



# ТВ и МС | Список по МС

## Сходимость случайных величин

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  сходится к  $X$  по вероятности,  $X_n \xrightarrow{P} X$ , если  $\forall \epsilon > 0 : P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  сходится слабо к случайной величине  $X$ ,  $X_n \Rightarrow X$ , если для каждой точки непрерывности функции распределения  $F_X(t)$  имеет место сходимость  $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## Закон больших чисел

Для любой последовательности  $X_1, X_2, \dots$  независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом (или конечной дисперсией)  $EX_1^2 < \infty$  имеет место сходимость:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

## Центральная предельная теорема

Для любой последовательности  $X_1, X_2, \dots$  независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечной и ненулевой дисперсией  $0 < DX_1 < \infty$  имеет место сходимость:

$$\frac{S_n - nEX_1}{\sqrt{nDX_1}} \Rightarrow N_{0,1},$$

$S_n$  - сумма  $X_1 + \dots + X_n$ .

### 1. Определение выборки.

**Выборка** ( $X_1, \dots, X_n$ ) это набор значений случайной величины  $X$ , полученный в результате  $n$  независимых воспроизведений эксперимента.

### 2. Определение вариационного ряда, $k$ -ой порядковой статистики.

Если упорядочить элементы выборки по возрастанию, то полученный набор случайных величин называется **вариационным рядом**

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

Случайная величина  $X_{(k)}$  называется **к-ой порядковой статистикой**.

### 3. Определение статистики (оценки).

**Статистика** - любая функция от выборки.

**Оценкой** неизвестного параметра  $\theta$  называется любая функция от выборки  $\theta^* = g(X_1, \dots, X_n)$  в том или ином смысле приближающая  $\theta$ .

### 4. Определение несмещенной оценки.

Оценка  $\theta^*$  называется **несмещенной**, если  $E\theta^* = \theta$ .

### 5. Определение состоятельной оценки.

Оценка  $\theta^*$  называется **состоятельной**, если  $\theta^* \xrightarrow{P} \theta$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### 6. Определение эмпирической функции распределения.

**Эмпирической функцией распределения** называется

$$F_n^*(y) = \frac{\nu(y)}{n},$$

где  $\nu(y)$  - число наблюдений  $X_i$  таких, что  $X_i < y$ .

### 7. Свойства эмпирической функции распределения.

1. Является случайной величиной.
2. Для любого  $y$ :  $F_n^*(y) \rightarrow F(y)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### 8. Как определяется выборочный первый момент (второй, третий и т.д.)?

**Выборочный момент порядка k** определяется формулой:

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

## 9. Как определяется выборочная дисперсия (смещенная и несмещенная)?

**Смещенной выборочной дисперсией** называется величина:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

**Несмещенной выборочной дисперсией** называется величина:

$$S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2.$$

## 10. К чему (и как) сходится выборочный первый момент, выборочный второй момент, выборочная дисперсия (смещенная и несмещенная), эмпирическая функция распределения при росте объема выборки?

Первый, второй выборочные моменты сходятся по вероятности к первым и вторым моментам  $X$  соответственно.

Выборочная дисперсия (смещенная и несмещенная) также сходится по вероятности к дисперсии  $X$ .

Эмпирическая функция распределения также сходится по вероятности к  $F(y)$ .

## 11. Чему равно математическое ожидание выборочного первого момента, второго момента, выборочной дисперсии (смещенной и несмещенной), эмпирической функции распределения?

$E\bar{X}^k = \alpha_k$  (выборочные моменты - несмещенные оценки теоретических)

$$ES^2 = \frac{n-1}{n} DX_1$$

$$ES_0^2 = DX_1$$

$$E(F_n^*(t)) = F(t)$$

## 12. Сформулировать теорему Гливенко-Кантелли.

Пусть  $X \sim F$ , тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_y |F_n^*(y) - F(y)| \xrightarrow{P} 0.$$

### 13. Определение ОММ.

Пусть  $g(X_i)$  есть некоторая числовая функция  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть  $m_g(\theta_g^*) = Eg(X_i)$ .

**Оценкой метода моментов** называется такое значение  $\theta_g^* = \theta_g^*(\vec{X})$ , при котором теоретическое среднее выборки  $\vec{g}(X)$  совпадает с выборочным средним:

$$m_g(\theta_g^*) = \overline{g(X)},$$

то есть ОММ является решением уравнения относительно неизвестного  $\theta_g^*$ .

### 14. Сформулировать теорему о состоятельности ОММ.

Если  $m_g(\theta) = Eg(X_i)$  непрерывна и строго монотонна, то оценка по методу моментов состоятельна.

### 15. Определение ОМП.

**Функцией правдоподобия** для выборки  $\vec{X}$  называется функция

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta),$$

где  $f(X_i, \theta) = \begin{cases} f_{X_i}(t), & \text{при непрерывном распределении} \\ P(X_i = t), & \text{при дискретном распределении} \end{cases}$ .

**Оценкой максимального правдоподобия** называется такое значение параметра  $\theta = \hat{\theta}(\vec{X})$ , при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение, то есть

$$\Pi(\vec{X}, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \Pi(\vec{X}, \theta).$$

**16. Найти ОММ для параметров основных распределений (для распределения Бернулли, Пуассона, геометрического, биномиального при известном числе испытаний, равномерного, показательного, нормального распределение при известных и неизвестных параметрах).**

1. Бернулли  $p^* = \overline{X}$

2. Пуассона  $\lambda^* = \overline{X}$
3. Геометрическое  $\theta^* = \frac{1}{\overline{X}}$
4. Биномиальное  $p^* = \frac{\overline{X}}{m}$  при известном  $m$
5. Равномерное  $U_{[0,a]}$   $a^* = 2\overline{X}$
6. Показательное  $\lambda^* = \frac{1}{\overline{X}}$
7. Нормальное (при неизвестных)
  1.  $a^* = \overline{X}$
  2.  $\sigma^{2*} = S^2$

**17. Найти ОМП для параметров основных распределений (для распределения Бернулли, Пуассона, геометрического, биномиального при известном числе испытаний, равномерного, показательного, нормального распределение при известных и неизвестных параметрах).**

1. Бернулли  $\hat{p} = \overline{X}$
2. Пуассона  $\hat{\lambda} = \overline{X}$
3. Геометрическое  $\theta^* = \frac{1}{\overline{X}}$  (вроде также)
4. Биномиальное  $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$  при известном  $m$
5. Равномерное  $U_{[0,a]}$   $\hat{a} = \max X_1, \dots, X_n$
6. Показательное  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$
7. Нормальное (при неизвестных)
  1.  $\hat{a} = \overline{X}$
  2.  $\hat{\sigma}^2 = S^2$

**18. Когда одна из оценок не хуже (лучше) в среднеквадратическом смысле другой оценки.**

Оценка  $\theta_1^*$  **лучше**, чем  $\theta_2^*$ , если при всех значениях  $\theta$

$$E(\theta_1^* - \theta)^2 \leq E(\theta_2^* - \theta)^2$$

и хотя бы при одном значении  $\theta$  неравенство является строгим (иначе **не хуже**).

## 19. Как сравнить две несмещенные оценки в среднеквадратическом смысле?

Найти их дисперсии и сравнить.

Или найти их вторые моменты и сравнить.

## 20. Определение эффективной оценки в классе всех несмещенных оценок.

Оценка с минимальной дисперсией среди всех несмещенных называется **эффективной**.

## 21. Определение доверительного интервала (точного, асимптотического).

**Доверительным интервалом** уровня  $1 - \epsilon$  для неизвестного параметра  $\theta$  называется интервал  $(A(\vec{X}), B(\vec{X}))$ , такой, что

$$P(A < \theta < B) \geq 1 - \epsilon$$

Доверительный интервал называют **асимптотическим**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A < \theta < B) \geq 1 - \epsilon$$

Доверительный интервал называют **точным**, если знак неравенства можно заменить на знак равенства (в обоих случаях).

## 22. Схема построения ДИ (точного, асимптотического).

1. Строим некую функцию  $G(\vec{X}, \theta) \sim H_n$ , где  $H_n$  известно.
2.  $P(t_1 < G < t_2) = 1 - \epsilon$ ,  $t_1, t_2$  - квантили.
3. Решаем двойное неравенство в вероятности для  $\theta$ .

Для асимптотического -  $G$  должна стремиться к  $\eta \sim H_n$ .

## 23. Определение распределения Хи-квадрат, Стьюдента, Фишера.

Говорят, что с. в.  $Z$  имеет **распределение  $\chi^2$  с  $t$  степенями свободы**, если

$Z = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2$ , где  $\xi_i \sim N_{0,1}$ , независимы,  $i = 1, \dots, m$ .

Говорят, что с. в.  $Y$  имеет **распределение Стюдента с  $m$  степенями свободы**, если

$$Y = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}{m}}}, \text{ где } \xi_i \sim N_{0,1}, \text{ независимы, } i = 0, \dots, m. (T_m)$$

Говорят, что с. в.  $Y$  имеет **распределение Фишера с  $m$  и  $k$  степенями свободы**, если

$$Y = \frac{Z_1/m}{Z_2/k}, \text{ где } Z_1 \sim \chi_m^2 \text{ и } Z_2 \sim \chi_k^2, \text{ независимы. } (F_{m,k})$$

## 24. Сформулировать лемму Фишера, следствия из леммы Фишера.

**Лемма Фишера.** Пусть случайные величины  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  независимы,  $X_i \sim N_{0,1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и  $\vec{Y} = A\vec{X}$ ,  $A$  - ортогональная матрица. Тогда для любого  $r = 1, \dots, n-1$

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 \sim \chi_{n-r}^2$$

и эта случайная величина не зависит от  $Y_1, \dots, Y_r$ .

**Следствия.**  $\vec{X} \sim N_{a, \sigma^2}$ , тогда:

1.  $\frac{\bar{X}-a}{\sigma} \sqrt{n} \sim N_{0,1}$
2.  $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$
3.  $\bar{X}$  и  $S^2$  независимы.

## 25. Сформулировать теорему Фишера (4 утверждения).

**Следствие основного следствия леммы Фишера.**

- 1)  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma}$  имеет стандартное нормальное распределение (для  $a$  при  $\sigma$  известном);
- 2)  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2$  имеет распределение  $H_n$  (для  $\sigma^2$  при  $a$  известном);
- 3)  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma^2}$  имеет распределение  $H_{n-1}$  (для  $\sigma^2$  при  $a$  неизвестном);
- 4)  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sqrt{S_0^2}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S_0}$  имеет распределение  $T_{n-1}$  (для  $a$  при  $\sigma$  неизвестном).

$$1. \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

$$2. \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$3. \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \right) \sim N_{0,1}$$

$$4. \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X} - a}{S_0} \right) \sim T_{n-1}$$

**26. Выписать доверительные интервалы для параметров нормального распределения при известных и неизвестных параметрах математического ожидания и дисперсии (таких ДИ четыре штуки).**

Для  $a, \sigma^2$  известно:

$$P(\bar{X} - \tau_{1-\epsilon/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \tau_{1-\epsilon/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \epsilon, \text{ квантиль } N_{0,1}$$

Для  $a, \sigma^2$  неизвестно:

$$P(\bar{X} - t \frac{S_0}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \frac{S_0}{\sqrt{n}}) = 1 - \epsilon, t = -\tau_{\epsilon/2}, \text{ квантиль } T_{n-1}$$

Для  $\sigma^2, a$  известно

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{q_1}\right) = 1 - \epsilon, \chi_n^2(q_1) = \epsilon/2, \chi_n^2(q_2) = 1 - \epsilon/2$$

Для  $\sigma^2, a$  неизвестно

$$P\left(\frac{nS^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{q_1}\right) = 1 - \epsilon, \chi_{n-1}^2(q_1) = \epsilon/2, \chi_{n-1}^2(q_2) = 1 - \epsilon/2$$



## 27. Определение гипотезы (простой гипотезы, сложной гипотезы).

**Гипотеза** - любое суждение о неизвестном распределении.

Гипотеза называется **простой**, если она однозначно определяет распределение выборки. Иначе - **сложной**.

## 28. Определение критерия.

$H_1, \dots, H_m$  - гипотезы.

Критерием называется отображение  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow 1, \dots, m$ . Это правило, по которому выбирается одна из гипотез.

## 29. Определение вероятностей ошибок i-го рода.

Вероятность **ошибки первого рода** - вероятность отвергнуть верную основную гипотезу.

Вероятность **ошибки второго рода** - вероятность принять неверную основную гипотезу.

## 30. Определение мощности, состоятельности в критериях согласия.

Если  $\beta_2$  - вероятность ошибки 2 рода, то число  $1 - \beta_2$  называется **мощностью** критерия.

Если мощность критерия стремится к 1, то есть вероятность ошибки 2 рода стремится к 0, то критерий называется **состоятельным**.

Вероятность ошибки первого рода также называется **размером** критерия.

## 31. Общий вид критериев согласия. Какие два условия накладываются на статистику в критериях согласия.

Пусть  $\vec{X} \sim F$

$$H_0 = \{F = F_0\}$$

$$H_a = \{F \neq F_0\}$$

Нужно придумать  $d(F_0, F_n^*)$ , такое, что:

1. При верной  $H_0 : d(F_0, F_n^*) \Rightarrow \eta \sim G$ , известное
2. При верной  $H_a : d(F_0, F_n^*) \rightarrow \infty$

Тогда **критерием согласия** называется критерий:

$$\delta = \begin{cases} 0, & d(F_0, F_n^*) < c \\ 1, & d(F_0, F_n^*) \geq c \end{cases}$$

где  $G(c) = 1 - \epsilon$ .

## 32. Сформулировать теорему Колмогорова, теорему Пирсона.

**Теорема Колмогорова.** Пусть  $X \sim F$ ,  $F$  - непрерывна. Если

$$d = \sup_y |F_n^*(y) - F(y)|$$

то для любого  $y > 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$P(\sqrt{n}d < y) = \mathcal{K}(y),$$

$\mathcal{K}(y)$  - функция Колмогорова, табулированная.

ИЛИ

$$\sqrt{n} \sup_y |F_n^*(y) - F(y)| \Rightarrow \mathcal{K}$$

### Теорема Пирсона.

$X \sim F$ , проверяются гипотезы как обычно.

Разобьем область возможных значений  $X_1$  на  $k$  непересекающихся промежутков  $\Delta_j$ .

$$p_j = P_{H_0}(X_1 \in \Delta_j),$$

$\nu_j$  - число наблюдений, попавших  $j$ -ый промежуток,

$$\Psi_n = \sum_{j=1}^k \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$$

Если  $0 < p_i < 1$  при всех  $i = 1, \dots, k$ , то для любого  $y > 0$ , при верной  $H_0$

$$\Psi_n \Rightarrow \eta \sim \chi_{k-1}^2.$$

## 33. Выписать критерий Колмогорова.

$$\Psi_n = \sqrt{n} \sup_y |F_n^*(y) - F(y)|$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Psi_n < c \\ 1, & \Psi_n \geq c \end{cases}$$

где  $\mathcal{K}(c) = 1 - \epsilon$ .

### 34. Выписать критерий Хи-квадрат (Пирсона).

$$\Psi_n = \sum_{j=1}^k \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Psi_n < c \\ 1, & \Psi_n \geq c \end{cases}$$

где  $\chi_{k-1}^2(c) = 1 - \epsilon$ .

### 35. Сформулировать теорему Стьюдента (для критерия Стьюдента о равенстве средних), теорему Фишера (для построения критерия Фишера о равенстве дисперсий).

**Теорема Стьюдента. (если средние совпадают)**  $n, m$  - размеры независимых (нормальных) выборок  $X, Y$  соответственно.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{1/n + 1/m} \sqrt{\frac{nS_X^2 + mS_Y^2}{n+m-2}}} \sim T_{n+m-2}$$

**Теорема Фишера.**  $n, m$  - размеры независимых нормальных выборок  $X, Y$  соответственно, тогда (если дисперсии совпадают)

$$\frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \sim F_{n-1, m-1}$$

### 36. Выписать критерий Стьюдента.

$\tau$  - квантиль данного распределения.

$$d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{1/n + 1/m} \sqrt{\frac{nS_X^2 + mS_Y^2}{n+m-2}}} \sim T_{n+m-2}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & |d| < \tau_{1-\epsilon/2} \\ 1, & |d| \geq \tau_{1-\epsilon/2} \end{cases}$$

### 37. Выписать критерий Фишера.

$f$  - квантиль данного распределения.

$$d = \frac{S_0^2(X)}{S_0^2(Y)} \sim F_{n-1, m-1}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\epsilon/2} < d < f_{1-\epsilon/2} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

### 38. Дать определение реально достигнутого уровня значимости.

**Реально достигнутым уровнем значимости** называется число  $\epsilon^* = P_{H_0}(d(F_n^*, F_0) > \tilde{d})$ .

$\tilde{d}$  - полученное значение статистики.

Если РДУЗ мал, то отвергаем  $H_0$ .

Если РДУЗ близок к 1, то принимаем  $H_0$ .