Математический анализ Определения

Интегралы

Определение: Функция F называется **первообразной** для функции f или **интегралом** от выражения $f(x)dx$ на каком-либо промежутке, если $F' = f$ на этом промежутке или $dF = fdx$

Определение: **Интегрированием** функции $f(x)$ называется процесс нахождения всех первообразных функции $f(x)$
Обозначение: $F = \int f(x)d(x)$

Определение: Совокупность всех первообразных называется **неопределенным интегралом**

Теорема: Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$. Тогда $F(x) + C$ также является первообразной для $f(x)$. Любая первообразная $\varphi(x) = F(x) + C$

Основные понятия

> Определенный интеграл Римана

Определение: Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; A]$, $\forall A > a$, то есть $\exists \int\limits_a^A f(x)dx$ $\forall A > a$. Тогда **несобственный интеграл** $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_a^A f(x)dx$

Если предел существует, и он конечен, то $\int\limits_a^\infty$ называется **сходящимся**. В противном случае говорим, что он **расходится**.

Несобственные интегралы

Теорема сравнения: Рассмотрим интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx,\ f \geq 0,\ g \geq 0$ Если при некотором A, $\forall x \geq A \geq a$ выполнено $f(x) \leq g(x)$:

Если $\int g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \int f(x)dx$ сходится;

Если $\int f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int g(x)dx$ расходится.

Теорема сравнения

Предельная теорема сравнения: Рассмотрим $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx, f \geq 0,\ g \geq 0.$

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} = k$:

Из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ при $k < \infty\ \Rightarrow$ сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)dx$;

Из расходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ при $k > 0\ \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится.

Предельная теорема сравнения

Критерий Коши: для того, чтобы интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A : \left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon\ ,\ \ \forall A'' \geq A' \geq A$$

Критерий Коши

Вторая теорема о среднем для собственного интеграла. Если в промежутке $[a, b]$ $(a < b)$ функция $f(x)$ монотонна, а $g(x)$ интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\eta g(x)dx + f(b)\int_\eta^b g(x)dx,$$

где $\eta \in [a, b]$.

Вторая теорема о среднем для собственного интеграла

Признак Абеля. Пусть f и g определены в промежутке $[a, +\infty)$, причем
1) f интегрируема в этом промежутке, так что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (хотя бы и не абсолютно),
2) g монотонна и ограничена:

$$|g(x)| \leq L, \quad L = const, \quad a \leq x < \infty.$$

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \tag{30.2}$$

сходится.

Признак сходимости несобственного интеграла Абеля

Признак Дирихле. Пусть f и g определены в промежутке $[a, +\infty)$, причем
1) f интегрируема в любом конечном промежутке $[a, A]$, так что интеграл

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| \leq K, \quad K = const,$$

оказывается ограниченным для любого $a \leq A < \infty$,
2) g монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Тогда интеграл (30.2) сходится.

Признак сходимости несобственного интеграла Дирихле

Определение: Пусть задана функция $f(x)$, ограниченная на $[a; b-\varepsilon] \forall\varepsilon > 0$, которая неограничена на $(b-\varepsilon; b)$. Пусть f интегрируема на $[a; b-\varepsilon]$ $\forall\varepsilon > 0$, то есть $\exists \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, тогда говорим, что существует **несобственный интеграл** на промежутке $[a; b]$, который мы обозначаем через $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Несобственные интегралы от неограниченных функций на конечном промежутке

Функциональные ряды

Функциональные последовательности и ряды. Предположим, что дана последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \tag{31.1}$$

определенных на одном и том же промежутке X. Пусть для каждого $x \in X$ эта, уже числовая последовательность, имеет предел; получив такие пределы для всех $x \in X$, мы определим функцию от x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

которую мы будем называть предельной функцией для последовательности (31.1).

Функциональный ряд

Равномерная сходимость

Определение. 1) Если последовательность (31.1) имеет в X предельную функцию $f(x)$ и 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполняется сразу для всех $x \in X$, то говорят, что (31.1) сходится к предельной функции равномерно относительно x на промежутке X.

Равномерная сходимость функционального ряда

Критерий Коши. Для того, чтобы (31.1) 1) имела предельную функцию в X; 2) сходилась к этой функции равномерно относительно x в X, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовал $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ и любом $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

3

имело место для всех $x \in X$ одновременно.

