38. Критерий хи-квадрат.

Status	Completed

Теорема Пирсона

$X \sim F$, проверяются гипотезы как обычно.

Разобьем область возможных значений X_1 на k непересекающихся промежутков Δ_j.

$p_j = P_{H_0}(X_1 \in \Delta_j)$,

ν_j - число наблюдений, попавших j-ый промежуток,

$\Psi_n = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$

Если $0 < p_i < 1$ при всех $i = 1, ..., k$, то для любого $y > 0$, при верной H_0

$$\Psi_n \Rightarrow \eta \sim \chi^2_{k-1}.$$

Докажем теорему Пирсона при $k = 2$.
В этом случае $\nu_2 = n - \nu_1$, $p_2 = 1 - p_1$. Посмотрим на ρ и вспомним ЦПТ:

$$\rho(\mathbf{X}) = \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(\nu_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n - \nu_1 - n(1-p_1))^2}{n(1-p_1)} =$$

$$= \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(-\nu_1 + np_1)^2}{n(1-p_1)} = \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} = \left(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2$$

Но величина ν_1 есть сумма n независимых случайных величин с распределением Бернулли B_{p_1}, и по ЦПТ

$$\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \Rightarrow \xi,$$

где ξ имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому

$$\rho(\mathbf{X}) = \left(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2 \Rightarrow \xi^2.$$

Величина ξ^2 имеет χ^2-распределение H_1 с одной степенью свободы. □

Критерий Хи-квадрат

Проверяет, что распределение выборки равно некоторому известному.

Пусть $\vec{X} \sim F$

$H_0 = \{F = F_0\}$

$H_a = \{F \neq F_0\}$

$$\Psi_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Psi_n < c \\ 1, & \Psi_n \geq c \end{cases}$$

где $\chi^2_{k-1}(c) = 1 - \epsilon$.

> ☝️ Метод разбиения на промежутки тут не указан, но он важен! Если сделать 1 промежуток, то, понятно, критерий будет всегда срабатывать, а если слишком много — никогда. Постройте аналогию с гистограммой. Также, если распределение имеет артефакты внутри промежутков, вы это никак не узнаете, так что, по сути, проверяется немного другая гипотеза.

Свойства

1. Критерий состоятельный

Упражнение. Вспомнить закон больших чисел и доказать, что если H_1' неверна, то найдется $j \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что

$$\frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{n}{p_j}\left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2 \xrightarrow{p} \infty.$$

Осталось построить критерий в соответствии с K2.

Понимаем, что $\frac{\nu_j}{n} = (I(X_1 \in \Delta_j) + ... + I(X_n \in \Delta_j))/n \overset{\text{ЗБЧ}}{=} EI(X_1 \in \Delta_j) = p_j$ (при H_0). Иначе — разность будет ненулевой, и с увеличением n как минимум одно слагаемое будет стремиться к бесконечности.

2. Критерий имеет асимптотический размер $1 - \epsilon$.
3. Реально допустимый уровень значимости: $\epsilon^* = P(\eta \geq \Psi_n) = 1 - \chi^2_{k-1}(\Psi_n)$.