5. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Status	Completed

Условной вероятностью события A при условии, что произошло события B, называют число (если вероятность $P(B) \neq 0$)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Пусть имеется событие A и попарно несовместные события положительной вероятности $H_1, ..., H_n$ такие, что $A \subseteq H_1 \cup ... \cup H_n$ (и что их объединение покрывает все множество элементарных исходов, хотя это и не обязательно). Тогда вероятность события A можно вычислить по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i).$$

Доказательство. Заметим, что

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i),$$

и события $A \cap H_1$, $A \cap H_2$, ... попарно несовместны. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(H_i)\, \mathsf{P}(A \mid H_i).$$

Последнее равенство из определения условной вероятности.

В условиях прошлой теоремы, если произошло событие A ненулевой вероятности, то условные вероятности гипотез H_i могут быть вычислены по **формуле Байеса**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

Доказательство. По определению условной вероятности,

$$\mathsf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_k \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}. \qquad \square$$