Определения

Общее

Определение 3.4. ***Алгебраическая система*** *$\mathfrak{A}$ состоит из основного множества A и заданных на нём предикатов $P_1, \dots, P_n$, функций $f_1, \dots, f_k$ и констант $c_1, \dots, c_l$.*

Кортеж

$$\sigma = < P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}, \quad f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}, \quad c_1, \dots, c_l >$$

предикатных символов $P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}$, функциональных символов $f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}$ и константных символов $c_1, \dots, c_l$ называется ***сигнатурой*** *алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и обозначается $\sigma = \sigma(\mathfrak{A})$. При этом запись $P_i^{s_i}$ означает, что P_i является s_i-местным предикатом алгебраической системы $\mathfrak{A}$, а запись $f_i^{r_i}$ означает, что f_i является r_i-местной функцией алгебраической системы $\mathfrak{A}$.*

Основное множество A также называется ***универсумом*** *алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и обозначается $A = |\mathfrak{A}|$.*

Алгебраическая система

Определение 3.7. *Пусть дана сигнатура*

$$\sigma = < P_1^{s_1}, \dots, P_n^{s_n}, f_1^{r_1}, \dots, f_k^{r_k}, c_1, \dots, c_l >.$$

Определим понятие ***формулы*** *сигнатуры σ.*

38

---

1. *Если t_1 и t_2 — термы, то $t_1 = t_2$ — формула.*
2. *Если $t_1, \dots, t_s$ — термы и предикатный символ $P^s \in \sigma$, то $P(t_1, \dots, t_s)$ — формула.*
3. *Если φ и ψ — формулы, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\exists x\varphi(x)$ и $\forall x\varphi(x)$ — формулы.*
4. *Других формул нет.*

Формулы логики предикатов

Гомоморфизмы

Определение 12.1. Пусть задана сигнатура σ, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$.

Пусть задано отображение $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|; \sigma \rangle$, $|\mathfrak{A}| = A$.

h называется **гомоморфизмом**, если $\forall P^n,\ f^n,\ c \in \sigma,\ \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

1) $\mathfrak{A} \vDash P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

2) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

3) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Гомоморфизм

Определение 12.2. Отображение $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется **эпиморфизмом**, если h – гомоморфизм и так же является *сюръекцией (отображением "на")*.

Эпиморфизм

Определение 12.3. Отображение h называется **изоморфизмом**, если:

1) h – биекция;

2) $\forall P^n,\ f^n,\ c \in \sigma,\ \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

а) $\mathfrak{A} \vDash P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Изоморфизм

Определение 12.4. Отображение $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется **изоморфным вложением**, если:

1) h – инъекция (разнозначное отображение);

2) $\forall P^n,\ f^n,\ c \in \sigma,\ \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Изоморфное вложение

Определение 13.1. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$.

$\mathfrak{A}$ – **подмодель** $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$), если:

1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;

2) $\forall P^n \in \sigma,\ \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n);$$

3) $\forall f^n \in \sigma,\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$;

4) $\forall c \in \sigma,\ c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Подмодель

Определение 22.3.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. $\mathfrak{A}$ - **элементарная подмодель** $\mathfrak{B}$(обозначается $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$), если:

1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;

2) $\forall \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma), \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Элементарная подмодель

Определение 13.3. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq |\mathfrak{B}|$. Будем говорить, что множество A **замкнуто относительно операций** модели $\mathfrak{B}$, если:

1) $\forall f^n \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$ имеем $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$;

2) $\forall c \in \sigma$, $c^{\mathfrak{B}} \in A$.

Замкнутость относительно операций

Предложение 13.7. Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, $X \neq \varnothing$. Тогда существует подмодель $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{B}$, которая является наименьшей по включению среди таких подмоделей $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B} : X \subseteq |\mathfrak{A}|$ (среди всех подмоделей, содержащих X, существует наименьшая подмодель). Эта подмодель называется **подмоделью, порождаемой множеством** X. $\mathfrak{C} = \mathrm{sub}_{\mathfrak{B}}(X)$.

