

# Определения

## Общее

**Определение 3.4.** Алгебраическая система  $\mathfrak{A}$  состоит из основного множества  $A$  и заданных на нём предикатов  $P_1, \dots, P_n$ , функций  $f_1, \dots, f_k$  и констант  $c_1, \dots, c_l$ .

Кортеж

$$\sigma = \langle P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}, f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}, c_1, \dots, c_l \rangle$$

предикатных символов  $P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}$ , функциональных символов  $f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}$  и константных символов  $c_1, \dots, c_l$  называется **сигнатурой** алгебраической системы  $\mathfrak{A}$  и обозначается  $\sigma = \sigma(\mathfrak{A})$ . При этом запись  $P_i^{s_i}$  означает, что  $P_i$  является  $s_i$ -местным предикатом алгебраической системы  $\mathfrak{A}$ , а запись  $f_i^{r_i}$  означает, что  $f_i$  является  $r_i$ -местной функцией алгебраической системы  $\mathfrak{A}$ .

Основное множество  $A$  также называется **универсумом** алгебраической системы  $\mathfrak{A}$  и обозначается  $A = |\mathfrak{A}|$ .

Алгебраическая система

**Определение 3.7.** Пусть дана сигнатура

$$\sigma = \langle P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}, f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}, c_1, \dots, c_l \rangle.$$

Определим понятие **формулы** сигнатуры  $\sigma$ .

38

- 
1. Если  $t_1$  и  $t_2$  — термы, то  $t_1 = t_2$  — формула.
  2. Если  $t_1, \dots, t_s$  — термы и предикатный символ  $P^s \in \sigma$ , то  $P(t_1, \dots, t_s)$  — формула.
  3. Если  $\varphi$  и  $\psi$  — формулы, то  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \& \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $\neg \varphi$ ,  $\exists x \varphi(x)$  и  $\forall x \varphi(x)$  — формулы.
  4. Других формул нет.

Формулы логики предикатов

# Гомоморфизмы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1.** Пусть задана сигнатура  $\sigma$ ,  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ .

Пусть задано отображение  $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ ,  $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|; \sigma \rangle$ ,  $|\mathfrak{A}| = A$ .

$h$  называется **гомоморфизмом**, если  $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

выполняется:

- 1)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ;
- 2)  $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ;
- 3)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ .

Гомоморфизм

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2.** Отображение  $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  называется **эпиморфизмом**, если  $h$  — гомоморфизм и так же является *сюръекцией* (отображением "на").

Эпиморфизм

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3.** Отображение  $h$  называется **изоморфизмом**, если:

- 1)  $h$  — биекция;
- 2)  $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$  выполняется:
  - а)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ;
  - б)  $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ;
  - в)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ .

Изоморфизм

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4.** Отображение  $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  называется **изоморф-**

**НЫМ** вложением, если:

- 1)  $h$  — инъекция (разнозначное отображение);
- 2)  $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$  выполняется:
  - а)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ;
  - б)  $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ;
  - в)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ .

Изоморфное вложение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1.** Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ .

$\mathfrak{A}$  — **подмодель**  $\mathfrak{B}$  (обозначается  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ ), если:

- 1)  $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ ;
- 2)  $\forall P^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$  выполняется:
 
$$\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n);$$
- 3)  $\forall f^n \in \sigma, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ ;
- 4)  $\forall c \in \sigma, c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ .

Подмодель

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.3.**

Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ .  $\mathfrak{A}$  — **элементарная подмодель**  $\mathfrak{B}$  (обозначается  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ ), если:

- 1)  $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ ;
- 2)  $\forall \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma), \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$  выполняется:
 
$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Элементарная подмодель

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3.** Пусть  $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $A \subseteq |\mathfrak{B}|$ . Будем говорить, что множество  $A$  **замкнуто относительно операций** модели  $\mathfrak{B}$ , если:

- 1)  $\forall f^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in A$  имеем  $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$ ;
- 2)  $\forall c \in \sigma, c^{\mathfrak{B}} \in A$ .

Замкнутость относительно операций

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.7.** Пусть  $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $X \subseteq |\mathfrak{B}|$ ,  $X \neq \emptyset$ . Тогда существует подмодель  $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$ , которая является наименьшей по включению среди таких подмоделей  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} : X \subseteq |\mathfrak{A}|$  (среди всех подмоделей, содержащих  $X$ , существует наименьшая подмодель). Эта подмодель называется **подмоделью, порождаемой множеством**  $X$ .  $\mathfrak{C} = \text{sub}_{\mathfrak{B}}(X)$ .

