

Methods of Mathematical Physics

§15 Orthogonal Coordinate System

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- ▶ 回顾
- ▶ 正交曲面坐标系
- ▶ 贝塞尔函数初步介绍

回顾

关键是求背出谐函数

关键是求背出谐函数

无论是热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u = 0$ 还是波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$, 变量分离后都归结为求

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的解（谐函数）的问题。

直角坐标系

对固定 k ，直角坐标系下的谐函数为平面波：

$$Q(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

其中 \mathbf{k} 是长度为 k 的任意矢量（平面波的波矢）， \mathbf{k} 的方向是平面波传播的方向。

其他情况

在其他情况下，如何把 ∇^2 的具体表达式写出是解决问题的第一步。

为此，我们介绍最常用的正交曲面坐标系。

正交曲面坐标系

先作平坦近似，再修正

正交曲面坐标系

如果任意点附近的坐标轴方向总是两两垂直，则称该坐标系为**正交曲面坐标系**。

(所谓附近的坐标轴方向，是指仅变化一个坐标分量所得的曲线在这个点的切线方向。)



二维的直角坐标系 x, y ;

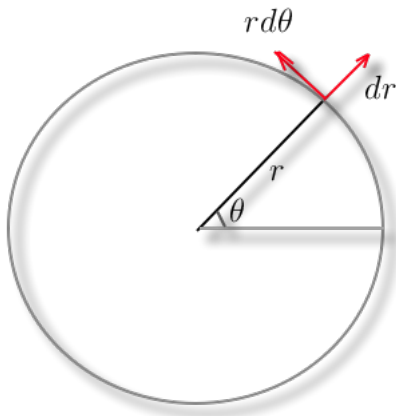
二维的极坐标系 r, θ ;

三维的直角坐标系的 x, y, z ;

三维的柱坐标系 r, θ, z ;

三维的球坐标系 r, θ, φ 。

极坐标是正交坐标系的图示

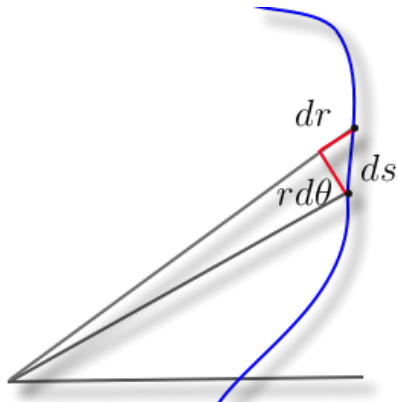


变化 r 和变化 θ 对应的小长度元分别为 dr 和 $r d\theta$ ，且方向垂直。

极坐标弧长公式

根据勾股定理，显然有

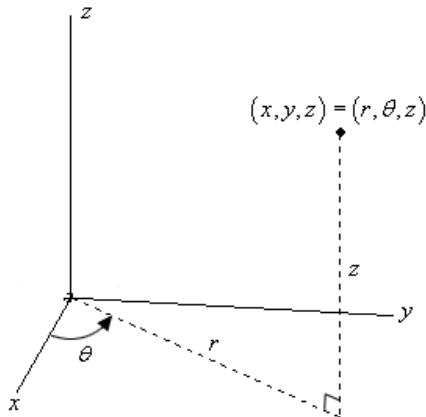
$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$



如果曲线以 $r(\theta)$ 的函数形式表示，则得到弧长公式

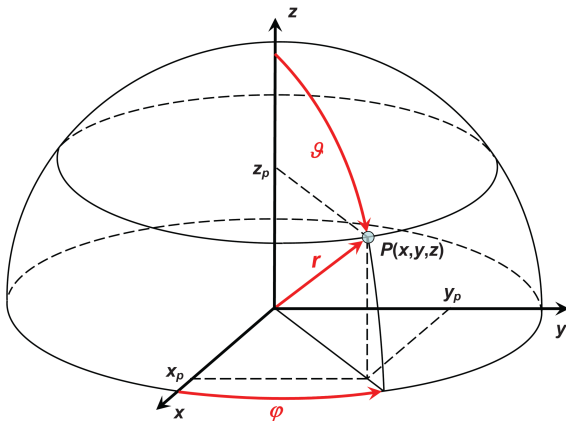
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta$$

思考题



写出柱坐标系 (r, θ, z) 的正交长度元，由此推导柱坐标系弧长公式。

思考题



写出球坐标系 (r, θ, ϕ) 的正交长度元，由此推导球坐标系弧长公式。

梯度 = 单位长度内标量函数的变化

以球面坐标系为例：正交长度元分别为 dr , $r d\theta$, $r \sin \theta d\phi$ 。

设 f 为某个标量函数（如温度，电势等不带方向的量）

- ▶ 沿着 dr 方向（保持 θ , ϕ 不变，变化 r ）， f 的梯度分量为

$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta r} = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

- ▶ 沿着 $r d\theta$ 方向（保持 r , ϕ 不变，变化 θ ）， f 的梯度分量为

$$\lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{\delta f}{r \delta \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

- ▶ 沿着 $r \sin \theta d\phi$ 方向（保持 r , θ 不变，变化 ϕ ）， f 的梯度分量为

$$\lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\delta f}{r \sin \theta \delta \phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

梯度 = 单位长度内标量函数的变化

因此，球坐标系下的梯度为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

思考题



写出极坐标系和柱坐标系下的梯度。

流 j 的散度是单位体积的 j 净流出率

仍以球坐标系为例:

设 j 沿着长度元 dr , $r d\theta$, $r \sin \theta d\phi$ 的分量为: (j_r, j_θ, j_ϕ) .