Подмодель, порождаемая множеством

Определение 13.15. Рассмотрим $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\sim$ — эквивалентность на $A = |\mathfrak{A}|$ называется **конгруэнцией** на $\mathfrak{A}$, если для $\forall f^n \in \sigma$, $\forall a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{A}|$, если $a_1 \sim b_1, \ldots, a_n \sim b_n$, то $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$. Иначе говоря, конгруэнция - это отношение эквивалентности, перестановочное с операциями.

Конгруэнция на модели

Определение 13.16. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\sim$ – конгруэнция на $\mathfrak{A}$. $a/_\sim = [a]_\sim = [a] = \{b \in |\mathfrak{A}| \mid a \sim b\}$ – **класс эквивалентности** (смежный класс).

Пусть $A = |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, тогда $A/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$, $\mathfrak{A}/_\sim = \langle A/_\sim; \sigma \rangle$ – **фактор-модель**.

Пусть P^n, f^n, $c \in \sigma$, $a_1 \dots a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда:

а) $\mathfrak{A}/_\sim \vDash P([a_1], \dots, [a_n])$: $\exists b_1 \dots b_n \in |\mathfrak{A}|$, если $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, то $\mathfrak{A} \vDash P(b_1, \dots, b_n)$;

б) $f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)]$;

в) $c^{\mathfrak{A}/\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$.

Класс эквивалентности, фактор модель

Теорема 13.23.(Основная теорема о гомоморфизмах). Любой гомоморфизм является композицией факторизации и изоморфного вложения.

Основная теорема о гомоморфизмах

Секвенциальное исчисление предикатов

Определение 10.1. $\Gamma = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ – конечная последовательность формул.

Секвенциями называются выражения вида:

1) $\Gamma \vdash \varphi$ (из Γ выводимо φ)
2) $\vdash \varphi$ (φ выводится)
3) $\Gamma \vdash$ (Γ противоречиво)

Определения секвенций

Определение 14.1.

1) $\varphi \vdash \varphi$;

2) $\vdash \forall x(x = x)$;

3) $\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$;

4) $\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \;\&\; y = z \to x = z)$;

5) $t_1 = q_1, \ldots,\ t_n = q_n,\ [\varphi]^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \vdash [\varphi]^{x_1,\ldots,x_n}_{q_1,\ldots,q_n}$

или же

$t_1 = q_1, \ldots, t_n = q_n,\ \varphi(t_1, \ldots, t_n) \vdash \varphi(q_1, \ldots, q_n)$

При замене x_1 на t_1,...,x_n на t_n не возникают коллизии, т.е. $\forall i \leqslant n,\ \forall y \in FV(t_i)\ x_i$ не входит в область действия кванторов по y.

Определение секвенциального исчисления предикатов

Правила вывода:

1) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \;\&\; \psi)}$ 2) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \;\&\; \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$ 3) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \;\&\; \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

4) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$ 5) $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$ 6) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi;\ \Gamma, \psi \vdash \xi;\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$

7) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$ 8) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ (modus ponens)

9) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$ 10) $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi;\ \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash}$ 11) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Gamma_1 \vdash \xi}$

12) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$ 13) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$, $x \notin FV(\Gamma)$

14) $\dfrac{\Gamma,\ [\varphi]^x_t \vdash \psi}{\Gamma,\ \forall x \varphi \vdash \psi}$ 15) $\dfrac{\Gamma \vdash [\varphi]^x_t}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$ 16) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma,\ \exists x\ \varphi \vdash \psi}$, $x \notin FV(\Gamma \cup \{\psi\})$.

Правила вывода

Определение 14.2. Последовательность секвенций $S_1, \dots, S_n$ называется **доказательством**, если каждая секвенция S_i — это либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением некоторого правила вывода.

