Methods of Mathematical Physics

§1 Complex Functions

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 复变函数
- 复变函数的求导
- 复变函数的积分
- 解析函数

复变函数

复数到复数的映射

从实变函数到复变函数的推广

实变函数

$$f(x) = x^2, \quad (x \in \Re)$$

可以推广为复变函数

$$f(z) = z^2. \quad (z \in C)$$

从实变函数到复变函数的推广

实变函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad (x \in \Re)$$

可以推广为复变函数

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2}. \quad (z \in C)$$

这种推广简直弱爆了！

那我们继续

实变函数

$$f(x) = e^x, \quad (x \in \Re)$$

推广为复变函数

$$f(z) = ? \quad (z \in C)$$

当然是e^z啊！

但，e^z到底是什么意思？

e^{2+3i}是什么意思？

转化为加减乘除的问题

实变的指数函数可以用“加减乘除”来替代:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

由此自然而然地定义复变的指数函数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

对推广到复数域的指数函数，证明“它是指数函数“。即对任意$z_1, z_2 \in C$，有

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

证明$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$

命题等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{z_1^{n_1}z_2^{n_2}}{n_1!n_2!}$$

对任意$n_1,n_2\geq 0$，我们来比较两边$z_1^{n_1}z_2^{n_2}$的项的系数：
左边$z_1^{n_1}z_2^{n_2}$的项只能来自于$n=n_1+n_2$的项的展开，在展开$(z_1+z_2)^n$时在n_1个括号内取z_1，n_2个括号内取z_2，总共有$\frac{n!}{n_1!n_2!}$种取法，即左边$z_1^{n_1}z_2^{n_2}$的系数为

$$\frac{1}{n!}\frac{n!}{n_1!n_2!}=\frac{1}{n_1!n_2!}$$

和右边相同。

Euler公式

对实数θ，按定义

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$

上式右边n为偶数的项是实数项，n为奇数的项是虚数项。分离实虚部即得：

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

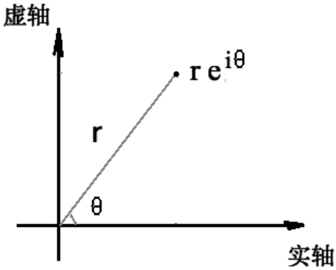
实部和虚部恰好分别是三角函数$\cos\theta$和$\sin\theta$的级数展开式，于是

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这就是著名的欧拉公式。

复数的指数表示和复数的乘法规则

模为r，幅角为θ的复数可以写成$re^{i\theta}$。



对两个复数$r_1e^{i\theta_1}$和$r_2e^{i\theta_2}$，利用刚刚证明的$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$，就有

$$\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right)=(r_1r_2)\left(e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\right)=(r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

这就是模相乘，幅角相加的复数乘法法则。

对数函数 ln z 是多值函数

设z的模为r，幅角为θ，则

$$e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta} = z$$

那么，是否可以定义推广的对数函数：

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z$$

不幸地是，因为幅角$\arg z$可以随意加上2π的整数倍，所以上式是一对多的映射，不是普通意义上的函数。在复变函数论里把这样的映射称为**“多值函数”**。

复变函数的导数

跟实变函数没多大区别，但要小心多值函数

复变函数的导数

复变函数$f(z)$的导数还是定义为f的微小改变量和z的微小改变量之比：

$$f'(z) = \frac{df}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

因为Δz可以从任何方向趋向于零，所以复变函数的可导性（即上述极限的存在性）是一个比较强的条件。

复变函数的导数

对$f(z)=z^2$，根据定义：

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

复变函数的导数

对$f(z)=\frac{1}{1+z}$，根据定义：

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{1+z+\Delta z}-\frac{1}{1+z}}{\Delta z} \\
&= -\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{(1+z)(1+z+\Delta z)} \\
&= -\frac{1}{(1+z)^2}
\end{aligned}
$$

只涉及加减乘除的复变函数的求导运算和实变函数完全相同。

指数函数的导数

对$f(z) = e^z$按定义式逐项求导：

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d(z^n)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z$$

$\ln z$的连续变化观点和导数

当$z = re^{i\theta}$沿复平面上的一条(不经过原点的)曲线连续变化时，我们让幅角θ也连续地变化（即不允许突然心血来潮加个2π什么的)，这样$\ln z = \ln r + i\theta$也连续地发生变化。在这个意义下可以定义导数。

不出所料地：

$$d\ln z = d\ln r + id\theta = \frac{dr}{r} + id\theta = \frac{e^{i\theta}dr + ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{dz}{z}$$

复变函数的积分

原函数如果是多值函数就要小心了

复变函数的积分

当z沿着一条(带方向的)分段光滑曲线C连续变化时，z的变化量dz和$f(z)$的乘积之和(当dz趋向于零时)的极限可以写成积分：

$$\int_C f(z)dz \equiv \lim_{dz\to 0}\sum_{z\in C} f(z)dz.$$

显然，如果把沿着曲线积分的方向改成相反，则积分结果相差个负号。

原函数

模仿实变函数的定积分技巧:

