

12. Распределение суммы случайных величин, имеющих пуассоновское распределение. Плотность суммы случайных величин.

▼ Status

Completed

Поиск суммы случайных величин в дискретном случае

Теорема 3. Пусть случайные величины X и Y независимы и каждая из них принимает целые неотрицательные значения, при этом

$$P(X = k) = p_k, \quad P(Y = k) = q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$r_k = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i}.$$

Доказательство.

$$P(X + Y = k) = P(\{X = 0, Y = k\} \cup \{X = 1, Y = k - 1\} \cup \dots \cup \{X = k, Y = 0\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i}.$$

Последовательность чисел $\{r_k = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$ называется *сверткой* последовательностей $\{p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$ и $\{q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$.

В качестве следствия получим следующий интересный результат.

Теорема 4. Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in \Pi_{\lambda_1}$, $X_2 \in \Pi_{\lambda_2}$. Тогда $X_1 + X_2 \in \Pi_{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Доказательство. Воспользуемся полученной формулой:

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Поиск суммы случайных величин в абсолютно непрерывном случае (формула свертки)

Теорема 5. Пусть X и Y независимы и имеют плотности распределения f_X и f_Y соответственно. Тогда

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(v) f_X(t-v) dv.$$

Доказательство. Достаточно доказать первое соотношение, второе получается из него заменой $v = t - u$. Имеем для функции распределения

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(y) &= \mathbf{P}(X+Y < y) = \mathbf{P}((X, Y) \in \{(u, v) : u+v < y\}) = \int \int_{u+v < y} f_{X,Y}(u, v) dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y-u} f_Y(v) dv du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^y f_Y(t-u) dt du = \\ &= \int_{-\infty}^y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u) du \right\} dt. \end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались свойством $f_{X,Y}(u, v) = f_X(u)f_Y(v)$ для независимых X и Y и заменой переменной $t = u + v$. Выражение, стоящее в фигурных скобках, и будет искомой плотностью распределения суммы. Теорема доказана.

Оба интеграла, присутствующие в формулировке теоремы, называются *свертками* плотностей f_X и f_Y .