7. Случайные величины. Функции распределения и их свойства.

Status	Completed

Функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**, то есть каждому элементарному исходу ставится в соответствие число $X(w) \in \mathbb{R}$.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, при каждом значении $x \in \mathbb{R}$ равная вероятности случайной величины ξ принимать значения, меньшие x:

$$F_\xi(t) = P(\xi < t) = P\{\omega : \xi(\omega) < t\}$$

Свойства функции распределения:

1. Не убывание: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$
   1. Доказательство из монотонности вероятности, так как $x_1 < x_2$: $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$.
2. Пределы:
   1. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_\xi(t) = 0$
   2. $\lim\limits_{t \to \infty} F_\xi(t) = 1$

Доказательство свойства (F2). Заметим сначала, что существование пределов в свойствах (F2), (F3) вытекает из монотонности и ограниченности функции $F_\xi(x)$. Остаётся лишь доказать равенства $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$. Для этого в каждом случае достаточно найти предел по какой-нибудь подпоследовательности $\{x_n\}$, так как существование предела влечёт совпадение всех частичных пределов.

Докажем, что $F_\xi(-n) \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим вложенную убывающую последовательность событий $B_n = \{\xi < -n\}$:

$$B_{n+1} = \{\xi < -(n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi < -n\} \text{ для любых } n \geqslant 1.$$

Пересечение B всех этих событий состоит из тех и только тех ω, для которых $\xi(\omega)$ меньше любого вещественного числа. Но для любого элементарного исхода ω значение $\xi(\omega)$ вещественно, и не может быть меньше всех вещественных чисел. Иначе говоря, пересечение событий B_n не содержит элементарных исходов, т. е. $B = \bigcap B_n = \varnothing$. По свойству непрерывности меры, $F_\xi(-n) = \mathsf{P}(B_n) \to \mathsf{P}(B) = 0$ при $n \to \infty$.

Точно так же докажем остальные свойства.

Покажем, что $F_\xi(n) \to 1$ при $n \to \infty$, т. е. $1 - F_\xi(n) = \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \to 0$. Обозначим через B_n событие $B_n = \{\xi \geqslant n\}$. События B_n вложены:

$$B_{n+1} = \{\xi \geqslant (n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi \geqslant n\} \text{ для любых } n \geqslant 1,$$

а пересечение B этих событий снова пусто: оно означает, что ξ больше любого вещественного числа. По свойству непрерывности меры,

$$1 - F_\xi(n) = \mathsf{P}(B_n) \to \mathsf{P}(B) = 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad \square$$

3. Непрерывность слева: $F_\xi(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

Д о к а з а т е л ь с т в о   с в о й с т в а (F3). Достаточно доказать, что $F_\xi(x_0 - 1/n) \to F_\xi(x_0)$ при $n \to \infty$. Иначе говоря, доказать сходимость к нулю следующей разности:

$$F_\xi(x_0) - F_\xi\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = \mathsf{P}(\xi < x_0) - \mathsf{P}\left(\xi < x_0 - \frac{1}{n}\right) = \mathsf{P}\left(x_0 - \frac{1}{n} \leqslant \xi < x_0\right).$$

У п р а ж н е н и е. Обозначьте событие $\{x_0 - 1/n \leqslant \xi < x_0\}$ через B_n, и попробуйте снова воспользоваться свойством непрерывности меры. $\square$

1. Говорим, что события B_n вложены друг в друга, а вероятность от их пересечения равна нулю (так как $P(\xi = x_0) = 0$). Тогда разность сходится к нулю, и из этого функция непрерывна слева.

4. Например

Свойство 9. *Для любой случайной величины* ξ

$$\mathsf{P}(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Доказательство. Разобьём событие $\{\xi < b\}$ в объединение несовместных событий: $\{\xi < a\} \cup \{a \leqslant \xi < b\} = \{\xi < b\}$. По свойству аддитивности вероятности, $\mathsf{P}\{\xi < a\} + \mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = \mathsf{P}\{\xi < b\}$, или $F_\xi(a) + \mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F_\xi(b)$, что и требовалось доказать. $\square$

Вообще свойств можно придумать сколько угодно, главные выписаны, (4) уже не так важно, запоминать помимо первых трех смысла мало.