

Определения

Общее

Определение 3.4. Алгебраическая система \mathfrak{A} состоит из основного множества A и заданных на нём предикатов P_1, \dots, P_n , функций f_1, \dots, f_k и констант c_1, \dots, c_l .

Кортеж

$$\sigma = \langle P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}, f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}, c_1, \dots, c_l \rangle$$

предикатных символов $P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}$, функциональных символов $f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}$ и константных символов c_1, \dots, c_l называется **сигнатурой** алгебраической системы \mathfrak{A} и обозначается $\sigma = \sigma(\mathfrak{A})$. При этом запись $P_i^{s_i}$ означает, что P_i является s_i -местным предикатом алгебраической системы \mathfrak{A} , а запись $f_i^{r_i}$ означает, что f_i является r_i -местной функцией алгебраической системы \mathfrak{A} .

Основное множество A также называется **универсумом** алгебраической системы \mathfrak{A} и обозначается $A = |\mathfrak{A}|$.

Алгебраическая система

Определение 3.7. Пусть дана сигнатура

$$\sigma = \langle P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}, f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}, c_1, \dots, c_l \rangle.$$

Определим понятие **формулы** сигнатуры σ .

38

-
1. Если t_1 и t_2 — термы, то $t_1 = t_2$ — формула.
 2. Если t_1, \dots, t_s — термы и предикатный символ $P^s \in \sigma$, то $P(t_1, \dots, t_s)$ — формула.
 3. Если φ и ψ — формулы, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg \varphi$, $\exists x \varphi(x)$ и $\forall x \varphi(x)$ — формулы.
 4. Других формул нет.

Формулы логики предикатов

Гомоморфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Пусть задана сигнатура σ , \mathfrak{A} и $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$.

Пусть задано отображение $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|; \sigma \rangle$, $|\mathfrak{A}| = A$.

h называется **гомоморфизмом**, если $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

выполняется:

- 1) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;
- 2) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;
- 3) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Гомоморфизм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Отображение $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ называется **эпиморфизмом**, если h — гомоморфизм и так же является *сюръекцией* (отображением "на").

Эпиморфизм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3. Отображение h называется **изоморфизмом**, если:

- 1) h — биекция;
- 2) $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:
 - а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;
 - б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;
 - в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Изоморфизм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4. Отображение $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ называется **изоморф-**

НЫМ вложением, если:

- 1) h — инъекция (разнозначное отображение);
- 2) $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:
 - а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;
 - б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;
 - в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Изоморфное вложение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$.

\mathfrak{A} — **подмодель** \mathfrak{B} (обозначается $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$), если:

- 1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;
- 2) $\forall P^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n);$$
- 3) $\forall f^n \in \sigma, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$;
- 4) $\forall c \in \sigma, c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Подмодель

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.3.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. \mathfrak{A} — **элементарная подмодель** \mathfrak{B} (обозначается $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), если:

- 1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;
- 2) $\forall \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma), \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Элементарная подмодель

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq |\mathfrak{B}|$. Будем говорить, что множество A **замкнуто относительно операций** модели \mathfrak{B} , если:

- 1) $\forall f^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in A$ имеем $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$;
- 2) $\forall c \in \sigma, c^{\mathfrak{B}} \in A$.

Замкнутость относительно операций

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.7. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, $X \neq \emptyset$. Тогда существует подмодель $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$, которая является наименьшей по включению среди таких подмоделей $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} : X \subseteq |\mathfrak{A}|$ (среди всех подмоделей, содержащих X , существует наименьшая подмодель). Эта подмодель называется **подмоделью, порождаемой множеством** X . $\mathfrak{C} = \text{sub}_{\mathfrak{B}}(X)$.

Подмодель, порождаемая множеством

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.15. Рассмотрим $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, \sim — эквивалентность на $A = |\mathfrak{A}|$ называется **конгруэнцией** на \mathfrak{A} , если для $\forall f^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$, если $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, то $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$. Иначе говоря, конгруэнция — это отношение эквивалентности, перестановочное с операциями.

Конгруэнция на модели

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.16. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, \sim — конгруэнция на \mathfrak{A} .
 $a/\sim = [a]_\sim = [a] = \{b \in |\mathfrak{A}| \mid a \sim b\}$ — **класс эквивалентности** (смежный класс).