Подмодель, порождаемая множеством

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.15.** Рассмотрим  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\sim$  — эквивалентность на  $A = |\mathfrak{A}|$  называется **конгруэнцией** на  $\mathfrak{A}$ , если для  $\forall f^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$ , если  $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$ , то  $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$ . Иначе говоря, конгруэнция — это отношение эквивалентности, перестановочное с операциями.

Конгруэнция на модели

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.16.** Пусть  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\sim$  — конгруэнция на  $\mathfrak{A}$ .  
 $a/\sim = [a]_\sim = [a] = \{b \in |\mathfrak{A}| \mid a \sim b\}$  — **класс эквивалентности** (смежный класс).

Пусть  $A = |\mathfrak{A}|$ ,  $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ , тогда  $A/\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$ ,  
 $\mathfrak{A}/\sim = \langle A/\sim; \sigma \rangle$  — **фактор-модель**.

Пусть  $P^n, f^n, c \in \sigma, a_1 \dots a_n \in |\mathfrak{A}|$ . Тогда:

- а)  $\mathfrak{A}/\sim \models P([a_1], \dots, [a_n]) : \exists b_1 \dots b_n \in |\mathfrak{A}|$ , если  $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$ , то  $\mathfrak{A} \models P(b_1, \dots, b_n)$ ;
- б)  $f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)]$ ;
- в)  $c^{\mathfrak{A}/\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$ .

Класс эквивалентности, фактор модель

**ТЕОРЕМА 13.23. (Основная теорема о гомоморфизмах).**

Любой гомоморфизм является композицией факторизации и изоморфного вложения.

Основная теорема о гомоморфизмах

## Секвенциальное исчисление предикатов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1.**  $\Gamma = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$  — конечная последовательность формул.

**Секвенциями** называются выражения вида:

- 1)  $\Gamma \vdash \varphi$  (из  $\Gamma$  выводимо  $\varphi$ )
- 2)  $\vdash \varphi$  ( $\varphi$  выводится)
- 3)  $\Gamma \vdash$  ( $\Gamma$  противоречиво)

Определения секвенций

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1.

- 1)  $\varphi \vdash \varphi$ ;
- 2)  $\vdash \forall x(x = x)$ ;
- 3)  $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$ ;
- 4)  $\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \& y = z \rightarrow x = z)$ ;
- 5)  $t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n, [\varphi]_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash [\varphi]_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n}$

или же

$$t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n, \varphi(t_1, \dots, t_n) \vdash \varphi(q_1, \dots, q_n)$$

При замене  $x_1$  на  $t_1, \dots, x_n$  на  $t_n$  не возникают коллизии, т.е.

$\forall i \leq n, \forall y \in FV(t_i) x_i$  не входит в область действия кванторов по  $y$ .

Определение секвенциального исчисления предикатов

#### Правила вывода:

- 1)  $\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}$
- 2)  $\frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$
- 3)  $\frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$
- 4)  $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$
- 5)  $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$
- 6)  $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash \xi; \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$
- 7)  $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}$
- 8)  $\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$  (modus ponens)
- 9)  $\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$
- 10)  $\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi; \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash}$
- 11)  $\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Gamma_1 \vdash \xi}$
- 12)  $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$
- 13)  $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}, x \notin FV(\Gamma)$
- 14)  $\frac{\Gamma, [\varphi]_t^x \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$
- 15)  $\frac{\Gamma \vdash [\varphi]_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$
- 16)  $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi}, x \notin FV(\Gamma \cup \{\psi\})$ .

Правила вывода

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2.** Последовательность секвенций  $S_1, \dots, S_n$  называется **доказательством**, если каждая секвенция  $S_i$  — это либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением некоторого правила вывода.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.3.** Секвенция  $S$  называется **доказуемой**, если  $\exists$  доказательство  $S_1, \dots, S_n$ , заканчивающееся на  $S$  ( $S_n = S$ ).

