

14. Распределение суммы случайных величин, имеющих нормальное распределение.

Status

Completed

Тут как-то душноовато...

Теорема 7. Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in \Phi_{\alpha_1, \sigma_1^2}$, $X_2 \in \Phi_{\alpha_2, \sigma_2^2}$. Тогда $X_1 + X_2 \in \Phi_{\alpha_1 + \alpha_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Доказательство. Введем новые случайные величины

$$Y_1 = \frac{X_1 - \alpha_1}{\sigma_1}, \quad Y_2 = \frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_2}.$$

Тогда

$$Y_1 \in \Phi_{0,1}, \quad Y_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_2} \in \Phi_{0, \sigma_2^2/\sigma_1^2}.$$

Если мы докажем, что $Y_1 + Y_2 \in \Phi_{0, 1 + \sigma_2^2/\sigma_1^2}$, то по свойству линейных преобразований

$$X_1 + X_2 = \sigma_1(Y_1 + Y_2) + \alpha_1 + \alpha_2 \in \Phi_{\alpha_1 + \alpha_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Обозначим для краткости $\theta^2 = \sigma_2^2/\sigma_1^2$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{Y_1+Y_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\theta^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-u)^2}{2}\right\} du = \\ &= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\theta^2} + u^2 - 2tu + t^2\right)\right\} du = \\ &= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2 \frac{1+\theta^2}{\theta^2} - 2u\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}}t\sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}} + t^2 \frac{\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{t^2}{1+\theta^2}\right)\right\} du = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2(1+\theta^2)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(u\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} - t\sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}} \right)^2 \right\} du.$$

Сделаем замену переменной

$$v = u\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} - t\sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{Y_1+Y_2}(t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\theta^2}} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2(1+\theta^2)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{v^2}{2} \right\} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\theta^2)}} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2(1+\theta^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.