32. Лемма Фишера.

Status	Completed

Лемма Фишера

Пусть случайные величины $\vec{X} = (X_1, ...X_n)$ независимы, $X_i \sim N_{0,1}$, $i = 1, ..., n$, и $\vec{Y} = A\vec{X}$, A - ортогональная матрица. Тогда для любого $r = 1, ..., n-1$

$$X_1^2 + ... + X_n^2 - Y_1^2 - ... - Y_r^2 \sim \chi^2_{n-r}$$

и эта случайная величина не зависит от $Y_1, ..., Y_r$.

Доказательство. Нормы векторов совпадают, так как ортогональная матрица только поворачивает вектор:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = ||\vec{X}||^2 = ||A\vec{X}||^2 = ||\vec{Y}||^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2.$$

Поэтому величина из теоремы преобразуется:

$$\begin{gathered} X_1^2 + ... + X_n^2 - Y_1^2 - ... - Y_r^2 = \\ = Y_1^2 + ... + Y_n^2 - Y_1^2 - ... - Y_r^2 = \\ = Y_{r+1}^2 + ... + Y_n^2. \end{gathered}$$

Понятно, эти величины имеют распределение χ^2_{n-r}, а также не зависят от $Y_1, ..., Y_r$.

Теорема о том, что умножение выборки на ортогональную матрицу не меняет распределение (на всякий случай)

Свойство 9. Пусть вектор $\mathbf{X}$ состоит из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением, C — ортогональная матрица, и $\mathbf{Y} = C \cdot \mathbf{X}$. Тогда и координаты вектора $\mathbf{Y}$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Запишем плотность совместного распределения координат вектора $\mathbf{X}$. В силу независимости это есть произведение плотностей координат вектора (то же самое, что функция правдоподобия):

$$f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(y_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n y_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}\|^2}.$$

Здесь для произвольного вектора $\boldsymbol{y}$ квадрат нормы $\|\boldsymbol{y}\|^2$ есть

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{y}.$$

Пользуясь (16), вычислим плотность распределения вектора $\mathbf{Y} = C \cdot \mathbf{X}$. Матрица C ортогональна, поэтому $C^{-1} = C^T$ и $\det C = 1$.

$$f_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\mathbf{X}}\left(C^T \cdot \boldsymbol{y}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|C^T \cdot \boldsymbol{y}\|^2}.$$

Но умножение на ортогональную матрицу не меняет норму вектора. Действительно,

$$\|C^T \cdot \boldsymbol{y}\|^2 = (C^T \cdot \boldsymbol{y})^T \cdot (C^T \cdot \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}^T \cdot C) \cdot (C^T \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \cdot E \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|^2. \quad (17)$$

Окончательно имеем

$$f_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}\|^2} = f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n y_i^2}.$$

Итак, вектор $\mathbf{Y}$ распределен так же, как и вектор $\mathbf{X}$, т. е. состоит из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением.