33. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.

Status	Completed

Свойства нормальных выборок (из лекций)

Пусть $\vec{X} \sim N_{a,\sigma^2}$, тогда:

1. $\sqrt{n}(\frac{\overline{X}-a}{\sigma}) \sim N_{0,1}$
    1. **Доказательство:** применяем операцию стандартизации к $\overline{X}$: $E\overline{X} = a$; $D\overline{X} = \sigma^2/n$.
2. $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Доказательство. 1. Ранее установлено, что $\overline{X} \in \Phi_{\alpha,\sigma^2/n}$. Применяем операцию стандартизации:

$$\frac{\overline{X} - \mathbf{E}\overline{X}}{\sqrt{\mathbf{D}\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \alpha}{\sigma}\sqrt{n} \in \Phi_{0,1}.$$

2. Обозначим $Z_i = \dfrac{X_i - \alpha}{\sigma}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $Z_i \in \Phi_{0,1}$, $\dfrac{\overline{X} - \alpha}{\sigma} = \overline{Z}$ и

$$\begin{aligned}\frac{S^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \alpha}{\sigma} - \frac{\overline{X} - \alpha}{\sigma}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - (\overline{Z})^2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - (\sqrt{n}\,\overline{Z})^2.$$

В свою очередь,

$$\sqrt{n}\;\overline{Z} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \ldots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Вектор $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ имеет единичную длину. Его всегда можно достроить до ортогональной матрицы A, в которой он будет являться первой строкой. Тогда $\sqrt{n}\,\overline{Z}$ будет совпадать с первой компонентой вектора $A(Z_1, \ldots, Z_n)^T$ и по лемме Фишера

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - (\sqrt{n}\,\overline{Z})^2 \in \chi^2_{n-1}.$$

3. $\overline{X}$ и S^2 — независимы

Из леммы Фишера следует также, что $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ и $\sqrt{n}\,\overline{Z} = \dfrac{\overline{X} - \alpha}{\sigma}\sqrt{n}$ независимы. Следовательно, независимы S^2 и $\overline{X}$ как функции этих величин.

4. $\sqrt{n}(\frac{\overline{X} - a}{S_0}) \sim T_{n-1}$

Доказательство. Согласно определению, T_{n-1} — это распределение дроби $Y/\sqrt{Z/(n-1)}$, где Y и Z независимы, $Y \in \Phi_{0,1}$ и $Z \in \chi^2_{n-1}$. В силу теоремы мы можем взять

$$Y = \frac{\overline{X} - \alpha}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad Z = \frac{nS^2}{\sigma^2}.$$

Следствие доказано.

5. $\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-a}{\sigma})^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ (на лекции не дано явно, но нужно для построения доверительных интервалов.

    1. **Доказательство:** сумма квадратов независимых стандартно (т.к. стандартизировали) нормально распределенных случайных величин по определению принадлежит распределению χ^2.