

28. Метод моментов, примеры. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.



Status

Completed

Метод моментов

$$\vec{X} \sim F_\theta$$

$$\theta \in R$$

1. Выбираем $g(y)$ - пробную функцию. Вычисляем ее матожидание $m(\theta) = Eg(X_1)$
2. Выражаем θ : $\theta = m^{-1}(Eg(X_1))$
3. Заменяем теоретический момент выборочным: $\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X_1)})$; такое значение θ^* называется оценкой метода моментов

Примеры

$$\vec{X} \sim U_{0,\theta}$$

1. $g(y) = y$; $Eg(X_1) = EX_1 = \theta/2$
2. $\theta = 2EX_1$
3. $\theta^* = 2\overline{X}$

Другие примеры (без вывода):

1. Бернулли $p^* = \overline{X}$
2. Пуассона $\lambda^* = \overline{X}$
3. Геометрическое $\theta^* = \frac{1}{\overline{X}}$
4. Биномиальное $p^* = \frac{\overline{X}}{m}$ при известном m
5. Равномерное $U_{[0,a]}$ $a^* = 2\overline{X}$

6. Показательное $\lambda^* = \frac{1}{\bar{X}}$

7. Нормальное (при неизвестных)

1. $a^* = \bar{X}$

2. $\sigma^{2*} = S^2$

Состоятельность оценок, полученных методом моментов

Пусть $Dg(X_1) < \infty$, $m(t)$ - строго монотонна (обратима) и непрерывна.

Тогда $\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X)})$ состоятельна.

Доказательство

$$\overline{g(X)} \xrightarrow{P} Eg(X_1) \text{ по ЗБЧ}$$

$$\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X)}) \xrightarrow{P} m^{-1}(Eg(X_1)) = \theta$$