

# 11. Теорема о независимости функций от независимых случайных величин.



Status

Completed

Линейные преобразования случайных величин, применения к гауссовским распределениям.

## Независимость функций

Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы, если  $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \dots F_{X_n}(t_n)$ .

Если  $\vec{X}$  имеет абсолютно непрерывное распределение, то  $X_1, \dots, X_n$  - независимы  $\Leftrightarrow f_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{X_1}(t_1) \dots f_{X_n}(t_n)$ .

## Теорема о независимости функций от независимых случайных величин

**Теорема 1.** Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы,  $g$  и  $h$  — функции из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Тогда случайные величины  $g(X)$  и  $h(Y)$  также независимы.

*Доказательство.* Для любых  $B_1 \subset \mathbb{R}$ ,  $B_2 \subset \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(g(X) \in B_1, h(Y) \in B_2) = \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1), Y \in h^{-1}(B_2)) =$$

$$= \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1)) \mathbf{P}(Y \in h^{-1}(B_2)) = \mathbf{P}(g(X) \in B_1) \mathbf{P}(h(Y) \in B_2),$$

где  $g^{-1}(B_1) = \{y : g(y) \in B_1\}$ ,  $h^{-1}(B_2) = \{y : h(y) \in B_2\}$ .

## Линейные преобразования случайных величин

**Теорема 25.** Пусть  $\xi$  имеет функцию распределения  $F_\xi(x)$  и плотность распределения  $f_\xi(x)$ , и постоянная  $a$  отлична от нуля. Тогда случайная величина  $\eta = a\xi + b$  имеет плотность распределения

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Доказательство. Пусть сначала  $a > 0$ .

$$F_{\eta}(x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{(x-b)/a} f_{\xi}(t) dt.$$

Сделаем замену переменной в последнем интеграле. Переменную  $t$  заменим на новую переменную  $y$  так:  $t = \frac{y-b}{a}$ . Тогда  $dt = \frac{dy}{a}$ , нижняя граница области интегрирования  $t = -\infty$  перейдёт в  $y = -\infty$ , верхняя граница  $t = \frac{x-b}{a}$  перейдёт в  $y = x$ . Получим

$$F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy.$$

Функция под интегралом есть искомая плотность распределения  $f_{\eta}(y)$  случайной величины  $\eta = a\xi + b$  при  $a > 0$ .

Пусть теперь  $a < 0$ .

$$F_{\eta}(x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = \int_{(x-b)/a}^{+\infty} f_{\xi}(t) dt.$$

Сделаем ту же замену переменной. Но теперь граница интегрирования  $t = +\infty$  перейдёт в  $y = -\infty$ , поскольку  $a < 0$ . Получим

$$F_{\eta}(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{a} f_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = \int_{-\infty}^x \frac{1}{|a|} f_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy.$$

Функция под интегралом — плотность распределения  $f_{\eta}(y)$  случайной величины  $\eta = a\xi + b$  при  $a < 0$ .  $\square$

Следствие 4. Если  $\xi \in N_{0,1}$ , то  $\eta = \sigma\xi + a \in N_{a,\sigma^2}$ .

Доказательство. Действительно,

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{\xi}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad \square$$

Следствие 5. Если  $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ , то  $\frac{\xi-a}{\sigma} \in N_{0,1}$ .

Следствие 6. Если  $\xi \in U_{0,1}$ , то  $a\xi + b \in U_{b,a+b}$  при  $a > 0$ .

Следствие 7. Если  $\xi \in E_{\alpha}$ , то  $\alpha\xi \in E_1$ .