# Fake Coin

**辨识**

- 已知伪币数量
- 找出伪币并确定轻重

**自适应**

- 每次的称量结果依赖于前一次的称量结果，这种方案称为自适应的
- 若有m枚硬币，则可能有2m种可能（伪币或轻或重则乘2）
- k次称量可以给出$3^k$-3种结果（以全部称量结果作为象集，<<<, ===与>>>有多于1个原象或不存在原象）

**非自适应**

- 每次的称量不依赖于前一次的称量结果，这种方案称为非自适应的
- 下述构造Dyson集的方法即为非自适应的

**一般结论**

- 对于任意整数$w \geq 2$
  - 若$3 \leq n \leq \frac{3^w-3}{2}$，存在一**非自适应**的称量方案，使用w次可以从n枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若$n \geq \frac{3^w-3}{2}$，不存在一**自适应**的称量方案，使用w次可以从n枚硬币中辨别伪币并确定轻重

**Dyson集**

- 满足(i) $\sum\limits_{v\in S} v = 0$ (ii)若$v \in S, -v \notin S$的向量子集$S \subseteq \{-1,0,1\}^w$
- (i)的意义：确保每一枚硬币出现在天平左右的次数相等，确保每一次天平左右的硬币数量相等
- (ii)的意义：确保没有两枚硬币出现“左右对调”的情况，否则无法确定伪币的轻重（同时也就是无法确定伪币）

> sample:

1. 12枚硬币，三次称量分别为1+4+9+10>2+5+7+11, 1+6+7+12=2+4+8+10, 3+4+7+11>1+5+8+12
2. 三次称量结果写成向量即为(1, 0, 1)
3. 表格有：

| 1 | 左 | 左 | 右 |
|---|---|---|---|
| 2 | 右 | 右 | |
| 3 | | | 左 |
| 4 | 左 | 右 | 左 |
| 5 | 右 | | 右 |
| 6 | | 左 | |

| 1 | 左 | 左 | 右 |
|---|---|---|---|
| 7 | 右 | 左 | 左 |
| 8 |  | 右 | 右 |
| 9 | 左 |  |  |
| 10 | 左 | 右 |  |
| 11 | 右 |  | 左 |
| 12 |  | 左 | 右 |

4. 写成向量即为：
   ( 1, 1,-1)
   (-1,-1, 0)
   ( 0, 0, 1)
   ( 1,-1, 1)
   (-1, 0,-1)
   ( 0, 1, 0)
   (-1, 1, 1)
   ( 0,-1, 1)
   ( 1, 0, 0)
   ( 1,-1, 0)
   (-1, 0, 1)
   ( 0, 1,-1)
5. 在上述向量表中寻找与称量结果(1, 0, 1)相等（重）或(-1, 0, -1)相等（轻）的硬币，即为伪币。（意义：每一次出现或重或轻的结果，都是因为伪币的存在）

**构造Dyson集**

- $f:\{-1,0,1\}\to\{-1,0,1\}, f(-1)=0, f(0)=1, f(1)=-1$
- 若$x=(x_1,x_2,\ldots,x_w)\in\{-1,0,1\}^w$，则$f(x)=(f(x_1),\ldots,f(x_w))$
- 对任意$x\in\{-1,0,1\}^w, x\neq(-1,-1,\ldots,-1),(0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)$时，定义$S(x)=\{x,f(x),f(f(x)),-1,-f(x),-f(f(x))\}$
  - 易知$S(x)$中向量两两不同
  - 对任意$v\in S(x), f(v)\in S(x)$（因为$f(f(f(x)))=x$）
- 记$W=\frac{1}{6}(3^w-3)$，则存在W个向量$v_1,v_2,\ldots,v_w$使得$\{-1,0,1\}^w=S(v_1)\cup S(v_2)\cup\ldots\cup S(v_w)\cup\{(-1,-1,\ldots,-1),(0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)\}$
  - 即构成了W+1个族，形成了W+1个partition，其中最后一个族包含的三种结果为不可能结果
- 当硬币数$n=3k, 1\le k\le W: S^+(v_1)\cup S^+(v_2)\cup\ldots\cup S^+(v_k)$
- 当硬币数$n=3k+1, 2\le k\le W: S^+(v_4)\cup S^+(v_5)\cup\ldots\cup S^+(v_{k+1})\cup S'$（其中$S'$为$S^+(v_1)\cup S^+(v_2)\cup S^+(v_3)$中能使得结果成为Dyson集的子集）
- 当硬币数$n=3k+2, 1\le k\le W: S^+(v_3)\cup S^+(v_4)\cup\ldots\cup S^+(v_{k+1})\cup S'$（其中$S'$为$S^+(v_1)\cup S^+(v_2)$中能使得结果成为Dyson集的子集）
  - $x+f(x)+f(f(x))=0$满足Dyson集的(i)，$S^+(x)=\{x,f(x),f(f(x))\}$满足了(ii)