非线性噪声抗性星座图设计

康浩　黄宗豪　黎治圻　李奇修

2020 年 10 月 10 日

目录

1 摘要

我们研究了在不同信道和不同概率成型下64QAM信号的各个信号点的分布概率，利用了超高斯分布模型和柯西不等式，希望使用了退火（进化）算法利用matlab求解，得到SNReff最大的结果。我们认为，这样的结果是合理的。

关键字：非线性噪声 星座图 算法 概率成型 几何成型

2 问题的重述

2.1 Problem1

第一题是解一个一元超越方程，要求得一个常数，使得星座点的概率分布满足信息熵为5的情况下满足麦克斯韦-玻耳兹曼分布。

2.2 Problem2

第二题是一个多元函数求极值问题，通过调节参数P和λ，在满足超高斯分布的情况下令SNR_{eff}最大。

2.3 Problem3

第三题是一个条件极值问题，它的困难主要在于未知数比较多。因此使用。。算法解决。

3 模型假设

1.将ASE噪声看作高斯噪声

2.第二题信息熵为5

3.第三题我们先考虑寻找在既定概率分布$\{p_i\}$条件下使得$\sum_{i=1}^{64} \frac{|b_i|^4 p_i}{\left(|b_i|^2 p_i\right)^2}$最小的距离分布$\{b_i\}$所具有的共性，先使用调整法计算，然后进行简单的数学证明。之后加入与原点距离相等的点概率密度相同，各点轴对称分布的假设下，考虑几种模型。

4 变量说明

5 模型的建立与求解

5.1 Problem1

第一题主要的问题是在给定的信息熵的情况下对函数极值的求解。根据题目中给出的高斯分布$p\left(x\right) = \frac{e^{-\lambda x^P}}{Z(\lambda)}$，以及$x, y$分别独立可知处于（$x, y$）的概率为$p\left(x\right) = \frac{e^{-\lambda x^P}}{Z(\lambda)} \cdot \frac{e^{-\lambda y^P}}{Z(\lambda)}$。由于信息熵为$\sum_{i=1}^{64} -p_i log_2 p_i$，这是一个非线性方程限定下的一元函数极值求解问题。所以v可以

参数符号	参数意义
σ^2_{ASE}	光放大器的自发辐射噪声
P_{tx}	入射光功率
σ^2_{NLI}	信号的非线性噪声
$Z(\lambda)$	归一化因子
P	指数参数
SNR_{eff}	SNR容忍度
$\chi_1\chi_2$	题设已知参数

用计算机求出，然后验证求出的结果为（0,1）上唯一的极值点。带入$p\left(x\right)=\frac{e^{-\lambda x^P}}{Z(\lambda)}$可得到概率分布，我们画了一个柱状图利于表达。求得$v\approx 0.064$

5.2 Problem2

第二题主要的问题是通过调节P和λ令满足超高斯分布的星座图的SNR_{eff}最小。然而，通过初等的数学运算，我们发现在不加限制的条件下P应当趋向于无穷大，这显然不符合题意。而且分辨率十分的低。因此我们假设信息熵和第1题一样。这样，根据题目中给出的超高斯分布$p\left(x\right)=\frac{e^{-\lambda x^P}}{Z(\lambda)}$，以及$x,y$分别独立可知处于（$x,y$）的概率为$p(x,y)=px\cdot py$，得出非线性方程限定下的二元函数求极值问题。我们通过Matlab进行运算，得出信息熵为5的条件下$P=3.41$，$\lambda=0.0092$的情况下SNR_{eff}最小，最小值为$1.96078\cdot 10^{-6}$。

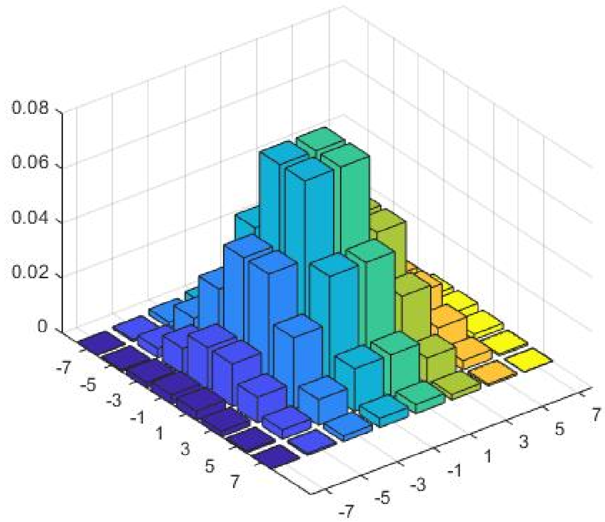

图 1: 概率密度柱状图

我们接下来准备画出P、λ和SNR_{eff}的三维图像, 当然这个限制也不一定对，我们推测可能有隐性的限制，但现在还未发现。另外，这个结果的唯一性缺乏严格的证明，只是P在到6范围内最小的。

