# 三次样条插值上机报告

## 一 、算法原理

### 1．子区间[$x_{i-1}$， $x_i$]上 S(x)表达式的导出

设 S(x)在节点$x_i$处的二阶导数值为$S''(x_i)=M_i$ （i=0,1,...,n），则二阶导数值在子区间[$x_{i-1}$， $x_i$]上可以表示为

$$S''(x)=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}M_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}M_i$$

令$h_i=x_i-x_{i-1}$，并对上式两端积分得

$$S(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+b_i(x_i-x)+c_i(x-x_{i-1})$$

其中$b_i$和$c_i$为积分常数，由插值条件$S(x_{i-1})=y_{i-1}$和$S(x_i)=y_i$，最终可得 S(x)在子区间[$x_{i-1}$， $x_i$]上的表达式为

$$S(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+(\frac{y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_iM_{i-1}}{6})(x_i-x)+(\frac{y_i}{h_i}-\frac{h_iM_i}{6})(x-x_{i-1})$$

### 2．建立关于参数$M_i$的方程组

对上式求导得

$$S'(x)=-\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_i$$

由于 S(x)在节点$x_i$处一阶导数的连续性知$S'_-(x_i)=S'_+(x_i)$，i=1,2,...n-1

则关于参数$M_i$的方程组可写成

$$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i$$ 。i=1,2,...n-1

其中$\mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$， $\lambda_i=1-\mu_i$， $d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$

### 3．三种边界条件的三弯矩方程

注意到三弯矩方程组中只有 n-1 个方程，因此还需增加两个方程或减少两个

未知量。

（1）第一种边界条件

已知 $f''(a)$ 和 $f''(b)$。取 $M_0 = f''(a)$，$M_n = f''(b)$，此时三弯矩方程减少了两个未知量，变成了只含 n-1 个未知量的方程组，矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{pmatrix}$$

（2）第二种边界条件

已知 $f'(a)$ 和 $f'(b)$。由 $S'_+(x_0) = f'(a)$ 和 $S'_-(x_n) = f'(b)$，可得

$$2M_0 + M_1 = d_0，\quad M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

其中 $d_0 = 6f[x_0, x_0, x_1]$，$d_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]$。