Пусть $A = |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, тогда $A/\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$,
 $\mathfrak{A}/\sim = \langle A/\sim; \sigma \rangle$ — **фактор-модель**.

Пусть $P^n, f^n, c \in \sigma, a_1 \dots a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда:

- а) $\mathfrak{A}/\sim \models P([a_1], \dots, [a_n]) : \exists b_1 \dots b_n \in |\mathfrak{A}|$, если $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, то $\mathfrak{A} \models P(b_1, \dots, b_n)$;
- б) $f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)]$;
- в) $c^{\mathfrak{A}/\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$.

Класс эквивалентности, фактор модель

ТЕОРЕМА 13.23. (Основная теорема о гомоморфизмах).

Любой гомоморфизм является композицией факторизации и изоморфного вложения.

Основная теорема о гомоморфизмах

Секвенциальное исчисление предикатов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. $\Gamma = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ — конечная последовательность формул.

Секвенциями называются выражения вида:

- 1) $\Gamma \vdash \varphi$ (из Γ выводимо φ)
- 2) $\vdash \varphi$ (φ выводится)
- 3) $\Gamma \vdash$ (Γ противоречиво)

Определения секвенций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1.

- 1) $\varphi \vdash \varphi$;
- 2) $\vdash \forall x(x = x)$;
- 3) $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$;
- 4) $\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \& y = z \rightarrow x = z)$;
- 5) $t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n, [\varphi]_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash [\varphi]_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n}$

или же

$$t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n, \varphi(t_1, \dots, t_n) \vdash \varphi(q_1, \dots, q_n)$$

При замене x_1 на t_1, \dots, x_n на t_n не возникают коллизии, т.е.

$\forall i \leq n, \forall y \in FV(t_i) x_i$ не входит в область действия кванторов по y .

Определение секвенциального исчисления предикатов

Правила вывода:

- 1) $\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}$
- 2) $\frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$
- 3) $\frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$
- 4) $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$
- 5) $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$
- 6) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash \xi; \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$
- 7) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}$
- 8) $\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ (modus ponens)
- 9) $\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$
- 10) $\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi; \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash}$
- 11) $\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Gamma_1 \vdash \xi}$
- 12) $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$
- 13) $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}, x \notin FV(\Gamma)$
- 14) $\frac{\Gamma, [\varphi]_t^x \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$
- 15) $\frac{\Gamma \vdash [\varphi]_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$
- 16) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi}, x \notin FV(\Gamma \cup \{\psi\})$.

Правила вывода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. Последовательность секвенций S_1, \dots, S_n называется **доказательством**, если каждая секвенция S_i — это либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением некоторого правила вывода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.3. Секвенция S называется **доказуемой**, если \exists доказательство S_1, \dots, S_n , заканчивающееся на S ($S_n = S$).

Доказательство и доказуемость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.5. **Дерево секвенций:** $D, h(D), V(D)$:

1) Если S — секвенция, то S — дерево, $V(D) = S, h(D) = 1$;

2) Пусть D_1, \dots, D_k — деревья, S — секвенция, тогда конструкция $D = \frac{D_1; \dots; D_k}{S}$ — дерево,

$$h(D) = \max(h(D_1), \dots, h(D_k)) + 1,$$

$$V(D) = V(D_1) \cup \dots \cup V(D_k).$$

3) Других деревьев нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.6. Дерево секвенций называется **деревом вывода**, если все его вершины являются аксиомами, а все переходы являются частными случаями правил вывода.

Дерево секвенций и дерево вывода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.8. Дерево секвенций $\frac{S_1; \dots; S_n}{S}$ высоты 2 называется **производным правилом вывода**, если $\exists D = \frac{S}{S}$, заканчивающееся на эту секвенцию S , у которого все переходы являются частными случаями правил вывода, а вершины — либо аксиомы, либо одна из секвенций S_1, \dots, S_n .

Производное правило вывода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.13. Формулы φ и ψ называются **равносильными** ($\varphi \equiv \psi$), если секвенции $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ являются доказуемыми.

Равносильность формул

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.17.

