

19. Сходимость по вероятности, ее свойства.

▼ Status

Completed

Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится к X по вероятности**, $X_n \xrightarrow{P} X$, если $\forall \epsilon > 0 : P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится слабо** к случайной величине X , $X_n \Rightarrow X$, если для каждой точки непрерывности функции распределения $F_X(t)$ имеет место сходимость $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Свойства:

1. $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

$$\begin{aligned} P(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \epsilon) &= P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \epsilon) \leq \\ &\leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \epsilon) \leq \\ &\leq P(\{|X_n - X| \geq \epsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \epsilon/2\}) \leq \\ &\leq P(|X_n - X| \geq \epsilon/2) + P(|Y_n - Y| \geq \epsilon/2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Если $X_n \Rightarrow X$, $g(t)$ — непрерывная, то $g(X_n) \Rightarrow g(X)$.

2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a_1, X_n^{(2)} \xrightarrow{P} a_2, \dots, X_n^{(k)} \xrightarrow{P} a_k$, функция $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a = (a_1, \dots, a_k)$. Тогда

$$g(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)}) \xrightarrow{P} g(a_1, \dots, a_k).$$

при $n \rightarrow \infty$.

3. Если $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_n \Rightarrow X$.

4. Если $X_n \Rightarrow C$, то $X_n \xrightarrow{P} C$.

Докажем, что слабая сходимость к постоянной влечёт сходимость по вероятности. Пусть $\xi_n \Rightarrow c$, т. е.

$$F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c; \\ 1, & x > c \end{cases}$$

при любом x , являющемся точкой непрерывности предельной функции $F_c(x)$, т. е. при всех $x \neq c$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon) &= P(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) \geq P(c - \varepsilon/2 \leq \xi_n < c + \varepsilon) = \\ &= F_{\xi_n}(c + \varepsilon) - F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2) \rightarrow F_c(c + \varepsilon) - F_c(c - \varepsilon/2) = 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

поскольку в точках $c + \varepsilon$ и $c - \varepsilon/2$ функция F_c непрерывна, и, следовательно, имеет место сходимость последовательностей $F_{\xi_n}(c + \varepsilon)$ к $F_c(c + \varepsilon) = 1$ и $F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2)$ к $F_c(c - \varepsilon/2) = 0$.

Осталось заметить, что $P(|\xi_n - c| < \varepsilon)$ не бывает больше 1, так что по свойству предела зажатой последовательности $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \rightarrow 1$. \square

5. Теорема Слущкого. Если $X_n \xrightarrow{P} C$, $Y_n \Rightarrow Y$, то

1. $X_n + Y_n \Rightarrow C + Y$;
2. $X_n Y_n \Rightarrow CY$.