



# ТВ и МС | Список по ТВ

## 1. Что такое пространство элементарных исходов?

**Пространство элементарных исходов** - множество  $\Omega$ , содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента.

## 2. Что такое событие? Достоверное событие? Невозможное событие?

**Событием** называется подмножество множества элементарных исходов.

**Достоверным** называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, т. е.  $\Omega$ .

**Невозможным** называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, т. е.  $\emptyset$ .

## 3. Что такое объединение двух событий? Пересечение?

**Объединением**  $A \cup B$  событий  $A$  и  $B$  называется событие, состоящее в том, что из двух событий  $A$  и  $B$  случилось хотя бы одно.

**Пересечением**  $A \cap B$  событий  $A$  и  $B$  называется событие, состоящее в том, что произошли сразу оба события  $A$  и  $B$ .

## 10. Определение несовместных событий.

События  $A$  и  $B$  называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно:  $A \cap B = \emptyset$ .

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **попарно несовместными**, если несовместны любые два из них:  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для любых  $i \neq j$ .

## 13. Как вычисляется $P(A)$ согласно классическому определению вероятности?

$N(A)$  - число элементов в множестве  $A$ .

Формулу  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$  называют **классическим определением вероятности**. (предполагается, что каждый исход из пространства равновероятных исходов равновозможен)

#### 14. Как вычисляется $P(A)$ согласно геометрическому определению вероятности?

Если множество исходов эксперимента  $\Omega$  представляет из себя ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . Через  $\lambda(A)$  будем обозначать  $n$  мерный объем множества  $A$ .

Формулу  $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$  называют **геометрическим определением вероятности**.

#### 16. Перечислите свойства вероятности.

1.  $P(\emptyset) = 0$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4.  $0 \leq P(A) \leq 1$
5.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
6.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

#### 19. Если события $A$ и $B$ несовместны, то чему равна вероятность объединения события $A \cup B$ ?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

#### 20. Чему равна вероятность суммы двух произвольных событий?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

#### 22. Определение условной вероятности?

**Условной вероятностью** события  $A$  при условии, что произошло события  $B$ , называют число (если вероятность  $P(B) \neq 0$ )

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

## 23. Формула полной вероятности.

Пусть имеется события  $A$  и попарно несовместные события положительной вероятности  $B_1, \dots, B_n$  такие, что  $A \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_n$ . Тогда вероятность события  $A$  можно вычислить по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

## 24. Формула Байеса.

В условиях 23, если произошло события  $A$  ненулевой вероятности, то условные вероятности гипотез  $B_i$  могут быть вычислены по **формуле Байеса**:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}.$$

## 25. Какие события называют независимыми?

События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если для любого  $1 \leq k \leq n$  и любого набора различных между собой индексов  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  имеет место равенство  $P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

## 29. Что такое схема Бернулли?

Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода - успех и неудача, при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью  $p$ , а неудача -  $q = 1 - p$ .

## 30. Выписать формулу Бернулли.

При любом  $k = 0, 1, \dots, n$  имеет место равенство:

$$P(v_n = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

## 32. Что такое случайная величина?

Функция  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется **случайной величиной**, то есть каждому элементарному исходу ставится в соответствие число  $X(w) \in \mathbb{R}$ .

### 33. Что такое таблица (ряд) распределения? У каких случайных величин есть таблица распределения?

Если записать соответствие между значениями случайных величин и вероятностями принимать эти значения в виде таблицы, получится **таблица распределения**.

У дискретных величин можно сделать такую таблицу (возможно бесконечную).

У непрерывных - нет.

### 37. Что такое плотность распределения?

Случайная величина  $\xi$  имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует неотрицательная функция  $f_\xi(x)$  (функция плотности распределения) такая, что для любого подмножества  $B$  имеет место равенство:

$$P(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x) dx.$$

### 38. Перечислите характеристические свойства плотности.

1.  $\forall x : f_\xi(x) \geq 0$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) dt = 1$

### 45. Определение функции распределения случайной величины?

Функцией распределения случайной величины  $\xi$  называется функция  $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , при каждом значении  $x \in \mathbb{R}$  равная вероятности случайной величины  $\xi$  принимать значения, меньшие  $x$ :

$$F_\xi(t) = P(\xi < t) = P\{\omega : \xi(\omega) < t\}$$

### 46. Перечислите характеристические свойства функции распределения.

1. Не убывание:  $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$
2. Пределы:
  1.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_\xi(t) = 0$
  2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_\xi(t) = 1$
3. Непрерывность слева:  $F_\xi(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

## 55. Как плотность распределения находится по функции распределения?

$$f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt}$$

Для всех точек, где производная существует, в абсолютно непрерывном случае.

## 56. Перечислите основные дискретные распределения. Запишите таблицу распределения ( $P(X=k)=?$ ) для каждого.

1. **Вырожденное**  $P(X = a) = 1$
2. **Бернулли**  $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$ 
  1.  $EX = p$
  2.  $DX = p(1 - p)$
3. **Биномиальное**  $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n, n \geq 1, 0 < p < 1$ 
  1.  $EX = np$
  2.  $DX = np(1 - p)$
4. **Пуассона**  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots; \lambda > 0$ 
  1.  $EX = \lambda$
  2.  $DX = \lambda$
5. **Геометрическое**  $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1$ 
  1.  $EX = \frac{1}{p}$

$$2. DX = \frac{1-p}{p^2}$$

**57. Перечислите основные абсолютно непрерывные распределения. Запишите плотность и функцию распределения каждого.**

**1. Равномерное** на  $[a, b]$

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$U_{a,b}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq a, \\ \frac{y-a}{b-a}, & y \in [a, b], \\ 1, & y > b. \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**2. Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \sigma^2 > 0$$

$$\Phi_{\alpha, \sigma^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

$$EX = \alpha$$

$$DX = \sigma^2$$

**3. Показательное**

$$e_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$E_{\alpha}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-\alpha y}, & y > 0. \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\alpha}$$

$$DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

#### 4. Гамма

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$DX = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

