

11. Теорема о независимости функций от независимых случайных величин.



Status

Completed

Линейные преобразования случайных величин, применения к гауссовским распределениям.

Независимость функций

Случайные величины X_1, \dots, X_n независимы, если $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \dots F_{X_n}(t_n)$.

Если \vec{X} имеет абсолютно непрерывное распределение, то X_1, \dots, X_n - независимы $\Leftrightarrow f_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{X_1}(t_1) \dots f_{X_n}(t_n)$.

Теорема о независимости функций от независимых случайных величин

Теорема 1. Пусть случайные величины X и Y независимы, g и h — функции из \mathbb{R} в \mathbb{R} . Тогда случайные величины $g(X)$ и $h(Y)$ также независимы.

Доказательство. Для любых $B_1 \subset \mathbb{R}$, $B_2 \subset \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(g(X) \in B_1, h(Y) \in B_2) = \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1), Y \in h^{-1}(B_2)) =$$

$$= \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1)) \mathbf{P}(Y \in h^{-1}(B_2)) = \mathbf{P}(g(X) \in B_1) \mathbf{P}(h(Y) \in B_2),$$

где $g^{-1}(B_1) = \{y : g(y) \in B_1\}$, $h^{-1}(B_2) = \{y : h(y) \in B_2\}$.

Линейные преобразования случайных величин

Теорема 25. Пусть ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$ и плотность распределения $f_\xi(x)$, и постоянная a отлична от нуля. Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b$ имеет плотность распределения

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Доказательство. Пусть сначала $a > 0$.

$$F_{\eta}(x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{(x-b)/a} f_{\xi}(t) dt.$$

Сделаем замену переменной в последнем интеграле. Переменную t заменим на новую переменную y так: $t = \frac{y-b}{a}$. Тогда $dt = \frac{dy}{a}$, нижняя граница области интегрирования $t = -\infty$ перейдёт в $y = -\infty$, верхняя граница $t = \frac{x-b}{a}$ перейдёт в $y = x$. Получим

$$F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy.$$

Функция под интегралом есть искомая плотность распределения $f_{\eta}(y)$ случайной величины $\eta = a\xi + b$ при $a > 0$.

Пусть теперь $a < 0$.

$$F_{\eta}(x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = \int_{(x-b)/a}^{+\infty} f_{\xi}(t) dt.$$

Сделаем ту же замену переменной. Но теперь граница интегрирования $t = +\infty$ перейдёт в $y = -\infty$, поскольку $a < 0$. Получим

$$F_{\eta}(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{a} f_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = \int_{-\infty}^x \frac{1}{|a|} f_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy.$$

Функция под интегралом — плотность распределения $f_{\eta}(y)$ случайной величины $\eta = a\xi + b$ при $a < 0$. \square

Следствие 4. Если $\xi \in N_{0,1}$, то $\eta = \sigma\xi + a \in N_{a,\sigma^2}$.

Доказательство. Действительно,

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{\xi}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad \square$$

Следствие 5. Если $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, то $\frac{\xi-a}{\sigma} \in N_{0,1}$.

Следствие 6. Если $\xi \in U_{0,1}$, то $a\xi + b \in U_{b,a+b}$ при $a > 0$.

Следствие 7. Если $\xi \in E_{\alpha}$, то $\alpha\xi \in E_1$.