龙贝格积分上机报告

一、 算法原理

对于复化梯形求积公式，可取积分的近似值为

$$I(f) \approx T_{2n} + \frac{1}{4-1}(T_{2n} - T_n)$$

对于复化辛普森求积公式有

$$I(f) - S_n = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)\text{，}\quad a \le \eta \le b$$

$$I(f) - S_{2n} = -\frac{b-a}{2880}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta_1)\text{，}\quad a \le \eta_1 \le b$$

假定 f 的四阶导数值在求积区间上连续且变化不大，则可得

$$\frac{I(f) - S_n}{I(f) - S_{2n}} \approx 16$$

由此可得

$$I(f) \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n} - S_n)$$

同理，对于复化科茨求积公式有

$$I(f) \approx C_{2n} + \frac{1}{4^3-1}(C_{2n} - C_n)$$

实质上，以上三式有以下关系

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{4-1}(T_{2n} - T_n)$$

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n} - S_n)$$

令

$$R_n = C_{2n} + \frac{1}{4^3-1}(C_{2n} - C_n)$$

则上式即为龙贝格积分。

龙贝格积分的计算公式如下

$$T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$T_{2^{k+1}} = \frac{1}{2}T_{2^k} + \frac{b-a}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^k} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{2^{k+1}}\right)$$

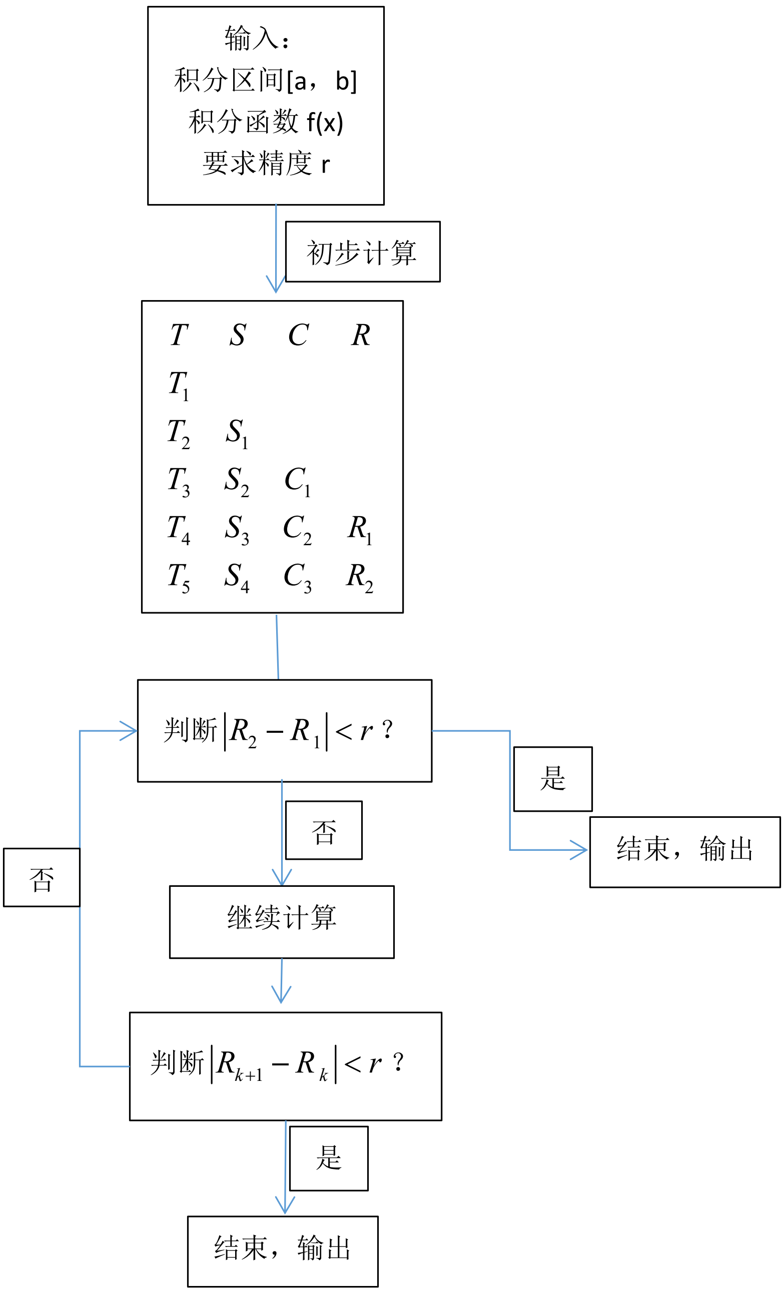
$$S_{2^k} = T_{2^{k+1}} + \frac{1}{4-1}(T_{2^{k+1}} - T_{2^k})$$

$$C_{2^k} = S_{2^{k+1}} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2^{k+1}} - S_{2^k})$$

$$R_{2^k} = C_{2^{k+1}} + \frac{1}{4^3-1}(R_{2^{k+1}} - R_{2^k})$$

注：程序中T_k表示$T_{2^{k-1}}$，其他类似。

二、 程序框图



三、 程序使用说明

此部分见程序代码。

四、 算例计算结果

用龙贝格积分计算积分$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$，要求精度为$10^{-10}$

```
>> f=inline('(log(1+x))/(1+x^2)','x')

f =

     内联函数:
     f(x) = (log(1+x))/(1+x^2)

>> [T,S,C,R] = untitled2(0,1,f,10^(-10))

T =

  1 至 4 列

   0.173286795139986   0.248829440813259   0.266457611491405   0.270768638295724

  5 至 7 列

   0.271841192282138   0.272109014943808   0.272175951006478


S =

  1 至 4 列

   0.274010322704350   0.272333668384121   0.272205647230497   0.272198710277610

  5 至 6 列

   0.272198289164364   0.272198263027368
```

C =

1 至 4 列

0.272221891429439 0.272197112486922 0.272198247814084 0.272198261090148

5 列

0.272198261284902

R =

0.272196719170374 0.272198265835150 0.272198261300879 0.272198261287993