

10. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.



Status

Completed

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случайные величины.

Функция $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = P(x_1 < t_1, \dots, x_n < t_n)$ называется **функцией совместного распределения**.

Свойства $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n)$:

1. Не убывает по каждому аргументу.
2. Непрерывная слева по каждому аргументу.
3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = 0$.
4. $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_2, \dots, X_n}(t_2, \dots, t_n)$ (восстановление функции распределения одного аргумента).

Доказывается аналогично одномерному случаю.

Типы:

\vec{X} имеет **дискретное распределение**, если X_k имеет дискретное распределение для $k = 1, \dots, n$.

\vec{X} имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если

$$F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f_{X_1, \dots, X_n}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \text{ где}$$

$f_{X_1, \dots, X_n}(y_1, \dots, y_n)$ - **совместная плотность распределения**.

Частная производная по всем аргументам функции распределения - функция плотности.

Свойства функции плотности:

1. $f_{\vec{X}}(\vec{y}) \geq 0$.
2. $\iint_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{y}) d\vec{y} = 1$.
3. $B \subset \mathbb{R}^n; P(\vec{X} \in B) = \iint_B f_{\vec{X}}(\vec{y}) d\vec{y}$
4. $F_{X_1}(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} \left(\iint_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\vec{X}}(\vec{y}) dy_2 \dots dy_n \right) dy_1$.

Примеры

Многомерное равномерное распределение

Равномерное распределение. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — борелевское множество с конечной лебеговой мерой $\lambda(S)$. Говорят, что вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) имеет равномерное распределение в области S , если плотность совместного распределения $f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ постоянна в области S и равна нулю вне этой области:

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(S)}, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in S, \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin S. \end{cases} \quad (17)$$

Убедимся, что эта функция является плотностью распределения:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{\lambda(S)} \int_S dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{\lambda(S)} \lambda(S) = 1.$$

Как и в одномерном случае, вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) с равномерным распределением в области S есть просто вектор координат точки, брошенной наудачу в область S .