- 1) Секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ называется тождественно истинной, если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi\}))$ и $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi\}) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ имеет место следующее утверждение: если $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma], \dots, \mathfrak{A} \models \varphi_n[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$;
- 2) Секвенция $\vdash \varphi$ называется тождественно истинной, если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$ и $\forall \gamma : FV(\varphi) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ выполняется $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$;
- 3) Секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ называется тождественно истинной, если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}))$ и $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \rightarrow |\mathfrak{A}| \exists i \leq n : \mathfrak{A} \not\models \varphi_i[\gamma]$.

Семантика секвенций логики предикатов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.22 (каноническая форма). Говорят, что формула φ находится в **предваренной нормальной форме (ПНФ)**, если она имеет вид: $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$, где ψ — бескванторная, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.

Предваренная нормальная форма (ПНФ)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.21. Пусть $x \notin FV(\xi)$, тогда имеют место следующие

эквивалентности:

- 1) $\forall x\xi \equiv \xi$;
- 2) $\exists x\xi \equiv \xi$;
- 3) $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$;
- 4) $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$;
- 5) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$;
- 6) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$;
- 7) $(\forall x\varphi \& \forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \& \psi)$;
- 8) $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$;
- 9) $((\forall x\varphi) \& \xi) \equiv \forall x(\varphi \& \xi)$;
- 10) $((\exists x\varphi) \& \xi) \equiv \exists x(\varphi \& \xi)$;
- 11) $((\forall x\varphi) \vee \xi) \equiv \forall x(\varphi \vee \xi)$;
- 12) $((\exists x\varphi) \vee \xi) \equiv \exists x(\varphi \vee \xi)$;
- 13) $\forall x[\varphi]_x^z \equiv \forall y[\varphi]_y^z$, если $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$ (если не возникает коллизий);
- 14) $\exists x[\varphi]_x^z \equiv \exists y[\varphi]_y^z$, если $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (если не возникает коллизий).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

Эквивалентности

ТЕОРЕМА 14.23. Для всех формул φ существует эквивалентная ей формула $\psi \equiv \varphi$, находящаяся в ПНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Алгоритм приведения формулы к ПНФ:

- 1) Избавляемся от импликаций;
- 2) С помощью тождеств 5, 6 из 14.21, а также законов де Моргана и снятия двойного отрицания, вносим отрицание под кванторы.
- 3) С помощью тождеств 13, 14 переобозначаем переменные так, чтобы:
 - а) разные кванторы действовали по разным переменным;
 - б) каждая переменная имела либо только свободное, либо только связанное вхождение.
- 4) С помощью 9-12 выносим кванторы наружу.

В результате получим функцию, эквивалентную изначальной, но находящейся в ПНФ.

Теорема доказана.

Алгоритм приведения к ПНФ

Теорема о существовании модели

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Пусть σ — сигнатура, $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\varphi \in F(\sigma)$. Тогда:

- 1) $\Gamma \vdash \varphi$, если $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ такие, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ — доказуема;
- 2) $\Gamma \vdash$, если $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ такие, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ — доказуема;
- 3) $\Gamma \not\vdash$, если $\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ — недоказуема;
- 4) $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ называется **теорией** (в сигнатуре σ), если оно (множество Γ) является **дедуктивно замкнутым**, т.е. $\forall \varphi \in S(\sigma) : (\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma)$;
- 5) Множество $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ — **полное** на сигнатуре σ , если $\forall \varphi \in S(\sigma) : (\varphi \in \Gamma \text{ или } \neg \varphi \in \Gamma)$.

Теория, дедуктивная замкнутость, полное множество предложений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.4. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, тогда **элементарной теорией модели** \mathfrak{A} называют: $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Элементарная теория

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.5. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$. Модели \mathfrak{A} и \mathfrak{B} называют **элементарно эквивалентными** ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если их элементарные теории

33

совпадают, т.е. $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$, т.е. $\forall \varphi \in S(\sigma) : (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$.

Элементарная эквивалентность моделей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.14. Пусть модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ и X — множество переменных. Тогда отображение $\gamma : X \rightarrow |\mathfrak{A}|$ называется **интерпретацией (означиванием)** переменных из X на \mathfrak{A} .