#### 5. Стандартное Коши

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

$$C(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(y).$$

$EX, DX$  – не существуют

#### Преобразования случайных величин

Если  $f_X(t)$  - функция плотности  $X$ , и  $a \neq 0$ , то

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Если  $X \sim \Phi_{\alpha, \sigma^2}$ , то  $Y = (X - \alpha)/\sigma \sim \Phi_{0,1}$

Если  $X \sim \Phi_{\alpha, \sigma^2}$ , то  $Y = AX + B \sim \Phi_{A\alpha+B, \sigma^2 A^2}$

**76. Дать определение математического ожидания случайной величины с дискретным распределением.**

$$EX = \sum_{k \geq 1} y_k P(X = y_k), \text{ если этот ряд сходится абсолютно}$$

**77. Дать определение математического ожидания случайной величины с абсолютно непрерывным распределением.**

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt, \text{ если } \int_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t) dt < \infty$$

**80. Перечислите свойства математического ожидания.**

1. Можно заменить  $t$  на  $g(t)$  и получить  $Eg(X)$  (если ряд для дискретного распределения и интеграл для непрерывного абсолютно сходятся)
2.  $Ec = c$
3.  $EcX = cEX$
4.  $E(X + Y) = EX + EY$  (для любых случайных величин, если эти ожидания существуют)
5. Если  $X \geq 0$ , т.е.  $P(X \geq 0) = 1$ , то  $E(X) \geq 0$
6. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = EX \cdot EY$
7. Если  $X \geq Y$ , то  $EX \geq EY$

**87. Дайте определение дисперсии.**

Дисперсией случайной величины  $X$  называется  $DX = E(X - EX)^2$ .

**88. Какой физический смысл имеет дисперсия?**

Дисперсия показывает, насколько велик разброс значений случайной величины около ее математического ожидания.

**89. Что такое среднее квадратичное отклонение?**

$\sqrt{DX}$  - среднее квадратичное отклонение.

**90. Перечислите свойства дисперсии**

1.  $DX \geq 0$



$$2. DC = 0$$

3. Если  $DX = 0$ , то  $P(X = C) = 1$  для некоторой постоянной  $C$ .

$$4. D(CX) = C^2 DX$$

$$5. D(X + C) = DX$$

6. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $D(X \pm Y) = DX + DY$

## 100. Дать определение совместной функции распределения

Совместной функцией распределения случайного вектора  $X$  называется

$$F_{X_1, \dots, X_n}(y_1, \dots, y_n) = P(X_1 < y_1, \dots, X_n < y_n)$$

(перечисление событий в вероятности означает их одновременное наступление)

Плотностью совместного распределения называется функция  $f$  (если она существует)

(для большего числа аргументов аналогично)

$$P((X_1, X_2) \in B) = \iint_B f_{X_1, X_2}(x, y) dx dy$$

## 103. Сформулировать определение независимых случайных величин.

Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  называются независимыми, если для любых  $B_1 \subset \mathbb{R}, \dots, B_n \subset \mathbb{R}$  выполняется

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in B_n)$$

## 104. Сформулировать критерий независимости случайных величин (через функции распределений).

Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы (в совокупности), если для любых  $x_1, \dots, x_n$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

## 105. Сформулировать критерий независимости для дискретных случайных величин.

Дискретные случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы (в совокупности), если для любых  $a_1, \dots, a_n$

$$P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = a_n)$$

### 106. Сформулировать критерий независимости для абсолютно непрерывных случайных величин.

Абсолютно непрерывные случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы (в совокупности), если для любых  $x_1, \dots, x_n$  имеет место равенство

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

### 107. Записать формулу свертки.

Если  $X$  и  $Y$  независимы и имеют плотности распределения  $f_X(t)$  и  $f_Y(t)$ , то случайная величина  $X + Y$  также будет иметь плотность, равную

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u) du$$

### 113. Дайте определение ковариации.

Ковариацией  $cov(X, Y)$  случайных величин  $X, Y$  называется число

$$cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$$

### 114. Дайте определение коэффициента корреляции.

Коэффициентом корреляции  $p(X, Y)$  случайных величин  $X, Y$  дисперсии которых существуют и отличны от нуля, называется число

$$p(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$$

### 115. Перечислите свойства ковариации.

1.  $cov(X, Y) = E(XY) - EXEY$
2.  $cov(X, X) = DX$
3.  $cov(X, Y) = cov(Y, X)$
4.  $cov(cX, Y) = c \cdot cov(X, Y)$

### 116. Перечислите свойства коэффициента корреляции.

1. Если  $X, Y$  - независимы, то  $\rho(X, Y) = 0$
2.  $|\rho(X, Y)| \leq 1$
3.  $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow X, Y$  - линейно связаны ( $P(X = aY + b) = 1$ )

### 117. Сформулируйте неравенство Йенсена.

Если функция  $g$  выпукла вниз, то для любой случайной величины  $X$ , у которой существует матожидание, верно равенство

$$Eg(X) \geq g(EX)$$

Для вогнутых (выпуклых вверх) функций знак меняется на противоположные

### 118. Сформулируйте неравенство Чебышева.

Если  $DX$  существует, то для любого  $x > 0$

$$P(|X - EX| \geq x) \leq \frac{DX}{x^2}$$