Operational Research

- 优化理论与算法
- 著名数学问题
- 企业管理实践

数学规划

- 线性规划 Linear Programming
- 非线性规划 Nonlinear Programming
- 整数规划 Integer Programming
- 多目标规划 Multiobjective Programming
- 组合优化 Combinatorial Optimization
- 随机运筹
  - 排队论 Queuing theory
  - 可靠性理论 Reliability theory
  - 库存论 Inventory theory
- 博弈论与决策理论 Game Theory & Decision Theory

Recipe

- 市场上可以买到n种不同的食品，售价分别为c_j
- 人体每天至少需要m种基本营养成分，每天至少需要摄入第i种b_i个单位
- 每单位第j种食物包含第i种营养成分a_{ij}个单位
- 在满足人体营养需求的前提下，寻找最经济的食谱

目标函数（x_j为单位）：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

摄入第i种营养成分总量满足$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$

> 在现代观点，某些营养成分的摄入量可能存在上限，此处暂不讨论

摄入量非负：$x_j \geq 0$

即

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

满足$\boldsymbol{Ax}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geq 0$的最小的$\boldsymbol{cx}$

Transportation

- 调运货物，使得总运输费用最小
- m个场地，产量分别为a_i, n个销地，销量分别为b_j
- 从产地到销地的运输单价分别为c_{ij}
- 要保证产销平衡$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$

目标函数（x_{ij}为调运数量）：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

满足$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\sum\limits_{i=1}^{m}=b_j,x_{ij}\geq 0$

Cutting-Stock

- 给定生产一批产品所需要的某种材料的大小与数量
- 如何从相同规则的原料中下料，使得所用原料最少

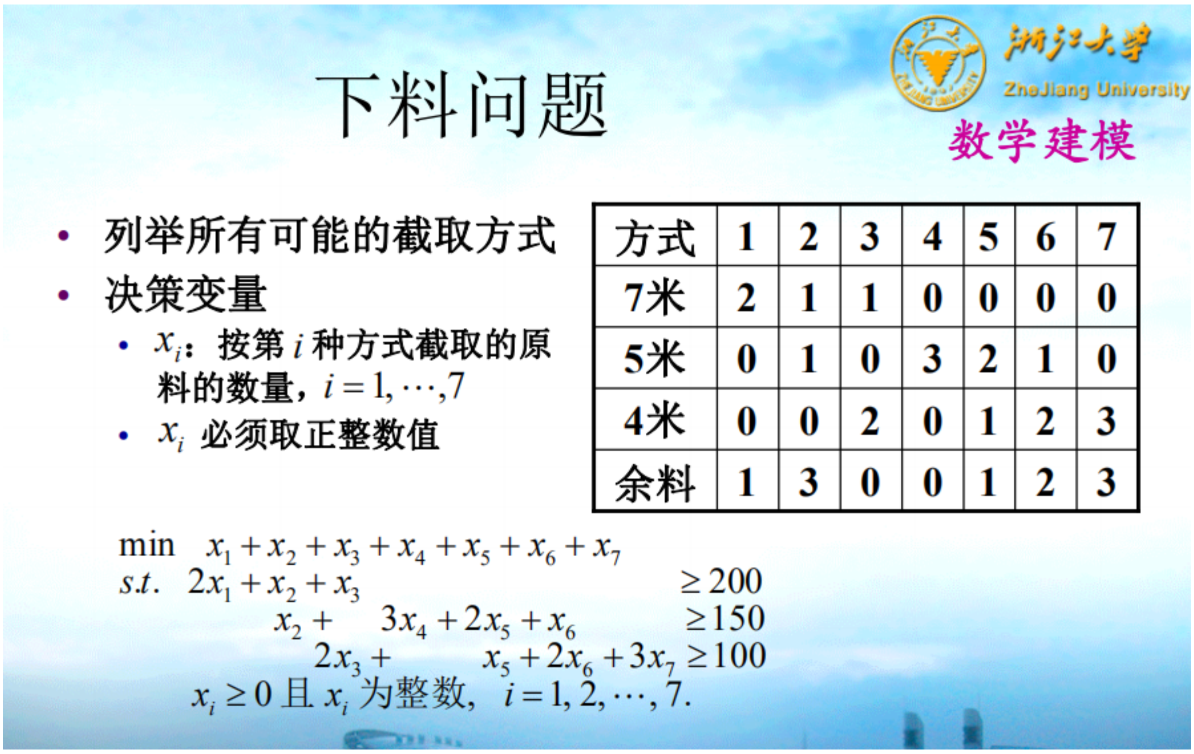
（数量多可以根据每根管的使用情况分类）用x_{ji}代表第j根钢管截取的第i种短管的数量，而如果第j根被截取，记$y_i=1$，即$\exists i,x_{ji}>0\Rightarrow y_j=1$

