Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Kénitra

Année universitaire 2024-2025
Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Série n° 1

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle que

$$f(a) = f(b) \text{ et } f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Exercice 2 1) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

2) En déduire que la suite numérique $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

converge vers e, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

3)* Montrer de la même manière que la suite numérique $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

converge vers $\ln 2$.

Exercice 3. Trouver les extremums locaux sur leurs domaines de définition des fonctions suivantes $f\colon x \longmapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ et $g\colon x \longmapsto e^x + (\ln x - e - 1).x$.

Exercice 4. 1) Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(e^x + 1)$ est convexe.
2) En déduire que

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ 1 + \sqrt{ab} \leqslant (\sqrt{1+a})(\sqrt{1+b}).$$

Exercice 5. 1) Montrer que la fonction ln n'admet pas un DL au voisinage de 0.
2) Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

admet un $\mathrm{DL}_2(0)$, mais n'admet pas un $\mathrm{DL}_3(0)$.

Exercice 6. Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :
1) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{1-x}$, avec $n = 3$; **2)** $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$, avec $n = 4$; **3)** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}}$, avec $n = 4$.
4)* $f(x) = \tan x$, avec $n = 5$; **5)** $f(x) = e^{\sin x}$, avec $n = 4$; **6)*** $\arctan x$, avec $n = 5$.

Exercice 7. Calculer les développements limités à l'ordre n des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \cos x$ en $\pi/4$; **2)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$, en $+\infty$ avec $n = 3$; **3)*** $\ln(x + \sqrt{x^2+1} - \ln x$, en $+\infty$ avec $n = 5$.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$;

4)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$; **5)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)$; **6)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + 1 - e^x}{1 - \cos x}$.

Exercice 9. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}.$$

1) Calculer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction f.
2) En déduire la position de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
3) Déterminer l'équation de l'asymptote en $+\infty$ de $\mathcal{C}_f$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.

---

* : **La correction de cette question ne sera pas donné en classe.**