Определение 14.3. Секвенция S называется **доказуемой**, если $\exists$ доказательство $S_1, \dots, S_n$, заканчивающееся на S $(S_n = S)$.

Доказательство и доказуемость

Определение 14.5. **Дерево секвенций**: $D,\ h(D),\ V(D):$

1) Если S — секвенция, то S — дерево, $V(D) = S,\ h(D) = 1$;

2) Пусть $D_1, \dots D_k$ — деревья, S — секвенция, тогда конструкция $D = \dfrac{D_1; \dots; D_k}{S}$ — дерево,

$$h(D) = \max(h(D_1), \dots h(D_k)) + 1,$$

$$V(D) = V(D_1) \cup \dots \cup V(D_k).$$

3) Других деревьев нет.

Определение 14.6. Дерево секвенций называется **деревом вывода**, если все его вершины являются аксиомами, а все переходы являются частными случаями правил вывода.

Дерево секвенций и дерево вывода

Определение 14.8. Дерево секвенций $\dfrac{S_1; \dots; S_n}{S}$ высоты 2 называется **производным правилом вывода**, если $\exists D = \dfrac{\bigcap}{S}$, заканчивающееся на эту секвенцию S, у которого все переходы являются частными случаями правил вывода, а вершины - либо аксиомы, либо одна из секвенций $S_1, \dots, S_n$.

Производное правило вывода

Определение 14.13. Формулы φ и ψ называются **равносильными** $(\varphi \equiv \psi)$, если секвенции $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ являются доказуемыми.

Равносильность формул

Определение 14.17.

1) Секвенция $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ называется тождественно истинной, если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n,\ \varphi\})$ и $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n,\ \varphi\}) \to |\mathfrak{A}|$ имеет место следующее утверждение: если $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1[\gamma], \ldots, \mathfrak{A} \vDash \varphi_n[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\gamma]$;

2) Секвенция $\vdash \varphi$ называется тождественно истинной, если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$ и $\forall \gamma : FV(\varphi) \to |\mathfrak{A}|$ выполняется $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\gamma]$;

3) Секвенция $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ называется тождественно истинной, если $\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}))$ и $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) \to |\mathfrak{A}|\ \ \exists i \leqslant n :$ $\mathfrak{A} \nvDash \varphi_i[\gamma]$.

Семантика секвенций логики предикатов

Определение 14.22 (каноническая форма). Говорят, что формула φ находится в **предваренной нормальной форме (ПНФ)**, если она имеет вид: $\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$, где ψ – бескванторная, $Q_i \in \{\forall,\ \exists\}$.

Предваренная нормальная форма (ПНФ)

Предложение 14.21. Пусть $x \notin FV(\xi)$, тогда имеют место следующие эквивалентности:

1) $\forall x \xi \equiv \xi$;

2) $\exists x \xi \equiv \xi$;

3) $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$;

4) $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$;

5) $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$;

6) $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$;

7) $(\forall x \varphi \ \& \ \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \ \& \ \psi)$;

8) $(\exists x \varphi \vee \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$;

9) $((\forall x \varphi) \ \& \ \xi) \equiv \forall x (\varphi \ \& \ \xi)$;

10) $((\exists x \varphi) \ \& \ \xi) \equiv \exists x (\varphi \ \& \ \xi)$;

11) $((\forall x \varphi) \vee \xi) \equiv \forall x (\varphi \vee \xi)$;

12) $((\exists x \varphi) \vee \xi) \equiv \exists x (\varphi \vee \xi)$;

13) $\forall x [\varphi]^z_x \equiv \forall y [\varphi]^z_y$, если $\forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$ (если не возникает коллизий);

14) $\exists x [\varphi]^z_x \equiv \exists y [\varphi]^z_y$, если $\exists x \varphi(x) \equiv \exists y \varphi(y)$ (если не возникает коллизий).

Доказательство: упражнение.

