Methods of Mathematical Physics

§21 具有球对称性的物理问题

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 回顾
- 球坐标系的数理方程举例

回顾

解 $=\sum$ 待定系数 $\times$ 谐函数 $\times$ 时间依赖因子
用一般正交定理可以确定系数

回顾

三类问题在无源和满足齐次边界条件时的分离变量形式解：

1. 热传导方程： $Q_k(\mathbf{x})e^{-ak^2t}$.
2. 波动方程： $Q_k(\mathbf{x})\cos akt$和$Q_k(\mathbf{x})\sin akt$.
3. 静电问题，静引力势问题等： $Q_0(\mathbf{x})$ （$k=0$，没有时间依赖性）

其中谐函数$Q_k(\mathbf{x})$描述的是对空间坐标的依赖性，它满足方程：

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q.$$

这里$k\geq 0$具有波矢长度的物理意义。

- 在有限区域内，波矢往往只能取一些离散的分布的矢量才能保证有满足边界条件的解（于是k也只能取一些离散的值）。
- 在无限区域内，波矢一般可以连续取值。这时分离变量法转变为积分变换的方法。

直角坐标系

直角坐标系的谐函数为平面波$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}$。根据问题的具体形式，可以灵活地把指数函数$e^{\pm ik_1x}$替换为三角函数$\sin k_1x$和$\cos k_1x$的线性组合等。

直角坐标系

例如，在一个x, y, z方向长度分别为L_1, L_2, L_3的箱子里的数理方程，如果取零边界条件，则谐函数的形式只能是：

$$Q(x, y, z) = \sin\frac{n_1\pi x}{L_1}\sin\frac{n_2\pi y}{L_2}\sin\frac{n_3\pi z}{L_3},$$

$$0 \le x \le L_1, 0 \le y \le L_2, 0 \le z \le L_3; n_1, n_2, n_3 \in Z.$$

可以看出三维的波矢为$\mathbf{k} = \left(\frac{n_1\pi}{L_1}, \frac{n_2\pi}{L_2}, \frac{n_3\pi}{L_3}\right)$，允许的$k$只能取

$$k = |\mathbf{k}| = \pi\sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}}.$$

谐函数按空间坐标的分解

三维的谐函数可以看成考虑三个一维坐标x,y,z的谐函数 $\sin\frac{n_1\pi x}{L_1}$, $\sin\frac{n_2\pi y}{L_2}$, $\sin\frac{n_3\pi z}{L_3}$的乘积。 每个谐函数分别对应波矢$k_1=\frac{n_1\pi}{L_1}$, $k_2=\frac{n_2\pi}{L_2}$, $k_3=\frac{n_3\pi}{L_3}$。
显然有:

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2=k^2.$$

另一种观点是把三维的谐函数看成二维的谐函数$\sin\frac{n_1\pi x}{L_1}\sin\frac{n_2\pi y}{L_2}$和一维$z$坐标的谐函数$\sin\frac{n_3\pi z}{L_3}$的乘积，前者对应一个二维的波矢$\mathbf{k}_{2D}=(k_1,k_2)=\left(\frac{n_1\pi}{L_1},\frac{n_2\pi}{L_2}\right)$，后者对应一个波矢$k_3=\frac{n_3\pi}{L_3}$，显然有

$$|\mathbf{k}_{2D}|^2+k_3^2=k^2.$$

柱坐标系

柱坐标系的谐函数为$J_m(k_{2D}r)e^{im\theta}e^{ik_3z}$，$m \in Z$。视具体情况可以把$e^{\pm im\theta}$换成$\cos m\theta$和$\sin m\theta$的线性组合；把$e^{\pm ik_3z}$换成$\cos k_3z$和$\sin k_3z$的线性组合。对空心柱坐标系，$J_m$要替换为$J_m$和$Y_m$的任意线性组合。

柱坐标谐函数按空间坐标的分解

三维柱坐标的谐函数看成二维的谐函数$J_m(k_{2D}r)e^{im\theta}e^{ik_3z}$和一维$z$坐标的谐函数$e^{\pm ik_3z}$的乘积，前者对应一个大小为$k_{2D}$的二维波矢，后者对应一个波矢$k_3$，显然有

$$k_{2D}^2 + k_3^2 = k^2.$$

极坐标的波矢能否继续分解呢？它的分解是动态的：

$$k_{2D}^2 = \frac{m^2}{r^2} + k_r^2,$$

其中k_r是径向的波矢，$\frac{m}{r}$是切向（垂直半径方向）的波矢。
(正因为波矢的分解依赖于r，径向的谐函数$J_m(k_{2D}r)$同时依赖于k_{2D}和m，而不是简单地只依赖于径向的波矢k_r。)

球坐标系

球坐标系的谐函数为$Y_{\ell m}(\theta,\phi)j_\ell(kr)$。
如果是空心球，则要把$j_\ell(kr)$换成$j_\ell(kr)$和$y_\ell(kr)$的任意线性组合。
球坐标系$k = 0$极限要特别注意，对应的两个解是$r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\phi)$（在无穷远处发散）和$r^{-\ell-1}Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ (在球心发散).

