

# 19. Сходимость по вероятности, ее свойства.

▼ Status

Completed

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  **сходится** к  $X$  по вероятности,  $X_n \xrightarrow{P} X$ , если  $\forall \epsilon > 0 : P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  **сходится слабо** к случайной величине  $X$ ,  $X_n \Rightarrow X$ , если для каждой точки непрерывности функции распределения  $F_X(t)$  имеет место сходимость  $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Свойства:

$$1. X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y.$$

$$\begin{aligned} P(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \epsilon) &= P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \epsilon) \leq \\ &\leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \epsilon) \leq \\ &\leq P(\{|X_n - X| \geq \epsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \epsilon/2\}) \leq \\ &\leq P(|X_n - X| \geq \epsilon/2) + P(|Y_n - Y| \geq \epsilon/2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Пусть при  $n \rightarrow \infty$   $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a_1, X_n^{(2)} \xrightarrow{P} a_2, \dots, X_n^{(k)} \xrightarrow{P} a_k$ , функция  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $a = (a_1, \dots, a_k)$ . Тогда

$$g(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)}) \xrightarrow{P} g(a_1, \dots, a_k).$$

2. при  $n \rightarrow \infty$ .

3. Если  $X_n \Rightarrow X$ ,  $g(t)$  — непрерывная, то  $g(X_n) \Rightarrow g(X)$ .

4. Если  $X_n \xrightarrow{P} X$ , то  $X_n \Rightarrow X$ .

5. Если  $X_n \Rightarrow C$ , то  $X_n \xrightarrow{P} C$ .

Докажем, что слабая сходимость к постоянной влечёт сходимость по вероятности. Пусть  $\xi_n \Rightarrow c$ , т. е.

$$F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c; \\ 1, & x > c \end{cases}$$

при любом  $x$ , являющемся точкой непрерывности предельной функции  $F_c(x)$ , т. е. при всех  $x \neq c$ .

Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$  и докажем, что  $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon) &= P(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) \geq P(c - \varepsilon/2 \leq \xi_n < c + \varepsilon) = \\ &= F_{\xi_n}(c + \varepsilon) - F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2) \rightarrow F_c(c + \varepsilon) - F_c(c - \varepsilon/2) = 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

поскольку в точках  $c + \varepsilon$  и  $c - \varepsilon/2$  функция  $F_c$  непрерывна, и, следовательно, имеет место сходимость последовательностей  $F_{\xi_n}(c + \varepsilon)$  к  $F_c(c + \varepsilon) = 1$  и  $F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2)$  к  $F_c(c - \varepsilon/2) = 0$ .

Осталось заметить, что  $P(|\xi_n - c| < \varepsilon)$  не бывает больше 1, так что по свойству предела зажатой последовательности  $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \rightarrow 1$ .  $\square$

**6. Теорема Слущкого.** Если  $X_n \xrightarrow{P} C$ ,  $Y_n \Rightarrow Y$ , то

1.  $X_n + Y_n \Rightarrow C + Y$ ;
2.  $X_n Y_n \Rightarrow CY$ .