那么 $j_r(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$ 代表了 j_r 流过垂直于 dr 方向的面积元的量。

它沿 dr 方向的变化率代表了 dr 方向的流出流入不平衡, 对净流出率的贡献为:

$$\frac{\partial}{\partial r} [(r d\theta)(r \sin \theta d\phi) j_r] dr$$

除以体积元 $dr(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$, 得到贡献:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r)$$

流 j 的散度是单位体积的 j 净流出率

同理，沿 $rd\theta$ 方向的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} [(dr)(r \sin \theta d\phi)j_\theta] d\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta)$$

沿 $r \sin \theta d\phi$ 方向的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} [(dr)(rd\theta)j_\phi] d\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

总结快速写出散度的办法

- 1 以三个长度元写出直角坐标系形式的“平坦近似散度”：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \approx \frac{\partial}{\partial r} j_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

- 2 每一项都在微分号内乘以面积修正因子，在外面除掉。例如垂直 dr 方向的面积元为 $r d\theta r \sin \theta d\phi$ ，含 r 的因子(即 r^2 ，剩余部分 $d\theta \sin \theta d\phi$ 因为可以直接提到偏微分号外面被除掉，所以不用考虑)是面积修正因子。于是 $\frac{\partial}{\partial r} j_r$ 被修正为 $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r)$ 。

演算草稿

以球坐标系为例

正交长度元:	dr	$r d\theta$	$r \sin \theta d\phi$
垂直面积元:	$rd\theta \ r \sin \theta d\phi$	$dr \ r \sin \theta d\phi$	$dr \ rd\theta$
面积修正因子:	r^2	$\sin \theta$	1
平坦近似散度:			

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \approx \frac{\partial}{\partial r} j_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

修正后:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

顺便提下：旋度算符的快速写法

对旋度算符，只要把面积修正换为长度元修正。仍以球坐标系为例

正交长度元: dr $r d\theta$ $r \sin \theta d\phi$

平坦近似旋度:

$$\nabla \times \mathbf{j} \approx \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_r - \frac{\partial}{\partial r} j_\phi, \frac{\partial}{\partial r} j_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_r \right).$$

修正后右边为

$$\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\phi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_\phi), \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_r \right)$$

思考题



写出柱坐标系下的散度和旋度

总结

先平坦近似， 然后

- ▶ 梯度不需要修正
- ▶ 散度需要面积元修正
- ▶ 旋度需要长度元修正

极坐标/柱坐标系里的谐函数

贝塞尔函数

柱坐标系的拉普拉斯算符

以柱坐标系 r, θ, z 为例, 长度元为: $dr, rd\theta, dz$ 。

对标量函数 f , 梯度

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

再对梯度求散度, 先作平坦近似:

$$\nabla^2 f \approx \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

然后面积元修正:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

极坐标的拉普拉斯算符

极坐标的拉普拉斯算符，只要去掉 z ：

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

极坐标的谐函数

极坐标系里的谐函数 $Q(r, \theta)$ 满足

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} = -k^2 Q$$

事实上通过变量替换 $x = kr$ (物理上理解: 取了个方便的长度单位 $1/k$ 来研究问题, x 就是无量纲长度), 就可以写成

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + x^2 Q = -\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}$$

极坐标的谐函数

我们来求分离变量形式的解 $Q = Z(x)f(\theta)$ ，代入方程得到

$$x \frac{(xZ')'}{Z} + x^2 = -\frac{f''}{f}$$

上式左边为 x 的函数，右边为 θ 的函数，因此只能是常数。再考虑到 f 满足周期性边界条件 $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ ，就容易得到 $f = e^{\pm im\theta}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)，那么， Z 满足

$$x \frac{(xZ')'}{Z} + x^2 = m^2.$$

稍加整理得到著名的**贝塞尔方程**：

$$Z'' + \frac{1}{x}Z' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)Z = 0$$

贝塞尔方程的解

当 m 为整数时, 贝塞尔方程

$$Z'' + \frac{1}{x}Z' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)Z = 0$$

有两个线性独立的解: 第一类贝塞尔函数 $J_m(x)$ 和第二类贝塞尔函数 $Y_m(x)$ 。

它们的最重要区别是:

- ▶ 第一类贝塞尔函数 $J_m(x)$ 在 $x = 0$ 取有限值, 所以可以描述圆盘内部解。
- ▶ 第二类贝塞尔函数 $Y_m(x)$ 在 $x = 0$ 发散, 所以只能描述圆盘外部解。

极坐标下的谐函数

极坐标下的谐函数就是

$$Q = J_m(x)e^{\pm im\theta}$$

和

$$Q = Y_m(x)e^{\pm im\theta}$$

$$(m = 0, 1, 2 \dots)$$

第一类贝塞尔函数

定义第一类贝塞尔函数最简单的办法是用级数:

$$J_m(x) \equiv \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

思考题



验证按上述级数定义的第一类贝塞尔函数满足贝塞尔方程。

课后作业(题号32-34)

- 32 椭圆坐标 (μ, ν) 表示平面直角坐标系里的点 $(\cosh \mu \cos \nu, \sinh \mu \sin \nu)$ 。说明椭圆坐标系是一种正交曲面坐标系，然后写出椭圆坐标系的拉普拉斯算符的表达式。
- 33 设四维的正交曲面坐标系 (t, x, y, z) 的正交线元长度分别为 $dt, a(t)dx, a(t)dy, a(t)dz$ ，其中 $a(t)$ 为某个已知的函数。写出该坐标系的拉普拉斯算符的表达式。
- 34 利用第一类贝塞尔函数的级数定义，计算下列函数值至少精确到两位有效数字：

$$J_0(0), J_0(0.2), J_1(0), J_1(0.2).$$