Эквивалентности

Теорема 14.23. Для всех формул φ существует эквивалентная ей формула $\psi \equiv \varphi$, находящаяся в ПНФ.

Доказательство: Алгоритм приведения формулы к ПНФ:

1) Избавляемся от импликаций;

2) С помощью тождеств 5, 6 из 14.21, а также законов де Моргана и снятия двойного отрицания, вносим отрицание под кванторы.

3) С помощью тождеств 13, 14 переобозначаем переменные так, чтобы:

а) разные кванторы действовали по разным переменным;

б) каждая переменная имела либо только свободное, либо только связанное вхождение.

4) С помощью 9-12 выносим кванторы наружу.

В результате получим функцию, эквивалентную изначальной, но находящейся в ПНФ.

Теорема доказана.

Алгоритм приведения к ПНФ

Теорема о существовании модели

Определение 15.1. Пусть σ – сигнатура, $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\varphi \in F(\sigma)$. Тогда:

1) $\Gamma \vdash \varphi$, если $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ такие, что секвенция $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ – доказуема;

2) $\Gamma \vdash$, если $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ такие, что секвенция $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ – доказуема;

3) $\Gamma \nvdash$, если $\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ секвенция $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ – недоказуема;

4) $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ называется **теорией** (в сигнатуре σ), если оно (множество Γ) является **дедуктивно замкнутым**, т.е. $\forall \varphi \in S(\sigma): \; (\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma)$;

5) Множество $\Gamma \subseteq S(\sigma)$ – **полное** на сигнатуре σ, если $\forall \varphi \in S(\sigma):$ $(\varphi \in \Gamma$ или $\neg\varphi \in \Gamma)$.

Теория, дедуктивная замкнутость, полное множество предложений

Определение 15.4. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, тогда **элементарной теорией модели** $\mathfrak{A}$ называют: $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Элементарная теория

Определение 15.5. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$. Модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называют **элементарно эквивалентными** ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если их элементарные теории

33

совпадают, т.е. $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, т.е. $\forall \varphi \in S(\sigma) : \ (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$.

Элементарная эквивалентность моделей

Определение 15.14. Пусть модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ и X – множество переменных. Тогда отображение $\gamma : X \to |\mathfrak{A}|$ называется **интерпретацией (означиванием)** переменных из X на $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ и $FV(\Gamma) = \{x \mid \exists \varphi \in \Gamma : x \in FV(\varphi)\}$. Пусть $FV(\Gamma) \subseteq X$. Тогда говорят, что Γ **истинно на модели** $\mathfrak{A}$ **при означивании** γ и пишут $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$, если $\forall \varphi \in \Gamma : \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

Говорят, что Γ **выполнимо на модели** $\mathfrak{A}$, если $\exists \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такое, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Говорят, что Γ **выполнимо (или имеет модель)**, если $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma))$ и $\exists \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Выполнимость на модели

Теорема 15.15 (теорема о существовании модели). Любое непротиворечивое множество формул имеет модель, т.е.
$\forall \Gamma \subseteq F(\sigma)$ таких, что $\Gamma \nvdash$, выполняется:

$$\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \text{ и } \exists \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| \text{ такие, что } \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma].$$

Теорема о существовании модели (ТОСМ)

Лемма 15.18 (Хенкина).

а) T' – непротиворечивое;

б) T' – полное;

в) T' – теория;

г) $(\varphi \,\&\, \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$ и $\psi \in T'$;

д) $(\varphi \vee \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$ или $\psi \in T'$;

е) $\neg\varphi \in T' \Leftrightarrow \varphi \notin T'$;

ж) $(\varphi \to \psi) \in T' \Leftrightarrow$ если $\varphi \in T'$, то $\psi \in T'$;

з) $\exists x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists t \in T(\sigma') : FV(t) = \varnothing$ (замкнутый терм) и $\psi(t) \in T'$;

и) $\forall x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \forall c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall t \in T(\sigma')$: если $FV(t) = \varnothing$ (замкнутый терм) , то $\psi(t) \in T'$.