初等的数学运算附在这里：

由柯西不等式得到：

$\sum_{i=1}^{64}|b_i|^4 p_i = (\sum_{i=1}^{64} p_i)(\sum_{i=1}^{64}|b_i|^4 p_i) \geq \sum_{i=1}^{64}\left(|b_i|^2 p_i\right)^2$ Θ可知μ必然大于或等于1，而其中一种可能就是概率在临近原点的四个点最大，其他几乎为零，此时μ趋近于1，是SNReff处于极大的条件，这个条件对应了P趋近于无穷大的情况。

5.2.1 仅考虑熵约束的最值

要使SNR_{eff}最大，我们只需让$\frac{\langle |b|^4\rangle}{\langle |b|^2\rangle^2}$最小。

我们首先考虑的是只在熵约束条件下，$\frac{\langle |b|^4\rangle}{\langle |b|^2\rangle^2}$的最值情况

目标式：$\min\sum_{i=1}^{64}\frac{|b_i|^4 p_i}{\left(|b_i|^2 p_i\right)^2}$

约束条件：$\mathrm{Entropy}=\sum_{i=1}^{64}-\mathrm{p}_i log_2 p_i=5$

我们最初的想法是找到在既定的概率分布$\{p_i\}$下，使得$\sum_{i=1}^{64}\frac{|b_i|^4 p_i}{\left(|b_i|^2 p_i\right)^2}$最小的距离分布$\{b_i\}$所具有的共性，由于距离分布不影响熵，所以实际上是一个无约束的优化问题。我们的基本思路是基于调整法的。令$T=\sum_{i=1}^{64}p_i {b_i}^4$，$S=\sum_{i=1}^{64}p_i {b_i}^2$，假设将$b_j$调整为$b_j'$，调整过后，具有增量：

$$\Delta=\frac{T}{S^2}-\frac{T-p_j b_j^4+p_j {b_j'}^4}{\left(S-p_j b_j^2+p_j {b_j'}^2\right)^2}=\frac{p_j({b_j}^2-{b_j'}^2)(Tp_j b_j^2-Tp_j {b_j'}^2-2ST+S^2 b_j^2+S^2 {b_j'}^2)}{S^2\left(S-p_j b_j^2+p_j {b_j'}^2\right)^2}$$

欲使调整过后目标函数$\frac{T}{S^2}$减小，应有$\Delta\geq 0$。先考虑$Tp_j-S^2<0$的情况。

当${b_j}^2<{b_j'}^2$时，欲使调整过后目标函数$\frac{T}{S^2}$减小（$\Delta>0$），$Tp_j b_j^2-Tp_j {b_j'}^2-2ST+S^2 b_j^2+S^2 {b_j'}^2<0$,即$b_j^2<\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right){b_j'}^2}{(Tp_j+S^2)}$，即$b_j^2<\min\{\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right){b_j'}^2}{Tpj+S2},{b_j'}^2\}$在${b_j}^2$下$\frac{T}{S^2}$已经取到最小值时，使得上式成立的${b_j'}^2$应当不会存在。我们猜测，在${b_j}^2$调整到$\frac{T}{S}$时，使得$b_j^2<\min\{\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right){b_j'}^2}{Tpj+S2},{b_j'}^2\}$的${b_j'}^2$不会存在，因为此时$\frac{T}{S}<\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right)\frac{T}{S}}{(Tp_j+S^2)}=\frac{T}{S}$矛盾。

当${b_j}^2>{b_j'}^2$时，欲使调整过后目标函数$\frac{T}{S^2}$减小（$\Delta<0$），$Tp_j b_j^2-Tp_j {b_j'}^2-2ST+S^2 b_j^2+S^2 {b_j'}^2>0$，即$b_j^2>\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right){b_j'}^2}{(Tp_j+S^2)}$，即$b_j^2<\max\{\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right){b_j'}^2}{Tpj+S2},{b_j'}^2\}$。我们猜测，在${b_j'}^2$调整到$\frac{T}{S}$时，使得$b_j^2<\max\{\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right){b_j'}^2}{Tpj+S2},{b_j'}^2\}$的${b_j'}^2$不会存在，因为此时$\frac{T}{S}>\frac{2ST+\left(Tp_j-S^2\right)\frac{T}{S}}{(Tp_j+S^2)}=\frac{T}{S}$矛盾。

综上，当调整${b_j}^2$时，应当将其调整至$\frac{T}{S}$（当$p_j<\frac{S^2}{T}$）。

Matlab程序：$(a_j = {b_j}^2)$

```
a=rand(1,64);
p=rand(1,64);
sump=0;
for i=1:64
sump=sump+p(i);
end
for i=1:64
p(i)=p(i)/sump;
end
cnt=0;
while(1)
    cnt=cnt+1;
    if cnt >10000
        break;
    end
    T=0;
    S=0;
    for i=1:64
        T=T+p(i)*a(i)*a(i);
        S=S+p(i)*a(i);
    end
```

```
    d=zeros(1,64);
    maxi=-1;
    maxx=-1;
    for i=1:64
        d(i)=p(i)*(T/S-a(i))*(T/S-a(i));
        if d(i)>maxx&&p(i)<=S*S/T
            maxi=i;
            maxx=d(i);
        end
    end
    a(maxi)=T/S;
end
[a,s]=sort(a);
plot([1:1:64],a(1:64),'r.');
```

