Chapitre 5

Magnétostatique

IV-1-Introduction

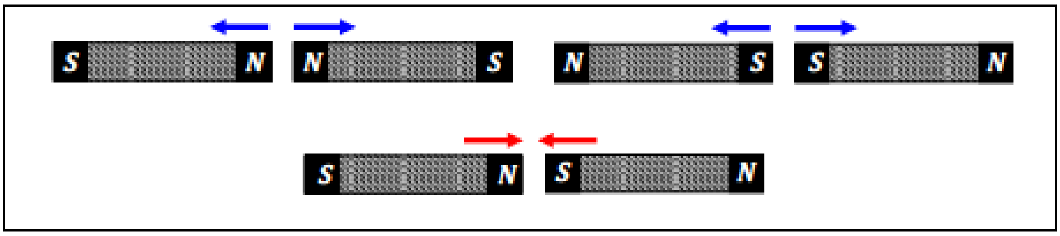
IV-1-1 Propriétés des aimants.

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie, la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme. Commepour l'électricité, la contribution des grecs à l'étude du magnétisme fut purement linguistique.

Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : les pôles. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents.

Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles. Elles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau contenue dans une récipient gradué.

L'expérience montre que : Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.

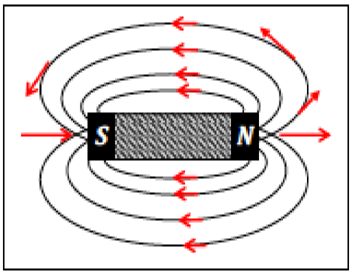


IV-1-2 Champ magnétique.

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un champ magnétique de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique note $\vec{B}$. Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.



Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud. Dans le système M.K.S.A rationalisé, le champ magnétique est mesuré en **tesla (T)**, en hommage au savant serbe Nikola Testa (1856-1943), inventeur de l'alternateur.

IV-1-3 La force magnétique

IV-1-3-1 Force de Lorentz

La force agissant sur une charge ponctuelle q dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse $\vec{v}$. Cette force $\vec{F}$ est decomposee en deux composantes, la composante électrique $\overrightarrow{F_e}$ (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique $\overrightarrow{F_m}$ (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique note usuellement $\vec{B}$ qui s'exprime en tesla (T). la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$ est décrite par :

$$\overrightarrow{F_m} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

cette force a pour module :

$$F = q\,v\,B\,\left|\sin(\vec{v},\vec{B})\right|$$

Généralement :

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée force de Lorentz ; elle s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = \vec{F_e} + \overrightarrow{F_m} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right]$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse $\vec{v}$. Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini.

L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$. Le champ magnétique $\vec{B}$, contrairement au champ électrique $\vec{E}$, n'exerce aucune force sur une charge immobile.

- **Caractéristiques de la force de Lorentz**

Direction : perpendiculaire à q $\vec{v}$ et à $\vec{B}$ donc au plan formé par q $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.

Sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite :

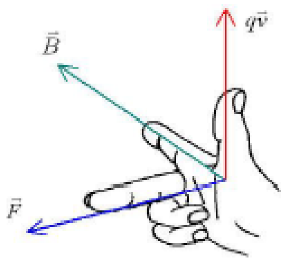


Figure en perspective

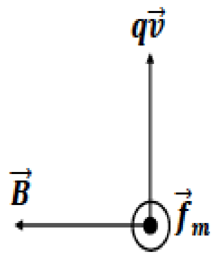


Figure schématique

- **Pouce :** sens de q $\vec{v}$ (= sens de $\vec{v}$ si $q > 0$; = sens opposé à $\vec{v}$ si q<0)
- **Index :** sens de $\vec{B}$.
- **Majeur :** sens de $\overrightarrow{F_m}$

Norme : $F_m = qvBsin\ \alpha$

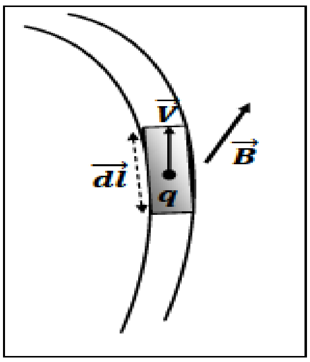
où q est la charge (C), v est la vitesse de la charge (m/s), B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T) et α est l'angle formé par q $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

