

4. Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

▼ Status

Completed

Вероятностное пространство есть тройка вида $\langle \Omega, S, P \rangle$, где Ω - пространство элементарных исходов, S - совокупность подмножеств Ω (не все, поскольку есть неизмеримые), P - функция $S \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая аксиомам:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Счетная аддитивность: если события A_1, A_2, \dots таковы, что $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) (попарно несовместны), то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Тогда у вероятности появляются следующие свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$ (из аксиомы 3).
2. Конечная аддитивность (из аксиомы 3, хвост заменяем на пустые множества).
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

1. **Доказательство:** $P(A \cup B) = P(B \cup (A \setminus B)) = P(B) + P(A \setminus B)$; $P(A) = P(AB) + P(A \setminus B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$.

5. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

1. **Доказательство:** $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

6. Свойство непрерывности вероятности

6. Свойство непрерывности вероятности. Оно состоит из двух пунктов:
а) если события A_1, A_2, \dots таковы, что

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots,$$

то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right);$$

б) если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Доказательство. а) Событие $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ можно представить в виде

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots,$$

тогда участвующие здесь множества попарно несовместны и мы можем воспользоваться свойством счетной аддитивности:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus A_2) + \dots$$

Поскольку сумма ряда есть предел последовательности частных сумм, то это выражение равно

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \dots + P(A_n \setminus A_{n-1})] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

Для доказательства пункта б) перейдем к рассмотрению дополнительных событий и воспользуемся уже доказанным свойством а). Очевидно,

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \bar{A}_3 \subset \dots,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{A}_n) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Здесь мы воспользовались доказанной ранее формулой двойственности.

7. Формула включения-исключения:

Формула включения-исключения:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \\ &+ \sum_{i < j < m} P(A_i A_j A_m) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

