Lemma1: 对于格 Lm,n的支配路径L，L在右三列至少有m个顶点。如果3不整除m，至少有m+1个顶点。

因为支配路径的顶点可以分为支配顶点和连接顶点，我们想要证明支配路径L的三周期性。所以我们假设Lm,n+3的支配路径L的顶点可以分成：前n列的支配顶点 + 后3列的支配顶点 + 前n列的连接顶点 + 后3列的连接顶点 + 以及前n列和后3列之间的连接顶点。

Lemma2: 如果n >=2，L是格Lm,n+3的最短支配路径(minimum dominating path)。L\*是格Lm,n的最短支配路径。至少存在一种情况，使得L在前n列(也是Lm,n)中的支配顶点 (dominating vertex) 大于等于 L\*的支配顶点

Lemma3: 如果n >=2，L是格Lm,n+3的最短支配路径(minimum dominating path)。则L在后3列的支配顶点 + 前n列和后3列之间的连接顶点 至少有m个，如果3不整除m，至少有m+1个

Theorem 4. 如果m >=2, n>=2，那么格Lm,n+3的最短支配路径为L，格Lm,n的最短支配路径为L\*，那么|L| >= |L\*|+m，如果3不整除m， |L| >= |L\*|+m+1

虽然最短支配路径下界已经找到，但是并不能达到这个下界。所以需要通过考虑最短支配路径L的结构来找更加紧的下界。

标准拓展行(standard extend row)：是L3,3中间那一列。这种结构可以使得保持三周期拓展的最小性

定义s 3拓展：为使得Lm,n+3最短支配路径L与Lm,n最短支配路径L\*的差为s的拓展结构。即|L| -|L\*| = s

Theorem 5. 对于Lm,n，仅有有限种 m 3拓展与m+1 3拓展。(这个证明代表，只能有有限种情况，达到Theorem 4中的下界，从而使得可以得到更加紧的下界，并且得到对应构造)

至此，我们就可以证明Lm,n中最短支配路径的长度以及形式。

Proposition 1. 证明L1,n，L2,n，L3,n的最短支配路径长度，以及形式

Proposition 2. 证明m模3为0，n模3为1时Lm,n的最短支配路径长度，以及形式。证明m模3为2，n模3为1时Lm,n的最短支配路径长度，以及形式。

Proposition 3. 证明m模3为0，n模3为0时Lm,n的最短支配路径长度，以及形式。证明m模3为2，n模3为2时Lm,n的最短支配路径长度，以及形式。证明m模3为0，n模3为2时Lm,n的最短支配路径长度，以及形式。

Proposition 4. 证明m模3为1，n模3为1时Lm,n的最短支配路径长度，以及形式。

由于在 proposition 1-4 里面我们得到了最短支配路径的结构，并且支配路径中的支配顶点就是我们需要找的COL，所以直接把求出支配顶点的大小即可。

Proposition 5. 证明L1,n，L2,n，L3,n的COL集合大小，以及形式

Proposition 6. 证明m模3为0，n模3为1时Lm,n的COL集合大小，以及形式。证明m模3为2，n模3为1时Lm,n的COL集合大小，以及形式。

Proposition 7. 证明m模3为0，n模3为0时Lm,n的COL集合大小，以及形式。证明m模3为2，n模3为2时Lm,n的COL集合大小，以及形式。证明m模3为0，n模3为2时Lm,n的COL集合大小，以及形式。

Proposition 8. 证明m模3为1，n模3为1时Lm,n的COL集合大小，以及形式。