ТВ и МС | Список по ТВ

1. Что такое пространство элементарных исходов?

Пространство элементарных исходов - множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента.

2. Что такое событие? Достоверное событие? Невозможное событие?

Событием называется подмножество множества элементарных исходов.

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, т. е. Ω.

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, т. е. $\emptyset$.

3. Что такое объединение двух событий? Пересечение?

Объединением $\mathrm{A} \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что из двух событий A и B случилось хотя бы одно.

Пересечением $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли сразу оба события A и B.

10. Определение несовместных событий.

События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно: $A \cap B = \emptyset$.
События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно несовместными**, если несовместны любые два из них: $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$.

13. Как вычисляется P(A) согласно классическому определению вероятности?

$N(A)$ - число элементов в множестве А.

Формулу $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ называют **классическим определением вероятности**. (предполагается, что каждый исход из пространства равновероятных исходов равновозможен)

14. Как вычисляется P(A) согласно геометрическому определению вероятности?

Если множество исходов эксперимента Ω представляет из себя ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Через $\lambda(A)$ будем обозначать n мерный объем множества А.

Формулу $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$ называют **геометрическим определением вероятности**.

16. Перечислите свойства вероятности.

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

19. Если события А и В несовместны, то чему равна вероятность объединения события A∪B?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

20. Чему равна вероятность суммы двух произвольных событий?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

22. Определение условной вероятности?

Условной вероятностью события A при условии, что произошло события B, называют число (если вероятность $P(B) \neq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

23. Формула полной вероятности.

Пусть имеется события A и попарно несовместные события положительной вероятности $B_1, ..., B_n$ такие, что $A \subseteq B_1 \cup ... \cup B_n$. Тогда вероятность события A можно вычислить по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

24. Формула Байеса.

В условиях 23, если произошло события A ненулевой вероятности, то условные вероятности гипотез B_i могут быть вычислены по **формуле Байеса**:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}.$$

25. Какие события называют независимыми?

События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого $1 \leq k \leq n$ и любого набора различных между собой индексов $1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$ имеет место равенство $P(A_{i_1} \cdot ... \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k})$

29. Что такое схема Бернулли?

Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода - успех и неудача, при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью p, а неудача - $q = 1 - p$.

30. Выписать формулу Бернулли.

При любом $k = 0, 1, ..., n$ имеет место равенство:

$$P(v_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

32. Что такое случайная величина?

Функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**, то есть каждому элементарному исходу ставится в соответствие число $X(w) \in \mathbb{R}$.

33. Что такое таблица (ряд) распределения? У каких случайных величин есть таблица распределения?

Если записать соответствие между значениями случайных величин и вероятностями принимать эти значения в виде таблицы, получится **таблица распределения**.

У дискретных величин можно сделать такую таблицу (возможно бесконечную).

У непрерывных - нет.

37. Что такое плотность распределения?

Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ (функция плотности распределения) такая, что для любого подмножества B имеет место равенство:

$$P(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx.$$

38. Перечислите характеристические свойства плотности.

1. $\forall x : f_\xi(x) \geq 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = 1$

45. Определение функции распределения случайной величины?

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция F_ξ : $\mathbb{R} \to [0, 1]$, при каждом значении $x \in \mathbb{R}$ равная вероятности случайной величины ξ принимать значения, меньшие x:

$$F_\xi(t) = P(\xi < t) = P\{\omega : \xi(\omega) < t\}$$

46. Перечислите характеристические свойства функции распределения.

1. Не убывание: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$
2. Пределы:
   1. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_\xi(t) = 0$
   2. $\lim\limits_{t \to \infty} F_\xi(t) = 1$
3. Непрерывность слева: $F_\xi(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

55. Как плотность распределения находится по функции распределения?

$$f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt}$$

Для всех точек, где производная существует, в абсолютно непрерывном случае.

56. Перечислите основные дискретные распределения. Запишите таблицу распределения (P(X=k)=?) для каждого.

1. **Вырожденное** $P(X = a) = 1$
2. **Бернулли** $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$
   1. $EX = p$
   2. $DX = p(1 - p)$
3. **Биномиальное** $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$, $n \ge 1$, $0 < p < 1$

    1. $EX = np$
    2. $DX = np(1-p)$
4. **Пуассона** $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, ...; \quad \lambda > 0$
    1. $EX = \lambda$
    2. $DX = \lambda$
5. **Геометрическое** $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, ...,$ $0 < p < 1$
    1. $EX = \frac{1}{p}$
    2. $DX = \frac{1-p}{p^2}$

57. Перечислите основные абсолютно непрерывные распределения. Запишите плотность и функцию распределения каждого.

