Game Theory

- 合作博弈与非合作博弈
- 静态博弈与动态博弈
- 完全信息与不完全信息与完美信息

矩阵博弈

> 二人零和有限博弈
>
> 完全信息静态博弈

- 元素a_{ij}既既是所在行的最小值，又是所在列的最大值，称为鞍点（saddle point）

  > 是双方都会选择的点，是稳定局势

- 若参与者可以以一定的概率分布选择若干个不同的策略，这样的策略称为**混合策略**

- 若参与者每次行动都选择某个确定的策略，这样的策略称为**纯策略**

- 甲、乙的混合策略集分别为

$$\mathbf{X}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\} \quad \mathbf{Y}=\left\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}} \mid y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$$

- 设甲、乙采用的混合策略分别为 $\mathbf{x}\in\mathbf{X},\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ ，甲的期望收益为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j a_{ij}$ ，乙的期望收益为 $-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$
- （von Neumann极小极大定理，Minimax Theorem）

  设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ ，则存在 $\mathbf{x}^*\in\mathbf{X},\mathbf{y}^*\in\mathbf{Y}$

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

- 采用纯策略，则有可能不存在稳定局势的鞍点
- 采用混合策略，则总是会存在稳定局势使得期望收益相等

双矩阵博弈

若二人博弈不是**零和**，则双方收益需要用两个矩阵分别表示，称为双矩阵博弈

Nash均衡

完全信息静态博弈的某个局势，每一个理性的参与者都不会单独偏离它

> 因为收益不会增加

最优反应函数：

给定除参与者i之外的其他参与者的策略，参与者i选择其最优反应函数时的收益最大

Nash定理：

若参与者有限，每位参与者的策略集均有限，收益函数均为实值函数，则博弈**必存在混合策略意义下的Nash均衡**

> 是极小极大定理向多人博弈和非零和博弈的推广

竞争和垄断

Hotelling模型

Cournot双头垄断

合作博弈

破产清偿

CG性质