20. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

Status	Completed

Теорема 35 (неравенство Маркова[17]). *Если* $\mathsf{E}\,|\xi| < \infty$, *то для любого* $x > 0$

$$\mathsf{P}\big(|\xi| \geqslant x\big) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,|\xi|}{x}\,.$$

Доказательство. Нам потребуется следующее понятие.

Определение 44. Назовём *индикатором* события A случайную величину $I(A)$, равную единице, если событие A произошло, и нулю, если A не произошло.

По определению, величина $I(A)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p = \mathsf{P}(I(A) = 1) = \mathsf{P}(A)$ и её математическое ожидание равно вероятности успеха $p = \mathsf{P}(A)$. Индикаторы прямого и противоположного событий связаны равенством $I(A) + I(\overline{A}) = 1$. Поэтому

$$|\xi| = |\xi| \cdot I(|\xi| < x) + |\xi| \cdot I(|\xi| \geqslant x) \geqslant |\xi| \cdot I(|\xi| \geqslant x) \geqslant x \cdot I(|\xi| \geqslant x).$$

Тогда $\mathsf{E}\,|\xi| \geqslant \mathsf{E}\,\big(x \cdot I(|\xi| \geqslant x)\big) = x \cdot \mathsf{P}\big(|\xi| \geqslant x\big)$. Осталось разделить обе части этого неравенства на положительное число x. □

Следствие 16 (обобщённое неравенство Чебышёва). *Пусть функция* g *не убывает и неотрицательна на* $\mathbb{R}$. *Если* $\mathsf{E}\,g(\xi) < \infty$, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\big(\xi \geqslant x\big) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,g(\xi)}{g(x)}.$$

Доказательство. Заметим, что $\mathsf{P}\big(\xi \geqslant x\big) \leqslant \mathsf{P}\big(g(\xi) \geqslant g(x)\big)$, поскольку функция g не убывает. Оценим последнюю вероятность по неравенству Маркова, которое можно применять в силу неотрицательности g:

$$\mathsf{P}\big(g(\xi) \geqslant g(x)\big) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,g(\xi)}{g(x)}. \qquad \square$$

Следствие 17 (неравенство Чебышёва). *Если* $\mathsf{D}\,\xi$ *существует, то для любого* $x > 0$

$$\mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\,\xi| \geqslant x\big) \leqslant \frac{\mathsf{D}\,\xi}{x^2}.$$

Доказательство. Для $x > 0$ неравенство $|\xi - \mathsf{E}\,\xi| \geqslant x$ равносильно неравенству $(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2 \geqslant x^2$, поэтому

$$\mathsf{P}\big(|\xi - \mathsf{E}\,\xi| \geqslant x\big) = \mathsf{P}\big((\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2 \geqslant x^2\big) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2}{x^2} = \frac{\mathsf{D}\,\xi}{x^2}. \quad \square$$

Теорема 36 (ЗБЧ Чебышёва). *Для любой последовательности* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечным вторым моментом* $\mathsf{E}\,\xi_1^2 < \infty$ *имеет место сходимость*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mathsf{E}\,\xi_1. \tag{22}$$

Доказательство. Обозначим через $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ сумму первых n случайных величин. Из линейности математического ожидания получим

$$\mathsf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathsf{E}\,\xi_1 + \ldots + \mathsf{E}\,\xi_n}{n} = \frac{n\,\mathsf{E}\,\xi_1}{n} = \mathsf{E}\,\xi_1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся неравенством Чебышёва (следствие 17):

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathsf{E}\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{D}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathsf{D}\,S_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathsf{D}\,\xi_1 + \ldots + \mathsf{D}\,\xi_n}{n^2\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{n\,\mathsf{D}\,\xi_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathsf{D}\,\xi_1}{n\varepsilon^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{23}$$

так как $\mathsf{D}\,\xi_1 < \infty$. Дисперсия суммы превратилась в сумму дисперсий в силу попарной независимости слагаемых, из-за которой все ковариации $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$ в свойстве 19 (с. 103) обратились в нуль при $i \neq j$. $\square$

Следствие (теорема Бернулли). *Пусть* S_n *— число успехов в* n *испытаниях схемы Бернулли,* p *— вероятность успеха в одном испытании. Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть X_i — число успехов в i-м испытании. Тогда $X_i \in B_p$ и все эти случайные величины независимы. Здесь $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathbf{E}X_i = p$ и тем самым выполнены все условия теоремы.