35. Построение доверительных интервалов для дисперсии нормальной совокупности.

Status	Completed

Доверительные интервалы для среднего нормальной совокупности

$\vec{X} \sim N_{a,\sigma^2}$, причем есть разные условия для среднего и дисперсии:

Для σ^2, a известно

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{q_1}\right) = 1-\epsilon,$$

$$\chi^2_n(q_1) = \epsilon/2, \quad \chi^2_n(q_2) = 1-\epsilon/2$$

Выводится из свойства $\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-a}{\sigma})^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

Для σ^2, a неизвестно

$$P\left(\frac{nS^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{q_1}\right) = 1-\epsilon,$$

$$\chi^2_{n-1}(q_1) = \epsilon/2, \quad \chi^2_{n-1}(q_2) = 1-\epsilon/2$$

Выводится из свойства $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

> ☝️ Внимание на квантили! Тут распределения **не симметричные**, так что квантили нужно брать разные!

Эти интервалы точные, и сходятся, но это уже не так очевидно как в случае для среднего. Однако достаточно вспомнить одно свойство распределения χ^2:

Замечание 15. ДИ, полученные в п. 2 и 3, выглядят странно по сравнению с ДИ из п. 1 и 4: они содержат n в числителе, а не в знаменателе. Но если квантили нормального распределения от n не зависят вовсе, квантили распределения Стьюдента асимптотически не зависят от n по свойству $T_n \Rightarrow N_{0,1}$, то квантили распределения H_n зависят от n существенно. Действительно, пусть $g = g(n)$ таково, что $P(\chi_n^2 < g) = \delta$ при всех n, в том числе и при $n \to \infty$. Тогда последовательность $g(n)$ такова, что $\frac{g-n}{\sqrt{2n}} \to \tau_\delta$ при $n \to \infty$, где τ_δ — квантиль стандартного нормального распределения. В самом деле: по ЦПТ с ростом n

$$P(\chi_n^2 < g) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < g\right) = P\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < \frac{g-n}{\sqrt{2n}}\right) \to \Phi_{0,1}(\tau_\delta) = \delta.$$

Поэтому квантиль уровня δ распределения H_n ведет себя как $g = g(n) = n + \tau_\delta\sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$.

На лекциях его не было, кажется

В последней строке по сути сказано, что $q/n \to 1$.

Тогда остается понять, что и S_1^2 ($\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2/n$), и S^2 сходятся к σ^2.