12. Распределение суммы случайных величин, имеющих пуассоновское распределение. Плотность суммы случайных величин.

Status	Completed

Поиск суммы случайных величин в дискретном случае

Теорема 3. *Пусть случайные величины X и Y независимы и каждая из них принимает целые неотрицательные значения, при этом*

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k, \quad \mathbf{P}(Y = k) = q_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$r_k = \mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}.$$

Доказательство.

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \mathbf{P}(\{X = 0, Y = k\} \cup \{X = 1, Y = k-1\} \cup \ldots \cup \{X = k, Y = 0\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}.$$

Последовательность чисел $\{r_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$ называется *сверткой* последовательностей $\{p_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ и $\{q_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots\}$.

В качестве следствия получим следующий интересный результат.

Теорема 4. *Пусть* X_1 *и* X_2 *независимы,* $X_1 \in \Pi_{\lambda_1}$, $X_2 \in \Pi_{\lambda_2}$. *Тогда* $X_1 + X_2 \in \Pi_{\lambda_1+\lambda_2}$.

Доказательство. Воспользуемся полученной формулой:

$$\mathbf{P}(X+Y = k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Поиск суммы случайных величин в абсолютно непрерывном случае (формула свертки)

Теорема 5. *Пусть X и Y независимы и имеют плотности распределения f_X и f_Y соответственно. Тогда*

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\, f_Y(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(v)\, f_X(t-v)\, dv.$$

Доказательство. Достаточно доказать первое соотношение, второе получается из него заменой $v = t - u$. Имеем для функции распределения

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(y) &= \mathbf{P}(X+Y<y) = \mathbf{P}((X,Y) \in \{(u,v) :\ u+v<y\}) = \iint\limits_{u+v<y} f_{X,Y}(u,v)\, dudv \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \int\limits_{-\infty}^{y-u} f_Y(v)\, dvdu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(t-u)\, dtdu = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{y} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\, du \right\} dt. \end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались свойством $f_{X,Y}(u,v) = f_X(u) f_Y(v)$ для независимых X и Y и заменой переменной $t = u + v$. Выражение, стоящее в фигурных скобках, и будет искомой плотностью распределения суммы. Теорема доказана.

Оба интеграла, присутствующие в формулировке теоремы, называются *свертками* плотностей f_X и f_Y.