Лемма Хенкина

Определение 15.34. Рассмотрим $\Gamma \subseteq F(\sigma)$. Говорят, что Γ **совместно**, если $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$.

Совместность

Множество формул Γ называется **локально совместным**, если каждое его конечное подмножество является совместным, т.е. $\forall \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, где Γ_0 - конечное и совместное.

Локальная совместность

Теорема 15.35 (Мальцева о компактности). Множество формул совместно $\Leftrightarrow$ когда оно локально совместно.

Теорема Мальцева о компактности

Теорема 15.36 (Гёделя о полноте). Любая т.и. формула является доказуемой.

Теорема Геделя о полноте

Теорема 15.39 (**Мальцева о расширении**). Если множество предложений имеет бесконечную модель, то оно имеет сколь угодно большую модель, т.е. пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, $\mathfrak{B} \models \Gamma$, $\mathfrak{B}$ - бесконечная. Тогда для $\forall$ кардинала α $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\|\mathfrak{A}\| \geqslant \alpha$.

Мальцева о расширении

7.3. Ординалы и кардиналы

Определение 7.22. ***Ординальными числами*** (***ординалами***) *называются*:

$$\alpha_0 = 0 = \emptyset;$$
$$\alpha_1 = 1 = \{\emptyset\};$$
$$\alpha_2 = 2 = \{\emptyset;\ \{\emptyset\}\};$$
$$\alpha_3 = 3 = \{\emptyset;\ \{\emptyset\};\ \{\emptyset;\ \{\emptyset\}\}\};$$
$$\ldots$$
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cup \{\alpha_n\};$$
$$\omega = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots\};$$
$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots, \omega\};$$
$$2\omega = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots\};$$
$$\ldots$$
$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

Определение 7.23. *α называется* ***непредельным*** *ординалом, если существует ординал β такой, что $\alpha = \beta + 1$.*

α называется ***предельным*** *ординалом, если не существует ординала β такого, что $\alpha = \beta + 1$.*

Ординал

Определение 7.26. *Ординал α называется* ***кардиналом***, *если для любого ординала $\beta < \alpha$ имеет место $\| \beta \| \neq \| \alpha \|$.*

Замечание 7.27.

1. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \omega$ – кардиналы.
2. $\omega + 1, \omega + 2, \ldots, 2\omega, \ \ldots$ – не кардиналы.

Доказательство: упражнение.

Кардинал

Эквивалентность классов вычислительных функций

Определение 9.3. ***Примитивно-рекурсивные функции (прф):***

а) простейшие функции являются примитивно-рекурсивными;

б) функция, полученная из примитивно-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции или оператора примитивной рекурсии, является примитивно-рекурсивной;

в) других примитивно-рекурсивных функций нет.

Частично-рекурсивные функции (чрф):

а) простейшие функции являются частично-рекурсивными;

б) функция, полученная из частично-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции, оператора примитивной рекурсии или оператора минимизации, является частично-рекурсивной;

в) других частично-рекурсивных функций нет.

Общерекурсивными функциями (орф) *называются всюду определённые частично-рекурсивные функции.*

Класс всех примитивно-рекурсивных функций обозначается ***ПРФ****, класс всех общерекурсивных функций –* ***ОРФ****, а класс всех частично-рекурсивных функций –* ***ЧРФ****.*

ЧРФ, ПРФ, ОРФ

9.1. Основные определения и обозначения

Определение 9.1. *Следующие функции называются* ***простейшими***:

а) $O(x) = 0$;
б) $S(x) = x + 1$;
в) $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m,\ m \le n$.

Определение 9.2.

