层次分析法

- 定性与定量相结合
- 利用较少的定量信息使得决策的思维过程数学化
- **是对难以完全定量的复杂系统做出决策的模型和方法**
- 根据问题的性质和要达到的总目标，将问题分解为不同的组成因素，并按照因素间的相互关联影响以及隶属关系将因素按不同的层次聚集组合，形成一个多层次的分析结构模型，从而最终使问题归结为**最低层**(供决策的方案、措施等)相对于**最高层**(总目标)的**相对重要权值**的确定或相对优劣次序的排定

基本步骤

1. 建立层次结构模型；
2. 构造判断(成对比较)矩阵；
3. 层次单排序及其一致性检验；
4. 层次总排序及其一致性检验；

建立层次结构模型

1. 最高层(目标层)：决策的目的、要解决的问题；
2. 中间层(准则层或指标层)：考虑的因素、决策的准则；
3. 最低层(方案层)：决策时的备选方案；

对于每一个准则w_i，考察每一个方案p_j

构造判断矩阵

三个准则构成矩阵$w=\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}$

三个准则考量下的三个方案构成矩阵$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}$

计算$wP^T=\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}$

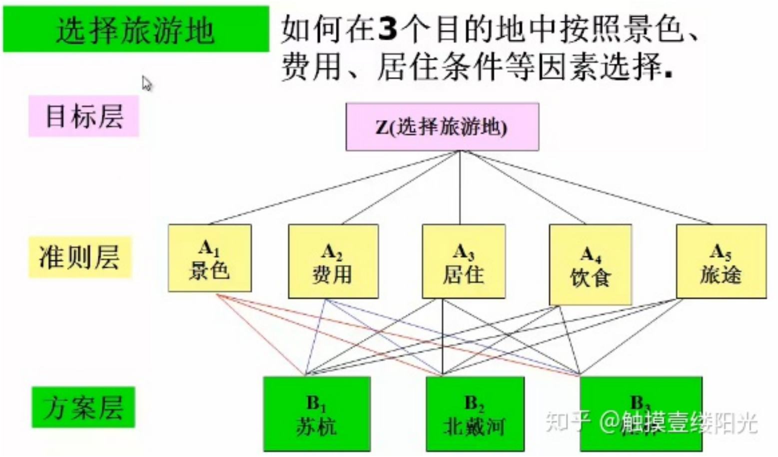
一致矩阵法

1. 把所有因素放在一起比较，而是两两比较；
2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确性；

比较矩阵：对角为1，对称元素互为倒数；为**正互反矩阵**$a_{ij}>0, a_{ij}a_{ji}=1$

成对比较矩阵是表示**本层所有因素针对上一层某一个因素(准侧或目标)的相对重要性**的比较。成对比较矩阵的元素a_{ij}表示的是第 i个因素相对于第 j 个因素的比较结果，这个值使用的是Santy的1-9标度方法给出。

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2，4，6，8	上述两相邻判断的中值
倒数	因素i与j比较的判断a_{ij}，则因素j与i比较的判断$a_{ji}=1/a_{ij}$

> sample
>
> 
>

Z	A1	A2	A3	A4	A5
A1	1	1/2	4	3	3
A2	2	1	7	5	5
A3	1/4	1/7	1	1/2	1/3
A4	1/3	1/5	2	1	1
A5	1/3	1/5	3	1	1

层次单排序与一致性检验

层次单排序：

W的元素为同一层次因素对于上一层次因素某因素相对重要性的排序权值

一致性：

$a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$

不一致是允许的，但是不一致的范围要确定

一致阵

具有一致性的对比矩阵为**一致阵**，一致阵A满足：

1. $a_{ij}a_{ji} = 1$
2. A^T也为一致阵
3. A的各行成比例，则A转秩为1
4. A的最大特征根为$\lambda = n$，其余$n-1$个特征根均为0
5. A的任意一行、一列都是对应特征根n的特征向量，$AW = nW$

由此，如果对比矩阵是一致阵，则取最大特征根n的归一化特征向量作为权重向量

如果对比矩阵不是一致阵，则Santy等人建议用最大特征根对应的归一化特征向量作为权向量W，此时会有$AW = \lambda W, W = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n], \lambda > n$

> 当且仅当$\lambda = n$，A为一致阵。λ的大小依赖于连续性，故其与n偏差越大，一致性越差。

一致性检验

$$CI = \frac{\lambda - n}{n-1}$$

- CI=0，有完全一致性
- CI接近0，有满意一致性
- CI越大，一致性越差

为了使得CI有个对比的指标，引入随机一致性指标RI。通过随机构造500个对比矩阵，求500个CI_i的均值$RI = \frac{CI_1 + CI_2 + \dots + CI_{500}}{500} = \frac{\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{500}}{500} - n}{n-1}$

