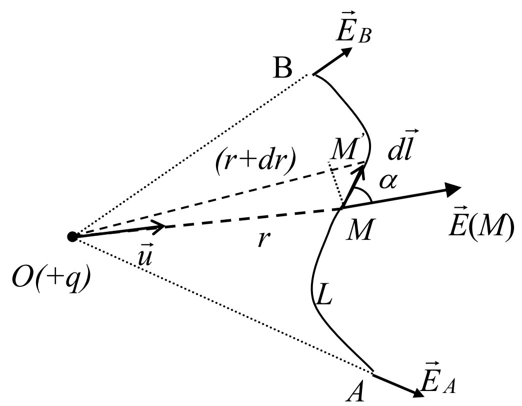
$$dC=\vec{E}.\vec{dl}$$

avec $\vec{dl}=\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur déplacement élémentaire sur la courbe L orienté de A vers B.

En un point M de cette courbe à la distance r de la charge q, le champ a pour expression.

$$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$



et la circulation est exprimée par

$$dC=\vec{E}.\vec{dl}=E.dl.\cos\alpha$$

avec $\alpha=\left(\vec{E},\vec{dl}\right)$ l'angle entre $\vec{E}$ et $\vec{dl}$

En utilisant l'approximation suivante

$$dl.\cos\alpha\cong dr$$

la circulation élémentaire peut être exprimée suivant cette expression

$$dC=Edr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\left(\frac{-1}{r}\right)=-d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+k\right)=-dV$$

avec k une constante

On définit le potentiel électrique, au point M situé à la distance r de la charge q, par la fonction suivante à valeurs scalaires et à une constante k additive près

$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+k$$

1 - Unité (S.I) : Volt (V).

2 - Le potentiel électrique n'est pas défini sur la charge si $r\to 0\Rightarrow V\to\pm\infty$.

3 - Par convention, on considère $V(\infty)=k=0$ et par conséquent $V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

La circulation du champ le long de la courbe L est donnée par

$$C=\int_{AB} dC=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)=V_A-V_B$$

$$C=\int_{AB}\vec{E}.\vec{dl}=V_A-V_B$$

La circulation du champ électrique $\vec{E}$ ne dépend pas du chemin suivi, mais ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B.

On appelle (V_A-V_B) la différence de potentiel (ddp) entre les points A et B.

Remarque : pour une courbe fermée ($A=B$), on a $C=\oint_L\vec{E}.\vec{dl}=0$ et par conséquent la circulation du champ électrique est conservative et $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{grad}V(M)$ (annexe II.3).

II – Potentiel créé par un système de charges ponctuelles

Le champ électrique créé par un système de charges ponctuelles q_i en un point M de l'espace est donné par

$$\vec{E}(M)=\sum_i\vec{E}_i$$

La circulation de ce champ $\vec{E}(M)$ le long d'une trajectoire AB a pour expression

$$C=\int_{AB}\sum_i\vec{E}_i\vec{dl}=\sum_i\int_{AB}\vec{E}_i\vec{dl}=\sum_i C_i$$

avec C_i est la circulation du champ $\vec{E}_i$, créé par la charge q_i placée au point O_i, le long de la trajectoire AB.

$$C_i=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_{iA}}^{r_{iB}}\frac{d\,r_i}{r_i^2}\qquad \text{avec } r_{iA}=O_iA \text{ et } r_{iB}=O_iB$$

d'où la circulation totale

$$C=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{iA}}-\frac{1}{r_{iB}}\right)$$

$$=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{iA}}-\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{iB}}$$

$$=V_A-V_B$$

qui ne dépend que de l'état initial A et de l'état final B. On appelle la quantité

$$V(M)=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}+k$$

le potentiel électrique au point M situé à la distance r_i des charge q_i. C'est une fonction à valeurs scalaires et à une constante k additive près.

Le potentiel électrique n'est pas défini sur les charges ponctuelles, si $r_i\to 0\Rightarrow V\to\pm\infty$.
Par convention, s'il n'y a pas de charges à l'infini, si $r_i\to\infty\Rightarrow V(\infty)=k=0$.

