

5. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.



Status

Completed

Условной вероятностью события A при условии, что произошло события B , называют число (если вероятность $P(B) \neq 0$)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Пусть имеется событие A и попарно несовместные события положительной вероятности H_1, \dots, H_n такие, что $A \subseteq H_1 \cup \dots \cup H_n$ (и что их объединение покрывает все множество элементарных исходов, хотя это и не обязательно). Тогда вероятность события A можно вычислить по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i).$$

Доказательство. Заметим, что

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i),$$

и события $A \cap H_1, A \cap H_2, \dots$ попарно несовместны. Поэтому

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A | H_i).$$

Последнее равенство из определения условной вероятности.

В условиях прошлой теоремы, если произошло событие A ненулевой вероятности, то условные вероятности гипотез H_i могут быть вычислены

по **формуле Байеса**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|H_j)P(H_j)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

Доказательство. По определению условной вероятности,

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) P(A | H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A | H_i)}. \quad \square$$