故目标函数:

$$\sum_{j=1}^{n}y_j$$

满足$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ji}\geq b_i$ (短管的数量满足下限)，$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ji}w_i\leq W$(总用料不超出上限)

数量少的情况可以枚举（根据截取的方法进行分类）：



0-1变量

- 仅当0-1变量y=1，n个0-1变量$x_1,x_2,...x_n$中的任意一个才可以取值1（可1可0，否则若y=0，全部x_i都为0），即$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq ny$
- 有且仅有一个取1，为$\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1$，且取值1的下标为$\sum\limits_{j=1}^{n} jx_j = 1$
- 整变量$0 \leq y \leq a$是否取非零值，可以取0-1变量w满足$w \leq y \leq aw$
- 比较两个整变量的大小，取0-1变量w
  - $w=1 \rightarrow y \geq z+1$
  - $w=0 \rightarrow y \leq z$
  - 取一个较大的整数M，满足约束$(1+M)w-M \leq y-z \leq Mw$

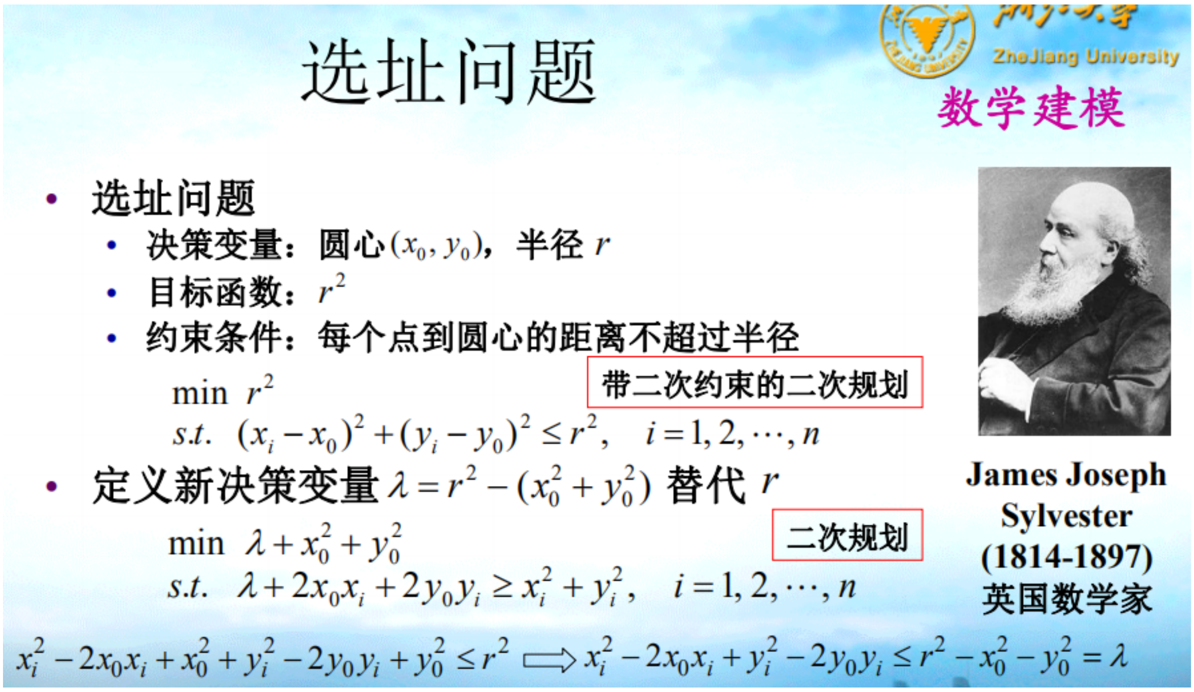
线性化：

如对于三个0-1变量x,y,z满足$z=xy$，可以转化为

$$z \leq x, z \leq y, z \geq x+y-1$$

Situation

- 设平面上有n个点
- 求一个面积最小的圆，包含所有的点



Support Vector Machine

即超平面可视为对具有n个特征的点的“分类标准”。在其上的为一类，在其下的为一类。

而确定超平面，需要多个点，这个可以训练机器确定一个好的超平面的点集即为训练集。

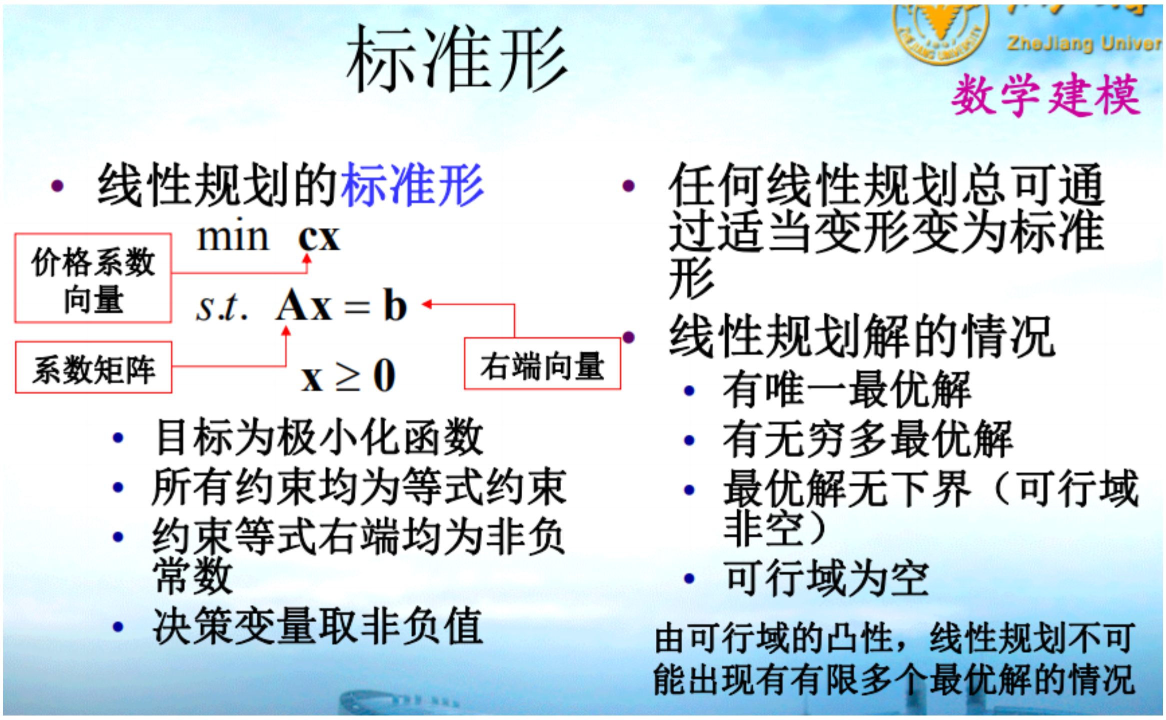
(I)的计算较为麻烦，因此转化为(II)。而为了保证在(II)下我们可以找到（原本(I)的）最优解，我们需要证明

