

## 32. Лемма Фишера.



Status

Completed

### Лемма Фишера

Пусть случайные величины  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  независимы,  $X_i \sim N_{0,1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и  $\vec{Y} = A\vec{X}$ ,  $A$  - ортогональная матрица. Тогда для любого  $r = 1, \dots, n-1$

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 \sim \chi_{n-r}^2$$

и эта случайная величина не зависит от  $Y_1, \dots, Y_r$ .

**Доказательство.** Нормы векторов совпадают, так как ортогональная матрица только поворачивает вектор:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = \|\vec{X}\|^2 = \|A\vec{X}\|^2 = \|\vec{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2.$$

Поэтому величина из теоремы преобразуется:

$$\begin{aligned} X_1^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 &= \\ &= Y_1^2 + \dots + Y_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 = \\ &= Y_{r+1}^2 + \dots + Y_n^2. \end{aligned}$$

Понятно, эти величины имеют распределение  $\chi_{n-r}^2$ , а также не зависят от  $Y_1, \dots, Y_r$ .

**Теорема о том, что умножение выборки на ортогональную матрицу не меняет распределение (на всякий случай)**

**Свойство 9.** Пусть вектор  $\mathbf{X}$  состоит из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением,  $\mathbf{C}$  — ортогональная матрица, и  $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$ . Тогда и координаты вектора  $\mathbf{Y}$  независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Запишем плотность совместного распределения координат вектора  $\mathbf{X}$ . В силу независимости это есть произведение плотностей координат вектора (то же самое, что функция правдоподобия):

$$f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(y_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2}.$$

Здесь для произвольного вектора  $\mathbf{y}$  квадрат нормы  $\|\mathbf{y}\|^2$  есть

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Пользуясь (16), вычислим плотность распределения вектора  $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$ . Матрица  $\mathbf{C}$  ортогональна, поэтому  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$  и  $\det \mathbf{C} = 1$ .

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}\|^2}.$$

Но умножение на ортогональную матрицу не меняет норму вектора. Действительно,

$$\|\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y})^T \cdot (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2. \quad (17)$$

Окончательно имеем

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2} = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Итак, вектор  $\mathbf{Y}$  распределен так же, как и вектор  $\mathbf{X}$ , т.е. состоит из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением.