

34. Построение доверительных интервалов для среднего нормальной совокупности.



Status

Completed

Определение доверительного интервала

Доверительным интервалом уровня $1 - \epsilon$ для неизвестного параметра θ называется интервал $(A(\vec{X}), B(\vec{X}))$, такой, что

$$P(A < \theta < B) \geq 1 - \epsilon$$

Доверительный интервал называют **асимптотическим**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A < \theta < B) \geq 1 - \epsilon$$

Доверительный интервал называют **точным**, если знак неравенства можно заменить на знак равенства (в обоих случаях).

Доверительные интервалы для среднего нормальной совокупности

$\vec{X} \sim N_{a, \sigma^2}$, причем есть разные условия для среднего и дисперсии:

Для a, σ^2 известно:

$$P(\bar{X} - \tau_{1-\epsilon/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \tau_{1-\epsilon/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \epsilon, \text{ квантиль } N_{0,1}$$

Выводится из свойства $\sqrt{n}(\frac{\bar{X}-a}{\sigma}) \sim N_{0,1}$

Для a, σ^2 неизвестно:

$$P(\bar{X} - t \frac{S_0}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \frac{S_0}{\sqrt{n}}) = 1 - \epsilon, t = \tau_{1-\epsilon/2}, \text{ квантиль } T_{n-1}$$

Выводится из свойства $\sqrt{n}(\frac{\bar{X}-a}{S_0}) \sim T_{n-1}$



Обращайте внимание на квантили! В данном случае распределения симметричные, так что мы берем одинаковые квантили, пользуясь свойством $\tau_{1-\epsilon/2} = -\tau_{\epsilon/2}$.

Эти интервалы точные, и еще сходятся к a — так как добавки стремятся к нулю с ростом n (во втором случае квантили T_{n-1} сходятся к квантилям нормального распределения).