11. Теорема о независимости функций от независимых случайных величин.

Status	Completed

Линейные преобразования случайных величин, применения к гауссовским распределениям.

Независимость функций

Случайные величины $X_1, ...X_n$ независимы, если $F_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = F_{X_1}(t_1)...F_{X_n}(t_n)$.

Если $\vec{X}$ имеет абсолютно непрерывное распределение, то $X_1, ..., X_n$ - независимы $\Leftrightarrow f_{X_1,...X_n}(t_1, ..., t_n) = f_{X_1}(t_1)...f_{X_n}(t_n)$.

Теорема о независимости функций от независимых случайных величин

Теорема 1. *Пусть случайные величины X и Y независимы, g и h — функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Тогда случайные величины $g(X)$ и $h(Y)$ также независимы.*

Доказательство. Для любых $B_1 \subset \mathbb{R}$, $B_2 \subset \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(g(X) \in B_1,\ h(Y) \in B_2) = \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1),\ Y \in h^{-1}(B_2)) =$$

$$= \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1))\,\mathbf{P}(Y \in h^{-1}(B_2)) = \mathbf{P}(g(X) \in B_1)\,\mathbf{P}(h(Y) \in B_2),$$

где $g^{-1}(B_1) = \{y :\ g(y) \in B_1\}$, $h^{-1}(B_2) = \{y :\ h(y) \in B_2\}$.

Пусть теперь случайная величина X обладает плотностью распределения $f_X(t)$. Образуем новую случайную величину $Y = g(X)$, где g — некоторая неслучайная функция. Разумеется, Y не обязательно обладает плотностью, достаточно взять $g(t) \equiv C$, чтобы убедиться в этом. Однако если g такова, что $f_Y(t)$ все-таки существует, то как ее найти?

Начнем с рассмотрения функции распределения $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(g(X) < y) = \mathbf{P}(X \in g^{-1}((-\infty, y))) = \int\limits_{g^{-1}((-\infty,y))} f_X(u)\,du.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы преобразовать полученный интеграл к виду

$$\int_{-\infty}^{y} h(t)\,dt$$

с некоторой подынтегральной функцией $h(t)$, которая и будет являться плотностью для Y в соответствии с определением. Единого подхода здесь не существует, чаще всего помогает преобразовать интеграл к нужному виду подходящая замена переменных.

Линейные преобразования случайных величин

Теорема 25. *Пусть ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$ и плотность распределения $f_\xi(x)$, и постоянная a отлична от нуля. Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b$ имеет плотность распределения*

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}\, f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Доказательство. Пусть сначала $a > 0$.

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}(a\xi + b < x) = \mathsf{P}\Big(\xi < \frac{x-b}{a}\Big) = F_\xi\Big(\frac{x-b}{a}\Big) = \int\limits_{-\infty}^{(x-b)/a} f_\xi(t)\,dt.$$

Сделаем замену переменной в последнем интеграле. Переменную t заменим на новую переменную y так: $t = \dfrac{y-b}{a}$. Тогда $dt = \dfrac{dy}{a}$, нижняя граница области интегрирования $t = -\infty$ перейдёт в $y = -\infty$, верхняя граница $t = \dfrac{x-b}{a}$ перейдёт в $y = x$. Получим

$$F_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{a}\, f_\xi\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\,dy.$$

Функция под интегралом есть искомая плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = a\xi + b$ при $a > 0$.

Пусть теперь $a < 0$.

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}(a\xi + b < x) = \mathsf{P}\Big(\xi > \frac{x-b}{a}\Big) = \int\limits_{(x-b)/a}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt.$$

Сделаем ту же замену переменной. Но теперь граница интегрирования $t = +\infty$ перейдёт в $y = -\infty$, поскольку $a < 0$. Получим

$$F_\eta(x) = \int\limits_{x}^{-\infty} \frac{1}{a}\, f_\xi\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{|a|}\, f_\xi\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\,dy.$$

Функция под интегралом — плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = a\xi + b$ при $a < 0$. $\square$

Следствие 4. *Если* $\xi \in \mathrm{N}_{0,1}$, *то* $\eta = \sigma\xi + a \in \mathrm{N}_{a,\sigma^2}$.

Доказательство. Действительно,

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma}\, f_\xi\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad \square$$

Следствие 5. *Если* $\xi \in \mathrm{N}_{a,\sigma^2}$, *то* $\dfrac{\xi - a}{\sigma} \in \mathrm{N}_{0,1}$.

Следствие 6. *Если* $\xi \in \mathrm{U}_{0,1}$, *то* $a\xi + b \in \mathrm{U}_{b,\,a+b}$ *при* $a > 0$.

Следствие 7. *Если* $\xi \in \mathrm{E}_\alpha$, *то* $\alpha\xi \in \mathrm{E}_1$.