8. Типы распределений, примеры.

Status	Completed

Дискретное распределение

Случайная величина ξ имеет **дискретное распределение**, если она принимает не более чем счетное число значений (эти значения называют атомами).

Например, распределение Бернулли $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p.$

Если записать соответствие между значениями случайных величин и вероятностями принимать эти значения в виде таблицы, получится **таблица распределения**.

У дискретных величин можно сделать такую таблицу (возможно бесконечную).

Абсолютное непрерывное распределение

Случайная величина ξ имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ (функция плотности распределения) такая, что для любого подмножества B имеет место равенство:

$$P(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx.$$

Например, равномерное распределение $U_{[0,1]}$: $f(t)=t$ при $t \in [0,1]$ иначе 0.

Свойства функции плотности вероятности:

1. $\forall x : f_\xi(x) \geq 0.$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = 1.$

У непрерывных - нет.

Сингулярное распределение

Определение 25. Случайная величина ξ имеет *сингулярное* распределение, если существует борелевское множество B с нулевой лебеговой мерой $\lambda(B) = 0$ такое, что $\mathsf{P}(\xi \in B) = 1$, но при этом $\mathsf{P}(\xi = x) = 0$ для любой точки $x \in B$.

❓ Случайная величина X имеет сингулярное распределение, если $F_X(t)$ непрерывна, но не существует такой $p(t)$, что $F_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} p(y)dy$

Например, распределение на лестнице Кантора.

Смешанное распределение

Определение 26. Случайная величина ξ имеет *смешанное* распределение, если найдутся такие случайные величины ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — с дискретным, абсолютно непрерывным и сингулярным распределениями соответственно (или такие три распределения), и числа p_1, p_2, $p_3 \in [0, 1)$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, что для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = p_1 \mathsf{P}(\xi_1 \in B) + p_2 \mathsf{P}(\xi_2 \in B) + p_3 \mathsf{P}(\xi_3 \in B).$$

❓ X имеет смешанное распределение, если $F_X(t) = \alpha F_D(t) + (1-\alpha)F_C(t)$, где F_D, F_C - функции распределения дискретного и абсолютно непрерывного распределения соответственно; $\alpha \in [0, 1]$.

Например, распределение $Y = \min(1, X), X \sim U_{[0,2]}$.