多次测量后发现点列的距离分布最终都具有使得$|b_1| = |b_2| = \ldots\ldots = |b_{64}|$的趋势，而此时$\sum_{i=1}^{64}\frac{|b_i|^4 p_i}{\left(|b_i|^2 p_i\right)^2}$都有值为1，从而我们猜测，在任意的概率分布下，不改变熵约束条件，$\min\sum_{i=1}^{64}\frac{|b_i|^4 p_i}{\left(|b_i|^2 p_i\right)^2} = 1$。

下面我们给出严格的证明：

$\sum_{i=1}^{64}|b_i|^4 p_i = (\sum_{i=1}^{64}p_i)(\sum_{i=1}^{64}|b_i|^4 p_i) \geq \sum_{i=1}^{64}\left(|b_i|^2 p_i\right)^2$，等号在$\frac{|b_1|^4 p_1}{p_1} = \frac{|b_2|^4 p_2}{p_2} = \ldots\ldots = \frac{|b_{64}|^4 p_{64}}{p_{64}}$时成立，即$|b_1| = |b_2| = \ldots\ldots = |b_{64}|$。

从而在只考虑熵约束条件下，使得$\frac{\langle |b|^4\rangle}{\langle |b|^2\rangle^2}$最小，只用考虑概率分布$\{p_i\}$，因为$\{b_i\}$无论如

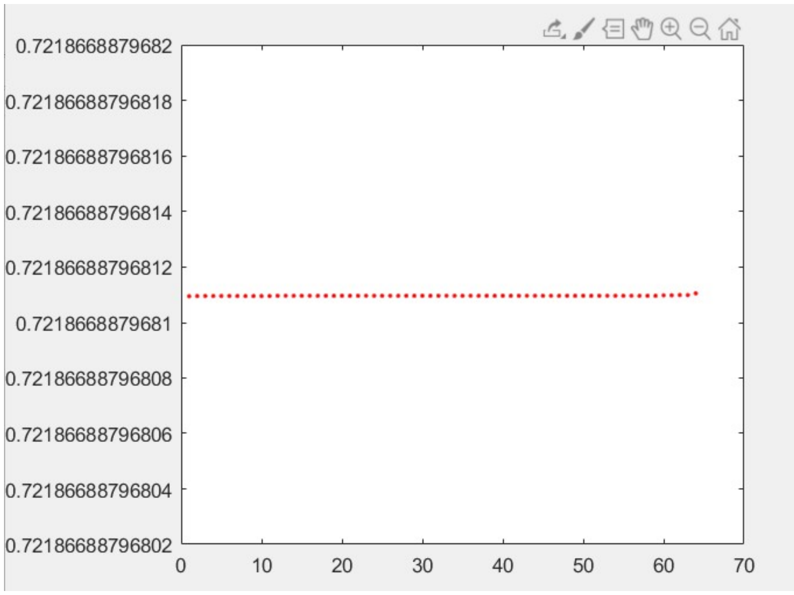

图 2: 运行结果图

何都是$|b_1| = |b_2| = \ldots\ldots = |b_{64}|$。

5.2.2 考虑实际情况的限制（后期研究方向）

在实际情况下，显然不可能使得$|b_1| = |b_2| = \ldots\ldots = |b_{64}|$，因为此时在星座图上，信号点的分布极其集中，误判率会上升，所以应当考虑除了熵约束以外其他的约束条件，误判率便纳入约束条件的范围。

此问题是一个开放性的问题，学术界目前也没有发现最优解，对“最优”的定义也有所不同。因为它的未知参数和所应考虑的功能实在太多。此处我们令星座点关于原点轴对称分布，并设与原点距离相同的点必须具有相同的概率密度分布。即p_i为仅与原点位置有关的函数。我们主要先考虑几何分布的要求，考察多种分布模型，如B题几何分布图中给出的分布；将连续的麦克斯韦速率分布离散化并用于几何成型的分布。然后在确定几何成型的形状后考虑概率

密度分布，先假设为超高斯分布，在信息熵不变的约束下求得高斯分布两个参数的条件极值。同时，我们将尝试权衡误判率与使得SNR_{eff}最大以定义最佳分布，并且使用matlab信号模拟程序模拟信号的传输，以测试结果。

6 队员以及特长

序号	姓名	专业	联系方式（电话）	年级
1	康浩	3190105216	18043123580	求是物理班
2	黄宗豪	3190100771	18857701588	力学
3	黎治圻	3190105633	图灵班	
4	李奇修	3190102511	19908327283	求是物理班