RI表：

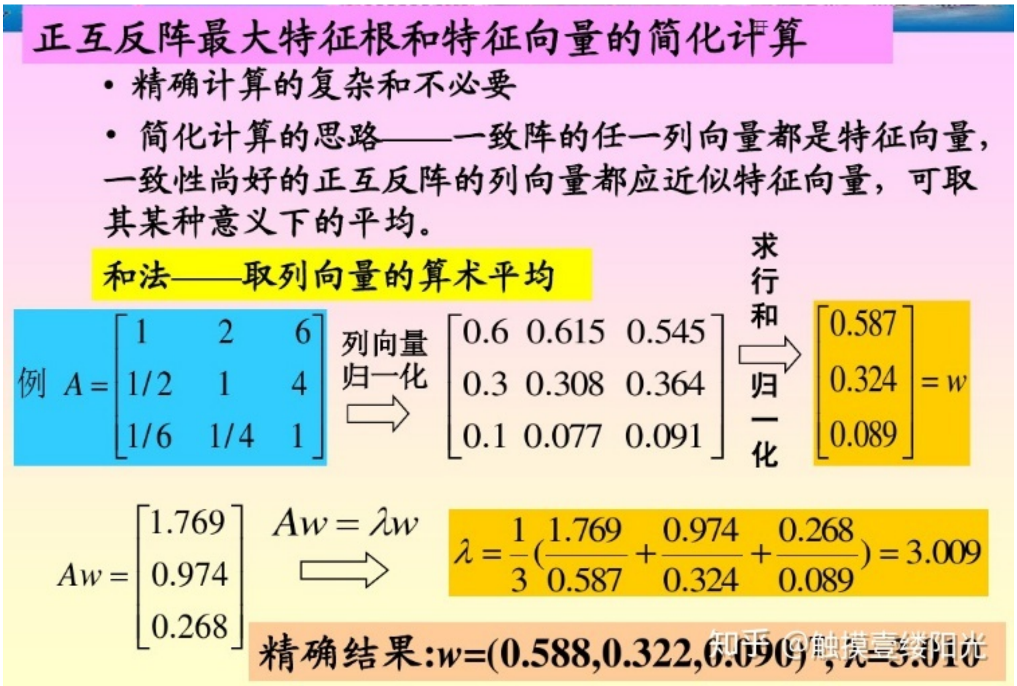
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

随后引入**一致性比率**$CR = \frac{CI}{RI}$：

若$CR < 0.1$，则可以认为具有满意的一致性，对比矩阵通过了一致性检验，可以使用其归一化特征向量作为权重向量

否则，对比矩阵未通过一致性检验，需要重新构造对比矩阵

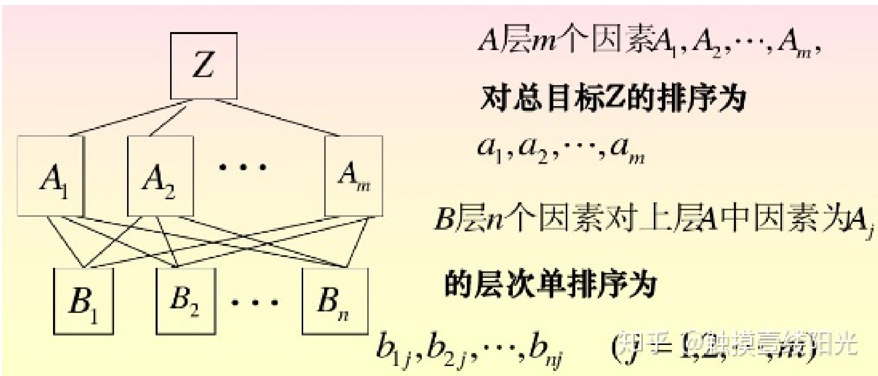
特征向量的简化计算



层次总排序及其一致性检验

层次总排序

计算某一层次所有因素对于**最高层(总目标)**相对重要性的权值，由高层次向低层次进行



其中A层对Z的权重向量通过一个$m \times m$的对比矩阵得到，最终会有1个权重向量（准则的重要性）

B层对A_i的权重向量通过一个$n \times n$的对比矩阵得到，最终会有m个权重向量（方案在每个准则上的得分）

B 层的层次总排序为：

即 B 层第 i 个因素对总目标的权值为：$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{ij}$

$$B_1: a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots a_m b_{1m}$$
$$B_2: a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \cdots a_m b_{2m}$$
$$\cdots$$
$$B_n: a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \cdots a_m b_{nm}$$

B \ A	$A_1, A_2, \cdots, A_m$ $a_1, a_2, \cdots, a_m$	B层的层次总排序
B_1	b_{11} b_{12} b_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{1j} = b_1$
B_2	b_{21} b_{22} b_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{2j} = b_2$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	
B_n	b_{n1} b_{n2} b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{nj} = b_n$

即计算每一个方案的权重（得分）

层次总排序的一致性检验

设 B 层 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 对上层（A 层）中因素 $A_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 的层次单排序一致性指标为 CI_j，随机一致性指为 RI_j，则层次总排序的一致性比率为：

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \cdots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \cdots + a_m RI_m}$$

当 $CR < 0.1$ 时，认为层次总排序通过一致性检验。层次总排序具有满意的一致性，否则需要重新调整那些一致性比率高的判断矩阵的元素取值。

到此，根据最下层（决策层）的层次总排序做出最后决策。

一致性检验，总体通过一致性检验后，可以认为最底层的权重（得分）是有效的

选择旅游地　记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为

$$w^{(2)} = (0.263, 0.475, 0.055, 0.090, 0.110)^T$$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对C_1(景色)的成对比较阵　　方案层对C_2(费用)的成对比较阵　　…C_n

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots B_n$$

最大特征根　$\lambda_1 = 3.005$　　$\lambda_2 = 3.002$　…　$\lambda_5 = 3.0$

权向量　$w_1^{(3)}$ =(0.595，0.277，0.129)　$w_2^{(3)}$ =(0.082，0.236，0.682)　…　$w_5^{(3)}$ =(0.1[illegible]，[illegible]，[illegible])

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

$w^{(2)}$	0.263	0.475	0.055	0.090	0.110
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

RI=0.58 (n=3), CI_k 均可通过一致性检验

方案P_1对目标的组合权重为0.595×0.263+ …=0.300

方案层对目标的组合权向量为 (0.300, 0.246, 0.456)^T

即可以得知方案三最符合设计的准则要求