Chapitre 2

Théorème de Gauss

I – Flux de champ électrique

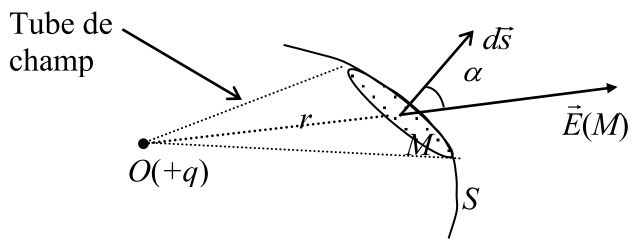
Le théorème de Gauss est basé sur le calcul du flux du champ électrique à travers une surface fermée. Dans ce paragraphe, on va calculer le flux à travers différentes surfaces.

I.1 – Flux à travers une surface quelconque

Le flux élémentaire du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface *S*, figure ci-dessous, est donné par (annexe II.3)

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{s}$$

avec $d\vec{s} = ds.\vec{n}$ est le vecteur élément de surface orienté par la normale $\vec{n}$ à la surface (de l'intérieur vers l'extérieur de *S)* élémentaire *ds*.



En un point *M* de cette surface à la distance *r* de la charge *q*, le champ a pour expression.

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$r = OM \text{ et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

et le flux élémentaire est

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.d\vec{s}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha.ds}{r^2}$$

avec $\alpha = \left(\vec{E}(M), d\vec{s}\right)$ l'angle entre $\vec{E}$ et $d\vec{s}$ au point *M*.

Or l'angle solide (annexe III.2) en Stéradian (Sr) sous lequel on voit l'élément de surface *ds* est donné par

$$d\Omega = \frac{\vec{u}.d\vec{s}}{r^2} = \frac{\cos\alpha.ds}{r^2}$$

d'où l'expression du flux en fonction de l'angle solide

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Finalement, le flux total de $\vec{E}$ à travers la surface S est exprimé par

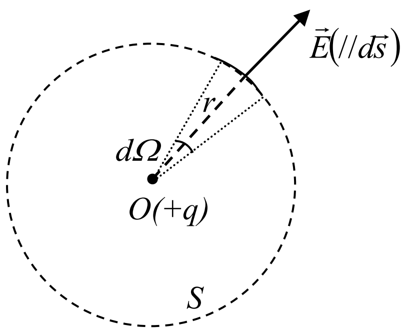
$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

avec Ω est l'angle total sous lequel on voit toute la surface S à partir du point O où se trouve la charge q.

I.2 – Flux à travers une sphère centrée sur une charge ponctuelle

Le flux élémentaire, à travers la surface sphérique fermée S (figure ci-dessous), du champ électrique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q, est donné en fonction de l'angle solide élémentaire par

$$d\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$



En tout point M de la surface de la sphère S de rayon r, le champ électrique est colinéaire à la normale à cette surface.

Alors, l'angle solide élémentaire est égale

$$d\Omega=\frac{\vec{u}.\vec{ds}}{r^2}=\frac{ds}{r^2}$$

et l'angle solide Ω sous lequel, on voit toute la surface de la sphère fermée à partir de la charge q est déterminé par

$$\Omega=\iint_{sphère}\frac{ds}{r^2}=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=[-\cos\theta]_0^{\pi}[\varphi]_0^{2\pi}=4\pi$$

avec $ds=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$ l'élément de surface exprimé dans le système de coordonnée sphérique.

Finalement, le flux total de $\vec{E}$ à travers la surface sphérique fermée S est

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{sphère}d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

On constate que le flux du champ électrique $\vec{E}$ est indépendant du rayon de la sphère. C'est une propriété intéressante, car elle permet de choisir une surface appropriée qui facilite le calcul du flux de $\vec{E}$.

