34. Построение доверительных интервалов для среднего нормальной совокупности.

Status	Completed

Определение доверительного интервала

Доверительным интервалом уровня $1-\epsilon$ для неизвестного параметра θ называется интервал $(A(\vec{X}), B(\vec{X}))$, такой, что

$$P(A < \theta < B) \geq 1 - \epsilon$$

Доверительный интервал называют **асимптотическим**, если

$$\lim_{n\to\infty} P(A < \theta < B) \geq 1 - \epsilon$$

Доверительный интервал называют **точным**, если знак неравенства можно заменить на знак равенства (в обоих случаях).

Доверительные интервалы для среднего нормальной совокупности

$\vec{X} \sim N_{a,\sigma^2}$, причем есть разные условия для среднего и дисперсии:

Для a, σ^2 известно:

$P(\overline{X} - \tau_{1-\epsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \tau_{1-\epsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\epsilon$, квантиль $N_{0,1}$

Выводится из свойства $\sqrt{n}(\frac{\overline{X}-a}{\sigma}) \sim N_{0,1}$

Для a, σ^2 неизвестно:

$P(\overline{X} - t\frac{S_0}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t\frac{S_0}{\sqrt{n}}) = 1-\epsilon$, $t = \tau_{1-\epsilon/2}$, квантиль T_{n-1}

Выводится из свойства $\sqrt{n}(\frac{\overline{X}-a}{S_0}) \sim T_{n-1}$

☝️ Обращайте внимание на квантили! В данном случае распределения симметричные, так что мы берем одинаковые квантили, пользуясь свойством $\tau_{1-\epsilon/2} = -\tau_{\epsilon/2}$.

Эти интервалы точные, и еще сходятся к a — так как добавки стремятся к нулю с ростом n (во втором случае квантили T_{n-1} сходятся к квантилям нормального распределения).