Рассмотрим $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ и $FV(\Gamma) = \{x \mid \exists \varphi \in \Gamma : x \in FV(\varphi)\}$. Пусть $FV(\Gamma) \subseteq X$. Тогда говорят, что Γ **истинно на модели** \mathfrak{A} при означивании γ и пишут $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$, если $\forall \varphi \in \Gamma : \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

Говорят, что Γ **выполнимо на модели** \mathfrak{A} , если $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ такое, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Говорят, что Γ **выполнимо (или имеет модель)**, если $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma))$ и $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Выполнимость на модели

ТЕОРЕМА 15.15 (теорема о существовании модели). Любое непротиворечивое множество формул имеет модель, т.е.

$\forall \Gamma \subseteq F(\sigma)$ таких, что $\Gamma \not\models$, выполняется:

$$\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \text{ и } \exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}| \text{ такие, что } \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma].$$

Теорема о существовании модели (ТОСМ)

ЛЕММА 15.18 (Хенкина).

- а) T' — непротиворечивое;
- б) T' — полное;
- в) T' — теория;
- г) $(\varphi \& \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T' \text{ и } \psi \in T'$;
- д) $(\varphi \vee \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T' \text{ или } \psi \in T'$;
- е) $\neg\varphi \in T' \Leftrightarrow \varphi \notin T'$;
- ж) $(\varphi \rightarrow \psi) \in T' \Leftrightarrow \text{если } \varphi \in T', \text{ то } \psi \in T'$;
- з) $\exists x\psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists t \in T(\sigma') : FV(t) = \emptyset \text{ (замкнутый терм) и } \psi(t) \in T'$;
- и) $\forall x\psi(x) \in T' \Leftrightarrow \forall c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall t \in T(\sigma') : \text{если } FV(t) = \emptyset \text{ (замкнутый терм) , то } \psi(t) \in T'.$

Лемма Хенкина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.34. Рассмотрим $\Gamma \subseteq F(\sigma)$. Говорят, что Γ **совместно**, если $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Совместность

Множество формул Γ называется **локально совместным**, если каждое его конечное подмножество является совместным, т.е. $\forall \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, где Γ_0 - конечное и совместное.

Локальная совместность

ТЕОРЕМА 15.35 (Мальцева о компактности). Множество формул совместно \Leftrightarrow когда оно локально совместно.

Теорема Мальцева о компактности

ТЕОРЕМА 15.36 (Гёделя о полноте). Любая т.и. формула является доказуемой.

Теорема Гёделя о полноте

ТЕОРЕМА 15.39 (Мальцева о расширении). Если множество предложений имеет бесконечную модель, то оно имеет сколь угодно большую модель, т.е. пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, $\mathfrak{B} \models \Gamma$, \mathfrak{B} - бесконечная. Тогда для \forall кардинала $\alpha \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$.

Мальцева о расширении

7.3. Ординалы и кардиналы

Определение 7.22. *Ординальными числами (ординалами) называются:*

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0 = \emptyset; \\ \alpha_1 &= 1 = \{\emptyset\}; \\ \alpha_2 &= 2 = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}; \\ \alpha_3 &= 3 = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}; \\ &\dots \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \cup \{\alpha_n\}; \\ \omega &= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \dots\}; \\ \omega + 1 &= \omega \cup \{\omega\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \dots, \omega\}; \\ 2\omega &= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n, \dots\}; \\ &\dots \\ \alpha &= \{\beta \mid \beta < \alpha\}.\end{aligned}$$

Определение 7.23. α называется **непредельным** ординалом, если существует ординал β такой, что $\alpha = \beta + 1$.

α называется **предельным** ординалом, если не существует ординала β такого, что $\alpha = \beta + 1$.

Ординал

Определение 7.26. Ординал α называется **кардиналом**, если для любого ординала $\beta < \alpha$ имеет место $\|\beta\| \neq \|\alpha\|$.

Замечание 7.27.

1. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \omega$ – кардиналы.
2. $\omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, \dots$ – не кардиналы.

Доказательство: упражнение.

Кардинал

Эквивалентность классов вычислительных функций

Определение 9.3. Примитивно-рекурсивные функции (прф):

- а) простейшие функции являются примитивно-рекурсивными;*
- б) функция, полученная из примитивно-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции или оператора примитивной рекурсии, является примитивно-рекурсивной;*
- в) других примитивно-рекурсивных функций нет.*

Частично-рекурсивные функции (чрф):

- а) простейшие функции являются частично-рекурсивными;*
- б) функция, полученная из частично-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции, оператора примитивной рекурсии или оператора минимизации, является частично-рекурсивной;*
- в) других частично-рекурсивных функций нет.*

Общерекурсивными функциями (орф) называются всюду определённые частично-рекурсивные функции.