Доказательство и доказуемость

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.5.** **Дерево секвенций:**  $D, h(D), V(D)$  :

1) Если  $S$  — секвенция, то  $S$  — дерево,  $V(D) = S, h(D) = 1$ ;

2) Пусть  $D_1, \dots, D_k$  — деревья,  $S$  — секвенция, тогда конструкция  $D = \frac{D_1; \dots; D_k}{S}$  — дерево,

$$h(D) = \max(h(D_1), \dots, h(D_k)) + 1,$$

$$V(D) = V(D_1) \cup \dots \cup V(D_k).$$

3) Других деревьев нет.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.6.** Дерево секвенций называется **деревом вывода**, если все его вершины являются аксиомами, а все переходы являются частными случаями правил вывода.

Дерево секвенций и дерево вывода

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.8.** Дерево секвенций  $\frac{S_1; \dots; S_n}{S}$  высоты 2 называется **производным правилом вывода**, если  $\exists D = \frac{S}{S}$ , заканчивающееся на эту секвенцию  $S$ , у которого все переходы являются частными случаями правил вывода, а вершины — либо аксиомы, либо одна из секвенций  $S_1, \dots, S_n$ .

Производное правило вывода

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.13.** Формулы  $\varphi$  и  $\psi$  называются **равносильными** ( $\varphi \equiv \psi$ ), если секвенции  $\varphi \vdash \psi$  и  $\psi \vdash \varphi$  являются доказуемыми.

Равносильность формул

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.17.**

- 1) Секвенция  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$  называется тождественно истинной, если  $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi\}))$  и  $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi\}) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  имеет место следующее утверждение: если  $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma], \dots, \mathfrak{A} \models \varphi_n[\gamma]$ , то  $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ ;
- 2) Секвенция  $\vdash \varphi$  называется тождественно истинной, если  $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$  и  $\forall \gamma : FV(\varphi) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  выполняется  $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ ;
- 3) Секвенция  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  называется тождественно истинной, если  $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}))$  и  $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \rightarrow |\mathfrak{A}| \exists i \leq n : \mathfrak{A} \not\models \varphi_i[\gamma]$ .

Семантика секвенций логики предикатов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.22 (каноническая форма).** Говорят, что формула  $\varphi$  находится в **предваренной нормальной форме (ПНФ)**, если она имеет вид:  $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$ , где  $\psi$  — бескванторная,  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ .

Предваренная нормальная форма (ПНФ)



**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.21.** Пусть  $x \notin FV(\xi)$ , тогда имеют место следующие

эквивалентности:

- 1)  $\forall x\xi \equiv \xi$ ;
- 2)  $\exists x\xi \equiv \xi$ ;
- 3)  $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$ ;
- 4)  $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$ ;
- 5)  $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$ ;
- 6)  $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$ ;
- 7)  $(\forall x\varphi \ \& \ \forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \ \& \ \psi)$ ;
- 8)  $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ ;
- 9)  $((\forall x\varphi) \ \& \ \xi) \equiv \forall x(\varphi \ \& \ \xi)$ ;
- 10)  $((\exists x\varphi) \ \& \ \xi) \equiv \exists x(\varphi \ \& \ \xi)$ ;
- 11)  $((\forall x\varphi) \vee \xi) \equiv \forall x(\varphi \vee \xi)$ ;
- 12)  $((\exists x\varphi) \vee \xi) \equiv \exists x(\varphi \vee \xi)$ ;
- 13)  $\forall x[\varphi]_x^z \equiv \forall y[\varphi]_y^z$ , если  $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$  (если не возникает коллизий);
- 14)  $\exists x[\varphi]_x^z \equiv \exists y[\varphi]_y^z$ , если  $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$  (если не возникает коллизий).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

Эквивалентности

**ТЕОРЕМА 14.23.** Для всех формул  $\varphi$  существует эквивалентная ей формула  $\psi \equiv \varphi$ , находящаяся в ПНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Алгоритм приведения формулы к ПНФ:

- 1) Избавляемся от импликаций;
- 2) С помощью тождеств 5, 6 из 14.21, а также законов де Моргана и снятия двойного отрицания, вносим отрицание под кванторы.
- 3) С помощью тождеств 13, 14 переобозначаем переменные так, чтобы:
  - а) разные кванторы действовали по разным переменным;
  - б) каждая переменная имела либо только свободное, либо только связанное вхождение.
- 4) С помощью 9-12 выносим кванторы наружу.

