

## 29. Метод максимального правдоподобия, примеры.



Status

Completed

**Функцией правдоподобия** для выборки  $\vec{X}$  называется функция

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta),$$

где  $f(X_i, \theta) = \begin{cases} f_{X_i}(t), & \text{при непрерывном распределении} \\ P(X_i = t), & \text{при дискретном распределении} \end{cases}$ .

**Оценкой максимального правдоподобия** называется такое значение параметра  $\theta = \hat{\theta}(\vec{X})$ , при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение, то есть

$$\Pi(\vec{X}, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \Pi(\vec{X}, \theta).$$

Для упрощения поиска максимума часто используется логарифмическая функция правдоподобия:  $L(\vec{X}, \theta) = \ln \Pi(\vec{X}, \theta)$ .

### Примеры

**Пример 7.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка объема  $n$  из распределения Пуассона  $\Pi_\lambda$ , где  $\lambda > 0$ . Найдем ОМП  $\hat{\lambda}$  неизвестного параметра  $\lambda$ .

$$P_\lambda(X_1 = y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(\mathbf{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum X_i}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda} = \frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda}.$$

Поскольку эта функция при всех  $\lambda > 0$  непрерывно дифференцируема по  $\lambda$ , можно искать точки экстремума, приравняв к нулю частную производную по  $\lambda$ . Но удобнее это делать для логарифмической функции правдоподобия:

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = \ln f(\mathbf{X}, \lambda) = \ln \left( \frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda} \right) = n\bar{X} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n X_i! - n\lambda.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{X}, \lambda) = \frac{n\bar{X}}{\lambda} - n,$$

и точка экстремума  $\hat{\lambda}$  — решение уравнения:  $\frac{n\bar{X}}{\lambda} - n = 0$ , то есть  $\hat{\lambda} = \bar{X}$ .

Другие примеры (без вывода):

1. Бернулли  $\hat{p} = \bar{X}$
2. Пуассона  $\hat{\lambda} = \bar{X}$
3. Геометрическое  $\theta^* = \frac{1}{\bar{X}}$  (вроде также)
4. Биномиальное  $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$  при известном  $m$
5. Равномерное  $U_{[0,a]}$   $\hat{a} = \max X_1, \dots, X_n$
6. Показательное  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
7. Нормальное (при неизвестных)
  1.  $\hat{a} = \bar{X}$
  2.  $\hat{\sigma}^2 = S^2$