Conséquence : Le potentiel électrique créé, par des charges q_i, en un point M de l'espace est une superposition des potentiels électriques $V_i(M)$.

$$V(M)=\sum_i V_i(M)$$

III – Surfaces équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont l'ensemble des points où le potentiel électrique a partout la même valeur. Elles sont définies par l'équation (cas d'un espace à trois dimensions)

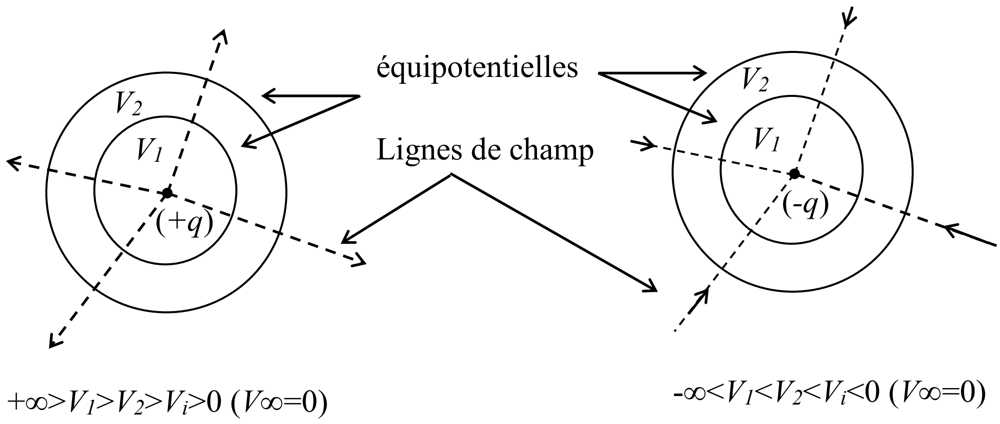
$$V(M)=V(x,y,z)=V_0=Cte$$

III.1 – Cas d'une charge ponctuelle

Le potentiel électrique $V(M)$ créé, par une charge ponctuelle q, en un point M de l'espace à la distance r est

$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

si $V(M)=Cte$ alors $r=Cte$, et les surfaces équipotentielles sont des sphères, figure ci-dessous, de rayons constants et centrées sur la position de la charge q (on a une symétrie sphérique).



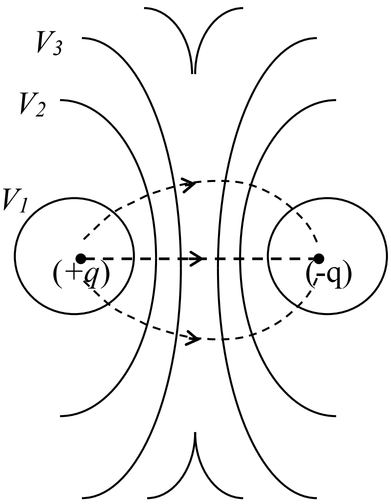
Remarque : Les lignes de champ (tangentes à $\vec{E}(M)$) sont des trajectoires orthogonales aux surfaces équipotentielles.

III.2 – Cas de deux charges ponctuelles

Le potentiel électrique $V(M)$ créé, par deux charges ponctuelles l'une positive ($+q$) et l'autre négative ($-q$), en un point M de l'espace, à la distance r_1 de la charge positive et r_2 de la charge négative, est

$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

si $V(M)=Cte$ alors $\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=Cte$ et les surfaces équipotentielles correspondantes ont l'allure de la figure ci-dessous



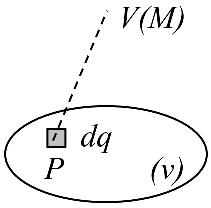
IV – Potentiel créé par une distribution continue de charges

IV.1 – Cas de distribution volumique

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(v)}\frac{dq}{r}$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(v)}\frac{\rho(P)dv}{r}$$

$r=PM$ avec $r>0$

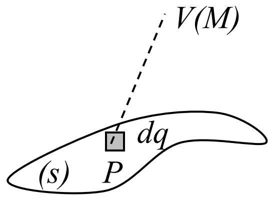


IV.2 – Cas de distribution surfacique

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{dq}{r}$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\sigma(P)ds}{r}$$

$r=PM$ avec $r>0$

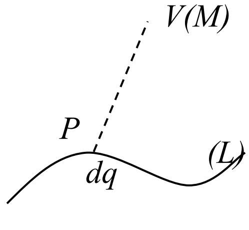


IV.3 – Cas de distribution linéaire

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)}\frac{dq}{r}$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)}\frac{\lambda(P)dl}{r}$$

$r=PM$ avec $r>0$



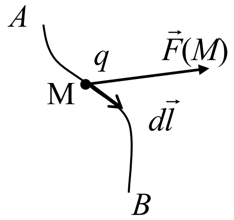
V – Travail de la force électrostatique

Dans une région de l'espace où il existe un champ électrique $\vec{E}(M)$, une charge ponctuelle q est soumise à une force électrique, figure ci-dessous,

$$\vec{F}(M)=q\vec{E}(M)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ de la charge q le long d'une trajectoire AB, la force $\vec{F}(M)$ va fournir un travail élémentaire

$$dW = \vec{F}.d\vec{l} = q\vec{E}.d\vec{l}$$



Le travail total en Joule (J) de la force électrique pour la trajectoire AB (en utilisant les résultats de la circulation de $\vec{E}(M)$) est donné par

$$W = \int_{AB} dW = q\int_{AB} \vec{E}.d\vec{l} = q(V_A - V_B)$$

Le travail de la force électrique ne dépend que de l'état initial A et de l'état final B de la trajectoire parcourue.

