19. Сходимость по вероятности, ее свойства.

Status	Completed

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ...$ **сходится** к X **по вероятности**, $X_n \xrightarrow{P} X$, если $\forall \epsilon > 0 : P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ...$ **сходится слабо** к случайной величине X, $X_n \Rightarrow X$, если для каждой точки непрерывности функции распределения $F_X(t)$ имеет место сходимость $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ при $n \to \infty$.

Свойства:

1. $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y.$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2\}) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon/2) + \mathbf{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2) \to 0.
\end{aligned}$$

2. Пусть при $n \to \infty$ $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a_1$, $X_n^{(2)} \xrightarrow{P} a_2$, $\ldots$, $X_n^{(k)} \xrightarrow{P} a_k$, функция $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Тогда

$$g(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(k)}) \xrightarrow{P} g(a_1, \ldots, a_k).$$

при $n \to \infty$.

3. Если $X_n \Rightarrow X$, $g(t)$ — непрерывная, то $g(X_n) \Rightarrow g(X)$.
4. Если $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_n \Rightarrow X$.
5. Если $X_n \Rightarrow C$, то $X_n \xrightarrow{P} C$.

Докажем, что слабая сходимость к постояннной влечёт сходимость по вероятности. Пусть $\xi_n \Rightarrow c$, т. е.

$$F_{\xi_n}(x) \to F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c; \\ 1, & x > c \end{cases}$$

при любом x, являющемся точкой непрерывности предельной функции $F_c(x)$, т. е. при всех $x \neq c$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что $\mathsf{P}(|\xi_n - c| < \varepsilon) \to 1$:

$$\mathsf{P}(-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon) = \mathsf{P}(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) \geqslant \mathsf{P}(c - \varepsilon/2 \leqslant \xi_n < c + \varepsilon) =$$

$$= F_{\xi_n}(c + \varepsilon) - F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2) \;\to\; F_c(c + \varepsilon) - F_c(c - \varepsilon/2) = 1 - 0 = 1,$$

поскольку в точках $c+\varepsilon$ и $c-\varepsilon/2$ функция F_c непрерывна, и, следовательно, имеет место сходимость последовательностей $F_{\xi_n}(c+\varepsilon)$ к $F_c(c+\varepsilon) = 1$ и $F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2)$ к $F_c(c - \varepsilon/2) = 0$.

Осталось заметить, что $\mathsf{P}(|\xi_n - c| < \varepsilon)$ не бывает больше 1, так что по свойству предела зажатой последовательности $\mathsf{P}(|\xi_n - c| < \varepsilon) \to 1$. $\square$

6. **Теорема Слуцкого.** Если $X_n \xrightarrow{P} C$, $Y_n \Rightarrow Y$, то
    1. $X_n + Y_n \Rightarrow C + Y$;
    2. $X_n Y_n \Rightarrow CY$.