4. Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

Status	Completed

Вероятностное пространство есть тройка вида $< \Omega, S, P >$, где Ω - пространство элементарных исходов, S - совокупность подмножеств Ω (не все, поскольку есть неизмеримые), P - функция $S \to [0, 1]$, удовлетворяющая аксиомам:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Счетная аддитивность: если события $A_1, A_2, ...$ таковы, что $A_i A_j = \emptyset \, (i \neq j)$ (попарно несовместны), то

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Тогда у вероятности появляются следующие свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$ (из аксиомы 3).
2. Конечная аддитивность (из аксиомы 3, хвост заменяем на пустые множества).
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
    1. **Доказательство:** $P(A \cup B) = P(B \cup (A \backslash B)) = P(B) + P(A \backslash B); P(A) = P(AB) + P(A \backslash B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$.

5. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.
    1. **Доказательство:** $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$.
6. Свойство непрерывности вероятности

6. Свойство непрерывности вероятности. Оно состоит из двух пунктов:
а) если события $A_1, A_2, \ldots$ таковы, что

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots,$$

то существует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right);$$

б) если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Доказательство. а) Событие $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ можно представить в виде

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots,$$

тогда участвующие здесь множества попарно несовместны и мы можем воспользоваться свойством счетной аддитивности:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2 \setminus A_1) + \mathbf{P}(A_3 \setminus A_2) + \ldots.$$

Поскольку сумма ряда есть предел последовательности частных сумм, то это выражение равно

$$\lim_{n\to\infty} [\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n \setminus A_{n-1})] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Для доказательства пункта *б* перейдем к рассмотрению дополнительных событий и воспользуемся уже доказанным свойством *а*. Очевидно,

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \bar{A}_3 \subset \ldots,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{A}_n) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Здесь мы воспользовались доказанной ранее формулой двойственности.

7. Формула включения-исключения:

Формула включения-исключения:

$$\mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i A_j) +$$
$$+ \sum_{i<j<m} \mathsf{P}(A_i A_j A_m) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n).$$