Класс всех примитивно-рекурсивных функций обозначается **ПРФ**, класс всех общерекурсивных функций – **ОРФ**, а класс всех частично-рекурсивных функций – **ЧРФ**.

ЧРФ, ПРФ, ОРФ

9.1. Основные определения и обозначения

Определение 9.1. Следующие функции называются *простейшими*:

- а) $O(x) = 0$;
- б) $S(x) = x + 1$;
- в) $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m, m \leq n$.

Определение 9.2.

а) **Оператор суперпозиции.** Рассмотрим функции $g(x_1, \dots, x_k)$, и $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)$.

Говорят, что функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n))$$

получена из функций g, h_1, \dots, h_k применением **оператора суперпозиции**.

б) **Оператор примитивной рекурсии.** Рассмотрим функции

$$g(x_1, \dots, x_n) \text{ и } h(x_1, \dots, x_n, y, z).$$

Пусть выполнено

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n); \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция f получена из функций g и h применением **оператора примитивной рекурсии**.

в) **Оператор минимизации.** Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n, y)$. Пусть выполнено:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y, & \begin{aligned} &g(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \\ &\forall i < y \ g(x_1, \dots, x_n, i) \text{ определена} \\ &\text{и } \forall i < y \ g(x_1, \dots, x_n, i) \neq 0; \end{aligned} \\ \text{не определена,} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция f получена из функции g применением **оператора минимизации**. Это обозначается так:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Простейшие функции, оператор суперпозиции, оператор примитивной рекурсии, оператор минимизации

ТЕОРЕМА 17.17 (о нормальной форме Клини)

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ — вычислимая на МТ. Тогда существует **прф** $g(x_1, \dots, x_n, y)$ такая, что $f(x_1, \dots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0])$, т.е. берем **прф**, применяем к ней оператор минимизации и берем левую компоненту с вышедшей канторовской нумерации.

Теорема о нормальной форме Клини

СЛЕДСТВИЕ 17.20 (**основная теорема о вычислимых функциях**).
ЧРФ = ВТ = ПВТ.

Основная теорема о вычислимых функциях

ТЕОРЕМА 17.23 (**Тезис Чёрча**).

Любая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.

Тезис Черча

Универсальные вычислимые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1. Пусть K — множество частичных функций вида $g : N^n \rightarrow N$. Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется **универсальной для класса K** , если:

- а) $\forall m \in \mathbb{N} : f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$;
- б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K \exists m \in \mathbb{N} : g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$,

Если объединить два условия, то выходит, что класс

$K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Или же, иными словами, функция f осуществляет нумерацию всех функций класса K .

Универсальная функция

ЗАМЕЧАНИЕ 18.2. Класс K имеет универсальную функцию \Leftrightarrow класс конечен или счётен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

СЛЕДСТВИЕ 18.3. Если класс K континуален, то он не имеет универсальной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

СЛЕДСТВИЕ 18.4. Класс всех n –местных частичных функций не имеет универсальной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

18.2 - 18.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.14. Следующие функции называются **клиниевскими скобками**: $[x, y] = c(l(x), c(r(x), y))$.

Клиниевские скобки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.24. Функция $\varkappa(n) = K^2(n, x)$ называется **клиниевской нумерацией ЧРФ¹**, т.е. $\varkappa : \mathbb{N} \rightarrow \text{ЧРФ}^1$.

Клиниевская нумерация ЧРФ ($\varkappa \in \varkappa$)

ТЕОРЕМА 18.26. (теорема Райса). Пусть класс $K \subseteq \text{ЧРФ}^1$, $K \neq \emptyset$, $K \neq \text{ЧРФ}^1$. Тогда множество номеров $M = \{n \mid \varkappa(n) \in K\}$ не рекурсивно, т.е. функция $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$ не является чрф.

—

Теорема Райса

Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.2. Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивным** (примитивно рекурсивным), если его характеристическая функция $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ является **орф** (прф).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.3. Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивно перечислимым**, если $A = \emptyset$ или существуют **орф**¹ f_1, \dots, f_k такие, что $A = \{\langle f_1(n), \dots, f_k(n) \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$.