- (I)的可行域在(II)的可行域内
- (II)的最优解在(I)的可行域内
- 在(I)的可行域内，对于相同的决策变量，(I)的目标值与(II)的目标值相等

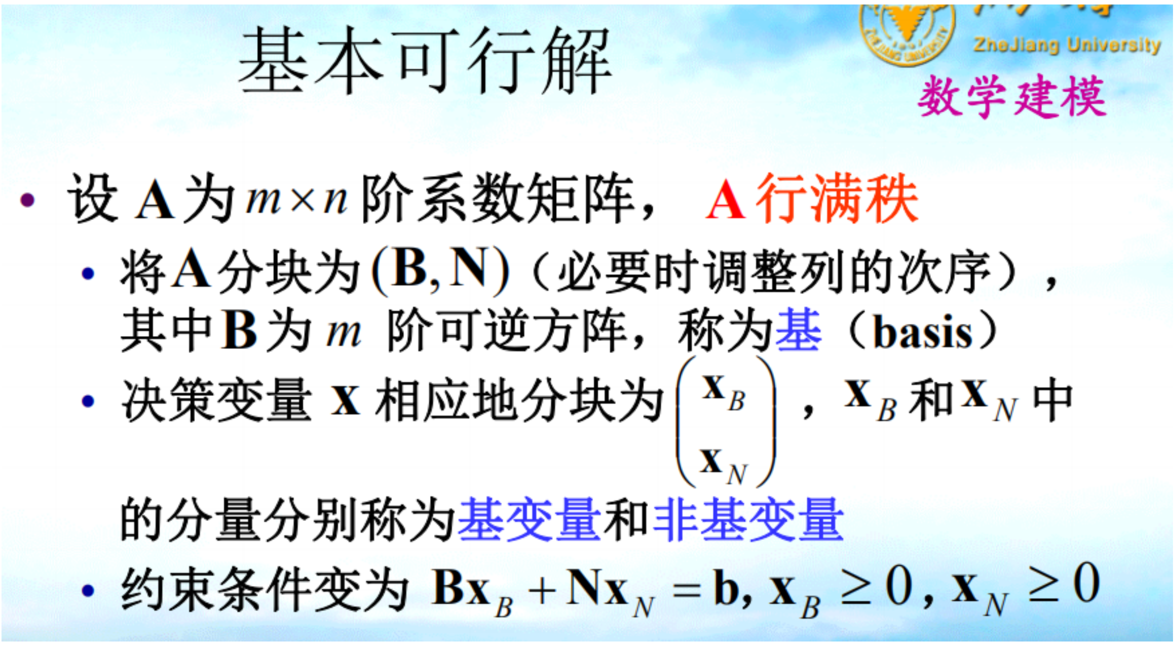
而又可以将(II)的约束条件、目标函数对调，得到(III)。同上证明，又可以简化计算。

