29. Метод максимального правдоподобия, примеры.

Status	Completed

Функцией правдоподобия для выборки $\vec{X}$ называется функция

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta),$$

где $f(X_i, \theta) = \begin{cases} f_{X_i}(t), \text{ при непрерывном распределении} \\ P(X_i = t), \text{ при дискретном распределении} \end{cases}.$

Оценкой максимального правдоподобия называется такое значение параметра $\theta = \hat{\theta}(\vec{X})$, при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение, то есть

$$\Pi(\vec{X}, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \Pi(\vec{X}, \theta).$$

Для упрощения поиска максимума часто используется логарифмическая функция правдоподобия: $L(\vec{X}, \theta) = \ln \Pi(\vec{X}, \theta)$.

Примеры

Пример 7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из распределения Пуассона Π_λ, где $\lambda > 0$. Найдем ОМП $\widehat{\lambda}$ неизвестного параметра λ.

$$\mathsf{P}_\lambda(X_1 = y) = \frac{\lambda^y}{y!}\, e^{-\lambda}, \qquad y = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f(\mathbf{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\, e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\Sigma X_i}}{\prod X_i!}\, e^{-n\lambda} = \frac{\lambda^{n\overline{X}}}{\prod X_i!}\, e^{-n\lambda}.$$

Поскольку эта функция при всех $\lambda > 0$ непрерывно дифференцируема по λ, можно искать точки экстремума, приравняв к нулю частную производную по λ. Но удобнее это делать для логарифмической функции правдоподобия:

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = \ln f(\mathbf{X}, \lambda) = \ln \left(\frac{\lambda^{n\overline{X}}}{\prod X_i!}\, e^{-n\lambda} \right) = n\overline{X} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^{n} X_i! - n\lambda.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{X}, \lambda) = \frac{n\overline{X}}{\lambda} - n,$$

и точка экстремума $\widehat{\lambda}$ — решение уравнения: $\dfrac{n\overline{X}}{\lambda} - n = 0$, то есть $\widehat{\lambda} = \overline{X}$.

Другие примеры (без вывода):

1. Бернулли $\hat{p} = \overline{X}$
2. Пуассона $\hat{\lambda} = \overline{X}$
3. Геометрическое $\theta^* = \frac{1}{\overline{X}}$(вроде также)
4. Биномиальное $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$ при известном m
5. Равномерное $U_{[0,a]}$ $\hat{a} = \max X_1, ..., X_n$
6. Показательное $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$
7. Нормальное (при неизвестных)
    1. $\hat{a} = \overline{X}$
    2. $\hat{\sigma}^2 = S^2$