# Correction examen (2023-24)
## Algèbre 2, S2 MIP

**Ex 1**

1) Soit $(x,y,z) \in F \Rightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x+y-z=0 & (2) \end{cases} \qquad (1)+(2) \Rightarrow 2x+2y=0$$

$\Rightarrow \quad y=-x$

$(2) \Rightarrow \quad z = x+y$ D'où
$\qquad = x-x = 0$

$$(x,y,z) = (x,-x,0) = x(1,-1,0)$$

$\Rightarrow \{(1,-1,0)\}$ est une famille génératrice de F.

Or $\{(1,-1,0)\}$ est libre car $(1,-1,0) \neq (0,0,0)$, alors $\{(1,-1,0)\}$ est une base de F et

$$\dim F = \operatorname{card}\{(1,-1,0)\} = 1.$$

2) On a $F = \operatorname{Vect}\{(1,-1,0)\}$, G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que $F \subset G$ il suffit de vérifier que $(1,-1,0) \in G$.

On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq

$$(1,-1,0) = \lambda_1(1,1,-2) + \lambda_2(1,-2,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1/3 \\ \lambda_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$ D'où $(1,-1,0) = \frac{1}{3}(1,1,-2) + \frac{2}{3}(1,-2,1) \in G.$

$\Rightarrow F \subset G.$

## Exercice 2

(1.) $$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_1 = 1 . \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b-a).1 & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ (c-a)1 & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left[\cancel{a^2}+ac+c^2-\cancel{a^2}-ab-b^2\right]$$

$$= (b-a)(c-a)\left[a(c-b)+(c-b)(c+b)\right]$$

$$= \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$

(2) $$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad L_3 \to L_3 + L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L'_4 \end{matrix} \quad L_4 \to L'_4 + 2L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Suite (Ex2)

(2) $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ on développe suivant $L_2$

$= -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -2 \times (15-2) - 3 \times (-6+3)$

$= -26 + 9$

$= \underline{-17}$

5

Exercice 3

1. $A = M(f, B) = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$
$$A = M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1,0)$
$e_3 = (0,0,1)$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (-2, 0, -1)$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (2, 1, 2)$

2. a) On a card $B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc pour montrer que $B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $B'$ est libre :

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$  $(1)-(2) \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2$, $(1)-(3) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$(1) \Rightarrow 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$  Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

D'où $B'$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

3. a) La matrice de passage de $B$ à $B'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(columns $v_1$, $v_2$, $v_3$)

b

** On determine $P_{B'}^{B}$ :

On a $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 & (1) \\ v_2 = e_2 + e_3 & (2) \\ v_3 = e_1 + e_3 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)-(2) & e_1 - e_3 = v_1 - v_2 \\ (3) & e_1 + e_3 = v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \; e_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3)$ et $e_3 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 + v_3)$

Alors $(1) \Rightarrow e_2 = v_1 - e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)$

D'où $P_{B'}^{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$

4) 3) ~~b)~~ On a $A' = P^{-1} A P$ avec $P = P_{B}^{B'}$

et $P^{-1} = P_{B'}^{B}$ . Donc $A' = P_{B'}^{B} \, A \, P_{B}^{B'} = P^{-1} A P$

$$A \, P_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{2} & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$