1. **Равномерное** на $[a,b]$

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$U_{a,b}(y) = \begin{cases} 0, & y \le a, \\ \frac{y-a}{b-a}, & y \in [a,b], \\ 1, & y > b. \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < t < \infty,\ -\infty < \alpha < \infty,\ \sigma^2 > 0$$

$$\Phi_{\alpha,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

$$EX = \alpha$$

$$DX = \sigma^2$$

3. **Показательное**

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

$$E_\alpha(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 1 - e^{-\alpha y}, & y > 0. \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\alpha}$$

$$DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

4. **Гамма**

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$DX = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

5. **Стандартное Коши**

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

$$C(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(y).$$

EX, DX – не существуют

Преобразования случайных величин

Если $f_X(t)$ - функция плотности X, и $a \neq 0$, то

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{t-b}{a})$$

Если $X \sim \Phi_{\alpha,\sigma^2}$, то $Y = (X-\alpha)/\sigma \sim \Phi_{0,1}$

Если $X \sim \Phi_{\alpha,\sigma^2}$, то $Y = AX + B \sim \Phi_{A\alpha+B,\sigma^2 A^2}$

76. Дать определение математического ожидания случайной величины с дискретным распределением.

$$EX = \sum_{k\geq 1} y_k P(X = y_k), \text{ если этот ряд сходится абсолютно}$$

77. Дать определение математического ожидания случайной величины с абсолютно непрерывным распределением.

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt, \text{ если} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t) dt < \infty$$

80. Перечислите свойства математического ожидания.

1. Можно заменить t на $g(t)$ и получить $Eg(X)$ (если ряд для дискретного распределения и интеграл для непрерывного абсолютно сходятся)
2. $Ec = c$
3. $EcX = cEX$
4. $E(X+Y) = EX + EY$ (для любых случайных величин, если эти ожидания существуют)
5. Если $X \geq 0$, т.е. $P(X \geq 0) = 1$, то $E(X) \geq 0$

6. Если X и Y независимы, то $E(XY) = EX \cdot EX$
7. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$

87. Дайте определение дисперсии.

Дисперсией случайной величины X называется $DX = E(X - EX)^2$.

88. Какой физический смысл имеет дисперсия?

Дисперсия показывает, насколько велик разброс значений случайной величины около ее математического ожидания.

89. Что такое среднеквадратичное отклонение?

$\sqrt{DX}$ - среднеквадратичное отклонение.

90. Перечислите свойства дисперсии

1. $DX \geq 0$
2. $DC = 0$
3. Если $DX = 0$, то $P(X = C) = 1$ для некоторой постоянной C.
4. $D(CX) = C^2 DX$
5. $D(X + C) = DX$
6. Если X и Yнезависимы, то $D(X \pm Y) = DX + DY$

100. Дать определение совместной функции распределения

Совместной функцией распределения случайного вектора Xназывается

$$F_{X_1,...,X_n}(y_1, ..., y_n) = P(X_1 < y_1, ..., X_n < y_n)$$

(перечисление событий в вероятности означает их одновременное наступление)

Плотностью совместного распределения называется функция f (если она существует)

(для большего числа аргументов аналогично)

$$P((X_1, X_2) \in B) = \iint\limits_B f_{X_1, X_2}(x, y) dx dy$$

103. Сформулировать определение независимых случайных величин.

Случайные величины $X_1, ..., X_n$ называются независимыми, если для любых $B_1 \subset \mathbb{R}, ..., B_n \subset \mathbb{R}$ выполняется

$$P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot ... \cdot P(X_n \in B_n)$$

104. Сформулировать критерий независимости случайных величин (через функции распределений).

Случайные величины $X_1, ..., X_n$ независимы (в совокупности), если для любых $x_1, ..., x_n$

$$F_{X_1, ..., X_n}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x_n)$$

105. Сформулировать критерий независимости для дискретных случайных величин.

Дискретные случайные величины $X_1, ..., X_n$ независимы (в совокупности), если для любых $a_1, ..., a_n$

$$P(X_1 = a_1, ..., X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \cdot ... \cdot P(X_n = a_n)$$

106. Сформулировать критерий независимости для абсолютно непрерывных случайных величин.

Абсолютно непрерывные случайные величины $X_1, ..., X_n$ независимы (в совокупности), если для любых $x_1, ..., x_n$ имеет место равенство

$$f_{X_1, ..., X_n}(x_1, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot ... \cdot f_{X_n}(x_n)$$

107. Записать формулу свертки.

Если X и Y независимы и имеют плотности распределения $f_X(t)$ и $f_Y(t)$, то случайная величина $X + Y$ также будет иметь плотность, равную

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u) du$$

113. Дайте определение ковариации.

Ковариацией $cov(X,Y)$ случайных величин X,Y называется число

$$cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$

114. Дайте определение коэффициента корреляции.

Коэффициентом корреляции $p(X,Y)$ случайных величин X,Y дисперсии которых существуют и отличны от нуля, называется число

$$p(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

115. Перечислите свойства ковариации.

1. $cov(X,Y) = E(XY) - EXEY$
2. $cov(X,X) = DX$
3. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
4. $cov(cX,Y) = c \cdot cov(X,Y)$

116. Перечислите свойства коэффициента корреляции.

1. Если X,Y - независимы, то $p(X,Y) = 0$
2. $|p(X,Y)| \leq 1$
3. $|p(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow X,Y$ - линейно связаны ($P(X = aY + b) = 1$)

117. Сформулируйте неравенство Йенсена.

Если функция g выпукла вниз, то для любой случайной величины X, у которой существует матожидание, верно равенство

$$Eg(X) \geq g(EX)$$

Для вогнутых (выпуклых вверх) функций знак меняется на противоположные

118. Сформулируйте неравенство Чебышева.

Если DX существует, то для любого $x > 0$

$$P(|X - EX| \geq x) \leq \frac{DX}{x^2}$$