14. Распределение суммы случайных величин, имеющих нормальное распределение.

Status	Completed

Тут как-то душновато...

Теорема 7. *Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in \Phi_{\alpha_1,\,\sigma_1^2}$, $X_2 \in \Phi_{\alpha_2,\,\sigma_2^2}$. Тогда $X_1 + X_2 \in \Phi_{\alpha_1+\alpha_2,\,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.*

Доказательство. Введем новые случайные величины

$$Y_1 = \frac{X_1 - \alpha_1}{\sigma_1}, \quad Y_2 = \frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_1}.$$

Тогда

$$Y_1 \in \Phi_{0,\,1}, \quad Y_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_2} \in \Phi_{0,\,\sigma_2^2/\sigma_1^2}.$$

Если мы докажем, что $Y_1 + Y_2 \in \Phi_{0,\,1+\sigma_2^2/\sigma_1^2}$, то по свойству линейных преобразований

$$X_1 + X_2 = \sigma_1(Y_1 + Y_2) + \alpha_1 + \alpha_2 \in \Phi_{\alpha_1+\alpha_2,\,\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Обозначим для краткости $\theta^2 = \sigma_2^2/\sigma_1^2$. Тогда

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\theta^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-u)^2}{2}\right\} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\theta^2} + u^2 - 2tu + t^2\right)\right\} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2\frac{1+\theta^2}{\theta^2} - 2u\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}}t\sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}} + t^2\frac{\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{t^2}{1+\theta^2}\right)\right\} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \exp\left\{-\frac{t^2}{2(1+\theta^2)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} - t\sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}}\right)^2\right\} du.$$

Сделаем замену переменной

$$v = u\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} - t\sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{Y_1+Y_2}(t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\theta^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2(1+\theta^2)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\theta^2)}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2(1+\theta^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.