В результате получим функцию, эквивалентную изначальной, но находящейся в ПНФ.

Теорема доказана.

Алгоритм приведения к ПНФ

## Теорема о существовании модели

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1.** Пусть  $\sigma$  – сигнатура,  $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ ,  $\varphi \in F(\sigma)$ . Тогда:

- 1)  $\Gamma \vdash \varphi$ , если  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$  такие, что секвенция  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$  – доказуема;
- 2)  $\Gamma \vdash$ , если  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$  такие, что секвенция  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  – доказуема;
- 3)  $\Gamma \not\vdash$ , если  $\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$  секвенция  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  – недоказуема;
- 4)  $\Gamma \subseteq S(\sigma)$  называется **теорией** (в сигнатуре  $\sigma$ ), если оно (множество  $\Gamma$ ) является **дедуктивно замкнутым**, т.е.  $\forall \varphi \in S(\sigma) : (\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma)$ ;
- 5) Множество  $\Gamma \subseteq S(\sigma)$  – **полное** на сигнатуре  $\sigma$ , если  $\forall \varphi \in S(\sigma) : (\varphi \in \Gamma \text{ или } \neg \varphi \in \Gamma)$ .

Теория, дедуктивная замкнутость, полное множество предложений

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.4.** Пусть  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ , тогда **элементарной теорией модели**  $\mathfrak{A}$  называют:  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ .

Элементарная теория

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.5.** Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ . Модели  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  называют **элементарно эквивалентными** ( $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ), если их элементарные теории

33

совпадают, т.е.  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ , т.е.  $\forall \varphi \in S(\sigma) : (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$ .

Элементарная эквивалентность моделей

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.14.** Пусть модель  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$  и  $X$  — множество переменных. Тогда отображение  $\gamma : X \rightarrow |\mathfrak{A}|$  называется **интерпретацией (означиванием)** переменных из  $X$  на  $\mathfrak{A}$ .

Рассмотрим  $\Gamma \subseteq F(\sigma)$  и  $FV(\Gamma) = \{x \mid \exists \varphi \in \Gamma : x \in FV(\varphi)\}$ . Пусть  $FV(\Gamma) \subseteq X$ . Тогда говорят, что  $\Gamma$  **истинно на модели**  $\mathfrak{A}$  при **означивании**  $\gamma$  и пишут  $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ , если  $\forall \varphi \in \Gamma : \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ .

Говорят, что  $\Gamma$  **выполнимо на модели**  $\mathfrak{A}$ , если  $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  такое, что  $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ .

Говорят, что  $\Gamma$  **выполнимо (или имеет модель)**, если  $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma))$  и  $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  такие, что  $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ .

Выполнимость на модели

**ТЕОРЕМА 15.15 (теорема о существовании модели).** Любое непротиворечивое множество формул имеет модель, т.е.

$\forall \Gamma \subseteq F(\sigma)$  таких, что  $\Gamma \not\models$ , выполняется:

$$\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \text{ и } \exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}| \text{ такие, что } \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma].$$

Теорема о существовании модели (ТОСМ)

**ЛЕММА 15.18 (Хенкина).**

- а)  $T'$  — непротиворечивое;
- б)  $T'$  — полное;
- в)  $T'$  — теория;
- г)  $(\varphi \& \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T' \text{ и } \psi \in T'$ ;
- д)  $(\varphi \vee \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T' \text{ или } \psi \in T'$ ;
- е)  $\neg\varphi \in T' \Leftrightarrow \varphi \notin T'$ ;
- ж)  $(\varphi \rightarrow \psi) \in T' \Leftrightarrow \text{если } \varphi \in T', \text{ то } \psi \in T'$ ;
- з)  $\exists x\psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \exists t \in T(\sigma') : FV(t) = \emptyset \text{ (замкнутый терм) и } \psi(t) \in T'$ ;
- и)  $\forall x\psi(x) \in T' \Leftrightarrow \forall c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \forall t \in T(\sigma') : \text{если } FV(t) = \emptyset \text{ (замкнутый терм) , то } \psi(t) \in T'.$

Лемма Хенкина

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.34.** Рассмотрим  $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ . Говорят, что  $\Gamma$  **совместно**, если  $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  такие, что  $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ .

Совместность

Множество формул  $\Gamma$  называется **локально совместным**, если каждое его конечное подмножество является совместным, т.е.  $\forall \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , где  $\Gamma_0$  - конечное и совместное.

