



## 16. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины, ее свойства, примеры.

Status

Completed

**Моментом  $m$ -ого порядка** случайной величин  $X$  называется  $EX^m$ .

### Теорема о существовании моментов

Пусть  $E|X|^m < \infty$  ( $m > 0$ ), тогда  $\forall r \in (0, m) : E|X|^r < \infty$ .

**Доказательство:**

$$|x|^r \leq |x|^m + 1 \Rightarrow E|x|^r \leq E|x|^m + 1 \Rightarrow \text{существует.}$$

### Дисперсия

**Дисперсией** случайной величины  $X$  называется  $DX = E(X - EX)^2$ .

$\sqrt{DX}$  - **среднеквадратичное отклонение**.

**Свойства:**

1.  $DX = EX^2 - (EX)^2$

1.  $DX = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

2.  $DX \geq 0$

3.  $DC = 0$

4. Если  $DX = 0$ , то  $P(X = C) = 1$  для некоторой постоянной  $C$ .

5.  $D(CX) = C^2 DX$

6.  $D(X + C) = DX$

7. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $D(X \pm Y) = DX + DY$

$$1. D(X \pm Y) = E(X \pm Y)^2 - (E(X \pm Y))^2 = EX^2 + EY^2 \pm 2EXY - (EX)^2 - (EY)^2 \mp 2EXEY = DX + DY$$

1.  $2EXEY$  сокращаются с  $2EXY$  по свойству математического ожидания произведения независимых с. в.

Большинство свойств доказывается с использованием определения дисперсии и свойств математического ожидания.

## Примеры

### Дискретные:

1. **Бернулли**  $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$

$$1. DX = p(1 - p)$$

2. **Биномиальное**  $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n, n \geq 1, 0 < p < 1$

$$1. DX = np(1 - p)$$

3. **Пуассона**  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots; \lambda > 0$

$$1. DX = \lambda$$

4. **Геометрическое**  $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1$

$$1. DX = \frac{1-p}{p^2}$$

### Абсолютно непрерывные:

1. **Равномерное** на  $[a, b]$

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \sigma^2 > 0$$

$$DX = \sigma^2$$

### 3. Показательное

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

### 4. Гамма

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$DX = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

### 5. Стандартное Коши

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

$EX, DX$  — не существуют