Для рядов это выглядит следующим образом:
Для того, чтобы (31.2) сходился равномерно на промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовал $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ и любом $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{31.3}$$

имело место для всех $x \in X$ одновременно.

Критерий Коши для рядов

Признак Вейерштрасса. Если все члены функционального ряда (31.2) удовлетворяют на X неравенствам

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{31.4}$$

где c_n суть члены некоторого сходящегося числового ряда, то ряд (31.2) сходится на X равномерно. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ мажорирует ряд (31.2).

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

Признак Абеля. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

сходится равномерно на X, а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность и в совокупности – при любых n и x – ограничены $|a_n(x)| \leq M$, тогда ряд (31.6) сходится.

Признак равномерной сходимости Абеля

Признак Дирихле. Пусть частичные суммы B_n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

в совокупности – при любых n и x – ограничены $|B_n(x)| \leq M$, а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю равномерно на X, тогда ряд (31.6) сходится.

Признак равномерной сходимости Дирихле

Теорема о непрерывности суммы ряда. Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, определены в промежутке $[a, b]$ и все непрерывны в точке x_0 этого промежутка. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.1}$$

в промежутке $[a, b]$ сходится равномерно, то сумма ряда $f(x)$ будет также непрерывна в этой точке.

Теорема о непрерывности суммы ряда

Теорема Дини. Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, непрерывны и положительны в промежутке $[a, b]$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.2}$$

имеет сумму $f(x)$, также непрерывную во всем промежутке, то он сходится равномерно.

Теорема Дини

Степенные ряды

Степенной ряд и его область сходимости. Рассмотрим специальный вид функциональных рядов, который называется степенным

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \qquad (32.4)$$

Степенной ряд

Формула Коши-Адамара.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Формула Даламбера.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

Формулы Коши-Адамара и Даламбера радиуса сходимости степенного ряда

6. **Теорема Абеля.** Если степенной ряд (32.4) сходится при $x = R$, то его сумма $f(x)$ сохраняет непрерывность слева и при этом значении аргумента, т.е.

$$\lim_{x\to R-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n.$$

Теорема Абеля для степенных рядов

Метрические пространства и функции нескольких переменных

Неравенство Коши-Буняковского: Для любого набора чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ верно неравенство: $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

Неравенство Коши-Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(x))^2dx}\cdot\sqrt{\int_a^b (g(x))^2dx} \iff$$

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(x))^2dx\cdot\int_a^b (g(x))^2dx$$

Интегральное неравенство Коши-Буняковского

Неравенство Минковского: Для любого набора чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ верно неравенство: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

Неравенство Минковского

Определение: Пусть задано некоторое множество X. Говорим, что множество X является **метрическим пространством**, если $\forall x, y \in X$ определена функция $\rho(x,y)$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:
1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества)
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксиома симметрии)
3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$, $\forall x, y, x \in X$ (неравенство треугольника)

Метрическое пространство

Определение: Пусть f(x) определена на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ точка сгущения множества M.

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции f** при $x \to a$, если
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a)$ такое, что $0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$,
$\rho(x,a) = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} < \delta$

Предел функции нескольких переменных 1

Определение: Из того, что $x \to a$, т.е. $\rho(x,a) \to 0 \Rightarrow x_i \to a_i \forall i$ можно говорить, что A является **пределом** f при $x_i \to a_i \forall i = 1, \ldots, n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a)$ такое, что $|x_i - a_i| < \delta\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n) = A$ - n-кратный предел

Предел функции нескольких переменных 2

Определение: Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a**, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a)$ такое, что $\rho_1(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$, где $\rho_1(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $\rho_2(f(x), f(a)) = |f(x) - f(a)|$.

Непрерывность функции в точке

Теоремы Больцано-Коши. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой связной области D. Если в двух точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ функция принимает значения разных знаков

$$f(M_0) < 0, \quad f(M_1) > 0,$$

то в этой области найдется и точка $M_2(x_2, y_2)$, в которой $f(M_2) = 0$.

Если теперь $f(M_0) = A$, а $f(M_1) = B$, то для любой $A < C < B$ существует M_2 такая, что $f(M_2) = C$.

