一、小剧场一排有 n 个座位。由于各排之间空隙较小，如果某座位已有人入座，则入座者必须起身才能让后来者通过该座位。若一与会者进入会场时该排有若干个座位可供其选择，则他以相等的概率选择其中一个座位就坐。

（1）若该排座位只有左侧一个入口，所有与会者一旦就坐就不愿起身让后来者通过。记 E_n 为该排最终入座人数的期望，试写出 E_n 满足的递推关系，并求 E_n；

（2）若该排座位在左右两侧均有入口，所有与会者以 p 的概率起身让后来者通过，以 $1-p$ 的概率不让后来者通过。记 F_n 为该排最终入座人数的期望，试写出 F_n 满足的递推关系。

二、k 名专家对 n 件作品按从优到劣的顺序进行排序，用 $\sigma_j^i = l$ 表示专家 i 认为作品 j 位于第 l 位。记 $\boldsymbol{\sigma}_i=(\sigma_1^i,\sigma_2^i,\cdots,\sigma_n^i)$ 为专家 i 的排序向量，$i=1,\cdots,k$，$\boldsymbol{\Sigma}=\{\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_k\}$ 为 k 名专家的排序集合。现希望给出一种能较好地反映所有专家意见的综合排序。

对两个 n 维向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 和 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，定义它们之间的距离为 $L_1(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{j=1}^{n}|u_i-v_i|$。排序 $\boldsymbol{\sigma}$ 与一组排序 $\boldsymbol{\Sigma}=\{\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_k\}$ 的综合距离定义为 $d(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Sigma})=\sum_{i=1}^{k}L_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_i)$。对给定的 $\boldsymbol{\Sigma}$，与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 综合距离最小的排序记为 $\boldsymbol{\sigma}^*$。

（1）给定 $\boldsymbol{\Sigma}=\{\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_k\}$，求 n 维向量 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，使得 $\sum_{i=1}^{k}L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}_i)$ 最小。你能否根据 $\boldsymbol{\mu}$ 给出 n 件作品的一种综合排序 $\boldsymbol{\sigma}'$，$\boldsymbol{\sigma}^*$ 是否也能从 $\boldsymbol{\mu}$ 得到，为什么；

（2）有人提议用 Borda 计分法给出综合排序。首先计算作品 j 的平均得分 $\beta_j=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sigma_j^i$，再按得分从小到大的顺序对作品进行排序（得分相同的作品之间的顺序可任意确定），由此给出一种综合排序 $\boldsymbol{\sigma}''$。证明：对任意 j，$\sum_{i=1}^{k}|\beta_j-\sigma_j^i|\le 2\sum_{i=1}^{k}|\mu_j-\sigma_j^i|$。

（3）证明：$d(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\Sigma})\le 3d(\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\Sigma})$ 且 $d(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\Sigma})\le 5d(\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\Sigma})$。