如果能找到一个函数$F(z)$使得它的导数为$f(z)$，即

$$f(z)dz = dF(z)$$

那么$f(z)$沿曲线C的积分就只要计算从起点到终点$F(z)$的总改变量就可以了。

$$\int f(z)dz = \Delta F$$

$F(z)$称为$f(z)$的**原函数**。
(要注意，原函数未必是存在的🤔)

把我们之前讨论的一切反过来写，就有

$$
\begin{aligned}
\int z^n dz &= \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \in Z, n \neq -1) \\
\int e^z dz &= e^z + c, \\
\int \frac{1}{z} dz &= \ln z + c,
\end{aligned}
$$

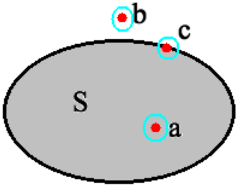
当然，最后一个等式仍然需要遵循幅角连续变化的约定。

解析函数

在任何圆内都是幂级数

内部，外部和边界

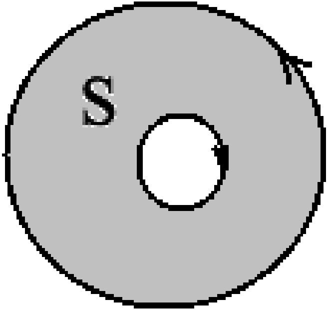
设复平面上有个点集S。



- 内部的点a：可取足够小的δ，使邻域$\{z : |z-a| < \delta\}$完全在S之内。
- 外部的点b：可取足够小的δ, 使邻域$\{z : |z-b| < \delta\}$完全在S之外。
- 边界的点c：无论取多小的δ，邻域$\{z : |z-c| < \delta\}$总是部分在S内，部分在S外。

边界的方向：左内法则

我们可以对复平面上的点集S的边界规定一个方向：当沿着边界的**正方向**移动，内部的点总在你的**左手边**。



开区域和闭区域

- 如果点集S只包含内部的点，则称S为开区域。

$z: 1 < |z| < 2$ 是开区域

- 如果点集S包含所有边界上的点，则称S为闭区域。

$z: 1 \leq |z| \leq 2$ 是闭区域

解析函数的定义

如果复变函数$f(z)$在某个开区域S内处处可导，则称$f(z)$为S上的**解析函数**。

(可导已经比较苛刻了，“处处可导”是更加苛刻的条件。)

思考题

在解析函数的定义里，为什么要限定处处可导的范围是开区域?
换成闭区域行吗?

解析函数的例子

$$f(z) = z^2$$

是全复平面上的解析函数。

解析函数的例子

$$f(z) = \frac{z^2}{z+1}$$

是全复平面挖去$z=-1$后的区域上的解析函数。

解析函数的例子

$$f(z) = e^z$$

是全复平面上的解析函数。

解析函数的例子

$$f(z) = \ln z$$

在任何可以限定幅角范围且不会导致幅角不连续变化的区域内，我们都可以通过限定幅角范围的方法来限定$\ln z$为连续的单值函数，在这个意义下$\ln z$是解析函数。

例如挖掉负实轴和原点的复平面满足上述条件。开圆$|z-1|<1$也满足上述条件。

解析函数的反例

$$f(z) = |z|$$

处处不可导，所以在任何开区域内**不是**解析函数。

解析函数的反例

$$f(z) = \mathrm{Arg}\, z$$

处处不可导，所以在任何开区域内**不是**解析函数。

注：幅角主值 $\mathrm{Arg}\, z$ 一般约定取值范围为$(-\pi, \pi]$。

解析函数的反例

$$f(z) = z^2 \operatorname{Arg} z$$

仅在$z = 0$可导，无法在一个开区域内处处可导，所以在任何开区域内**不是**解析函数。

dalao泰勒

Brook Taylor (1685-1731)

泰勒展开： 一级近似

假设函数f在z_0无限次可导且各阶导数已知，我们想求f在z_0附近的一点z处的函数值。

按照物理学家的思路，先求个一阶近似:

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

泰勒级数： 二级近似

当然这样的一阶近似对导函数f'也成立，且对z_0附近的任何一点ζ成立：

$$f'(\zeta) \approx f'(z_0) + f''(z_0)(\zeta - z_0).$$

把上式对ζ从z_0到z积分，得到

$$f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2,$$

移项即得$f(z)$的二阶近似：

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2$$

泰勒级数： 三级近似

同理，这样的二阶近似对导函数f'也成立，且对z_0附近的任何一点ζ成立：

$$f'(\zeta) \approx f'(z_0) + f''(z_0)(\zeta - z_0) + \frac{f^{(3)}(z_0)}{2}(\zeta - z_0)^2.$$

把上式对ζ从z_0到z积分，得到

$$f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z - z_0)^3.$$

移项即得$f(z)$的三级近似：

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z - z_0)^3.$$

泰勒级数

把这样的过程进行无限多次，就得到泰勒展开公式：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

(在数学严谨性上毫无节操的)物理学家对上述一系列操作表现得十分自信，但仍默默担心一件事情：这个级数有可能是发散的。例如：按上述操作得到的$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$就在$|z| > 1$时明显发散。