Remarque : à partir de la relation $(V_A - V_B) = \frac{W}{q}$, on détermine l'unité de la différence de potentiel ente les points A et B.

Le Volt est la différence de potentiel entre deux points d'un champ électrique tel que le déplacement, par la force électrique, d'une charge de 1 Coulomb entre ces deux points met en jeu un travail de 1 Joule.

VI – Equations caractéristiques du champ et du potentiel électriques

Les propriétés électrostatiques de l'espace peuvent être représentées soit par le vecteur champ électrique $\vec{E}(x,y,z)$, soit par la fonction scalaire potentiel électrique $V(x,y,z)$.

VI.1 – Relation entre champ et potentiel

Dans un espace à trois dimensions, où il y a un champ $\vec{E}(M)$ et un potentiel $V(M)$, on a la relation suivante de la circulation du champ électrique

$$dC = \vec{E}.d\vec{l} = -dV$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)dz = \overrightarrow{grad}V.d\vec{l}$$

On déduit alors, que le champ électrique dérive du potentiel électrique (annexe II.2) par la relation

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

Dans le cas où on travaille dans un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z), on a

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Dans le cas où on travaille dans un système de coordonnées cylindriques (ρ,φ,z), on a

$$\vec{E}\begin{cases} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Dans le cas où on travaille dans un système de coordonnées sphériques (r,θ,φ), on a

$$\vec{E}\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Conséquence : à partir de la relation $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{grad}V(M)$ exprimée en coordonnées cartésiennes, on déduit l'unité du champ électrique (Volts/mètre) au lieu de (Newtons/Coulomb) déduite à partir de la force électrique $E=\frac{F}{q}$.

VI.2 – Expression locale du théorème de Gauss

Le flux d'un champ électrique $\vec{E}(M)$, créé par une charge de densité volumique ρ, à travers une surface fermée (S) est exprimé par le théorème de Gauss

$$\phi=\oint\!\!\oint_{(s)}\vec{E}.d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(v)}\rho dv$$

Ce flux peut être réécrit, en utilisant le théorème de Green ou d'Ostrogradski (annexe II.3), suivant l'expression

$\phi=\oint\!\!\oint_{(s)}\vec{E}.d\vec{s}=\iiint_{(v)}div\vec{E}.dv$ où (v) est le volume limité par la surface (S)

De ces deux relations, on déduit l'expression locale du théorème de Gauss (ou 1ère équation de Maxwell)

$$div\vec{E}(M)=\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Si $\rho(M)\neq 0$ alors $div\vec{E}(M)\neq 0$ et le flux électrique n'est pas conservatif.

Si $\rho(M)=0$ alors $div\vec{E}(M)=0$ et le flux électrique est conservatif (flux de $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée est nul).

Conséquence : Le calcul de la divergence de $\vec{E}(M)$, en un point de l'espace (annexe II.2), nous renseigne sur la présence ou non de charges électriques (sources de champ) en ce point.

VI.3 – Rotationnel du champ électrique

La circulation du champ électrique $\vec{E}(M)$, le long d'une trajectoire *(L)* fermée est nulle

$$C=\oint_{(L)}\vec{E}.\vec{dl}=0$$

En utilisant le théorème de Stokes (annexe II.3), la relation précédente peut être réécrite sous la forme

$\oint_{(L)}\vec{E}.\vec{dl}=\iint_{(S)}\vec{rot}\,\vec{E}.\vec{ds}=0$ où (S) une surface s'appuyant sur (L)

On déduit, le rotationnel du champ électrique (ou 2ème équation de Maxwell)

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}(M)=\vec{0}$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le champ $\vec{E}(M)$ dérive d'un potentiel scalaire.

Conséquence : la condition $\overrightarrow{rot}\vec{E}=\vec{0}$ implique que le champ électrique $\vec{E}(M)$ n'est pas un champ tourbillonnaire (vecteur tournant).

VI.4 – Equations de Poisson et de Laplace

En utilisant les résultats précédents, on déduit la relation suivante

$$div\vec{E}(M)=div\left(-\overrightarrow{grad}V(M)\right)=-\Delta V(M)=\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Poisson est donnée par

$$\Delta V(M)+\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}=0$$

Si $\rho(M)=0$, on obtient l'équation de Laplace

$$\Delta V(M)=0$$