

15. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.



Status

Completed

В дискретном случае:

$$EX = \sum_{k \geq 1} y_k P(X = y_k), \text{ если этот ряд сходится абсолютно}$$

В абсолютно непрерывном случае:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt, \text{ если } \int_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t) dt < \infty$$

Свойства

1. Можно заменить t на $g(t)$ и получить $Eg(X)$ (если ряд для дискретного распределения и интеграл для непрерывного абсолютно сходятся)
2. $Ec = c$
3. $EcX = cEX$
4. $E(X + Y) = EX + EY$ (для любых случайных величин, если эти ожидания существуют)
5. Если $X \geq 0$, т.е. $P(X \geq 0) = 1$, то $E(X) \geq 0$
6. Если X и Y независимы, то $E(XY) = EX \cdot EY$
7. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$

Примеры

1. **Бернулли** $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$

1. $EX = p$

2. **Биномиальное** $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n, n \geq 1, 0 < p < 1$

1. $EX = np$

3. **Пуассона** $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots; \lambda > 0$

1. $EX = \lambda$

4. **Геометрическое** $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1$

1. $EX = \frac{1}{p}$

1. **Равномерное** на $[a, b]$

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

2. **Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \sigma^2 > 0$$

$$EX = \alpha$$

3. **Показательное**

$$e_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\alpha}$$

4. **Гамма**

$$\gamma_{\alpha, \lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha}$$

5. Стандартное Коши

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

EX, DX – не существуют