

20. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

Status

Completed

Теорема 35 (неравенство Маркова¹⁷). Если $E|\xi| < \infty$, то для любого $x > 0$

$$P(|\xi| \geq x) \leq \frac{E|\xi|}{x}.$$

Доказательство. Нам потребуется следующее понятие.

Определение 44. Назовём *индикатором* события A случайную величину $I(A)$, равную единице, если событие A произошло, и нулю, если A не произошло.

По определению, величина $I(A)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p = P(I(A) = 1) = P(A)$ и её математическое ожидание равно вероятности успеха $p = P(A)$. Индикаторы прямого и противоположного событий связаны равенством $I(A) + I(\bar{A}) = 1$. Поэтому

$$|\xi| = |\xi| \cdot I(|\xi| < x) + |\xi| \cdot I(|\xi| \geq x) \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq x) \geq x \cdot I(|\xi| \geq x).$$

Тогда $E|\xi| \geq E(x \cdot I(|\xi| \geq x)) = x \cdot P(|\xi| \geq x)$. Осталось разделить обе части этого неравенства на положительное число x . \square

Следствие 16 (обобщённое неравенство Чебышёва). Пусть функция g не убывает и неотрицательна на \mathbb{R} . Если $Eg(\xi) < \infty$, то для любого $x \in \mathbb{R}$

$$P(\xi \geq x) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}.$$

Доказательство. Заметим, что $P(\xi \geq x) \leq P(g(\xi) \geq g(x))$, поскольку функция g не убывает. Оценим последнюю вероятность по неравенству Маркова, которое можно применять в силу неотрицательности g :

$$P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}. \quad \square$$

Следствие 17 (неравенство Чебышёва). Если $D\xi$ существует, то для любого $x > 0$

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \frac{D\xi}{x^2}.$$

Доказательство. Для $x > 0$ неравенство $|\xi - E\xi| \geq x$ равносильно неравенству $(\xi - E\xi)^2 \geq x^2$, поэтому

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) = P((\xi - E\xi)^2 \geq x^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \frac{D\xi}{x^2}. \quad \square$$

Теорема 36 (ЗБЧ Чебышёва). Для любой последовательности ξ_1, ξ_2, \dots попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечным вторым моментом $E\xi_1^2 < \infty$ имеет место сходимость

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1. \quad (22)$$

Доказательство. Обозначим через $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ сумму первых n случайных величин. Из линейности математического ожидания получим

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \dots + E\xi_n}{n} = \frac{nE\xi_1}{n} = E\xi_1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся неравенством Чебышёва (следствие 17):

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1 + \dots + D\xi_n}{n^2\varepsilon^2} = \\ &= \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

так как $D\xi_1 < \infty$. Дисперсия суммы превратилась в сумму дисперсий в силу попарной независимости слагаемых, из-за которой все ковариации $\text{cov}(\xi_i, \xi_j)$ в свойстве 19 (с. 103) обратились в нуль при $i \neq j$. \square

Следствие (теорема Бернулли). Пусть S_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли, p — вероятность успеха в одном испытании. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть X_i — число успехов в i -м испытании. Тогда $X_i \in B_p$ и все эти случайные величины независимы. Здесь $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $EX_i = p$ и тем самым выполнены все условия теоремы.