线性规划

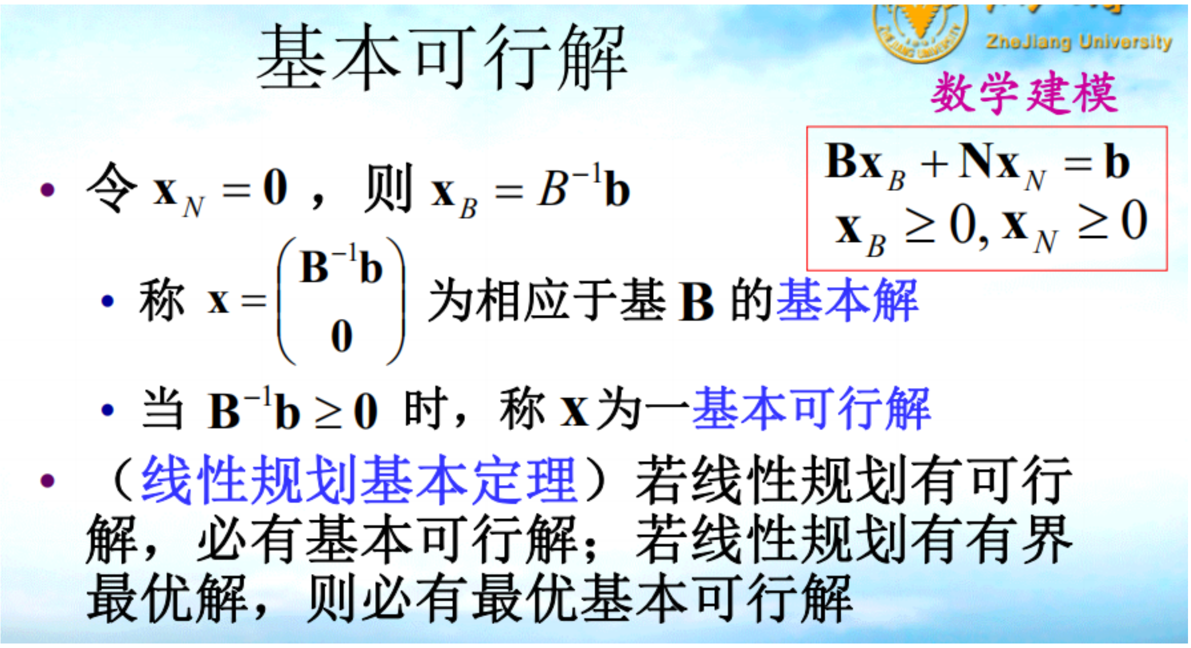
标准型



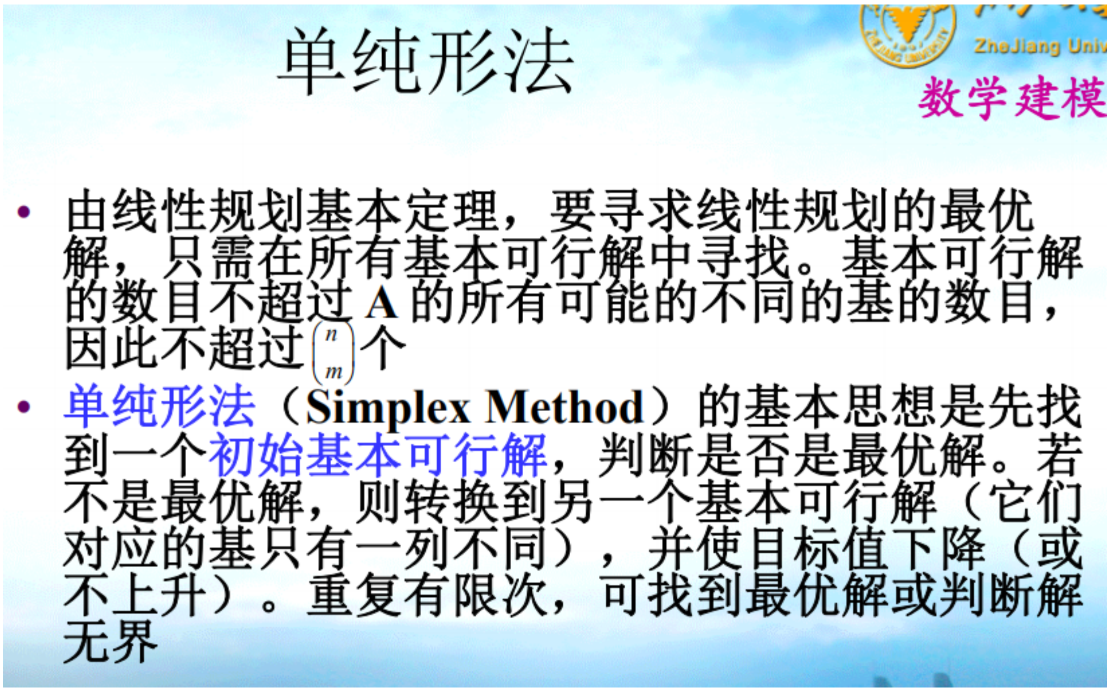
基本可行解



此处是强制令$x_N = 0$，得到的基本可行解其实是所有可行解的子集



单纯形法



几何意义：

- 线性规划的可行域是一个凸多面体（有界或无界），每个基本可行解对应于凸多面体的一个顶点
- 由线性规划基本定理，最优解必在某个顶点处达到
- 单纯形法的几何意义是从凸多面体的一个顶点转到相邻的另一个顶点，直至找到最优解