а) ***Оператор суперпозиции****. Рассмотрим функции*

$$g(x_1, \dots, x_k), \ \text{и} \ h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n).$$

Говорят, что функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n))$$

получена из функций $g, h_1, \dots, h_k$ *применением* ***оператора суперпозиции****.*

b) ***Оператор примитивной рекурсии****. Рассмотрим функции*

$$g(x_1, \dots, x_n) \ \text{и} \ h(x_1, \dots, x_n, y, z).$$

Пусть выполнено

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n); \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h\big(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)\big). \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция f *получена из функций* g *и* h *применением* ***оператора примитивной рекурсии****.*

c) ***Оператор минимизации****. Рассмотрим функцию* $g(x_1, \dots, x_n, y)$*. Пусть выполнено:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y, & \begin{array}{c} g(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \\ \forall i < y \ \ g(x_1, \dots, x_n, i) \text{ определена} \\ \text{и } \forall i < y \ \ g(x_1, \dots, x_n, i) \ne 0; \end{array} \\ \text{не определена}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция f *получена из функции* g *применением* ***оператора минимизации****. Это обозначается так:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Простейшие функции, оператор суперпозиции, оператор примитивной рекурсии, оператор минимизации

Теорема 17.17 (о нормальной форме Клини)

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$— вычислимая на МТ. Тогда существует **прф** $g(x_1, \dots, x_n, y)$ такая, что $f(x_1, \dots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0])$, т.е. берем **прф**, применяем к ней оператор минимизации и берем левую компоненту с вышедшей канторовской нумерации.

Теорема о нормальной форме Клини

Следствие 17.20 (основная теорема о вычислимых функциях).
ЧРФ = ВТ = ПВТ.

Основная теорема о вычислимых функциях

Теорема 17.23 (Тезис Чёрча).
Любая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.

Тезис Черча

Универсальные вычислимые функции

Определение 18.1. Пусть K— множество частичных функций вида $g : N^n \to N$. Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется **универсальной для класса** K, если:

а) $\forall m \in \mathbb{N} : \ f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$;

б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K \ \exists m \in \mathbb{N} : \ g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$,

Если объединить два условия, то выходит, что класс

$K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Или же, иными словами, функция f осуществляет нумерацию всех функций класса K.

Универсальная функция

Замечание 18.2. Класс K имеет универсальную функцию $\Leftrightarrow$ класс конечен или счётен.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.3. Если класс K континуален, то он не имеет универсальной функции.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.4. Класс всех $n-$местных частичных функций не имеет универсальной функции.

Доказательство: упражнение.

18.2 - 18.4

Определение 18.14. Следующие функции называются **клиниевскими скобками**: $[x, y] = c\ (l(x),\ c(r(x), y))$.

Клиниевские скобки

Определение 18.24. Функция $æ(n) = K^2(n, x)$ называется **клиниевской нумерацией ЧРФ^1**, т.е. $æ : \mathbb{N} \to$ **ЧРФ^1**.

Клиниевская нумерация ЧРФ (ae\ae)

Теорема 18.26.(теорема Райса). Пусть класс $K \subseteq$ **ЧРФ^1**, $K \neq \varnothing$, $K \neq$ **ЧРФ^1**. Тогда множество номеров $M = \{n \mid æ(n) \in K\}$ **не рекурсивно**, т.е. функция $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$ не является **чрф**.

–

Теорема Райса

Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

Определение 19.2. Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется называется **рекурсивным** (**примитивно рекурсивным**), если его характеристическая функция $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ является **орф** (**прф**).

Определение 19.3. Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивно перечислимым**, если $A = \varnothing$ или существуют **орф**^{1} $f_1, \dots, f_k$ такие, что $A = \{\langle f_1(n), \dots, f_k(n)\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$.

В частности, если $A \subseteq \mathbb{N}$ и существует **орф**^{1} f такая, что $A = \rho f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ — область значений, то A является рекурсивно перечислимым.

Примитивно рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

Теорема 19.10 (Поста). Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$.
Тогда A рекурсивно $\Leftrightarrow$ $A, \overline{A}$ являются **рпм**.