Локальная совместность

**ТЕОРЕМА 15.35 (Мальцева о компактности).** Множество формул совместно  $\Leftrightarrow$  когда оно локально совместно.

Теорема Мальцева о компактности

**ТЕОРЕМА 15.36 (Гёделя о полноте).** Любая т.и. формула является доказуемой.

Теорема Гёделя о полноте

**ТЕОРЕМА 15.39 (Мальцева о расширении).** Если множество предложений имеет бесконечную модель, то оно имеет сколь угодно большую модель, т.е. пусть  $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ ,  $\mathfrak{B} \models \Gamma$ ,  $\mathfrak{B}$  - бесконечная. Тогда для  $\forall$  кардинала  $\alpha \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$  такая, что  $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ,  $\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$ .

Мальцева о расширении

### 7.3. Ординалы и кардиналы

**Определение 7.22.** *Ординальными числами (ординалами) называются:*

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0 = \emptyset; \\ \alpha_1 &= 1 = \{\emptyset\}; \\ \alpha_2 &= 2 = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}; \\ \alpha_3 &= 3 = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}; \\ &\dots \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \cup \{\alpha_n\}; \\ \omega &= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \dots\}; \\ \omega + 1 &= \omega \cup \{\omega\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \dots, \omega\}; \\ 2\omega &= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n, \dots\}; \\ &\dots \\ \alpha &= \{\beta \mid \beta < \alpha\}.\end{aligned}$$

**Определение 7.23.**  $\alpha$  называется **непредельным** ординалом, если существует ординал  $\beta$  такой, что  $\alpha = \beta + 1$ .

$\alpha$  называется **предельным** ординалом, если не существует ординала  $\beta$  такого, что  $\alpha = \beta + 1$ .

Ординал

**Определение 7.26.** Ординал  $\alpha$  называется **кардиналом**, если для любого ординала  $\beta < \alpha$  имеет место  $\|\beta\| \neq \|\alpha\|$ .

**Замечание 7.27.**

1.  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \omega$  – кардиналы.
2.  $\omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, \dots$  – не кардиналы.

**Доказательство:** упражнение.

Кардинал

## Эквивалентность классов вычислительных функций

**Определение 9.3. Примитивно-рекурсивные функции (прф):**

- а) простейшие функции являются примитивно-рекурсивными;
- б) функция, полученная из примитивно-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции или оператора примитивной рекурсии, является примитивно-рекурсивной;
- в) других примитивно-рекурсивных функций нет.

**Частично-рекурсивные функции (чрф):**

- а) простейшие функции являются частично-рекурсивными;
- б) функция, полученная из частично-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции, оператора примитивной рекурсии или оператора минимизации, является частично-рекурсивной;
- в) других частично-рекурсивных функций нет.

**Общерекурсивными функциями (орф)** называются всюду определённые частично-рекурсивные функции.

Класс всех примитивно-рекурсивных функций обозначается **ПРФ**, класс всех общерекурсивных функций – **ОРФ**, а класс всех частично-рекурсивных функций – **ЧРФ**.

ЧРФ, ПРФ, ОРФ



## 9.1. Основные определения и обозначения

**Определение 9.1.** Следующие функции называются *простейшими*:

- а)  $O(x) = 0$ ;
- б)  $S(x) = x + 1$ ;
- в)  $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m, m \leq n$ .

**Определение 9.2.**

а) **Оператор суперпозиции.** Рассмотрим функции  $g(x_1, \dots, x_k)$ , и  $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)$ .

Говорят, что функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n))$$

получена из функций  $g, h_1, \dots, h_k$  применением **оператора суперпозиции**.

б) **Оператор примитивной рекурсии.** Рассмотрим функции

$$g(x_1, \dots, x_n) \text{ и } h(x_1, \dots, x_n, y, z).$$

Пусть выполнено

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n); \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция  $f$  получена из функций  $g$  и  $h$  применением **оператора примитивной рекурсии**.