此时三弯矩方程的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

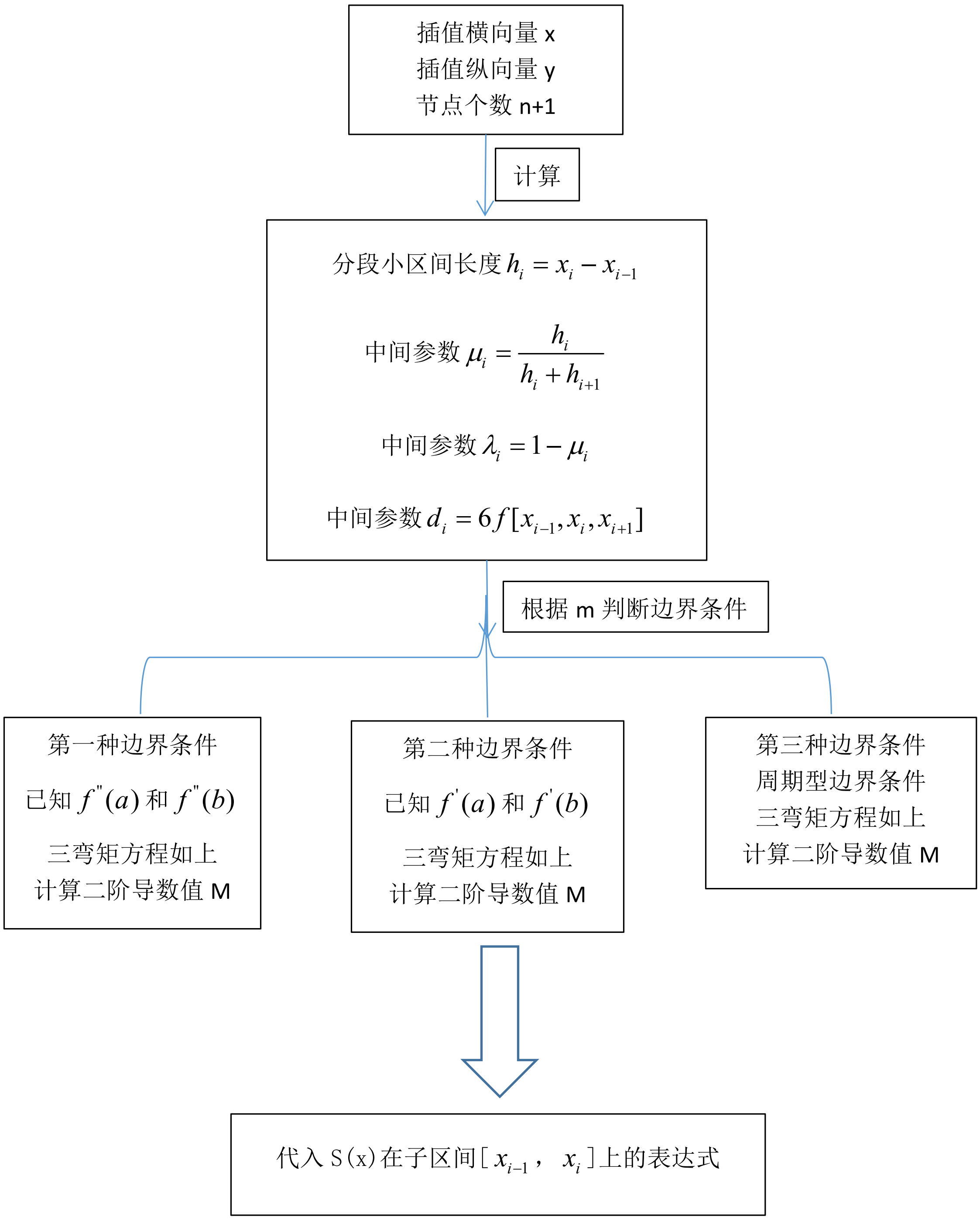
（3）第三种边界条件

周期型边界条件。此时，$M_0 = M_n$，将 $x_n$ 看成内节点，则三弯矩方程对 i=n 也成立。

此时三弯矩方程的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

## 二 、程序框图



## 三 、程序说明

此部分见程序代码。

## 四 、算例计算结果

P137 例 4.6.1：已知 y=f(x)的数值如下表，求其自然三次样条插值函数 S(x)

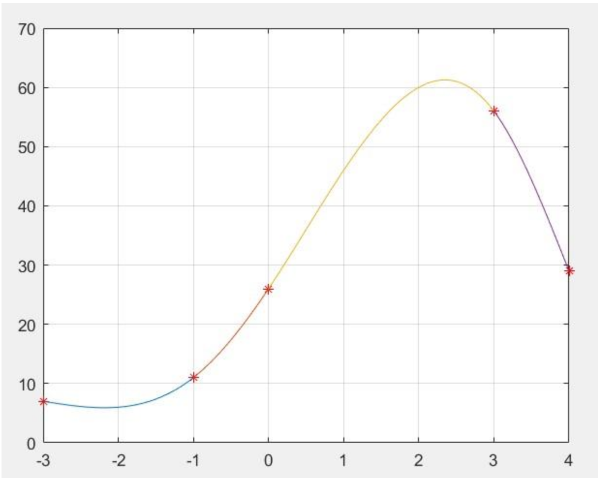
| $x_i$ | -3 | -1 | 0 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 7 | 11 | 26 | 56 | 29 |

运行程序：

```
>> x=[-3 -1 0 3 4]

>> y=[7 11 26 56 29]

>> [h, d, u, v, M, A, P] = untitled1(4, 1, x, y, 0, 0)
```

系数矩阵和函数图像为

```
P =

     1     9    25    28
    -1     3    19    26
    -2     3    19    26
     5   -60   208  -163
```




则结果为 $S(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+25x+28 & -3\le x\le -1 \\ -x^3+3x^2+19x+26 & -1\le x\le 0 \\ -2x^3+3x^2+19x+26 & 0\le x\le 3 \\ 5x^3-60x^2+208x-163 & 3\le x\le 4 \end{cases}$