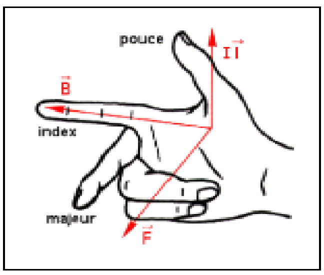
- si α = 90° alors $F_m = qvB$ (force maximale)
- si α = 0 alors F_m = 0

IV-1-3-2 Force de Laplace

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant I, est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, chaque élément $\overrightarrow{dl}$ du fil subit l'action d'une force qui s'appelle la force de Laplace élémentaire $\overrightarrow{dF}$ donnée par :

$$\overrightarrow{dF} = \mathrm{I}\ \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$





Nous allons démontrer la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz trouvée précédemment.

Considérons donc un fil parcouru par un courant I place dans un champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$. Ce courant I étant associé au déplacement des charges le long du fil à la vitesse v , chaque charge électronique q subit la force de Lorentz $\boldsymbol{q\vec{v} \wedge \vec{B}}$. S'il y a n charges par unité de volume, le nombre de charges élémentaires contenues dans un volume infinitésimal $\boldsymbol{d\tau}$ est égal à $\boldsymbol{nd\tau}$ et la force $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ agissant sur cet élément de volume est donc :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = \boldsymbol{n\, q\, d\tau\, \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

La densité de courant par définition est donnée par:

$$\boldsymbol{\vec{j} = n\, q\, \vec{v}}$$

la force $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ agissant sur l'élément de volume $d\tau$ est égale à :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = \boldsymbol{d\tau\, \vec{j} \wedge \vec{B}}$$

Si le fil est de section uniforme S, le volume $d\tau$ correspond à une longueur $\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$ de fil, tel que:

$$\boldsymbol{d\tau = \vec{S} \,.\, \overrightarrow{dl}}$$

L'expression de "la force de Laplace" est donnée alors par:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = \mathbf{I}\, \overrightarrow{\boldsymbol{dl}} \wedge \boldsymbol{\vec{B}}$$

Caractéristiques de la force de Laplace

Un conducteur de longueur l placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant I, est soumis à une force de Laplace $\vec{F}$:

- **Direction :** perpendiculaire au plan formé par le conducteur et B
- **Sens :** déterminé par la règle des trois doigts de la main droite

  Pouce : sens du courant

  Index : sens de $\vec{B}$

  Majeur : sens de $\vec{F}$

- **Norme :** $F = IBl \sin\alpha$

où I est l'intensité de courant (A)

B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T)

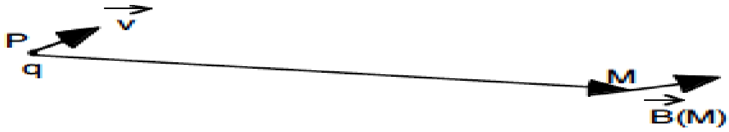
α est l'angle formé par B par rapport au conducteur.

- si $\alpha = 90°$ alors $F = IBl$ (force maximale)
- si $\alpha = 0$ alors $F = 0$

IV-2 Expression du champ magnétique

IV-2-1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est donné par l'expression suivante:



$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

L'unité du champ magnétique dans le système international est le **Tesla (T)**. Une autre unité appartenant au système CGS, le **Gauss (G)**, est également très souvent utilisée :

1 Gauss = 10^{-4} Tesla.

Le facteur μ_0 est **la perméabilité du vide** : il décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités international MKSA est :

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ **H.** m^{-1} (H pour Henry)

IV-2-2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ magnétique.
Considérons N particules de charges q_i situés en des points $P_i$et de vitesse $\vec{v}_i$. En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\, \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}$$

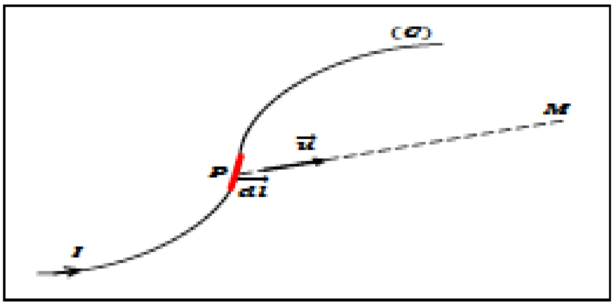
Si le nombre de particules est très grand dans un volume V donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules, il est avantageux d'utiliser une description continue. Il faut donc définir des distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique. Mais des distributions continues de quoi ?
Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire , situé autour d'un point P quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge dq animée d'une vitesse moyenne $\vec{v}$. Le champ magnétique résultant s'écrit alors:

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dq\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

où l'intégrale porte sur le volume V total embrassé par ces charges.

