

Methods of Mathematical Physics

§14 Source Terms and High Dimensions

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- ▶ 回顾
- ▶ 有源的方程
- ▶ 高维情况的分离变量法

回顾

实验报告是把杀猪刀，老身感觉什么都不记得了.....

目前学过的线性齐次偏微分方程解法

1 **分离变量法** 是首选方案。一般的套路:

- 1 假设分离变量形式的解 $\Phi(x)\Psi(t)$ 并求出 Φ 和 Ψ 允许的形式。
- 2 如果空间边界条件是非齐次的, 求(猜)特解把空间边界条件化为齐次;
- 3 用齐次空间边界条件确定展开式中的函数如何选取;
- 4 用初始条件确定展开系数

2 **积分变换方法** 是分离变量法在无穷长区间上的推广。区别是: 积分变换的存在性本身默认了一些无穷远处的性质, 无须对展开式中的函数进行选取。(分离变量法第3步可以省略)

3 **格林函数方法** 也需要把空间边界条件化为齐次。区别是: 不用分离变量的乘积形式函数对解进行分解; 而用格林函数(初始条件为 $\delta(x - x_0)$ 的解, 或者说对 x_0 处的单位脉冲的响应)对解进行分解。

目前学过的两种方程

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u = 0$$

具有衰减和趋于稳定的特性。一维情况格林函数为 $\frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}$ 。

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

具有波动特性。一维无边界情况通解为 $C(x - at) + D(x + at)$ 。

有源的方程

原则上可以暴力解决，实际上.....心好累

有源的问题

有源的例子:

- ▶ 不良导体棒上处处有热源（烤串）；

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

- ▶ 弦作受迫振动（弹琴）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

其中 f 正比于单位时间单位长度输入的热量或外力。

例题1

求解 $0 \leq x \leq L$ 上的烤串问题:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \phi(x, t), \\ u|_{x=0} &= 0, \\ u|_{x=L} &= 0, \\ u|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

自发演化的时间依赖模式被源破坏

如果没有 $\phi(x, t)$ 的存在, 我们将进行分解:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{an^2\pi^2t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

有 $\phi(x, t)$ 的情况, 解的自发衰减性被破坏, 那么我们猜想 $e^{-\frac{an^2\pi^2t}{L^2}}$ 必须被替换掉了:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

其中每个 $T_n(t)$ 都是待定函数。利用初始条件显然有

$$T_n(0) = 0.$$

源也要进行分解

为了求出 T_n , 我们把等式右边的 $\phi(x, t)$ 也进行级数展开:

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

代入到原方程, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[T'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} T(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

两边比较系数得到

$$T'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} T(t) = G_n(t).$$

再利用初始条件 $T_n(0) = 0$, 原则上(🤖)可以求出 $T_n(t)$ 。

比较非齐次的边界条件和有源的方程

- ▶ 有源的方程的解法有固定的流程，从概念上讲非常简单。但实际操作上求解 $T_n(t)$ 经常会很困难（高难度推土）。
- ▶ 无源但空间边界条件是非齐次的情况，求（猜）特解并无固定的流程，不易掌握。但从实际操作上讲，如果有好的数学或物理基础，特别是强大的物理图像和直觉，往往可以出奇制胜，很快求出一个形式很简洁的解。

对于喜欢推土的同学来说，有一个好消息：非齐次边界问题可以转化为有源的问题。

例题2

来回顾一下上一讲中的非齐次边界问题:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \\ u|_{x=L} &= A \sin(\omega t), \\ u|_{t=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

一个不幸的瞎解



如果你不是老司机，你可能会闭着眼睛瞎猜一个“特解”

$$\frac{Ax}{L} \sin(\omega t)$$

然后仔细一看，坏了，它不满足方程！这不是特解，是瞎解！

强用瞎解

因为你已经放弃了用经验肝一个特解这条路，就只能硬着头皮用你找的这个瞎解了： 令

$$u(x, t) = \frac{A x}{L} \sin(\omega t) + v(x, t)$$

代回原方程，得到你最爱的推土问题：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{A \omega^2 x}{L} \sin(\omega t), \\ v|_{x=0} &= 0, \\ v|_{x=L} &= 0, \\ v|_{t=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} &= -\frac{A \omega x}{L} \end{aligned}$$

