

29. Метод максимального правдоподобия, примеры.



Status

Completed

Функцией правдоподобия для выборки \vec{X} называется функция

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta),$$

где $f(X_i, \theta) = \begin{cases} f_{X_i}(t), & \text{при непрерывном распределении} \\ P(X_i = t), & \text{при дискретном распределении} \end{cases}$.

Оценкой максимального правдоподобия называется такое значение параметра $\theta = \hat{\theta}(\vec{X})$, при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение, то есть

$$\Pi(\vec{X}, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \Pi(\vec{X}, \theta).$$

Для упрощения поиска максимума часто используется логарифмическая функция правдоподобия: $L(\vec{X}, \theta) = \ln \Pi(\vec{X}, \theta)$.

Примеры

Пример 7. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка объема n из распределения Пуассона Π_λ , где $\lambda > 0$. Найдем ОМП $\hat{\lambda}$ неизвестного параметра λ .

$$P_\lambda(X_1 = y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(\mathbf{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum X_i}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda} = \frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda}.$$

Поскольку эта функция при всех $\lambda > 0$ непрерывно дифференцируема по λ , можно искать точки экстремума, приравняв к нулю частную производную по λ . Но удобнее это делать для логарифмической функции правдоподобия:

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = \ln f(\mathbf{X}, \lambda) = \ln \left(\frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda} \right) = n\bar{X} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n X_i! - n\lambda.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{X}, \lambda) = \frac{n\bar{X}}{\lambda} - n,$$

и точка экстремума $\hat{\lambda}$ — решение уравнения: $\frac{n\bar{X}}{\lambda} - n = 0$, то есть $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

Другие примеры (без вывода):

1. Бернулли $\hat{p} = \bar{X}$
2. Пуассона $\hat{\lambda} = \bar{X}$
3. Геометрическое $\theta^* = \frac{1}{\bar{X}}$ (вроде также)
4. Биномиальное $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$ при известном m
5. Равномерное $U_{[0,a]}$ $\hat{a} = \max X_1, \dots, X_n$
6. Показательное $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
7. Нормальное (при неизвестных)
 1. $\hat{a} = \bar{X}$
 2. $\hat{\sigma}^2 = S^2$