В частности, если $A \subseteq \mathbb{N}$ и существует **орф**¹ f такая, что $A = \rho f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – область значений, то A является рекурсивно перечислимым.

Примитивно рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

ТЕОРЕМА 19.10 (Поста). Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$.

Тогда A рекурсивно $\Leftrightarrow A, \bar{A}$ являются рпм.

Теорема Поста

Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.1. Сигнатура $\Sigma_0 = \langle <^2, +^2, *^2, S^1, 0 \rangle$ является **сигнатурой арифметики Пеано**. Введем обозначения:

$T(\Sigma_0)$ – множество термов Σ_0 .

$F(\Sigma_0)$ – множество формул Σ_0 .

$S(\Sigma_0)$ – множество предложений Σ_0 .

$\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – множество переменных.

Сигнатура арифметики Пеано

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.4. Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Множество X является разрешимым, если $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$ - рм. Множество X является перечислимым, если $\gamma(X)$ - рпм.

Разрешимое и перечислимое множество

.....

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.14. Пусть $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Говорят, что f **представима** в A_0 , если существует формула $\varphi(v_0, \dots, v_k) \in F(\Sigma_0)$ такая, что для $\forall n_0 \dots n_k \in \mathbb{N}$ выполняется:

- 1) $f(n_0, \dots, n_{k-1}) = n_k \Rightarrow A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$;
- 2) $f(n_0, \dots, n_{k-1}) \neq n_k \Rightarrow A_0 \vdash \neg \varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$.

Представимость функции в арифметике Пеано

ТЕОРЕМА 20.16 (Гёделя о неразрешимости).

Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$, T - непротиворечивая теория. Тогда T неразрешима.

Это означает, что система аксиом A_0 **наследственно неразрешима**, то есть любая содержащая её непротиворечивая теория является неразрешимой.

Теорема Гёделя о неразрешимости

ТЕОРЕМА 20.17.(Чёрча о неразрешимости).

Множество доказуемых формул (теорем логики предикатов) $ИП_{\Sigma_0}$ является неразрешимым.

Теорема черча о неразрешимости

ТЕОРЕМА 20.20.(Гёделя о неполноте).

Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$, T - перечислимая, непротиворечивая теория. Тогда T не полна, т.е. система аксиом арифметики Пеано A_0 не имеет непротиворечивых перечислимых пополнений.

Теорема Гёделя о неполноте

Аксиоматизируемые классы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.1.

Рассмотрим $K_\sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ — модель сигнатуры } \sigma\}$. Пусть класс моделей $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **теорией класса** называется множество предложений $Th(K) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \forall \mathfrak{A} \in K: \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Теория класса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.2.

Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Тогда $K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \forall \varphi \in \Gamma: \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Класс множества предложений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.3.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется **аксиоматизируемым**, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma)$ такое, что $K = K(\Gamma)$. В нашем случае Γ есть множество аксиом.

Аксиоматизируемый класс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.11.

Класс K является **конечно аксиоматизируемым** $\Leftrightarrow \exists \Gamma \in S(\sigma)$ - конечное и $K = K(\Gamma)$.

Конечно аксиоматизируемый класс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.7.

Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$. **Элементарной диаграммой** модели \mathfrak{A} называют множество предложений $D(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi, \varphi \text{ — бескванторная}\}$.

Полной диаграммой модели \mathfrak{A} называют множество предложений $FD(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$.

Элементарная и полная диаграмма

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.11.

Пусть $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ - бескванторная формула. Тогда следующими формулами называются:

$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ - **\exists -формула (экзистенциальная)**;

$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ - **\forall -формула (универсальная)**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.12.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **\exists -теорией** называют множество предложений $Th_\exists = \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi - \exists\text{-формула}\}$, а **\forall -теорией** называют $Th_\forall = \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi - \forall\text{-формула}\}$.

Е и А формулы, теории

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.14. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда:

Класс \exists -аксиоматизируем, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma): K = K(\Gamma)$, Γ - множество \exists -формул;

Класс \forall -аксиоматизируем, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma): K = K(\Gamma)$, Γ - множество \forall -формул.

Е и А аксиоматизируемые классы