# 19. Сходимость по вероятности, ее свойства.

| | |
|---|---|
| Status | Completed |

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ **сходится** к $X$ **по вероятности**, $X_n \xrightarrow{P} X$, если $\forall \epsilon > 0 : P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ при $n \to \infty$.

Свойства:

1. $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2\}) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon/2) + \mathbf{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2) \to 0.
\end{aligned}$$

2. Пусть при $n \to \infty$ $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a_1$, $X_n^{(2)} \xrightarrow{P} a_2$, $\ldots$, $X_n^{(k)} \xrightarrow{P} a_k$, функция $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Тогда

$$g(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(k)}) \xrightarrow{P} g(a_1, \ldots, a_k).$$

2. при $n \to \infty$.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ **сходится слабо** к случайной величине $X$, $X_n \Rightarrow X$, если для каждой точки непрерывности функции распредления $F_X(t)$ имеет место сходимость $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ при $n \to \infty$.