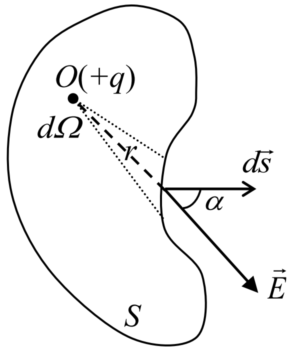
I.3 – Flux à travers une surface fermée quelconque

I.3.1 – Charge à l'intérieur de la surface

Le calcul du flux du champ électrique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q placée à l'intérieur d'une surface fermée S, figure ci-dessous, donne

$$d\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha.ds}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{espace} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



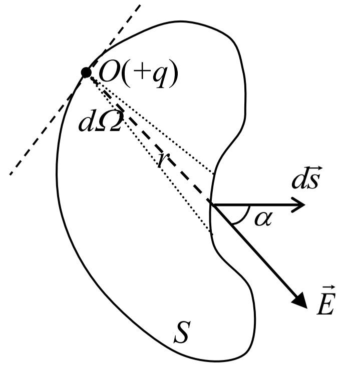
Comparé au résultat trouvé précédemment, on remarque que le flux de $\vec{E}$ reste constant quelque soit la surface fermée prise sur l'angle solide.

I.3.2 - Charge sur la surface

Le calcul du flux du champ électrique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q placée en un point O d'une surface fermée S, figure ci-dessous, donne

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha.ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\frac{1}{2}espace} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}2\pi = \frac{q}{2\varepsilon_0}$$

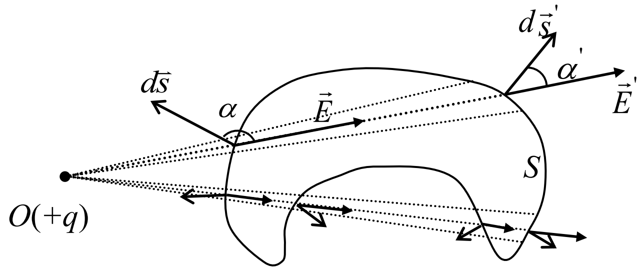


I.3.3 – Charge à l'extérieur de la surface

Le calcul du flux du champ électrique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q placée à l'extérieur d'une surface fermée S, figure ci-dessous, donne

$$d\phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha.ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$d\phi_{E'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha' ds'}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega'$$



Or $d\Omega = -d\Omega'$ ce qui donne pour la somme des deux flux élémentaires pour le même tube de champ

$$d\phi = d\phi_E + d\phi_{E'} = 0$$

Alors, la somme totale des flux à travers toute la surface est nulle.

$$\phi = \sum_i d\phi_i = 0$$

Remarque : si le cône élémentaire de sommet O découpe dans la surface S un nombre pair d'éléments ds alors $\sum_i d\phi_i = 0$

II – Enoncé du théorème de Gauss

II.1 – Cas de charges ponctuelles

Le flux électrostatique sortant d'une surface fermée S est égal au rapport de la somme algébrique des charges intérieures à la permittivité du vide. Ce flux est indépendant de la position de ces charges et de l'existence de charges extérieures.

$$\phi = \oiint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{intérieur}}$$

II.2 – Cas de distribution continue de charges

Le flux électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au rapport de la charge Q (intérieure à la surface fermée S) à la permittivité du vide.

$$\phi = \oiint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Dans le cas où les charges sont réparties à l'intérieur d'un volume avec une densité volumique ρ , la charge est donnée par

$$Q = \iiint_V \rho dv$$

le volume V est limité par la surface fermée S sur laquelle on calcule le flux du champ électrique.

- Dans le cas où les charges sont réparties sur une surface avec une densité surfacique σ, la charge est donnée par

$$Q = \iint_{S'} \sigma ds$$

la surface S' est à l'intérieur de la surface fermée S sur laquelle on calcule le flux du champ électrique.

- Dans le cas où les charges sont réparties sur une longueur avec une densité linéaire λ, la charge est donnée par

$$Q = \int_L \lambda dl$$

la longueur L est à l'intérieur de la surface fermée S sur laquelle on calcule le flux du champ électrique.