в) **Оператор минимизации.** Рассмотрим функцию  $g(x_1, \dots, x_n, y)$ . Пусть выполнено:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y, & \begin{aligned} &g(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \\ &\forall i < y \ g(x_1, \dots, x_n, i) \text{ определена} \\ &\text{и } \forall i < y \ g(x_1, \dots, x_n, i) \neq 0; \end{aligned} \\ \text{не определена,} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция  $f$  получена из функции  $g$  применением **оператора минимизации**. Это обозначается так:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Простейшие функции, оператор суперпозиции, оператор примитивной рекурсии, оператор минимизации

### ТЕОРЕМА 17.17 (о нормальной форме Клини)

Пусть функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  — вычислимая на МТ. Тогда существует **прф**  $g(x_1, \dots, x_n, y)$  такая, что  $f(x_1, \dots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0])$ , т.е. берем **прф**, применяем к ней оператор минимизации и берем левую компоненту с вышедшей канторовской нумерации.

Теорема о нормальной форме Клини

СЛЕДСТВИЕ 17.20 (**основная теорема о вычислимых функциях**).  
**ЧРФ = ВТ = ПВТ.**

Основная теорема о вычислимых функциях

### ТЕОРЕМА 17.23 (**Тезис Чёрча**).

Любая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.

Тезис Черча

## Универсальные вычислимые функции

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1.** Пусть  $K$  — множество частичных функций вида  $g : N^n \rightarrow N$ . Функция  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  называется **универсальной** для класса  $K$ , если:

- а)  $\forall m \in \mathbb{N} : f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$ ;
- б)  $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K \exists m \in \mathbb{N} : g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$ ,

Если объединить два условия, то выходит, что класс

$K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$ . Или же, иными словами, функция  $f$  осуществляет нумерацию всех функций класса  $K$ .

Универсальная функция



**ЗАМЕЧАНИЕ 18.2.** Класс  $K$  имеет универсальную функцию  $\Leftrightarrow$  класс конечен или счётен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

**СЛЕДСТВИЕ 18.3.** Если класс  $K$  континуален, то он не имеет универсальной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

**СЛЕДСТВИЕ 18.4.** Класс всех  $n$ -местных частичных функций не имеет универсальной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: УПРАЖНЕНИЕ.

18.2 - 18.4

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.14.** Следующие функции называются **клиниевскими скобками**:  $[x, y] = c(l(x), c(r(x), y))$ .

Клиниевские скобки

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.24.** Функция  $\varkappa(n) = K^2(n, x)$  называется **клиниевской нумерацией ЧРФ<sup>1</sup>**, т.е.  $\varkappa : \mathbb{N} \rightarrow \text{ЧРФ}^1$ .

Клиниевская нумерация ЧРФ ( $\varkappa \in \varkappa$ )

**ТЕОРЕМА 18.26. (теорема Райса).** Пусть класс  $K \subseteq \text{ЧРФ}^1$ ,  $K \neq \emptyset$ ,  $K \neq \text{ЧРФ}^1$ . Тогда множество номеров  $M = \{n \mid \varkappa(n) \in K\}$  не рекурсивно, т.е. функция  $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$  не является чрф.

—

Теорема Райса

## Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.2.** Множество  $A \subseteq \mathbb{N}^k$  называется **рекурсивным** (примитивно рекурсивным), если его характеристическая функция  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$  является **орф** (прф).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.3.** Множество  $A \subseteq \mathbb{N}^k$  называется **рекурсивно перечислимым**, если  $A = \emptyset$  или существуют **орф**<sup>1</sup>  $f_1, \dots, f_k$  такие, что  $A = \{\langle f_1(n), \dots, f_k(n) \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

В частности, если  $A \subseteq \mathbb{N}$  и существует **орф**<sup>1</sup>  $f$  такая, что  $A = \rho f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  – область значений, то  $A$  является рекурсивно перечислимым.

Примитивно рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

**ТЕОРЕМА 19.10 (Поста).** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ .

Тогда  $A$  рекурсивно  $\Leftrightarrow A, \bar{A}$  являются рпм.

Теорема Поста

## Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.1.** Сигнатура  $\Sigma_0 = \langle <^2, +^2, *^2, S^1, 0 \rangle$  является **сигнатурой арифметики Пеано**. Введем обозначения:

$T(\Sigma_0)$  – множество термов  $\Sigma_0$ .

$F(\Sigma_0)$  – множество формул  $\Sigma_0$ .

$S(\Sigma_0)$  – множество предложений  $\Sigma_0$ .

$\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  – множество переменных.

