13. Распределение суммы случайных величин, имеющих гамма распределение.

Status	Completed

Используем формулу свертки из прошлого билета

Теорема 6. *Пусть* X_1 *и* X_2 *независимы,* $X_1 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$, $X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$. *Тогда* $X_1 + X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$.

Доказательство.

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\alpha,\lambda_1}(u)\,\gamma_{\alpha,\lambda_2}(t-u)\,du.$$

Поскольку $\gamma_{\alpha,\lambda}(u) = 0$ при $u \le 0$, то стоящие под интегралом функции обе отличны от нуля только если одновременно $u > 0$ и $t - u > 0$. При $t \le 0$ эти неравенства несовместны, т. е. $f_{X_1+X_2}(t) = 0$. Если $t > 0$, то подынтегральные функции отличны от нуля при $0 < u < t$, поэтому

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t \frac{\alpha^{\lambda_1}}{\Gamma(\lambda_1)} u^{\lambda_1-1} e^{-\alpha u} \frac{\alpha^{\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_2)} (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha(t-u)}\,du \\ &= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \int_0^t u^{\lambda_1-1}(t-u)^{\lambda_2-1}\,du. \end{aligned}$$

Сделаем замену $u = vt$. Тогда

$$f_{X_1+X_2}(t) = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} t^{\lambda_1+\lambda_2-1} e^{-\alpha t} \int_0^1 v^{\lambda_1-1}(1-v)^{\lambda_2-1}\,dv.$$

Последний интеграл от t уже не зависит. Это константа, которую можно объединить с константами, стоящими в начале формулы. На этом доказательство можно завершить, потому что мы получили выражение вида $C\,t^{\lambda_1+\lambda_2-1}e^{-\alpha t}$, т.е. плотность гамма-распределения с параметрами $(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2)$. Можно, впрочем, и уточнить значение константы. Указанный интеграл известен в теории как бета-функция

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 v^{\lambda_1-1}(1-v)^{\lambda_2-1}\,dv = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Последнее можно найти в таблицах интегралов. Теорема доказана.