

# 35. Построение доверительных интервалов для дисперсии нормальной совокупности.



Status

Completed

## Доверительные интервалы для среднего нормальной совокупности

$\vec{X} \sim N_{a, \sigma^2}$ , причем есть разные условия для среднего и дисперсии:

**Для  $\sigma^2$ ,  $a$  известно**

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{q_1}\right) = 1 - \epsilon,$$

$$\chi_n^2(q_1) = \epsilon/2, \quad \chi_n^2(q_2) = 1 - \epsilon/2$$

Выводится из свойства  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$

**Для  $\sigma^2$ ,  $a$  неизвестно**

$$P\left(\frac{nS^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{q_1}\right) = 1 - \epsilon,$$

$$\chi_{n-1}^2(q_1) = \epsilon/2, \quad \chi_{n-1}^2(q_2) = 1 - \epsilon/2$$

Выводится из свойства  $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$



Внимание на квантили! Тут распределения **не симметричные**, так что квантили нужно брать разные!

Эти интервалы точные, и сходятся, но это уже не так очевидно как в случае для среднего. Однако достаточно вспомнить одно свойство распределения  $\chi^2$ :

**Замечание 15.** ДИ, полученные в п. 2 и 3, выглядят странно по сравнению с ДИ из п. 1 и 4: они содержат  $n$  в числителе, а не в знаменателе. Но если квантили нормального распределения от  $n$  не зависят вовсе, квантили распределения Стьюдента асимптотически не зависят от  $n$  по свойству  $T_n \Rightarrow N_{0,1}$ , то квантили распределения  $H_n$  зависят от  $n$  существенно. Действительно, пусть  $g = g(n)$  таково, что  $P(\chi_n^2 < g) = \delta$  при всех  $n$ , в том числе и при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда последовательность  $g(n)$  такова, что  $\frac{g - n}{\sqrt{2n}} \rightarrow \tau_\delta$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\tau_\delta$  — квантиль стандартного нормального распределения. В самом деле: по ЦПТ с ростом  $n$

$$P(\chi_n^2 < g) = P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 < g\right) = P\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < \frac{g - n}{\sqrt{2n}}\right) \rightarrow \Phi_{0,1}(\tau_\delta) = \delta.$$

Поэтому квантиль уровня  $\delta$  распределения  $H_n$  ведет себя как  $g = g(n) = n + \tau_\delta \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$ .

На лекциях его не было, кажется

В последней строке по сути сказано, что  $q/n \rightarrow 1$ .

Тогда остается понять, что и  $S_1^2 (\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 / n)$ , и  $S^2$  сходятся к  $\sigma^2$ .