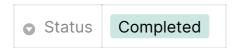
## 13. Распределение суммы случайных величин, имеющих гамма распределение.



Используем формулу свертки из прошлого билета

**Теорема 6**. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  независимы,  $X_1 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$ ,  $X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$ . Тогда  $X_1 + X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$ . Доказательство.

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \, \gamma_{lpha,\lambda_1}(u) \, \gamma_{lpha,\lambda_2}(t-u) \, du.$$

Поскольку  $\gamma_{\alpha,\lambda}(u)=0$  при  $u\leq 0$ , то стоящие под интегралом функции обе отличны от нуля только если одновременно u>0 и t-u>0. При  $t\leq 0$  эти неравенства несовместны, т. е.  $f_{X_1+X_2}(t)=0$ . Если t>0, то подынтегральные функции отличны от нуля при 0< u< t, поэтому

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_0^t \frac{\alpha^{\lambda_1}}{\Gamma(\lambda_1)} u^{\lambda_1-1} e^{-\alpha u} \frac{\alpha^{\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_2)} (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha(t-u)} du$$
$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \int_0^t u^{\lambda_1-1} (t-u)^{\lambda_2-1} du.$$

Сделаем замену u = vt. Тогда

$$f_{X_1+X_2}(t) = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} t^{\lambda_1+\lambda_2-1} e^{-\alpha t} \int_0^1 v^{\lambda_1-1} (1-v)^{\lambda_2-1} dv.$$

Последний интеграл от t уже не зависит. Это константа, которую можно объединить с константами, стоящими в начале формулы. На этом доказательство можно завершить, потому что мы получили выражение вида  $C\,t^{\lambda_1+\lambda_2-1}e^{-\alpha t}$ , т.е. плотность гамма-распределения с параметрами  $(\alpha,\lambda_1+\lambda_2)$ . Можно, впрочем, и уточнить значение константы. Указанный интеграл известен в теории как бета-функция

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 v^{\lambda_1 - 1} (1 - v)^{\lambda_2 - 1} dv = \frac{\Gamma(\lambda_1) \Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Последнее можно найти в таблицах интегралов. Теорема доказана.