挑战性题目DSCT301：求不同形态的二叉树数目

问题描述：*n*个节点的不同形态的二叉树数目是确定的，称为Catalan数（卡特兰数）。任意输入一个正整数*n*，请问有多少种不同的二叉树形状？例如，输入3，输出5。

数学描述：二叉树的先序遍历与中序遍历可以确定唯一的一棵二叉树。“不同形状的二叉树数目问题”与“*n*个元素依次入栈不同的出栈序列数目问题”是等价问题。

思路分析[[1]](#footnote-1)与算法描述[[2]](#footnote-2)：

本人实现了基于动态规划的二叉树形态数目求解，并通过卡特兰数公式与组合数的快速计算方法对计算进行了优化。下面将分别从这两个方面进行叙述。

动态规划函数的自变量为节点数目N，函数值为形态数目。由于当求解了小规模树的形态数目后，大规模树可以在该子问题的求解基础上直接利用已有的结果，故本问题满足最优子结构，且无后效性，故可以利用动态规划进行求解。下面讨论问题的状态转移方程与初始条件。

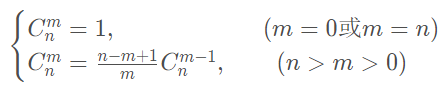
记动态规划数组为BT[N],则容易知道BT[0]=1，BT[1]=1。为了状态转移的可行，我们定义节点数为0的二叉树有1棵。由于除去根节点后的余下的N-1个节点均可能位于左右子树中的任意一棵，因此为了考虑全面，需要对左右子树的所有可能节点数目进行考虑。对此，应用乘法与加法原理，我们有如下转移方程：



经查阅，此式即为卡特兰数的定义，故有显式表达式：



下面探讨组合数计算的优化。由于组合式可由如下方式计算：



故利用逆向递归或正向递推的方式即可在时间内解决。因此，算法的时间复杂度为，空间复杂度为。

[n个节点的二叉树有多少种形态（Catalan数）\_zdfunk的博客-CSDN博客](https://blog.csdn.net/zdfunk/article/details/119302238)

[n个结点，不同形态的二叉树（数目+生成）\_weixin\_33851177的博客-CSDN博客](https://blog.csdn.net/weixin_33851177/article/details/89750513)

[卡特兰数问题——一个栈(无穷大)的进栈序列为1，2，3，…，n，有多少个不同的出栈序列?\_杜尚峰的博客-CSDN博客](https://blog.csdn.net/duzejie/article/details/52491072)

[C++求解组合数的具体实现\_AlbertS Home of Technology-CSDN博客\_c++组合数](https://blog.csdn.net/albertsh/article/details/108691877)

1. 算法思路不但要给出解题的算法内涵，还应该分析该算法的时间复杂度。此页背面也可以答题，但不应续页。 [↑](#footnote-ref-1)
2. 代码的写作和测试建议使用GCC、G++等通用C/C++编译器进行编译以利于跨平台的性能测试。作业纸质版本和测试的可执行文件请提交给主管助教。测试样例命令格式为：DSCT301\_2018270103012.exe 3，输出结果样例为：5。 [↑](#footnote-ref-2)