Теорема Поста

Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы

Определение 20.1. Сигнатура $\Sigma_0 = \langle <^2, +^2, *^2, S^1, 0\rangle$ является **сигнатурой арифметики Пеано**. Введем обозначения:

$T(\Sigma_0)$ - множество термов Σ_0.

$F(\Sigma_0)$ - множество формул Σ_0.

$S(\Sigma_0)$ - множество предложений Σ_0.

$\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ - множество переменных.

Сигнатура арифметики Пеано

Определение 20.4. Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Множество X является **разрешимым**, если $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$ - **рм**. Множество X является **перечислимым**, если $\gamma(X)$ - **рпм**.

Разрешимое и перечислимое множество

Определение 20.14. Пусть $f : \mathbb{N}^k \to N$. Говорят, что f **представима** в A_0, если существует формула $\varphi(v_0, \ldots, v_k) \in F(\Sigma_0)$ такая, что для $\forall n_0 \ldots n_k \in \mathbb{N}$ выполняется:

1) $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) = n_k \Rightarrow A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$;

2) $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) \neq n_k \Rightarrow A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$.

Представимость функции в арифметике Пеано

Теорема 20.16 (Гёделя о неразрешимости).

Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$, T - непротиворечивая теория. Тогда T неразрешима.

Это означает, что система аксиом A_0 **наследственно неразрешима**, то есть любая содержащая её непротиворечивая теория является неразрешимой.

Теорема Геделя о неразрешимости

Теорема 20.17.(Чёрча о неразрешимости).

Множество доказуемых формул (теорем логики предикатов) ИП_{Σ_0} является неразрешимым.

Теорема черча о неразрешимости

Теорема 20.20.(Гёделя о неполноте).

Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$, T - перечислимая, непротиворечивая теория. Тогда T не полна, т.е. система аксиом арифметики Пеано A_0 не имеет непротиворечивых перечислимых пополнений.

Теорема Геделя о неполноте

Аксиоматизируемые классы

Определение 21.1.

Рассмотрим $K_\sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ – модель сигнатуры $\sigma\}$. Пусть класс моделей $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **теорией класса** называется множество предложений $Th(K) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \forall \mathfrak{A} \in K\colon \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Теория класса

Определение 21.2.

Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Тогда $K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \forall \varphi \in \Gamma\colon \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Класс множества предложений

Определение 21.3.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется **аксиоматизируемым**, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma)$ такое, что $K = K(\Gamma)$. В нашем случае Γ есть множество аксиом.

Аксиоматизируемый класс

Определение 21.11.

Класс K является **конечно аксиоматизируемым** $\Leftrightarrow \exists \Gamma \in S(\sigma)$ - конечное и $K = K(\Gamma)$.

Конечно аксиоматизируемый класс

Определение 22.7.

Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$. **Элементарной диаграммой** модели $\mathfrak{A}$ называют множество предложений $D(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi,\ \varphi$ - бескванторная$\}$.

Полной диаграммой модели $\mathfrak{A}$ называют множество предложений $FD(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$.

Элементарная и полная диаграмма

Определение 22.11.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ - бескванторная формула. Тогда следующими формулами называются:

$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ - **$\exists$-формула(экзистенциальная)**;

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ - **$\forall$-формула(универсальная)**.

Определение 22.12.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **$\exists$-теорией** называют множество предложений $Th_\exists = \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi\ -\ \exists-\text{формула}\}$, а **$\forall$-теорией** называют $Th_\forall = \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi\ -\ \forall-\text{формула}\}$.

Е и А формулы, теории

Определение 22.14. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда:

Класс $\exists$-аксиоматизируем, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma)$: $K = K(\Gamma)$, Γ - множество $\exists$-формул;

Класс $\forall$-аксиоматизируем, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma)$: $K = K(\Gamma)$, Γ - множество $\forall$-формул.

Е и А аксиоматизируемые классы