

# 30. Сравнение оценок.

## Понятие эффективной оценки.



Status

Completed

### Сравнение оценок

Функцией среднеквадратичного отклонения оценки  $\theta^*$  называется

$$\delta_{\theta^*}(\theta) = E(\theta^* - \theta)^2; (D\theta^* < \infty).$$

Говорят, что  $\theta^*$  **не хуже (в среднеквадратичном смысле)**, чем  $\theta^{**}$ , если  $\forall \theta : \delta_{\theta^*}(\theta) \leq \delta_{\theta^{**}}(\theta)$ .

Однако наилучшей оценки не существует:

**Теорема 4.** В классе **всех возможных оценок** наилучшей в смысле среднеквадратического подхода оценки не существует.

Доказательство теоремы 4. Пусть, напротив,  $\theta^*$  — наилучшая, то есть для любой другой оценки  $\theta_1^*$ , при любом  $\theta \in \Theta$  выполнено

$$E_{\theta}(\theta^* - \theta)^2 \leq E_{\theta}(\theta_1^* - \theta)^2.$$

Пусть  $\theta_1$  — произвольная точка  $\Theta$ . Рассмотрим статистику  $\theta_1^* \equiv \theta_1$ . Тогда

$$E_{\theta}(\theta^* - \theta)^2 \leq E_{\theta}(\theta_1 - \theta)^2 \text{ при любом } \theta \in \Theta.$$

В частности, при  $\theta = \theta_1$  получим  $E_{\theta_1}(\theta^* - \theta_1)^2 \leq E_{\theta_1}(\theta_1 - \theta_1)^2 = 0$ . Поэтому  $E_{\theta_1}(\theta^* - \theta_1)^2 = 0$ . Но, поскольку  $\theta_1$  произвольно, при любом  $\theta \in \Theta$  выполняется  $E_{\theta}(\theta^* - \theta)^2 = 0$ . А это возможно только если  $\theta^* \equiv \theta$  (оценка в точности отгадывает неизвестный параметр), т. е. для вырожденной с точки зрения математической статистики задачи.

Вырожденными являются, например, следующие задачи:

- \* для выборки из  $I_{\theta}$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ , выполнено тождество  $X_1 \equiv \theta$ ;
- \* для выборки из  $U_{\theta, \theta+1}$ ,  $\theta \in \mathbf{Z}$ , выполнено тождество  $[X_1] \equiv \theta$ .

### Опишем доказательство словами:

какую бы оценку мы не взяли, наша будет не хуже. На каждое возможное значение  $\theta$  будем брать оценку, равную  $\theta$  (по сути, такая оценка очень плохая, так как никак не берет в расчет выборку и только "угадывает"  $\theta$ ). Тогда мы получим много парабол (так как матожидание величины, которая не включает выборку - сама эта величина). А наша оценка должна будет их всех огигать, то есть будет нулевой.



Параболы для некоторых  $\theta$  которые мы берем - зеленые,  $E(\theta^* - \theta)^2$  - зеленая линия.

Такая оценка будет вырожденной, так как угадать со 100% вероятностью можно только в том случае, если вариант только один, что указано в нижней записи из скрина методички.

Но если все таки хотим получить что-то в той или иной мере наилучшее, то есть эффективные оценки в некотором классе.

### Эффективная оценка в классе несмещенных

Оценка называется **эффективной** если она наилучшая в среднеквадратичном смысле среди всех **несмещенных** оценок.

Такое требование позволяет нам избавиться от вырожденных "угадывающих" оценок, которыми мы пользовались при доказательстве предыдущей теоремы.