

22. Приближение Пуассона для биномиального распределения.

Status

Completed

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли $n \rightarrow \infty$; $p \rightarrow 0$; $np \rightarrow \lambda > 0$. Тогда

$$P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

или, что то же:

$$S_n \Rightarrow Y \sim \Pi_\lambda.$$

Доказательство. Положим $\lambda_n = np_n$. По условию $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$. Подставим $p_n = \lambda_n/n$ в формулу Бернулли:

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= C_n^k \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \underbrace{\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k}}_{\downarrow 1} \frac{\lambda_n^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\downarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow 1} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (8) \end{aligned}$$

В соотношении (8) мы воспользовались тем, что $\lambda_n^k \rightarrow \lambda^k$ и замечательным пределом $(1 - \lambda_n/n)^n \rightarrow e^{-\lambda}$. \square