IV-2-3 Champ magnétique créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Soit un élément infiniment petit parcouru par un courant I



Le champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant $\boldsymbol{I.\,dl}$ au point M à la distance $\|\overrightarrow{PM}\|$ =r est donné par la loi Biot et Savart :

$$\overrightarrow{dB}(M)= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I.\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

Formule de Biot et Savart :
En un point M quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent I est :

$$\vec{B}(M)= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I.\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

Cette loi permet de donner :

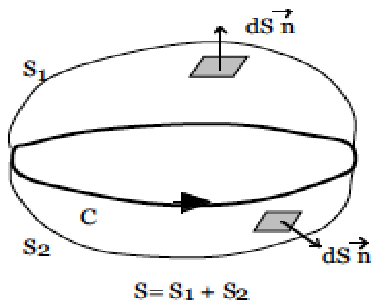
- **Le sens de $\overrightarrow{dB}$:** $(\overrightarrow{dB}, \overrightarrow{dl}, \vec{u})$ forme un trièdre directe
- **La direction de $\overrightarrow{dB}$:** $\overrightarrow{dB} \perp (\overrightarrow{dl}, \vec{u})$
- **Le module de $\overrightarrow{dB}$:** $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I.dl\left|\sin(\overrightarrow{dl},\vec{u})\right|}{r^2}$

IV-3 Loi fondamentales de la magnétostatique

IV-3-1 Flux du champ magnétique

IV-3-1-1 Conservation du flux magnétique

Considérons une surface fermée S quelconque, s'appuyant sur une courbe C fermée et orientée, c'est à dire pour laquelle on peut définir localement un élément de surface $\overrightarrow{dS}$= dS $\vec{n}$ dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur (convention).



Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée vaut

$$\phi = \oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0.$$

Cette loi est générale et reste valable même en régime variable.
La conservation du flux magnétique est une propriété très importante et montre une différence fondamentale entre le champ magnétique et le champ électrostatique. Nous avons vu, avec le théorème de Gauss, que le flux du champ électrostatique dépend des charges électriques contenues à l'intérieur de la surface

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Si la charge totale est positive, le flux est positif et il « sort » de cette surface un champ électrostatique (source). Si la charge est négative, le flux est négatif et le champ « rentre », converge vers la surface (puits). Cette propriété reste d'ailleurs également valable en régime variable. Rien de tel n'a jamais été observé pour le champ magnétique. On ne connaît pas de charge magnétique analogue à la charge électrique (se serait un « monopôle magnétique ») : tout le champ qui rentre dans une surface fermée doit également en ressortir. La source la plus élémentaire de champ magnétique est un dipôle (deux polarités), comme l'aimant dont on ne peut dissocier le pôle nord du pôle sud.
On peut aisément montrer que le flux à travers une surface S s'appuyant sur un contour fermé C est indépendant du choix de cette surface. Prenons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur C et telles que $S = S_1 + S_2$ soit une surface fermée. En orientant cette surface vers l'extérieur, la conservation du flux magnétique impose

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} = 0$$

donc $\phi_{S_1} = -\phi_{S_2}$, ce qui rentre d'un côté ressort de l'autre. La différence de signe provient de la convention d'orientation de la normale : le flux est le même dans les deux cas.

