

上机作业 3

1. 迭代次数对比

初值	$0.1*a$	a	$10*a$	$100*a$	$1000*a$
Jacobi	77	71	88	100	113
G-S	42	41	46	52	58
CG	5	5	5	5	5

注：1. $a=(1, 1, 1, 1, 1)$ 的转置

2. 终止条件均为 $b-Ax < 10^{-6}$

可以看到，相同初值下，CG 法迭代次数小于 G-S 法小于 Jacobi 法，且 Jacobi 法和 G-S 法的迭代次数受初值的影响，而 CG 法的迭代次数不受初值的影响，恒为 5。

注意到 A 是 5×5 的实对称矩阵，且对以上初值， $W_5 = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, A^3r_0, A^4r_0\}$

维数为 5，则 $\text{span}\{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4\}$ 维数也是 5，即 r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 线性无关，则

r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 均不为 0，即 CG 法迭代次数不小于 5；同时，又因为

$x_5 = \arg \min_{x \in x_0 + W_5} \varphi(x) = \arg \min_{x \in R^5} \varphi(x)$ ，则对以上初值，CG 法迭代次数恒为 5。

2. Matlab 代码

```
A=[10 1 2 3 4;1 9 -1 2 -3;2 -1 7 3 -5;3 2 3 12 -1;4 -3  
-5 -1 15];
```

```
b=[12;-27;14;-17;12];
```

```
x=A\b;
```

```
D = diag(diag(A)); %求 A 的对角矩阵
```

```
L = -tril(A,-1); %求 A 的下三角矩阵
```

```
U = -triu(A,1); %求 A 的上三角矩阵
```

```
%Jacobi
```

```
B=D\(L+U);
```

```
g=D\b;
```

```
x_new=ones(5,1);
```

```
n1=0;
```

```
while norm(b-A*x_new)>10^(-6)
```

```
    x_old=x_new;
```

```
    x_new=B*x_old+g;
```

```
    n1=n1+1;
```

```

end
x_Jacobi=x_new;

%G-S
B=(D-L)\U;
g=(D-L)\b;
x_new=ones(5,1);
n2=0;
while norm(b-A*x_new)>10^(-6)
    x_old=x_new;
    x_new=B*x_old+g;
    n2=n2+1;
end
x_G_S=x_new;

%CG
x_old=ones(5,1);r_old=b-A*x_old;
n3=0;
while norm(b-A*x_old)>10^(-6)
    n3=n3+1;
    if n3==1
        p_old=r_old;
    else
        beta=r_new'*r_new/(r_old'*r_old);
        p_new=r_new+beta*p_old;
        p_old=p_new;r_old=r_new;
    end
    alpha=r_old'*r_old/(p_old'*A*p_old);
    x_new=x_old+alpha*p_old;
    r_new=r_old-alpha*A*p_old;
    x_old=x_new;
    %disp(x_new);
end
x_CG=x_new;

```