16. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины, ее свойства, примеры.

Status	Completed

Моментом m-ого порядка случайной величин X называется EX^m.

Теорема о существовании моментов

Пусть $E|X|^m < \infty\,(m > 0)$, тогда $\forall r \in (0, m):\; E|X|^r < \infty$.

Доказательство:

$|x|^r \le |x|^m + 1 \Rightarrow E|x|^r \le E|x|^m + 1 \Rightarrow$ существует.

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называется $DX = E(X - EX)^2$.

$\sqrt{DX}$ - **среднеквадратичное отклонение.**

Свойства:

1. $DX = EX^2 - (EX)^2$
    1. $DX = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$
2. $DX \ge 0$
3. $DC = 0$
4. Если $DX = 0$, то $P(X = C) = 1$ для некоторой постоянной C.
5. $D(CX) = C^2 DX$
6. $D(X + C) = DX$

7. Если X и Y независимы, то $D(X \pm Y) = DX + DY$
    1. $D(X \pm Y) = E(X \pm Y)^2 - (E(X \pm Y))^2 = EX^2 + EY^2 \pm 2EXY - (EX)^2 - (EY)^2 \mp 2EXEY = DX + DY$
        1. $2EXEY$ сокращаются с $2EXY$ по свойству матожидания произведения независимых с. в.

Большинство свойств доказывается с использованием определения дисперсии и свойств матожидания.

Примеры

Дискретные:

1. **Бернулли** $P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p$, $0 < p < 1$
    1. $DX = p(1-p)$
2. **Биномиальное** $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$, $n \geq 1$, $0 < p < 1$
    1. $DX = np(1-p)$
3. **Пуассона** $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, ...; \quad \lambda > 0$
    1. $DX = \lambda$
4. **Геометрическое** $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, ...$, $0 < p < 1$
    1. $DX = \frac{1-p}{p^2}$

Абсолютно непрерывные:

1. **Равномерное** на $[a, b]$

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Нормальное** с мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

$$\phi_{\alpha,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \sigma^2 > 0$$

$$DX = \sigma^2$$

3. **Показательное**

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

$$DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

4. **Гамма**

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

$$DX = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

5. **Стандартное Коши**

$$c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

EX, DX – не существуют