15. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.

Status	Completed

В дискретном случае:

$$EX = \sum_{k\geq 1} y_k P(X = y_k), \text{если этот ряд сходится абсолютно}$$

В абсолютно непрерывном случае:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt, \text{ если} \int_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t)dt < \infty$$

Свойства

1. Можно заменить t на $g(t)$ и получить $Eg(X)$ (если ряд для дискретного распределения и интеграл для непрерывного абсолютно сходятся)
2. $Ec = c$
3. $EcX = cEX$
4. $E(X+Y) = EX + EY$ (для любых случайных величин, если эти ожидания существуют)
5. Если $X \geq 0$, т.е. $P(X \geq 0) = 1$, то $E(X) \geq 0$
6. Если X и Y независимы, то $E(XY) = EX \cdot EX$
7. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$

Примеры

1. **Бернулли** $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$, $0<p<1$
    1. $EX=p$
2. **Биномиальное** $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0,1,...,n$, $n \geq 1$, $0<p<1$
    1. $EX=np$
3. **Пуассона** $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,...; \quad \lambda>0$
    1. $EX=\lambda$
4. **Геометрическое** $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,...$, $0<p<1$
    1. $EX=\frac{1}{p}$

1. **Равномерное** на $[a,b]$

$$u_{a,b}(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & t\in[a,b],\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$EX=\frac{a+b}{2}$$

2. **Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha,\sigma^2}(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty<t<\infty,\, -\infty<\alpha<\infty,\, \sigma^2>0$$

$$EX=\alpha$$

3. **Показательное**

$$e_\alpha(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0\end{cases}$$

$$EX=\frac{1}{\alpha}$$

4. **Гамма**

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t)=\begin{cases}\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}t^{\lambda-1}e^{-\alpha t}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0\end{cases}$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha}$$

5. **Стандартное Коши**

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

EX, DX – не существуют