

18. Матрица ковариаций.

Многомерное нормальное распределение и его свойства.



Status

Completed

Ковариационной матрицей вектора \vec{X} называется $C(\vec{X}) = E(\vec{X} - E\vec{X})(\vec{X} - E\vec{X})^T$.

Аналог дисперсии вводится только для случайных векторов. На протяжении этого и следующего параграфов мы будем изображать векторы в виде столбцов

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицей ковариаций случайного вектора X называется матрица $C(X)$, у которой на месте с номером (i, j) стоит $c_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Матрица ковариаций есть аналог дисперсии. При $n = 1$ она совпадает с дисперсией. В общем случае на главной диагонали у нее стоят дисперсии DX_1, \dots, DX_n , матрица симметрична относительно главной диагонали: $c_{i,j} = c_{j,i}$.

Мы знаем, что $D(AX+B) = A^2DX$ в одномерном случае, если A и B — константы. Аналогом этого свойства для случайных векторов является следующее утверждение.

Теорема. Пусть A — матрица из констант, имеющая m строк и n столбцов, а B — вектор из констант размерности m . Тогда

$$C(AX + B) = AC(X)A^T,$$

где верхний индекс T соответствует транспонированной матрице.

Доказательство. Обозначим для краткости $m_i = EX_i$, $i = 1, \dots, n$, и воспользуемся следующим свойством произведения матриц: если умножить вектор-столбец на

вектор-строку, то в итоге получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} X_1 - m_1 \\ X_2 - m_2 \\ \dots \\ X_n - m_n \end{pmatrix} \cdot (X_1 - m_1, X_2 - m_2, \dots, X_n - m_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} (X_1 - m_1)^2 & (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) & \dots & (X_1 - m_1)(X_n - m_n) \\ (X_2 - m_2)(X_1 - m_1) & (X_2 - m_2)^2 & \dots & (X_2 - m_2)(X_n - m_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (X_n - m_n)(X_1 - m_1) & (X_n - m_n)(X_2 - m_2) & \dots & (X_n - m_n)^2 \end{pmatrix}.$$

Взяв теперь математическое ожидание от обеих частей, получим

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T = \mathbf{C}(X),$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(AX + B) &= \mathbf{E}(AX + B - \mathbf{E}(AX + B))(AX + B - \mathbf{E}(AX + B))^T = \\ &= \mathbf{E}(AX + B - \mathbf{E}AX - B)(AX + B - \mathbf{E}AX - B)^T = \\ &= \mathbf{E}(A(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T A^T) = \\ &= A(\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T)A^T = AC(X)A^T. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Многомерное нормальное распределение (которого не было на лекциях)

Мы уже рассматривали ранее в качестве примера частный случай плотности многомерного нормального закона, она соответствовала стандартному многомерному нормальному распределению. Сейчас введем этот закон распределения в общей форме.

Будем действовать по аналогии с одномерным случаем.

Пусть Y — одномерная случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, $Y \in \Phi_{0,1}$. Взяв произвольные числа α и $\sigma > 0$, образуем случайную величину $X = \sigma Y + \alpha$, которая уже будет распределена по закону Φ_{α, σ^2} с плотностью

$$\varphi_{\alpha, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Тем самым мы получили общий вид плотности нормального распределения с помощью линейных преобразований над случайной величиной Y , имеющей стандартное нормальное распределение.

Так же поступим и в многомерном случае. Пусть Y — случайный вектор с координатами Y_1, \dots, Y_n , имеющий многомерное стандартное нормальное распределение с плотностью

$$f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^T t \right\} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t_i).$$

Последнее означает, что координаты вектора Y_1, \dots, Y_n независимы и одинаково распределены в соответствии со стандартным нормальным законом. Здесь $\mathbf{C}(Y) = E$ — единичная матрица, $t = (t_1, \dots, t_n)^T$ — вектор-столбец.

Возьмем произвольную невырожденную матрицу A размерности $n \times n$, состоящую из констант, и постоянный вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ и образуем новый случайный вектор

$$X = AY + \alpha.$$

Распределение получившегося вектора X и будем называть *многомерным нормальным* распределением.

Теорема. *Плотность многомерного нормального распределения задается формулой*

$$f_X(t) = \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -(t - \alpha)^T Q (t - \alpha) / 2 \right\},$$

$$\text{где } t = (t_1, \dots, t_n)^T, \quad Q = (\mathbf{C}(X))^{-1} = (A\mathbf{C}(Y)A^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}.$$

Заметим, что при $n = 1$ и $A = \sigma$ получаем $Q = 1/\sigma^2$, $\sqrt{\det Q} = 1/\sigma$.

Следствие 1. Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ имеет многомерное нормальное распределение и все его компоненты попарно некоррелированы. Тогда они независимы.

Доказательство. Вследствие некоррелированности компонент заключаем, что матрица ковариаций $\mathbf{C}(X)$ имеет диагональный вид: на главной диагонали стоят дисперсии $\mathbf{D}X_1, \dots, \mathbf{D}X_n$, а все остальные элементы равны нулю. Обозначим для краткости $\sigma_i^2 = \mathbf{D}X_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда матрица $Q = (\mathbf{C}(X))^{-1}$ также будет диагональной, у нее на главной диагонали будут стоять числа $\sigma_1^{-2}, \dots, \sigma_n^{-2}$. По этой причине плотность распределения вектора X приобретает вид

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - \alpha_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} = \prod_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i \sigma_i^2}(t_i),$$

Следствие 2. Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ имеет многомерное стандартное нормальное распределение (напомним: это соответствует тому, что все компоненты вектора независимы и имеют распределение $\Phi_{0,1}$). Образуем новый вектор $Y = AX$, где A — ортогональная матрица. Тогда вектор Y также будет иметь многомерное стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Ортогональная матрица, по определению, обладает свойством $A^T = A^{-1}$. По этой причине $\mathbf{C}(Y) = A\mathbf{C}(X)A^T = AA^T = E$ и, следовательно,

$$f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^T t \right\} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t_i) = f_X(t),$$

что и требовалось доказать.