

# 33. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.



Status

Completed

## Свойства нормальных выборок (из лекций)

Пусть  $\vec{X} \sim N_{a, \sigma^2}$ , тогда:

1.  $\sqrt{n}(\frac{\bar{X}-a}{\sigma}) \sim N_{0,1}$

1. **Доказательство:** применяем операцию стандартизации к  $\bar{X}$ :  
 $E\bar{X} = a; D\bar{X} = \sigma^2/n$ .

2.  $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

*Доказательство.* 1. Ранее установлено, что  $\bar{X} \in \Phi_{\alpha, \sigma^2/n}$ . Применяем операцию стандартизации:

$$\frac{\bar{X} - \mathbf{E}\bar{X}}{\sqrt{\mathbf{D}\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \sqrt{n} \in \Phi_{0,1}.$$

2. Обозначим  $Z_i = \frac{X_i - \alpha}{\sigma}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда  $Z_i \in \Phi_{0,1}$ ,  $\frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} = \bar{Z}$  и

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \alpha}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\bar{Z})^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\sqrt{n} \bar{Z})^2.$$

В свою очередь,

$$\sqrt{n} \bar{Z} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Вектор  $\left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  имеет единичную длину. Его всегда можно достроить до ортогональной матрицы  $A$ , в которой он будет являться первой строкой. Тогда  $\sqrt{n} \bar{Z}$  будет совпадать с первой компонентой вектора  $A(Z_1, \dots, Z_n)^T$  и по лемме Фишера

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\sqrt{n} \bar{Z})^2 \in \chi_{n-1}^2.$$

### 3. $\bar{X}$ и $S^2$ — независимы

Из леммы Фишера следует также, что  $\frac{nS^2}{\sigma^2}$  и  $\sqrt{n} \bar{Z} = \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \sqrt{n}$  независимы. Следовательно, независимы  $S^2$  и  $\bar{X}$  как функции этих величин.

### 4. $\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X} - \alpha}{S_0} \right) \sim T_{n-1}$

*Доказательство.* Согласно определению,  $T_{n-1}$  — это распределение дроби  $Y/\sqrt{Z/(n-1)}$ , где  $Y$  и  $Z$  независимы,  $Y \in \Phi_{0,1}$  и  $Z \in \chi_{n-1}^2$ . В силу теоремы мы можем взять

$$Y = \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \sqrt{n}, \quad Z = \frac{nS^2}{\sigma^2}.$$

Следствие доказано.

5.  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$  (на лекции не дано явно, но нужно для построения доверительных интервалов.

1. **Доказательство:** сумма квадратов независимых стандартно (т.к. стандартизировали) нормально распределенных случайных величин по определению принадлежит распределению  $\chi^2$ .