



# Математический анализ

## Определения

### Интегралы

Определение: Функция  $F$  называется **первообразной** для функции  $f$  или **интегралом** от выражения  $f(x)dx$  на каком-либо промежутке, если  $F' = f$  на этом промежутке или  $dF = fdx$

Определение: **Интегрированием** функции  $f(x)$  называется процесс нахождения всех первообразных функции  $f(x)$

Обозначение:  $F = \int f(x)dx$

Определение: Совокупность всех первообразных называется **неопределенным интегралом**

Теорема: Пусть  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$ . Тогда  $F(x) + C$  также является первообразной для  $f(x)$ . Любая первообразная  $\varphi(x) = F(x) + C$

Основные понятия

### Определенный интеграл Римана

Определение: Пусть  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a; A]$ ,  $\forall A > a$ , то есть  $\exists \int_a^A f(x)dx$

$\forall A > a$ . Тогда **несобственный интеграл**  $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$

Если предел существует, и он конечен, то  $\int_a^\infty$  называется **сходящимся**. В противном случае говорим, что он **расходится**.

Несобственные интегралы

Теорема сравнения: Рассмотрим интегралы  $\int_a^\infty f(x)dx$  и  $\int_a^\infty g(x)dx$ ,  $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ . Если при некотором  $A$ ,  $\forall x \geq A \geq a$  выполнено  $f(x) \leq g(x)$ :

Если  $\int_a^\infty g(x)dx$  сходится  $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$  сходится;

Если  $\int_a^\infty f(x)dx$  расходится  $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$  расходится.

Теорема сравнения

Предельная теорема сравнения: Рассмотрим  $\int_a^\infty f(x)dx$  и  $\int_a^\infty g(x)dx$ ,  $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ .

Тогда, если существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = k$ :

Из сходимости  $\int_a^\infty g(x)dx$  при  $k < \infty \Rightarrow$  сходимость  $\int_a^\infty f(x)dx$ ;

Из расходимости  $\int_a^\infty g(x)dx$  при  $k > 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$  расходится.

Предельная теорема сравнения

Критерий Коши: для того, чтобы интеграл  $\int_a^\infty f(x)dx$  сходил, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A : \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A'' \geq A' \geq A$$

Критерий Коши

**Вторая теорема о среднем для собственного интеграла.** Если в промежутке  $[a, b]$  ( $a < b$ ) функция  $f(x)$  монотонна, а  $g(x)$  интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\eta g(x)dx + f(b) \int_\eta^b g(x)dx,$$

где  $\eta \in [a, b]$ .

Вторая теорема о среднем для собственного интеграла

**Признак Абеля.** Пусть  $f$  и  $g$  определены в промежутке  $[a, +\infty)$ , причем

- 1)  $f$  интегрируема в этом промежутке, так что интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится (хотя бы и не абсолютно),
- 2)  $g$  монотонна и ограничена:

$$|g(x)| \leq L, \quad L = \text{const}, \quad a \leq x < \infty.$$

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (30.2)$$

сходится.

Признак сходимости несобственного интеграла Абеля

**Признак Дирихле.** Пусть  $f$  и  $g$  определены в промежутке  $[a, +\infty)$ , причем

- 1)  $f$  интегрируема в любом конечном промежутке  $[a, A]$ , так что интеграл

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K, \quad K = \text{const},$$

оказывается ограниченным для любого  $a \leq A < \infty$ ,

- 2)  $g$  монотонно стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Тогда интеграл (30.2) сходится.

Признак сходимости несобственного интеграла Дирихле

Определение: Пусть задана функция  $f(x)$ , ограниченная на  $[a; b - \varepsilon] \forall \varepsilon > 0$ , которая неограничена на  $(b - \varepsilon; b)$ . Пусть  $f$  интегрируема на  $[a; b - \varepsilon] \forall \varepsilon > 0$ , то есть  $\exists \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ .

Тогда, если  $\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ , тогда говорим, что существует **несобственный интеграл**

на промежутке  $[a; b]$ , который мы обозначаем через  $\int_a^b f(x)dx$ .

Несобственные интегралы от неограниченных функций на конечном промежутке

## Функциональные ряды

**Функциональные последовательности и ряды.** Предположим, что дана последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \quad (31.1)$$

определенных на одном и том же промежутке  $X$ . Пусть для каждого  $x \in X$  эта, уже числовая последовательность, имеет предел; получив такие пределы для всех  $x \in X$ , мы определим функцию от  $x$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

которую мы будем называть предельной функцией для последовательности (31.1).

Функциональный ряд

## Равномерная сходимость

**Определение.** 1) Если последовательность (31.1) имеет в  $X$  предельную функцию  $f(x)$  и 2) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon)$ , что при  $n > N$  неравенство  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  выполняется сразу для всех  $x \in X$ , то говорят, что (31.1) сходится к предельной функции равномерно относительно  $x$  на промежутке  $X$ .