好在对在整个圆内解析的函数而言，这个问题并不存在——

解析函数的本质: 任何圆内的泰勒级数收敛

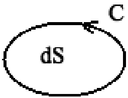
如果$f(z)$在圆C_R: $|z-z_0|<R$内解析，则$f(z)$在C_R内无限次可导，且泰勒级数收敛

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad z\in C_R.$$

其中$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

证明第一步：物理学家的直觉

设f是很小的简单闭合围道内的解析函数，且在围道上连续，则f沿这个围道的积分是围道包围的面积的高阶无穷小量。



$$\oint_C f(z)dz = o(dS)$$

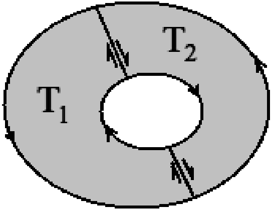
- 先估算主要部分：因为解析函数可导，在很小区域内可用线性函数来近似，任何线性函数（$a+bz$)都存在单值的原函数$(az+\frac{b}{2}z^2)$，起点到终点的变化为零，所以积分严格为零。
- 再估算误差：函数值的误差为围道的尺度的高阶无穷小量，再乘以dz积分后，误差为围道尺度平方的高阶无穷小量。对简单闭合围道而言，面积为尺度平方的量级，故得证。

证明第二步：柯西定理

如果f在开区域T上解析，在T的边界上连续，则f沿T的边界正方向的积分为零。

把子区域T划分成很多简单小区域T_1，T_2，...，T_N，并在每个小区域的边界上沿正方向进行积分。相邻小区域在公共边界上(按左内原则)规定的边界方向相反，积分互相抵消，所以最后只剩下那些非公共边界（即T的边界)上的积分。也就是说，沿T的边界的积分等于沿所有小区域的边界的积分之和。

划分成两块的例子



另一方面，沿任何小区域的边界积分是小区域面积($\frac{1}{N}$量级)的高阶无穷小量。故当划分块数N趋向于无穷时，所有沿小区域边界的积分之和（即N个$\frac{1}{N}$的高阶无穷小量之和）趋向于零。故得证。

dalao柯西

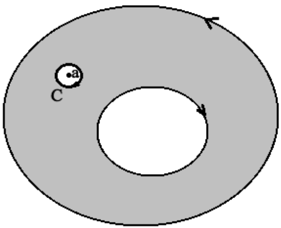
Augustin-Louis Cauchy

证明第三步：柯西积分公式

如果a是区域T内一点，$f(z)$是T内的解析函数并在T边界上连续，则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial T}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

其中$\oint_{\partial T}$表示沿T的边界的正方向积分。



如图，在T内以a为中心挖掉一个小圆孔。$\frac{f(z)}{z-a}$在剩下的区域内解析，故沿T的边界以及（小圆孔的边界）C的积分之和为零。

而在C上积分时，可以把$\frac{f(z)}{z-a}$近似为$\frac{f(a)}{z-a}$(请思考这样做带来的误差是否致命)，积分一周原函数变化为

$$f(a)\Delta\ln(z-a) = -2\pi i f(a)$$

故得证。

证明第四步：推广的柯西积分公式

柯西积分公式右边可以对a进行n次求导（请思考这样做的合法性），得到解析函数的n阶导数表达式：

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial T} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

这说明解析函数不仅可导，而且无限次可导。
于是得到泰勒展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

证明第五步：泰勒级数展开在圆内收敛

对圆内任意一点z，设$|z-z_0|=s<r$，取介于s和r之间的正数q ($s<q<r$)，以q为半径取圆区域C_q: $|z-z_0|<q$，则$f(z)$在C_q内解析，边界上连续。于是

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

设$|f(z)|$在圆周∂C_q上的上界为A (有限闭集上的连续实函数一定有上限，请思考为什么)，则

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A}{q^{n+1}}qd\theta=\frac{A}{q^n}$$

因此把幂级数截断后的余项

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right|\leq\sum_{n=N}^{\infty}\frac{A}{q^n}s^n=\frac{A}{1-\frac{s}{q}}\left(\frac{s}{q}\right)^N$$

当$N\to$上式右边趋向于零，故得证。

思考题 (数学灵魂复苏. . . . . .)

如果在一个点a的任意小邻域内都有点集S里的无数个点，则称a为S的聚点。例如0是点集$\{\frac{1}{n}, n \in Z^+\}$的聚点。
试证明

1. 在有限大小的闭区域内的无穷点集必然有聚点。
2. 有限大小的闭区域上的连续实函数必然有上下限。

课后作业

1. 仿照复数域上指数函数e^z的定义方法，用全复平面收敛的幂级数把正弦和余弦函数推广到复数域：

$$\sin z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

   (1) 用指数函数来表示正弦和余弦函数；
   (2) 求出满足$\sin z = 0$的全部复数解z。

2. 在复平面上画出同时满足$2 < |z| < 4$和$\mathrm{Re}(z) > -3$的区域T的边界∂T，并标明边界的正方向。

3. 沿着上题的边界∂T的正方向计算积分：

$$\oint_{\partial T} \frac{\sin z}{(z-\pi)^4} dz.$$