



# Список вопросов

## Вопросы к экзамену по дифференциальным уравнениям

### **1. Основные понятия, определения, примеры теории обыкновенных дифференциальных уравнений.**

1. Корректность по Адамару.
2. Особые точки первого и второго рода. Особые решения.

### **2. Уравнения первого порядка.**

1. Задача Коши. Локальная теорема существования и единственности (без доказательства).
2. Типы уравнений первого порядка, нахождение общего решения у интегрируемых уравнений.
3. Продолжимые и непродолжимые решения. Теорема о непродолжимости решения. Глобальная теорема существования и единственности.
4. Теорема о зависимости решений от начальных данных и от правой части.

### **3. Системы дифференциальных уравнений первого порядка.**

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства).

### **4. Линейные уравнения $n$ -го порядка.**

1. Теорема существования единственности задачи Коши для однородного уравнения  $n$ -го порядка.
2. Линейная зависимость и независимость систем функций.
3. Определитель Вронского.
4. Теорема о линейной зависимости системы функций.

5. Теорема о линейной независимости решений линейного однородного уравнения.
  6. Формула Остроградского–Лиувилля.
  7. Теорема о существовании фундаментальной системы решений.
  8. Теорема о структуре общего решения однородного уравнения.
  9. Число линейно независимых решений однородного уравнения.
  10. Построение фундаментальной системы решений для однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.
  11. Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения.
  12. Метод вариации произвольных постоянных.
- 5. Линейные системы первого порядка.**
1. Линейная зависимость и независимость системы вектор-функций.
  2. Определитель Вронского для системы вектор-функций.
  3. Теорема об определителе Вронского для решений однородной системы.
  4. Формула Остроградского–Лиувилля.
  5. Теорема о существовании фундаментальной системы решений.
  6. Теорема о структуре общего решения однородной системы уравнений и числе линейно независимых решений однородной системы уравнений.
  7. Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных уравнений.
  8. Эквивалентность линейной системы уравнений и линейного уравнения.
  9. Метод вариации произвольных постоянных.
  10. Построение фундаментальной системы решений для однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
- 6. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.**

1. Определения устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову.
2. Критерий устойчивости нулевого решения однородной линейной системы (теорема).
3. Критерий устойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.
4. Фазовое пространство, траектории. Определение устойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений в рамках кинематического подхода (используя траектории).
5. Теорема Ляпунова об устойчивости нулевого решения системы.
6. Теорема Четаева о неустойчивости нулевого решения системы.
7. Устойчивость по первому приближению. Теорема об устойчивости нулевого решения нелинейной системы. Теорема о неустойчивости нулевого решения нелинейной системы.
8. Автономные системы. Свойства решений автономной системы. Теорема о трех видах траекторий.
7. **Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.**
  1. Задача Штурма-Лиувилля. Теорема о существовании тривиального решения при  $\lambda = 0$ .
  2. Функция Грина. Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для уравнения  $ly = f(x)$ .

## **Вопросы по курсу «ТФКП»**

1. **Основные понятия комплексного анализа.**
  1. Комплексные числа и действия над ними.
  2. Расширенная комплексная плоскость.
  3. Множества на комплексной плоскости (области и их границы).
  4. Последовательности комплексных чисел.
  5. Функции комплексной переменной.
2. **Аналитические функции.**

1. Производная функции в точке.
  2. Дифференцируемость и аналитичность функции комплексной переменной.
  3. Условия Коши–Римана.
  4. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости.
  5. Понятие аналитической функции.
- 3. Интегрирование функции комплексного переменного.**
1. Интеграл от функции комплексного переменного.
  2. Теорема о существовании первообразной для аналитической функции.
  3. Интегральная теорема Коши.
  4. Обобщение интегральной теоремы Коши.
  5. Теорема Коши для многосвязной области.
  6. Интегральная формула Коши (теорема).
  7. Теорема о существовании всех производных у аналитической функции.
  8. Теорема Морера.
  9. Понятие об интеграле в смысле главного значения по Коши.
  10. Теорема Лиувилля.
  11. Теорема о среднем.
  12. Принцип максимума модуля.
- 4. Функциональные и степенные ряды.**
1. Сходимость рядов.
  2. Равномерная сходимость рядов.
  3. Аналитичность суммы равномерно сходящегося ряда, составленного из аналитических функций.
  4. Теорема Вейерштрасса о рядах из аналитических функций.
  5. Степенные ряды.
  6. Теорема Абеля.

7. Область сходимости степенного ряда, формула Коши-Адамара (без доказательства).
8. Теорема о сумме степенного ряда.

#### **5. Ряды Тейлора и Лорана.**

1. Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора.
2. Нули аналитической функции.
3. Теорема единственности.
4. Теорема о представлении аналитической функции рядом Лорана.
5. Теорема единственности разложения в ряд Лорана.

#### **6. Особые точки и вычеты.**

1. Классификация изолированных особых точек (в терминах поведения, в терминах ряда Лорана).
2. Теорема Сохоцкого (о поведении аналитической функции в окрестности «существенно особой» точки).
3. Лемма Шварца (об отображении единичного круга с помощью аналитической функции).
4. Вычет в конечной и бесконечной точке.
5. Формула для нахождения вычета функции в полюсе порядка  $m$ .
6. Основная теорема о вычетах.
7. Приложение теории вычетов: вычисление интегралов. Лемма Жордана.
8. Теорема о вычислении интегралов в смысле главного значения по Коши.
9. Логарифмический вычет.
10. Теорема о логарифмическом вычете.
11. Принцип аргумента.
12. Теорема Руше.
13. Основная теорема алгебры.