IV-4 Circulation du champ magnétique

IV-4-1 Circulation du champ autour d'un fil infini

Le champ $\vec{B}$ créé par un fil infini (Exercice 1 (Série4)) en un point M(r, θ,z) s'écrit en coordonnées cylindriques

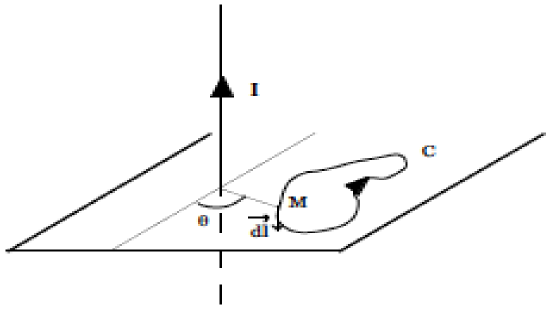
$$\vec{B} = \frac{\mu_0\ \mathrm{I}}{2\pi\, r}\overrightarrow{u_\theta}$$

Considérons maintenant une courbe fermée quelconque C. Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit $\overrightarrow{dl}$ = dr $\overrightarrow{u_r}$+ rdθ $\overrightarrow{u_\theta}$ + dz $\vec{k}$ **.** La circulation élémentaire de $\vec{B}$ est définie par :

$$dC = \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \vec{B} = \frac{\mu_0\ I}{2\pi}\, d\theta$$

La circulation de $\vec{B}$ sur la courbe fermée C vaut alors :

$$C = \oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0\ I \oint \frac{d\theta}{2\pi}$$



- Si C n'enlace pas le fil $\oint \mathbf{d}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$
- Si C enlace le fil une fois $\oint \mathbf{d}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$
- Si C enlace le fil N fois $\oint \mathbf{d}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}\boldsymbol{N\pi}$

IV-5 Théorème d'Ampère

La circulation de $\vec{B}$ sur une courbe fermée est donc directement reliée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe. C'est Ampère qui, en recherchant une explication du magnétisme dans une théorie de la dynamique des courants, découvrit cette propriété du champ magnétique démontrée ici sur un cas particulier à partir de la loi de Biot et Savart.

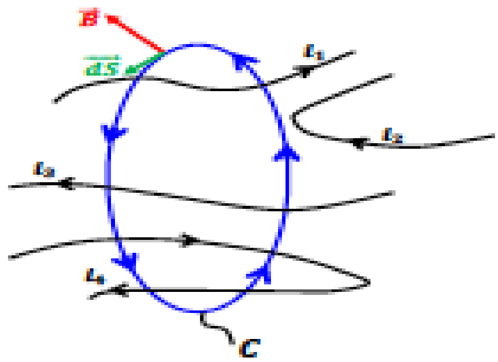
Théorème : La circulation de B le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum I_{int}$$

Cette relation fondamentale est l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ électrostatique : elle relie le ($\vec{B}$ ou $\vec{E}$) à ses sources (le courant I ou la charge Q) dans le vide (à l'intérieur d'un matériau il faut les corriger). Cependant, à la différence du théorème de Gauss, elle n'est valable qu'en régime permanent (courant continus).

Remarque : Avant d'appliquer le théorème d'Ampère, il faut d'abord déterminer la direction de $\vec{B}$ en utilisant la symétrie. En suite choisir un *__contour fermé__* qui permet le calcul simple de la circulation. En générale, si $\vec{B}$ est un champ tournant (suivant $\vec{u_\theta}$) on choisit un cercle, sinon un rectangle.

Exemple :



$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{int} = \mu_0 \ (i_1 + i_3 + i_4 - i_4) = \mu_0 \ (i_1 + i_3)$$

- **Forme locale du théorème d'Ampère**

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \, I = \mu_0 \iint \vec{j} \, . \, \vec{dS}$$

Par le théorème de circulation, on a :

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \iint \overrightarrow{rot} \, \vec{B} \, . \, \vec{dS}$$

Donc :

$$\iint \overrightarrow{rot} \, \vec{B} \, . \, \vec{dS} = \mu_0 \vec{j}$$ **(forme locale du théorème d'Ampère)**

IV-6 Les trois façons de calculer le champ magnétique

Les trois méthodes employer pour calculer le champ magnétique :

- **La formule de Biot et Savart :** elle n'est pratique que lorsqu'on sait faire l'addition vectorielle des champs $\vec{dB}$ créés par un petit élément du circuit (souvent des circuits filiformes).
- **La conservation du flux :** à n'utiliser que si l'on connait déjà son expression dans une autre région de l'espace.
- **Le théorème d'Ampère :** il faut être capable de calculer la circulation du champ sur contour choisi. Cela nécessite donc une symétrie relativement simple des courants

Dans tous les cas, il faut prendre en compte les propriétés de symétrie de la densité de courant.

B.Maroufi.