

7. Случайные величины.

Функции распределения и их свойства.



Status

Completed

Функция $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**, то есть каждому элементарному исходу ставится в соответствие число $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, при каждом значении $x \in \mathbb{R}$ равная вероятности случайной величины ξ принимать значения, меньшие x :

$$F_\xi(t) = P(\xi < t) = P\{\omega : \xi(\omega) < t\}$$

Свойства функции распределения:

1. Не убывание: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$

1. Доказательство из монотонности вероятности, так как $x_1 < x_2$:
 $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$.

2. Пределы:

1. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_\xi(t) = 0$

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} F_\xi(t) = 1$

Доказательство свойства (F2). Заметим сначала, что существование пределов в свойствах (F2), (F3) вытекает из монотонности и ограниченности функции $F_\xi(x)$. Остаётся лишь доказать равенства $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$. Для этого в каждом случае достаточно найти предел по какой-нибудь подпоследова-

тельности $\{x_n\}$, так как существование предела влечёт совпадение всех частичных пределов.

Докажем, что $F_\xi(-n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим вложенную убывающую последовательность событий $B_n = \{\xi < -n\}$:

$$B_{n+1} = \{\xi < -(n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi < -n\} \text{ для любых } n \geq 1.$$

Пересечение B всех этих событий состоит из тех и только тех ω , для которых $\xi(\omega)$ меньше любого вещественного числа. Но для любого элементарного исхода ω значение $\xi(\omega)$ вещественно, и не может быть меньше всех вещественных чисел. Иначе говоря, пересечение событий B_n не содержит элементарных исходов, т. е. $B = \bigcap B_n = \emptyset$. По свойству непрерывности меры, $F_\xi(-n) = P(B_n) \rightarrow P(B) = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Точно так же докажем остальные свойства.

Покажем, что $F_\xi(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $1 - F_\xi(n) = P(\xi \geq n) \rightarrow 0$. Обозначим через B_n событие $B_n = \{\xi \geq n\}$. События B_n вложены:

$$B_{n+1} = \{\xi \geq (n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi \geq n\} \text{ для любых } n \geq 1,$$

а пересечение B этих событий снова пусто: оно означает, что ξ больше любого вещественного числа. По свойству непрерывности меры,

$$1 - F_\xi(n) = P(B_n) \rightarrow P(B) = 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

3. Непрерывность слева: $F_\xi(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

Доказательство свойства (F3). Достаточно доказать, что $F_\xi(x_0 - 1/n) \rightarrow F_\xi(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Иначе говоря, доказать сходимость к нулю следующей разности:

$$F_\xi(x_0) - F_\xi\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = P(\xi < x_0) - P\left(\xi < x_0 - \frac{1}{n}\right) = P\left(x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0\right).$$

У п р а ж н е н и е. Обозначьте событие $\{x_0 - 1/n \leq \xi < x_0\}$ через B_n , и попробуйте снова воспользоваться свойством непрерывности меры. \square

1. Говорим, что события B_n вложены друг в друга, а вероятность от их пересечения равна нулю (так как $P(\xi = x_0) = 0$). Тогда разность сходится к нулю, и из этого функция непрерывна слева.

4. Например

Свойство 9. Для любой случайной величины ξ

$$P(a \leq \xi < b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a).$$

Доказательство. Разобьём событие $\{\xi < b\}$ в объединение несовместных событий: $\{\xi < a\} \cup \{a \leq \xi < b\} = \{\xi < b\}$. По свойству аддитивности вероятности, $P\{\xi < a\} + P\{a \leq \xi < b\} = P\{\xi < b\}$, или $F_{\xi}(a) + P\{a \leq \xi < b\} = F_{\xi}(b)$, что и требовалось доказать. \square

Вообще свойств можно придумать сколько угодно, главные выписаны, (4) уже не так важно, запоминать помимо первых трех смысла мало.