球坐标谐函数按空间坐标的分解

球坐标系的波矢分解形式为

$$k^2 = k_r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

其中k_r是径向的波矢，$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$是固定半径为r的球面上的波矢大小。

球面上的波矢可以进一步进行分解为：

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} = \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} + k_\theta^2.$$

其中k_θ是经线方向的波矢，$\frac{m}{r\sin\theta}$是纬线方向的波矢。
ϕ的谐函数$e^{im\phi}$只依赖于m，θ谐函数同时依赖于ℓ, m，径向的谐函数同时依赖于k和ℓ：这些复杂性同样是由于波矢分解的坐标依赖性。

球坐标谐函数按空间坐标的分解

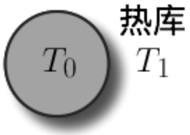
常用的函数有必要熟悉一下：

$$
\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, \\
j_1(x) &= \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}; \\
y_0(x) &= -\frac{\cos x}{x}, \\
y_1(x) &= -\frac{\cos x + x\sin x}{x^2}; \\
Y_{00}(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
Y_{10}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos\theta, \\
Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}.
\end{aligned}
$$

球坐标中的数理方程

先考虑对称性很重要

例题1



把一个半径为R，温度为T_0的均匀实心金属球放到温度为$T_1 > T_0$的热库中。已知金属球的导热系数为λ, 质量密度为ρ，单位质量比热为c。问金属球的球心多久之后温度可以达到$\frac{T_0+T_1}{2}$。

例题1解答

显然稳恒态温度为T_1。令$u(r) = T(r) - T_1$，$0 \le r \le R$，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u &= 0, \\ u\big|_{r=R} &= 0, \\ u\big|_{t=0} &= T_0 - T_1. \end{aligned}$$

根据问题对称性只能取$\ell = m = 0$的谐函数：$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$。又根据零边界条件，可以得到

$$k = \frac{n\pi}{R}, n = 1, 2, \ldots$$

所以设

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{\frac{n\pi r}{R}} e^{-\frac{n^2\pi^2 at}{R^2}}.$$

例题1解答

令$t = 0$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{\frac{n\pi r}{R}} = T_0 - T_1, \quad 0 \le r \le R$$

利用一般正交定理（或者直接观察）可以写出

$$c_n = \frac{2n\pi(T_0 - T_1)}{R^2} \int_0^R \left(\sin \frac{n\pi r}{R}\right) r dr = 2(-1)^{n+1}(T_0 - T_1).$$

当$r = 0$时，

$$u(0,t) = 2(T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\frac{n^2\pi^2 at}{R^2}}$$

例题1解答

当$T(0,t)$达到$\frac{T_0+T_1}{2}$，也就是当$u(0,t)$达到$\frac{T_0-T_1}{2}$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-\frac{n^2\pi^2 at}{R^2}} = \frac{1}{4}.$$

适当采用近似的方法容易算出：

$$t \approx \frac{R^2}{\pi^2 a}\left(2\ln 2 - \frac{1}{4^3}\right) = 0.1389\frac{R^2}{a}$$

例题2

把一个不带电的半径为R的金属球放进场强为E的匀强电场中，求金属球表面的电荷密度分布。

解答

感应电荷在球外和球内产生的电势u必须满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0, \quad r \neq R$$

因为总感应电荷为零，显然球心处$u = 0$。由此容易看出感应电荷在球内产生的电势为

$$u(r,\theta) = Er\cos\theta, \quad r < R$$

这恰好是$\ell = 1, m = 0, k = 0$的球坐标系谐函数。

由电势的连续性以及感应电荷产生的电势在无穷远处为零的条件，得出感应电荷在球外产生的电势为

$$u(r,\theta) = E\frac{R^3}{r^2}\cos\theta, \quad r > R$$

于是电荷面密度为

$$\sigma = \epsilon_0\left(\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R-0} - \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R+0}\right) = 3\epsilon_0 E\cos\theta$$

思考题

例题2中匀强电场造成的电势恰好是$\ell = 1, m = 0, k = 0$的谐函数，这是一个巧合。一般情况下怎样求解这类问题?

思考题

在一个半径为R的一开始不带电的金属球外距离球心为a $(a > R)$处放置电量为Q的点电荷，计算空间各处的电势。

$Y_{\ell 0}$的母函数公式

如果作级数展开

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell$$

其中的$P_\ell(x)$称为勒让德多项式(Legendre Polynomials)。

勒让德多项式和$m=0$的球谐函数之间有如下关系:

$$Y_{\ell 0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta).$$

课后作业(题号49-50)

49 一个半径为R的孤立均匀金属球，导热系数为λ, 质量密度为ρ，单位质量比热为c。记r为到球心的距离，一开始$t=0$时刻球内各处的温度为$T(r)=T_0\left(1+\frac{r}{R}\right)$。计算球内各处温度随时间的变化。

50 已知某真空区域的电势可以写成$u(x,y,z)=\lambda(x^2-y^2)$, λ为常量，x,y,z为直角坐标。把一个不带电的半径为R的金属球放入该区域，计算金属球表面的电荷密度分布。