插值

已知u对数(x_i, y_i)，求y=y(x)

分段线性插值

$$y(x)=y_i\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},x_i\leq x\leq x_{i+1}$$

保证单调，可以求出反函数

分段二次插值

$$y(x)=y_{i-1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}+y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+y_{i+1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

精度高，但不一定单调

三次样条插值函数

给定n+1个点，$i=0,1,2...,n$，$\{x_i\}$递增。求得的函数应该满足给出的n+1对点；两个点之间的函数不超过3次；函数、导数、二阶导数在区间内连续。

存在性：

- 每段区间都有$y(x)=a_i+b_ix+c_ix^2+d_ix^3$，共4n个未知数
- 满足n+1个点有n+1个方程+函数、导数、二阶导数连续的3(n-1)个方程+人为补充的边界导数、二阶导数（定义边界的导数；定义边界的二阶导数；令两个边界的导数、二阶导数相等）2个方程共4n个方程，可以求得y(x)

求法：

- 设$y''(x)=M_i\frac{x_{i-1}-x}{x_{i-1}-x_i}+M_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}$
- 记$h_i=x_i-x_{i-1}$，则$y''(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$
- 积分三次有$y(x)==M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+A_i(x-x_{i-1})+B_i$
  - 利用边界条件可以求出A_i,B_i
  - 回代之后可以利用一阶导数连续得到一个$g_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i})$（线性方程组的右侧）
  - 最后利用二阶导数连续以及人为补充的条件，可以利用三对角线方程的矩阵得到M_i

Lagrange

$$L(x)=\sum_{j=0}^{n}y_jl_j(x)$$

which

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

数值积分

梯形公式

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x)dx = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}(x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i$$

若等距，则有：

$$h(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2})$$

Simpson Equation

对于等距的点：

$$\int_{x_1}^{x_{2n+1}} y(x)dx = \frac{h}{3}(2\sum_{i=0}^{n} y_{2i+1} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i})$$

常微分方程数值解

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \frac{dy(x_i)}{dx}$$

利用欧拉公式有：

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

R-K

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} + K_1)$$

$$K_3 = f(x_i + h, y_i - hK_1 + 2hK_2)$$