

# 18. Матрица ковариаций.

## Многомерное нормальное распределение и его свойства.

▼ Status

Completed

Ковариационной матрицей вектора  $\vec{X}$  называется  $C(\vec{X}) = E(\vec{X} - E\vec{X})(\vec{X} - E\vec{X})^T$ . ( $X$  - строка).

Аналог дисперсии вводится только для случайных векторов. На протяжении этого и следующего параграфов мы будем изображать векторы в виде столбцов

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

**Определение.** Матрицей ковариаций случайного вектора  $X$  называется матрица  $C(X)$ , у которой на месте с номером  $(i, j)$  стоит  $c_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Матрица ковариаций есть аналог дисперсии. При  $n = 1$  она совпадает с дисперсией. В общем случае на главной диагонали у нее стоят дисперсии  $DX_1, \dots, DX_n$ , матрица симметрична относительно главной диагонали:  $c_{i,j} = c_{j,i}$ .

Мы знаем, что  $D(AX+B) = A^2DX$  в одномерном случае, если  $A$  и  $B$  — константы. Аналогом этого свойства для случайных векторов является следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $A$  — матрица из констант, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов, а  $B$  — вектор из констант размерности  $m$ . Тогда

$$C(AX + B) = AC(X)A^T,$$

где верхний индекс  $T$  соответствует транспонированной матрице.

**Доказательство.** Обозначим для краткости  $m_i = EX_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и воспользуемся следующим свойством произведения матриц: если умножить вектор-столбец на

вектор-строку, то в итоге получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} X_1 - m_1 \\ X_2 - m_2 \\ \dots \\ X_n - m_n \end{pmatrix} \cdot (X_1 - m_1, X_2 - m_2, \dots, X_n - m_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} (X_1 - m_1)^2 & (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) & \dots & (X_1 - m_1)(X_n - m_n) \\ (X_2 - m_2)(X_1 - m_1) & (X_2 - m_2)^2 & \dots & (X_2 - m_2)(X_n - m_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (X_n - m_n)(X_1 - m_1) & (X_n - m_n)(X_2 - m_2) & \dots & (X_n - m_n)^2 \end{pmatrix}.$$

Взяв теперь математическое ожидание от обеих частей, получим

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T = \mathbf{C}(X),$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(AX + B) &= \mathbf{E}(AX + B - \mathbf{E}(AX + B))(AX + B - \mathbf{E}(AX + B))^T = \\ &= \mathbf{E}(AX + B - \mathbf{E}AX - B)(AX + B - \mathbf{E}AX - B)^T = \\ &= \mathbf{E}(A(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T A^T) = \\ &= A(\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(X - \mathbf{E}X)^T)A^T = AC(X)A^T. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## Многомерное нормальное распределение (которого не было на лекциях)

Мы уже рассматривали ранее в качестве примера частный случай плотности многомерного нормального закона, она соответствовала стандартному многомерному нормальному распределению. Сейчас введем этот закон распределения в общей форме.

Будем действовать по аналогии с одномерным случаем.

Пусть  $Y$  — одномерная случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение,  $Y \in \Phi_{0,1}$ . Взяв произвольные числа  $\alpha$  и  $\sigma > 0$ , образуем случайную величину  $X = \sigma Y + \alpha$ , которая уже будет распределена по закону  $\Phi_{\alpha, \sigma^2}$  с плотностью

$$\varphi_{\alpha, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Тем самым мы получили общий вид плотности нормального распределения с помощью линейных преобразований над случайной величиной  $Y$ , имеющей стандартное нормальное распределение.

Так же поступим и в многомерном случае. Пусть  $Y$  — случайный вектор с координатами  $Y_1, \dots, Y_n$ , имеющий многомерное стандартное нормальное распределение с плотностью

$$f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^T t \right\} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t_i).$$

Последнее означает, что координаты вектора  $Y_1, \dots, Y_n$  независимы и одинаково распределены в соответствии со стандартным нормальным законом. Здесь  $\mathbf{C}(Y) = E$  — единичная матрица,  $t = (t_1, \dots, t_n)^T$  — вектор-столбец.

Возьмем произвольную невырожденную матрицу  $A$  размерности  $n \times n$ , состоящую из констант, и постоянный вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  и образуем новый случайный вектор

$$X = AY + \alpha.$$

Распределение получившегося вектора  $X$  и будем называть *многомерным нормальным* распределением.

**Теорема.** *Плотность многомерного нормального распределения задается формулой*

$$f_X(t) = \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -(t - \alpha)^T Q (t - \alpha) / 2 \right\},$$

$$\text{где } t = (t_1, \dots, t_n)^T, \quad Q = (\mathbf{C}(X))^{-1} = (A\mathbf{C}(Y)A^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}.$$

Заметим, что при  $n = 1$  и  $A = \sigma$  получаем  $Q = 1/\sigma^2$ ,  $\sqrt{\det Q} = 1/\sigma$ .

**Следствие.** Для нормального вектора независимость и некоррелированность равносильны.

**Следствие 2.** Пусть случайный вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  имеет многомерное стандартное нормальное распределение (напомним: это соответствует тому, что все компоненты вектора независимы и имеют распределение  $\Phi_{0,1}$ ). Образуем новый вектор  $Y = AX$ , где  $A$  — ортогональная матрица. Тогда вектор  $Y$  также будет иметь многомерное стандартное нормальное распределение.

*Доказательство.* Ортогональная матрица, по определению, обладает свойством  $A^T = A^{-1}$ . По этой причине  $C(Y) = AC(X)A^T = AA^T = E$  и, следовательно,

$$f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^T t \right\} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t_i) = f_X(t),$$

что и требовалось доказать.

$\vec{X}$  — стандартный нормальный вектор, если каждая его компонента распределена стандартно нормально и компоненты независимы.

$\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$  — нормальный вектор.  $A$  — невырожденная матрица.

$$C(\vec{Y}) = C(A\vec{X} + \vec{b}) = AC(\vec{X})A^T = AA^T.$$

Если  $A$  — ортогональная, то  $Y = AX$  это тоже стандартно нормальный вектор.