

41. Проверка гипотез о совпадении дисперсий двух нормальных совокупностей.

Status

Completed

Теорема Фишера

n, m - размеры независимых нормальных выборок X, Y соответственно, тогда (если дисперсии совпадают)

$$\frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \sim F_{n-1, m-1}$$

Доказательство. По [лемме Фишера](#), независимые случайные величины

$$\xi_{n-1}^2 = \frac{(n-1) S_0^2(X)}{\sigma_1^2} \quad \text{и} \quad \xi_{m-1}^2 = \frac{(m-1) S_0^2(Y)}{\sigma_2^2}$$

имеют распределения H_{m-1} и H_{n-1} соответственно. При $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ отношение

$$\frac{\xi_{n-1}^2 / (n-1)}{\xi_{m-1}^2 / (m-1)} = \frac{S_0^2(X)}{\cancel{\sigma_1^2}} \cdot \frac{\cancel{\sigma_2^2}}{S_0^2(Y)} = \rho(X, Y)$$

имеет распределение Фишера с $n-1, m-1$ степенями свободы по определению [18](#) и совпадает с $\rho(X, Y)$. | |

Критерий Фишера (о совпадении дисперсий)

f - квантиль данного распределения.

$$d = \frac{S_0^2(X)}{S_0^2(Y)} \sim F_{n-1, m-1}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\epsilon/2} < d < f_{1-\epsilon/2} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$



Опять же, думай про квантили! Тут распределение Фишера, оно не симметричное, так что берем разные квантили!

Свойства

1. Критерий состоятельный.

Доказательство состоятельности критерия Фишера.

Покажем, что последовательность квантилей $f_\delta = f_\delta(n, m)$ любого уровня $0 < \delta < 1$ распределения $F_{n,m}$ сходится к 1 при $n, m \rightarrow \infty$. Возьмем величину $f_{n,m}$ с этим распределением. По определению, $P(f_{n,m} < f_\delta) = \delta$, $P(f_{n,m} > f_\delta) = 1 - \delta$ при всех n, m . По свойству 2 распределения Фишера, $f_{n,m} \xrightarrow{p} 1$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ обе вероятности $P(f_{n,m} < 1 - \epsilon)$ и $P(f_{n,m} > 1 + \epsilon)$ стремятся к нулю при $n, m \rightarrow \infty$, становясь рано или поздно меньше как δ , так и $1 - \delta$. Следовательно, при **достаточно больших** n, m выполнено $1 - \epsilon < f_\delta < 1 + \epsilon$.

Для доказательства состоятельности осталось предположить, что гипотеза H_1 не верна, взять ϵ равное, например, половине расстояния от 1 до σ_1^2/σ_2^2 и использовать сходимость (27). Пусть, скажем, при **достаточно больших** n и m

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \epsilon = 1 - \epsilon < f_{\epsilon/2}.$$

Тогда вероятность ошибки второго рода удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_2(\delta) = P_{H_2}(f_{\epsilon/2} \leq \rho \leq f_{1-\epsilon/2}) \leq P_{H_2}(1 - \epsilon < \rho) = P_{H_2}\left(\rho > \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \epsilon\right) \rightarrow 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда (при **достаточно больших** n и m)

$$f_{1-\epsilon/2} < 1 + \epsilon = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \epsilon < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

2. Критерий имеет размер $1 - \epsilon$.

3. Реально допустимый уровень значимости: $\epsilon^* = P(\eta \geq d) = 1 - F_{n-1, m-1}(d)$.



Если вы знаете среднее, то можно воспользоваться свойством $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$, и сделать такой же критерий (только распределение будет $F_{n,m}$).

