

32. Лемма Фишера.

▼ Status

Completed

Лемма Фишера

Пусть случайные величины $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ независимы, $X_i \sim N_{0,1}$, $i = 1, \dots, n$, и $\vec{Y} = A\vec{X}$, A - ортогональная матрица. Тогда для любого $r = 1, \dots, n-1$

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 \sim \chi_{n-r}^2$$

и эта случайная величина не зависит от Y_1, \dots, Y_r .

Доказательство. Нормы векторов совпадают, так как ортогональная матрица только поворачивает вектор:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = \|\vec{X}\|^2 = \|A\vec{X}\|^2 = \|\vec{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2.$$

Поэтому величина из теоремы преобразуется:

$$\begin{aligned} X_1^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 &= \\ &= Y_1^2 + \dots + Y_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 = \\ &= Y_{r+1}^2 + \dots + Y_n^2. \end{aligned}$$

Понятно, эти величины имеют распределение χ_{n-r}^2 , а также не зависят от Y_1, \dots, Y_r .

Теорема о том, что умножение выборки на ортогональную матрицу не меняет распределение (на всякий случай)

Свойство 9. Пусть вектор \mathbf{X} состоит из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением, \mathbf{C} — ортогональная матрица, и $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$. Тогда и координаты вектора \mathbf{Y} независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Запишем плотность совместного распределения координат вектора \mathbf{X} . В силу независимости это есть произведение плотностей координат вектора (то же самое, что функция правдоподобия):

$$f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(y_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2}.$$

Здесь для произвольного вектора \mathbf{y} квадрат нормы $\|\mathbf{y}\|^2$ есть

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Пользуясь (16), вычислим плотность распределения вектора $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$. Матрица \mathbf{C} ортогональна, поэтому $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$ и $\det \mathbf{C} = 1$.

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}\|^2}.$$

Но умножение на ортогональную матрицу не меняет норму вектора. Действительно,

$$\|\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y})^T \cdot (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2. \quad (17)$$

Окончательно имеем

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2} = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Итак, вектор \mathbf{Y} распределен так же, как и вектор \mathbf{X} , т.е. состоит из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением.