

# 20. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.



Status

Completed

Теорема 35 (неравенство Маркова<sup>17</sup>). Если  $E|\xi| < \infty$ , то для любого  $x > 0$

$$P(|\xi| \geq x) \leq \frac{E|\xi|}{x}.$$

Доказательство. Нам потребуется следующее понятие.

Определение 44. Назовём *индикатором* события  $A$  случайную величину  $I(A)$ , равную единице, если событие  $A$  произошло, и нулю, если  $A$  не произошло.

По определению, величина  $I(A)$  имеет распределение Бернулли с параметром  $p = P(I(A) = 1) = P(A)$  и её математическое ожидание равно вероятности успеха  $p = P(A)$ . Индикаторы прямого и противоположного событий связаны равенством  $I(A) + I(\bar{A}) = 1$ . Поэтому

$$|\xi| = |\xi| \cdot I(|\xi| < x) + |\xi| \cdot I(|\xi| \geq x) \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq x) \geq x \cdot I(|\xi| \geq x).$$

Тогда  $E|\xi| \geq E(x \cdot I(|\xi| \geq x)) = x \cdot P(|\xi| \geq x)$ . Осталось разделить обе части этого неравенства на положительное число  $x$ .  $\square$

Следствие 16 (обобщённое неравенство Чебышёва). Пусть функция  $g$  не убывает и неотрицательна на  $\mathbb{R}$ . Если  $Eg(\xi) < \infty$ , то для любого  $x \in \mathbb{R}$

$$P(\xi \geq x) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}.$$

Доказательство. Заметим, что  $P(\xi \geq x) \leq P(g(\xi) \geq g(x))$ , поскольку функция  $g$  не убывает. Оценим последнюю вероятность по неравенству Маркова, которое можно применять в силу неотрицательности  $g$ :

$$P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}. \quad \square$$

Следствие 17 (неравенство Чебышёва). Если  $D\xi$  существует, то для любого  $x > 0$

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \frac{D\xi}{x^2}.$$

Доказательство. Для  $x > 0$  неравенство  $|\xi - E\xi| \geq x$  равносильно неравенству  $(\xi - E\xi)^2 \geq x^2$ , поэтому

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) = P((\xi - E\xi)^2 \geq x^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \frac{D\xi}{x^2}. \quad \square$$

Теорема 36 (ЗБЧ Чебышёва). Для любой последовательности  $\xi_1, \xi_2, \dots$  попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечным вторым моментом  $E\xi_1^2 < \infty$  имеет место сходимость

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1. \quad (22)$$

Доказательство. Обозначим через  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  сумму первых  $n$  случайных величин. Из линейности математического ожидания получим

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \dots + E\xi_n}{n} = \frac{nE\xi_1}{n} = E\xi_1.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Воспользуемся неравенством Чебышёва (следствие 17):

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1 + \dots + D\xi_n}{n^2\varepsilon^2} = \\ &= \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

так как  $D\xi_1 < \infty$ . Дисперсия суммы превратилась в сумму дисперсий в силу попарной независимости слагаемых, из-за которой все ковариации  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j)$  в свойстве 19 (с. 103) обратились в нуль при  $i \neq j$ .  $\square$

Следствие (теорема Бернулли). Пусть  $S_n$  — число успехов в  $n$  испытаниях схемы Бернулли,  $p$  — вероятность успеха в одном испытании. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Пусть  $X_i$  — число успехов в  $i$ -м испытании. Тогда  $X_i \in B_p$  и все эти случайные величины независимы. Здесь  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $EX_i = p$  и тем самым выполнены все условия теоремы.

