4. Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

Status	Completed

Вероятностное пространство есть тройка вида $<\Omega, S, P>$, где Ω - пространство элементарных исходов, S - совокупность подмножеств Ω (не все, поскольку есть неизмеримые), P - функция $S \to [0,1]$, удовлетворяющая аксиомам:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Счетная аддитивность: если события $A_1, A_2, ...$ таковы, что $A_i A_j = \emptyset \; (i \neq j)$ (попарно несовместны), то

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Тогда у вероятности появляются следующие свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$ (из аксиомы 3).
2. Конечная аддитивность (из аксиомы 3, хвост заменяем на пустые множества).
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
    1. **Доказательство:** $P(A \cup B) = P(B \cup (A \backslash B)) = P(B) + P(A \backslash B); P(A) = P(AB) + P(A \backslash B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$.

5. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.
    1. **Доказательство:** $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$.
6. Свойство непрерывности вероятности
    1. См. Лотова, много бесполезной информации, у Черновой вообще нет.
7. Формула включения-исключения:

Формула включения-исключения:

$$\mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i A_j) \ + \\ + \sum_{i<j<m} \mathsf{P}(A_i A_j A_m) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n).$$