- 代数运算，产生的解为精确的解；相比之下，内点法产生的解为近似解
- 与离散优化关系密切，用途更广泛

整数规划

松弛Relaxation

设有整数线性规划（IP），去除决策变量取整数约束后所得线性规划记为（LP），称（LP）为（IP）的松弛（relaxation）：

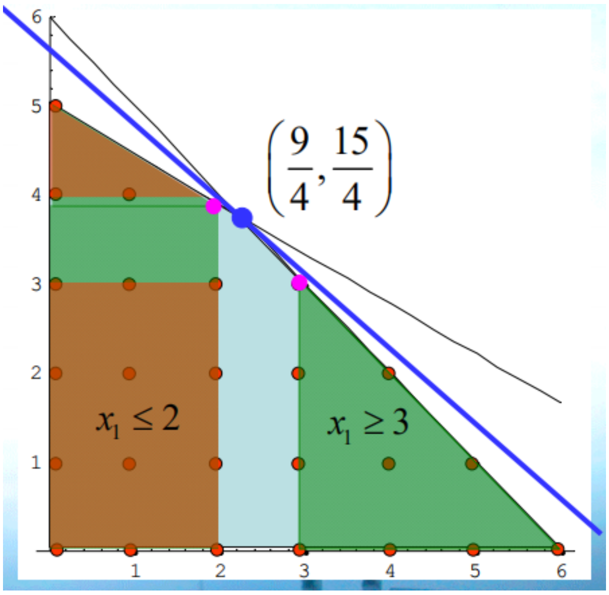
- （IP）的可行域包含于（LP）的可行域中
- （IP）的可行解也是（LP）的可行解，但反之不然
- （IP）的最优值不优于（LP）的最优值
- 若（LP）的最优解为整数解，则它也是（IP）的最优解
- 不存在简单的取整策略将（LP）的最优解变为（IP）的最优解，只能说（IP）的最优解必定在（LP）最优解的"附近"

分枝定界法Branch and Bound

Branch：若（LP）最优解不为整数解，选择最优解中任一个不取整数值的变量，在（IP）中分别加入一对互斥的约束，形成两个分枝整数线性规划。原（IP）的任一可行解分属两个分枝的可行域之一。即去掉不为整数的解。

Bound：求解分枝整数线性规划的松弛，确定每个分枝最优值的上界或下界，删去松弛线性规划最优解为整数解或不包含（IP）最优解的分枝。至所有分枝均已删去时，（IP）的最优解必包含在历次求得的整数解中。即通过确定分枝的上下界来确定是否剪枝。

类比decision tree还是dfs



多目标规划

研究变量在满足给定约束条件下，如何使**多个目标函数同时极小化**的问题

解的类型

设$x^* \in S$

- 若对任意$x \in S, f_k(x^*) \leq f_k(x)$ 则称x^*为（MOP）的绝对最优解

> 每个方面都最好的

- 若不存在$x \in S, f_k(x) \leq f_k(x^*)$，且至少存在某个$k, f_k(x) < f_k(x^*)$则称$x^*$为（MOP）的Pareto最优解。

> 偏科状元，无法与其他人比较好坏，有某一方面突出地好；前半句即不存在其他点，每个函数取值逗比x^*好，但x^*起码存在某一方面不如其他

- 若不存在$x \in S, f_k(x) < f_k(x^*)$ 则称x^*为（MOP）的弱Pareto最优解

> 不存在其他点每个函数取值都比x^*绝对好，大家要么半斤八两要么不如x^*

- （MOP）的所有绝对最优解，Pareto最优解，弱Pareto最优解的集合分别记作S_a, S_p, S_{wp}

记S^i为单目标最优解，则多目标规划的绝对最优解$S_a = \bigcap\limits_{i=1}^{p} S^i, S^i \subseteq S_{wp}$

各集合满足：$S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S, S_a \neq \emptyset \to S_a = S_p$

解法

- 加权法
- 分层排序法
- 带宽容值的分层排序法
- 主要目标法

组合优化

从有限个可行解中找出使某个目标函数达到最优解的优化问题

Knapsack

设每个商品价格为p_i，背包总容量为W，则为求$max\{\sum p_i x_i | \sum w_i x_i \leq W, x_i = 0, 1\}$

Traveling Salesman Problem

设两个城市之间的旅行成本为，则为求$min \sum p_{ij}$

Assignment

设有n任务分配给n员工，每人完成一项，员工i完成任务j的时间为c_{ij}，如何分配可以使得完成任务总时间最少

- 系数矩阵为全幺模矩阵的整数规划的松弛线性规划的最优解必为整数解