Равномерная сходимость функционального ряда

**Критерий Коши.** Для того, чтобы (31.1) 1) имела предельную функцию в  $X$ ; 2) сходилась к этой функции равномерно относительно  $x$  в  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon$  существовал  $N = N(\varepsilon)$  такой, что при  $n > N$  и любом  $m \in \mathbb{N}$  неравенство

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

3

имело место для всех  $x \in X$  одновременно.

Для рядов это выглядит следующим образом:

Для того, чтобы (31.2) сходилась равномерно на промежутке  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon$  существовал  $N = N(\varepsilon)$  такой, что при  $n > N$  и любом  $m \in \mathbb{N}$  неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (31.3)$$

имело место для всех  $x \in X$  одновременно.

Критерий Коши для рядов

**Признак Вейерштрасса.** Если все члены функционального ряда (31.2) удовлетворяют на  $X$  неравенствам

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (31.4)$$

где  $c_n$  суть члены некоторого сходящегося числового ряда, то ряд (31.2) сходится на  $X$  равномерно. Говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  мажорирует ряд (31.2).

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

**Признак Абеля.** Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

сходится равномерно на  $X$ , а функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность и в совокупности – при любых  $n$  и  $x$  – ограничены  $|a_n(x)| \leq M$ , тогда ряд (31.6) сходится.

Признак равномерной сходимости Абеля

**Признак Дирихле.** Пусть частичные суммы  $B_n$  ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

в совокупности – при любых  $n$  и  $x$  – ограничены  $|B_n(x)| \leq M$ , а функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю равномерно на  $X$ , тогда ряд (31.6) сходится.

Признак равномерной сходимости Дирихле

**Теорема о непрерывности суммы ряда.** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определены в промежутке  $[a, b]$  и все непрерывны в точке  $x_0$  этого промежутка. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.1}$$

в промежутке  $[a, b]$  сходится равномерно, то сумма ряда  $f(x)$  будет также непрерывна в этой точке.

Теорема о непрерывности суммы ряда

**Теорема Дини.** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , непрерывны и положительны в промежутке  $[a, b]$ . Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.2}$$

имеет сумму  $f(x)$ , также непрерывную во всем промежутке, то он сходится равномерно.

Теорема Дини

## Степенные ряды

**Степенной ряд и его область сходимости.** Рассмотрим специальный вид функциональных рядов, который называется степенным

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \quad (32.4)$$

Степенной ряд

**Формула Коши-Адамара.**

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

**Формула Даламбера.**

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Формулы Коши-Адамара и Даламбера радиуса сходимости степенного ряда

**6. Теорема Абеля.** Если степенной ряд (32.4) сходится при  $x = R$ , то его сумма  $f(x)$  сохраняет непрерывность слева и при этом значении аргумента, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n.$$

Теорема Абеля для степенных рядов

## Метрические пространства и функции нескольких переменных

Неравенство Коши-Буняковского: Для любого набора чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  верно

неравенство:  $\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

Неравенство Коши-Буняковского

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx} \iff$$

$$\left( \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$$

Интегральное неравенство Коши-Буняковского

Неравенство Минковского: Для любого набора чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  верно неравенство:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Неравенство Минковского

Определение: Пусть задано некоторое множество  $X$ . Говорим, что множество  $X$  является **метрическим пространством**, если  $\forall x, y \in X$  определена функция  $\rho(x, y)$ , которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1)  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$  (аксиома тождества)
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии)
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$  (неравенство треугольника)

Метрическое пространство

Определение: Пусть  $f(x)$  определена на некотором множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$  и  $a = (a_1, \dots, a_n)$  точка сгущения множества  $M$ .

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f$**  при  $x \rightarrow a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a)$  такое, что  $0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ ,  
 $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta$

Предел функции нескольких переменных 1

Определение: Из того, что  $x \rightarrow a$ , т.е.  $\rho(x, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_i \rightarrow a_i \forall i$  можно говорить, что  $A$  является **пределом  $f$**  при  $x_i \rightarrow a_i \forall i = 1, \dots, n$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a)$  такое, что  $|x_i - a_i| < \delta \ i = 1, \dots, n \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = A$  -  $n$ -кратный предел

Предел функции нескольких переменных 2



Определение: Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке  $a$** , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a)$  такое, что  $\rho_1(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ , где  $\rho_1(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\rho_2(f(x), f(a)) = |f(x) - f(a)|$ .

Непрерывность функции в точке

**Теоремы Больцано-Коши.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в некоторой связной области  $D$ . Если в двух точках  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$  функция принимает значения разных знаков

$$f(M_0) < 0, \quad f(M_1) > 0,$$

то в этой области найдется и точка  $M_2(x_2, y_2)$ , в которой  $f(M_2) = 0$ .