Теоремы Больцано-Коши

Теоремы Больцано-Вейерштрасса (двухмерный случай). Из любой ограниченной последовательности точек

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n), \ldots$$

всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \ldots, M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots.$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса: Пусть $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Ω. Тогда $f(x, y)$ ограничена Ω, т.е. $\exists M$ $|f(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y) \in \Omega$

Первая теорема Вейерштрасса

Вторая теорема Вейерштрасса: Пусть $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Ω. Тогда $\exists (x_0, y_0) \in \Omega$ и $(x_1, y_1) \in \Omega$ такие, что $f(x_0, y_0) = min_\Omega f$, $f(x_1, y_1) = max_\Omega f$

Вторая теорема Вейерштрасса

Напомним определение равномерной непрерывности функции. Пусть $f(x, y)$ непрерывна на множестве Ω. Тогда говорим, что $f(x, y)$ равномерно непрерывна на множестве Ω, если по заданному $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только $\rho(M', M'') < \delta$ для любых точек $M', M'' \in \Omega$, следует, что

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon.$$

Теорема Кантора. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области Ω, то она равномерно непрерывна.

Теорема Кантора

Определение: Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и в самой этой точке. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$, то говорим, что существует **частная производная** функции f по x в точке (x_0, y_0, z_0) и обозначаем её $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ и иногда $\dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$

Частная производная

Определение: Пусть функция $f(x, y, z)$ задана в некоторой области Ω и $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Если Δf может быть записана в виде:
(3) $\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \varepsilon \cdot \rho$, где A, B, C - конечные, $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$,

то f называется **дифференцируемой** в точке (x_0, y_0, z_0).
Если (3) имеет место, тогда, положив $\Delta y = \Delta z = 0$, будем иметь:
$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + \varepsilon \cdot \rho,\ \varepsilon\rho \equiv (\varepsilon|\Delta x|)$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + \frac{\varepsilon\rho}{|\Delta x|} \xrightarrow{\Delta x \to 0} A$$
Если f дифференцируема, то (3) реализуется только в виде:
$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon\rho, \quad \Delta f - df = \varepsilon\rho$

Функция дифференцируемая в точке

Пусть задана функция $f(x, y, z)$ в некоторой области Ω. Пусть f - непрерывная и $\exists$частные производные $f_x, f_y, f_z \in \Omega$. Пусть заданы 2 точки: $M_0(x_0, y_0, z_0),\ \ M(x, y, z)$. Выбираем на прямой l, соединяющей $M_0,\ \ M$, некоторое направление. M_0M - длина отрезка, соединяющего точки $M_0,\ \ M$. Будем брать эту длину с положительным знаком, если $\overline{M_0M}$ совпадает с направлением l, и с отрицательным в противоположном случае. Тогда **производной от f по направлению** l в точке (x_0, y_0, z_0) называется $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M}$, где $M \to M_0$ вдоль l (1).

$l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Производная по направлению

Вектор $(f_x, f_y, f_z) = \nabla f$ называется **градиентом** функции f

Из (2): $\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \bar{l}$, $\bar{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Градиент

Теорема о смешанных производных: Пусть в области Ω задана $f(x, y)$. Пусть $\exists f_x,\ f_y$ и пусть $\exists f_{xy}(x, y),\ \ f_{y_x}(x, y) \in \Omega$, и они являются непрерывными функциями в точке (x_0, y_0). Тогда $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Теорема о смешанных производных

Формула Тейлора. Рассмотрим функцию $F(t)$ одной переменной. Мы знаем, что при существовании $n+1$ производной ее можно разложить по формуле Тейлора следующим образом

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n +$$
$$\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1}. \tag{39.1}$$

Положив

$$t - t_0 = \Delta t = dt, \quad F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0),$$

можно переписать в виде

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0 + \theta\Delta t). \tag{39.2}$$

Формула Тейлора

Критерий Сильвестра:

1) Если квадратичная форма положительно определена ($\delta_k > 0$), то x^0 - точка минимума;

2) Если квадратичная форма отрицательно определена ($\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \dots$), то x^0 - точка максимума;

3) Если квадратичная форма не определена, то x^0 - не экстремум;

4) Если квадратичная форма полуопределена, то необходимы дополнительные исследования. Для полуопределённости необходимо, чтобы угловые и главные миноры были больше или равны 0.

Критерий Сильвестра