后面的推土工作略。

高维情况的分离变量法

寻找谐函数是关键

关于分离变量法的一个疑惑



分离变量第1步设 $\Phi(x)\Psi(t)$那如果变量超过2个怎么办?

例题2

边长为 L 的正方形弹性膜，四边都固定，求解膜的小振动问题：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \\ u|_{x=L} &= 0, \\ u|_{y=0} &= 0, \\ u|_{y=L} &= 0, \\ u|_{t=0} &= \phi(x, y), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi(x, y),\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

解答

先寻找分离变量型解, 令 $u = \Phi(x, y)\Psi(t)$, 代入波动方程, 得到

$$\frac{1}{a^2} \frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi}$$

等式左边是 t 的函数, 右边是 x, y 的函数, 要两边恒等, 只能是常数:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = -k^2$$

($\frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = k^2$ 的情形对常见边界条件用处不大, 被无情抛弃。)

解出分离变量型解:

$$u_1 = Q(x, y)e^{\pm iakt}$$

其中 $Q(x, y)$ 是

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的解, 称为 谐函数。

谐函数

在边界为正方形的情况下，取直角坐标系是很漂亮的操作，那么

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的解是平面波

$$Q = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

这里我们用矢量写法 \mathbf{x} 来表示 (x, y) ， \mathbf{k} 来表示 (k_x, k_y) (满足 $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k$)。

和一维的情况类似，对应一组 $|k_x|, |k_y|$ 有四种满足条件的解(因为 k_x, k_y 分别可以取正负)，可以重新写成正弦和余弦的实数表达式。

级数展开

空间边界条件已经是齐次的了，会对 k_x, k_y 产生限制。经过分析容易得到

$$\begin{aligned} u = & \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} \cos \left(\pi a \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{L} t \right) \\ & + \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} \sin \left(\pi a \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{L} t \right). \end{aligned}$$

利用两个初始条件分别可以求出系数 c_{mn} 和 s_{mn} 。

思考



可以直接一次性进行分离变量设解为 $U(x)V(y)\Psi(t)$ 吗?

思考



既然解是熟悉的平面波，为什么要引入“谐函数”的概念？

例题

有孤立的，半径为 R 的均匀厚度圆形金属片。初态 $t = 0$ 时刻金属片中心温度为 T_0 ，金属片上距离中心 r 处的温度为

$$T(r) = T_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

已知金属片质量为 ρ ，导热系数为 λ ，单位质量比热为 c 。求之后圆盘上各点的温度变化。

(🤔这题看着好眼熟)

写出方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a \nabla^2 T = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0,$$

$$T|_{t=0} = T_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

然后思考, $\nabla^2 T$ 具体是什么? 好像还缺了一个空间边界条件, 你知道怎么写吗?

课后作业 (题号 30-31)

30 课上讲了“瞎解法”求解

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \\ u|_{x=L} &= A \sin(\omega t), \\ u|_{t=0} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

的办法。请把课上没有完成的计算部分补充完整，并把解和上次作业得到的解进行比较。

课后作业 (题号 30-31)

- 31 一张四边固定的水平正方形均匀薄膜，张力系数为（单位长度线元受力）为 σ ，质量面密度为 ρ 。记薄膜上的点坐标为 (x, y) ($0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L$)。初始 $t = 0$ 时刻薄膜在横向（垂直薄膜平面方向）有微小的位移 $A_{xy}(L - x)(L - y)$ ，初始速度为零。求解之后薄膜的横向位移 $u(x, y, t)$ ($0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, t \geq 0$)。