10. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

Status	Completed

$\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ - случайные величины.

Функция $F_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = P(x_1 < t_1, ..., x_n < t_n)$ называется **функцией совместного распределения**.

Свойства $F_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n)$:

1. Не убывает по каждому аргументу.
2. Непрерывная слева по каждому аргументу.
3. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = 0.$
4. $\lim\limits_{t \to \infty} F_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = F_{X_2,...,X_n}(t_2, ..., t_n)$ (восстановление функции распределения одного аргумента).

Доказывается аналогично одномерному случаю.

Типы:

$\vec{X}$ имеет **дискретное распределение**, если X_k имеет дискретное распределение для $k = 1, ..., n$.

$\vec{X}$ имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если $F_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \int\limits_{-\infty}^{t_1} ... \int\limits_{-\infty}^{t_n} f_{X_1,...,X_n}(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n$, где $f_{X_1,...,X_n}(y_1, ..., y_n)$ - **совместная плотность распределения**.

Частная производная по всем аргументам функции распределения - функция плотности.

Свойства функции плотности:

1. $f_{\vec{X}}(\vec{y}) \geq 0.$
2. $\iint\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{y})d\vec{y} = 1.$
3. $B \subset \mathbb{R}^n$; $P(\vec{X} \in B) = \iint\limits_{B} f_{\vec{X}}(\vec{y})d\vec{y}$
4. $F_{X_1}(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{t_1} (\iint\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\vec{X}}(\vec{y})dy_2...dy_n)dy_1.$

Примеры

Многомерное равномерное распределение

Равномерное распределение. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — борелевское множество с конечной лебеговой мерой $\lambda(S)$. Говорят, что вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет равномерное распределение в области S, если плотность совместного распределения $f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$ постоянна в области S и равна нулю вне этой области:

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda(S)}, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in S, \\ 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \notin S. \end{cases} \tag{17}$$

Убедимся, что эта функция является плотностью распределения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{\lambda(S)} \int\limits_{S} dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{\lambda(S)}\, \lambda(S) = 1.$$

Как и в одномерном случае, вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с равномерным распределением в области S есть просто вектор координат точки, брошенной наудачу в область S.