22. Приближение Пуассона для биномиального распределения.

Status	Completed

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли $n \to \infty$; $p \to 0$; $np \to \lambda > 0$. Тогда

$$P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

или, что то же:

$$S_n \Rightarrow Y \sim \Pi_\lambda.$$

Доказательство. Положим $\lambda_n = np_n$. По условию $\lambda_n \to \lambda > 0$. Подставим $p_n = \lambda_n/n$ в формулу Бернулли:

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = C_n^k \frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \frac{\lambda_n^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\substack{\downarrow\\ e^{-\lambda}}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}. \qquad (8)$$

В соотношении (8) мы воспользовались тем, что $\lambda_n^k \to \lambda^k$ и замечательным пределом $(1-\lambda_n/n)^n \to e^{-\lambda}$. $\square$