



16. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины, ее свойства, примеры.

Status

Completed

Моментом m -ого порядка случайной величин X называется EX^m .

Теорема о существовании моментов

Пусть $E|X|^m < \infty$ ($m > 0$), тогда $\forall r \in (0, m) : E|X|^r < \infty$.

Доказательство:

$$|x|^r \leq |x|^m + 1 \Rightarrow E|x|^r \leq E|x|^m + 1 \Rightarrow \text{существует.}$$

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называется $DX = E(X - EX)^2$.

\sqrt{DX} - **среднеквадратичное отклонение**.

Свойства:

1. $DX = EX^2 - (EX)^2$

1. $DX = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

2. $DX \geq 0$

3. $DC = 0$

4. Если $DX = 0$, то $P(X = C) = 1$ для некоторой постоянной C .

5. $D(CX) = C^2DX$

6. $D(X + C) = DX$

7. Если X и Y независимы, то $D(X \pm Y) = DX + DY$

$$1. D(X \pm Y) = E(X \pm Y)^2 - (E(X \pm Y))^2 = EX^2 + EY^2 \pm 2EXY - (EX)^2 - (EY)^2 \mp 2EXEY = DX + DY$$

1. $2EXEY$ сокращаются с $2EXY$ по свойству математического ожидания произведения независимых с. в.

Большинство свойств доказывается с использованием определения дисперсии и свойств математического ожидания.

Примеры

Дискретные:

1. **Бернулли** $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$

$$1. DX = p(1 - p)$$

2. **Биномиальное** $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n, n \geq 1, 0 < p < 1$

$$1. DX = np(1 - p)$$

3. **Пуассона** $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots; \lambda > 0$

$$1. DX = \lambda$$

4. **Геометрическое** $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1$

$$1. DX = \frac{1-p}{p^2}$$

Абсолютно непрерывные:

1. **Равномерное** на $[a, b]$

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \sigma^2 > 0$$

$$DX = \sigma^2$$

3. Показательное

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

4. Гамма

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$DX = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

5. Стандартное Коши

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

EX, DX — не существуют