Если теперь  $f(M_0) = A$ , а  $f(M_1) = B$ , то для любой  $A < C < B$  существует  $M_2$  такая, что  $f(M_2) = C$ .

Теоремы Больцано-Коши

**Теоремы Больцано-Вейерштрасса (двухмерный случай).** Из любой ограниченной последовательности точек

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n), \dots$$

всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \dots, M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \dots$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса: Пусть  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $\Omega$ . Тогда  $f(x, y)$  ограничена  $\Omega$ , т.е.  $\exists M |f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in \Omega$

Первая теорема Вейерштрасса

Вторая теорема Вейерштрасса: Пусть  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $\Omega$ . Тогда  $\exists (x_0, y_0) \in \Omega$  и  $(x_1, y_1) \in \Omega$  такие, что  $f(x_0, y_0) = \min_{\Omega} f, f(x_1, y_1) = \max_{\Omega} f$

Вторая теорема Вейерштрасса

Напомним определение равномерной непрерывности функции. Пусть  $f(x, y)$  непрерывна на множестве  $\Omega$ . Тогда говорим, что  $f(x, y)$  равномерно непрерывна на множестве  $\Omega$ , если по заданному  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что как только  $\rho(M', M'') < \delta$  для любых точек  $M', M'' \in \Omega$ , следует, что

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon.$$

**Теорема Кантора.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $\Omega$ , то она равномерно непрерывна.

Теорема Кантора

Определение: Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и в самой этой точке. Тогда, если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$ , то говорим, что существует **частная производная** функции  $f$  по  $x$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и обозначаем её  $f'_x(x_0, y_0, z_0)$  и иногда  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$

Частная производная

Определение: Пусть функция  $f(x, y, z)$  задана в некоторой области  $\Omega$  и  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Если  $\Delta f$  может быть записана в виде:

(3)  $\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \varepsilon \cdot \rho$ , где  $A, B, C$  - конечные,  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ ,

то  $f$  называется **дифференцируемой** в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Если (3) имеет место, тогда, положив  $\Delta y = \Delta z = 0$ , будем иметь:

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + \varepsilon \cdot \rho, \quad \varepsilon \rho \equiv (\varepsilon |\Delta x|)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + \frac{\varepsilon \rho}{|\Delta x|} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} A$$

Если  $f$  дифференцируема, то (3) реализуется только в виде:

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon \rho, \quad \Delta f - df = \varepsilon \rho$$

Функция дифференцируемая в точке

Пусть задана функция  $f(x, y, z)$  в некоторой области  $\Omega$ . Пусть  $f$  - непрерывная и частные производные  $f_x, f_y, f_z \in \Omega$ . Пусть заданы 2 точки:  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M(x, y, z)$ . Выбираем на прямой  $l$ , соединяющей  $M_0$ ,  $M$ , некоторое направление.  $M_0 M$  - длина отрезка, соединяющего точки  $M_0$ ,  $M$ . Будем брать эту длину с положительным знаком, если  $\overline{M_0 M}$  совпадает с направлением  $l$ , и с отрицательным в противоположном

случае. Тогда **производной от  $f$  по направлению  $l$**  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  называется  $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M}$ , где  $M \rightarrow M_0$  вдоль  $l$  (1).

$$l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Производная по направлению

Вектор  $(f_x, f_y, f_z) = \nabla f$  называется **градиентом** функции  $f$

$$\text{Из (2): } \frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \bar{l}, \bar{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Градиент

Теорема о смешанных производных: Пусть в области  $\Omega$  задана  $f(x, y)$ . Пусть  $\exists f_x, f_y$  и пусть  $\exists f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y) \in \Omega$ , и они являются непрерывными функциями в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .

Теорема о смешанных производных

**Формула Тейлора.** Рассмотрим функцию  $F(t)$  одной переменной. Мы знаем, что при существовании  $n + 1$  производной ее можно разложить по формуле Тейлора следующим образом

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1}. \quad (39.1)$$

Положив

$$t - t_0 = \Delta t = dt, \quad F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0),$$

можно переписать в виде

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0 + \theta\Delta t). \quad (39.2)$$

Формула Тейлора

Критерий Сильвестра:

- 1) Если квадратичная форма положительно определена ( $\delta_k > 0$ ), то  $x^0$  - точка минимума;
- 2) Если квадратичная форма отрицательно определена ( $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \dots$ ), то  $x^0$  - точка максимума;
- 3) Если квадратичная форма не определена, то  $x^0$  - не экстремум;
- 4) Если квадратичная форма полуопределена, то необходимы дополнительные исследования. Для полуопределённости необходимо, чтобы угловые и главные миноры были больше или равны 0.

Критерий Сильвестра