

33. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.



Status

Completed

Свойства нормальных выборок (из лекций)

Пусть $\vec{X} \sim N_{a, \sigma^2}$, тогда:

1. $\sqrt{n}(\frac{\bar{X}-a}{\sigma}) \sim N_{0,1}$

1. **Доказательство:** применяем операцию стандартизации к \bar{X} :
 $E\bar{X} = a; D\bar{X} = \sigma^2/n$.

2. $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

Доказательство. 1. Ранее установлено, что $\bar{X} \in \Phi_{\alpha, \sigma^2/n}$. Применяем операцию стандартизации:

$$\frac{\bar{X} - \mathbf{E}\bar{X}}{\sqrt{\mathbf{D}\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \sqrt{n} \in \Phi_{0,1}.$$

2. Обозначим $Z_i = \frac{X_i - \alpha}{\sigma}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $Z_i \in \Phi_{0,1}$, $\frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} = \bar{Z}$ и

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \alpha}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\bar{Z})^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\sqrt{n} \bar{Z})^2.$$

В свою очередь,

$$\sqrt{n} \bar{Z} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ имеет единичную длину. Его всегда можно достроить до ортогональной матрицы A , в которой он будет являться первой строкой. Тогда $\sqrt{n} \bar{Z}$ будет совпадать с первой компонентой вектора $A(Z_1, \dots, Z_n)^T$ и по лемме Фишера

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\sqrt{n} \bar{Z})^2 \in \chi_{n-1}^2.$$

3. \bar{X} и S^2 — независимы

Из леммы Фишера следует также, что $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ и $\sqrt{n} \bar{Z} = \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \sqrt{n}$ независимы. Следовательно, независимы S^2 и \bar{X} как функции этих величин.

4. $\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X} - \alpha}{S_0} \right) \sim T_{n-1}$

Доказательство. Согласно определению, T_{n-1} — это распределение дроби $Y/\sqrt{Z/(n-1)}$, где Y и Z независимы, $Y \in \Phi_{0,1}$ и $Z \in \chi_{n-1}^2$. В силу теоремы мы можем взять

$$Y = \frac{\bar{X} - \alpha}{\sigma} \sqrt{n}, \quad Z = \frac{nS^2}{\sigma^2}.$$

Следствие доказано.

5. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ (на лекции не дано явно, но нужно для построения доверительных интервалов.

1. **Доказательство:** сумма квадратов независимых стандартно (т.к. стандартизировали) нормально распределенных случайных величин по определению принадлежит распределению χ^2 .