Сигнатура арифметики Пеано

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.4.** Пусть  $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$ . Множество  $X$  является разрешимым, если  $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$  - рм. Множество  $X$  является перечислимым, если  $\gamma(X)$  - рпм.

Разрешимое и перечислимое множество

... ..

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.14.** Пусть  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ . Говорят, что  $f$  **представима** в  $A_0$ , если существует формула  $\varphi(v_0, \dots, v_k) \in F(\Sigma_0)$  такая, что для  $\forall n_0 \dots n_k \in \mathbb{N}$  выполняется:

- 1)  $f(n_0, \dots, n_{k-1}) = n_k \Rightarrow A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$ ;
- 2)  $f(n_0, \dots, n_{k-1}) \neq n_k \Rightarrow A_0 \vdash \neg \varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$ .

Представимость функции в арифметике Пеано

**ТЕОРЕМА 20.16 (Гёделя о неразрешимости).**

Пусть  $T \subseteq S(\Sigma_0)$ ,  $A_0 \subseteq T$ ,  $T$  - непротиворечивая теория. Тогда  $T$  неразрешима.

Это означает, что система аксиом  $A_0$  **наследственно неразрешима**, то есть любая содержащая её непротиворечивая теория является неразрешимой.

Теорема Гёделя о неразрешимости

**ТЕОРЕМА 20.17.(Чёрча о неразрешимости).**

Множество доказуемых формул (теорем логики предикатов)  $ИП_{\Sigma_0}$  является неразрешимым.

Теорема черча о неразрешимости

**ТЕОРЕМА 20.20.(Гёделя о неполноте).**

Пусть  $T \subseteq S(\Sigma_0)$ ,  $A_0 \subseteq T$ ,  $T$  - перечислимая, непротиворечивая теория. Тогда  $T$  не полна, т.е. система аксиом арифметики Пеано  $A_0$  не имеет непротиворечивых перечислимых пополнений.

Теорема Гёделя о неполноте

## Аксиоматизируемые классы

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.1.

Рассмотрим  $K_\sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ — модель сигнатуры } \sigma\}$ . Пусть класс моделей  $K \subseteq K_\sigma$ . Тогда **теорией класса** называется множество предложений  $Th(K) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \forall \mathfrak{A} \in K: \mathfrak{A} \models \varphi\}$ .

Теория класса

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.2.

Пусть  $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ . Тогда  $K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \forall \varphi \in \Gamma: \mathfrak{A} \models \varphi\}$ .

Класс множества предложений

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.3.

Пусть  $K \subseteq K_\sigma$ . Класс  $K$  называется **аксиоматизируемым**, если  $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma)$  такое, что  $K = K(\Gamma)$ . В нашем случае  $\Gamma$  есть множество аксиом.

Аксиоматизируемый класс

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.11.

Класс  $K$  является **конечно аксиоматизируемым**  $\Leftrightarrow \exists \Gamma \in S(\sigma)$  - конечное и  $K = K(\Gamma)$ .

Конечно аксиоматизируемый класс

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.7.

Пусть  $\mathfrak{A} \in K_\sigma$ . **Элементарной диаграммой** модели  $\mathfrak{A}$  называют множество предложений  $D(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi, \varphi \text{ - бескванторная}\}$ .

**Полной диаграммой** модели  $\mathfrak{A}$  называют множество предложений  $FD(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$ .

Элементарная и полная диаграмма

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.11.**

Пусть  $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  - бескванторная формула. Тогда следующими формулами называются:

$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  -  **$\exists$ -формула (экзистенциальная)**;

$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  -  **$\forall$ -формула (универсальная)**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.12.**

Пусть  $K \subseteq K_\sigma$ . Тогда  **$\exists$ -теорией** называют множество предложений  $Th_\exists = \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi \text{ — } \exists\text{-формула}\}$ , а  **$\forall$ -теорией** называют  $Th_\forall = \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi \text{ — } \forall\text{-формула}\}$ .

Е и А формулы, теории

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.14.** Пусть  $K \subseteq K_\sigma$ . Тогда:

Класс  $\exists$ -аксиоматизируем, если  $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma): K = K(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  - множество  $\exists$ -формул;

Класс  $\forall$ -аксиоматизируем, если  $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma): K = K(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  - множество  $\forall$ -формул.

Е и А аксиоматизируемые классы