

# 4. Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

▼ Status

Completed

Вероятностное пространство есть тройка вида  $\langle \Omega, S, P \rangle$ , где  $\Omega$  - пространство элементарных исходов,  $S$  - совокупность подмножеств  $\Omega$  (не все, поскольку есть неизмеримые),  $P$  - функция  $S \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая аксиомам:

1.  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$ .
2.  $P(\Omega) = 1$ .
3. Счетная аддитивность: если события  $A_1, A_2, \dots$  таковы, что  $A_i A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) (попарно несовместны), то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Тогда у вероятности появляются следующие свойства:

1.  $P(\emptyset) = 0$  (из аксиомы 3).
2. Конечная аддитивность (из аксиомы 3, хвост заменяем на пустые множества).
3.  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .

1. **Доказательство:**  $P(A \cup B) = P(B \cup (A \setminus B)) = P(B) + P(A \setminus B)$ ;  $P(A) = P(AB) + P(A \setminus B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$ .

5. Если  $A \subset B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ .

1. **Доказательство:**  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$ .

6. Свойство непрерывности вероятности

6. Свойство непрерывности вероятности. Оно состоит из двух пунктов:  
а) если события  $A_1, A_2, \dots$  таковы, что

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots,$$

то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right);$$

б) если  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

*Доказательство.* а) Событие  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  можно представить в виде

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots,$$

тогда участвующие здесь множества попарно несовместны и мы можем воспользоваться свойством счетной аддитивности:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus A_2) + \dots$$

Поскольку сумма ряда есть предел последовательности частных сумм, то это выражение равно

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \dots + P(A_n \setminus A_{n-1})] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

Для доказательства пункта б) перейдем к рассмотрению дополнительных событий и воспользуемся уже доказанным свойством а). Очевидно,

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \bar{A}_3 \subset \dots,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{A}_n) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Здесь мы воспользовались доказанной ранее формулой двойственности.

7. Формула включения-исключения:

*Формула включения-исключения:*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \\ &+ \sum_{i < j < m} P(A_i A_j A_m) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

