## 18. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.



Ковариационной матрицей вектора  $\vec{X}$  называется  $C(\vec{X}) = E(\vec{X} - E\vec{X})^T (\vec{X} - E\vec{X})$ . (X - строка).

Аналог дисперсии вводится только для случайных векторов. На протяжении этого и следующего параграфов мы будем изображать векторы в виде столбцов

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

**Определение**. Матрицей ковариаций случайного вектора X называется матрица  $\mathbf{C}(X)$ , у которой на месте с номером (i,j) стоит  $c_{i,j} = Cov(X_i, X_j), i, j = 1, \ldots, n$ . Матрица ковариаций есть аналог дисперсии. При n=1 она совпадает с дисперсией. В общем случае на главной диагонали у нее стоят дисперсии  $\mathbf{D}X_1, \ldots, \mathbf{D}X_n$ , матрица симметрична относительно главной диагонали:  $c_{i,j} = c_{j,i}$ .

Мы знаем, что  $\mathbf{D}(AX+B) = A^2\mathbf{D}X$  в одномерном случае, если A и B — константы. Аналогом этого свойства для случайных векторов является следующее утверждение.

**Теорема**. Пусть A — матрица из констант, имеющая m строк и n столбцов, a B — вектор из констант размерности m. Тогда

$$\mathbf{C}(AX + B) = A\mathbf{C}(X)A^T,$$

zде верхний индекс T соответствует транспонированной матрице.

Доказательство. Обозначим для краткости  $m_i = \mathbf{E} X_i, i = 1, \dots, n$ , и воспользуемся следующим свойством произведения матриц: если умножить вектор-столбец на

вектор-строку, то в итоге получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} X_1 - m_1 \\ X_2 - m_2 \\ \dots \\ X_n - m_n \end{pmatrix} \cdot (X_1 - m_1, X_2 - m_2, \dots, X_n - m_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} (X_1 - m_1)^2 & (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) & \dots & (X_1 - m_1)(X_n - m_n) \\ (X_2 - m_2)(X_1 - m_1) & (X_2 - m_2)^2 & \dots & (X_2 - m_2)(X_n - m_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (X_n - m_n)(X_1 - m_1) & (X_n - m_n)(X_2 - m_2) & \dots & (X_n - m_n)^2 \end{pmatrix}.$$

Взяв теперь математическое ожидание от обеих частей, получим

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T = \mathbf{C}(X),$$

и аналогично

$$\mathbf{C}(AX + B) = \mathbf{E}(AX + B - \mathbf{E}(AX + B))(AX + B - \mathbf{E}(AX + B))^{T} =$$

$$= \mathbf{E}(AX + B - \mathbf{E}AX - B)(AX + B - \mathbf{E}AX - B)^{T} =$$

$$= \mathbf{E}(A(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^{T}A^{T}) =$$

$$= A(\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^{T})A^{T} = A\mathbf{C}(X)A^{T}.$$

Теорема доказана.

## Многомерное нормальное распределение (которого не было на лекциях)

Мы уже рассматривали ранее в качестве примера частный случай плотности многомерного нормального закона, она соответствовала стандартному многомерному нормальному распределению. Сейчас введем этот закон распределения в общей форме.

Будем действовать по аналогии с одномерным случаем.

Пусть Y — одномерная случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение,  $Y \in \Phi_{0,1}$ . Взяв произвольные числа  $\alpha$  и  $\sigma > 0$ , образуем случайную величину  $X = \sigma Y + \alpha$ , которая уже будет распределена по закону  $\Phi_{\alpha,\sigma^2}$  с плотностью

$$\varphi_{\alpha,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Тем самым мы получили общий вид плотности нормального распределения с помощью линейных преобразований над случайной величиной Y, имеющей стандартное нормальное распределение.

Так же поступим и в многомерном случае. Пусть Y — случайный вектор с координатами  $Y_1, \ldots, Y_n$ , имеющий многомерное стандартное нормальное распределение с плотностью

$$f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} t^T t\right\} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t_i).$$

Последнее означает, что координаты вектора  $Y_1, \ldots, Y_n$  независимы и одинаково распределены в соответствии со стандартным нормальным законом. Здесь  $\mathbf{C}(Y) = E$  единичная матрица,  $t = (t_1, \ldots, t_n)^T$  — вектор-столбец.

Возьмем произвольную невырожденную матрицу A размерности  $n \times n$ , состоящую из констант, и постоянный вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  и образуем новый случайный вектор

$$X = AY + \alpha$$
.

Распределение получившегося вектора X и будем называть *многомерным нормальным* распределением.

**Теорема**. Плотность многомерного нормального распределения задается формулой

$$f_X(t) = rac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-(t-lpha)^T Q(t-lpha)/2\right\},$$

где 
$$t = (t_1, \dots, t_n)^T$$
,  $Q = (\mathbf{C}(X))^{-1} = (A\mathbf{C}(Y)A^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}$ .

Заметим, что при n=1 и  $A=\sigma$  получаем  $Q=1/\sigma^2$ ,  $\sqrt{\det Q}=1/\sigma$ .

**Следствие.** Для нормального вектора независимость и некоррелированность равносильны.

Следствие 2. Пусть случайный вектор  $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$  имеет многомерное стандартное нормальное распределение (напомним: это соответствует тому, что все компоненты вектора независимы и имеют распределение  $\Phi_{0,1}$ ). Образуем новый вектор Y = AX, где A — ортогональная матрица. Тогда вектор Y также будет иметь многомерное стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Ортогональная матрица, по определению, обладает свойством  $A^T=A^{-1}$ . По этой причине  $\mathbf{C}(Y)=A\mathbf{C}(X)A^T=AA^T=E$  и, следовательно,

$$f_Y(t) = rac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-rac{1}{2}t^T t
ight\} = \prod_{i=1}^n arphi_{0,1}(t_i) = f_X(t),$$

что и требовалось доказать.

 $ec{X}$  — стандартный нормальный вектор, если каждая его компонента распределена стандартно нормально и компоненты независимы.

 $ec{Y} = Aec{X} + ec{b}$  — нормальный вектор. A — невырожденная матрица.

$$C(\vec{Y}) = C(A\vec{X} + \vec{b}) = AC(\vec{X})A^T = AA^T.$$

Если A — ортогональная, то Y = AX это тоже стандартно нормальный вектор.