Methods of Mathematical Physics

§7 More about Fourier Transform

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 高维空间的δ函数和傅立叶变换
- 共轭关系
- 梯度算符和拉普拉斯算符
- 卷积定理

高维空间的δ函数和傅立叶变换

就是每个维度来一下

n维内积空间

n维内积空间的点可以记作$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，多元函数$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$可以简单写成$f(\mathbf{x})$。

两个矢量$\mathbf{x}, \mathbf{y}$的内积为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

函数$f(\mathbf{x})$在全空间的积分可以简单写作

$$\int f(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x}$$

用你们熟悉的语言写出来就是

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

n维空间的δ函数

n维δ函数标记为$\delta^{(n)}(\mathbf{x})$，既可以理解为

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n),$$

也可以直接抽象地理解为在原点附近体积为$\epsilon \to 0^+$的邻域内，函数值为$\frac{1}{\epsilon} \to \infty$，而在其余位置函数值均为零的函数。

三维空间某点$\mathbf{x}$'处的点电荷的电荷密度可以写成

$$\rho(\mathbf{x}) = Q\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

n维空间的δ函数的性质

和一维空间类似，

$$\int \delta^{(n)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)$$

n维空间的傅立叶变换

n维内积空间的函数$f(\mathbf{x})$的傅立叶变换就是对每个维度都进行傅立叶变换：

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{x}$$

(如果对上式感到困惑，请自行写出2维空间和3维空间的“你们熟悉的表达式”)

显然，其逆变换为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

非常重要的积分式

反复应用一维空间的傅立叶变换的性质，很容易得到

$$\boxed{\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^n\mathbf{x} = \delta^{(n)}(\mathbf{k}).}$$

思考题

试证明： 高维空间傅立叶变换保持内积不变的结论也依然成立，设$\tilde{f}, \tilde{g}$分别为f, g的傅立叶变换，则

$$\int f^*(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \int \tilde{f}^*(\mathbf{k})\tilde{g}(\mathbf{k})\, d^n\mathbf{k}.$$

共轭关系

源像互换取共轭

先精简一下符号

我们用

$$f \stackrel{\mathcal{FT}}{\Longrightarrow} F$$

表示$f(\mathbf{x})$的傅立叶变换为$F(\mathbf{k})$。

共轭关系

设$f \xrightarrow{\mathcal{FT}} F$。对逆变换

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

两边取共轭得到

$$f^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

上式等价于$F^* \xrightarrow{\mathcal{FT}} f^*$，这说明

> 傅立叶变换的源和像，可以取共轭并对换位置

。

实的偶函数

显然，实的偶函数(满足$f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$的实函数)的傅立叶变换仍然是实的偶函数。

（可以通过对傅立叶变换式两边取共轭并对积分变量作$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$的替换得到）。

在这种情况下，无所谓哪个是源，哪个是像，可以使用下述符号：

$$f \overset{\mathcal{FT}}{\Longleftrightarrow} F$$

思考题

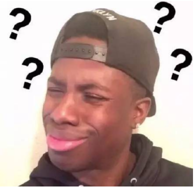
求$f(x) = \frac{\sin x}{x}$的傅立叶变换。

梯度算符和拉普拉斯算符

引而不发才是高境界

算符

算符是把一种对象映射到另一种对象的操作。



感觉等于什么都没说.jpg

梯度算符

n维空间梯度算符∇把n维空间的函数$f(\mathbf{x})$映射为该函数的梯度(矢量)

$$\nabla f \equiv (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f).$$

(为了简单起见，我们把第i个方向的偏导算符$\frac{\partial}{\partial_{x_i}}$简写为了$\partial_i$。)

广义矢量

n维空间的矢量$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，可以看成$n$个基的线性组合：

$$\mathbf{x} = x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2 + \ldots + x_n\mathrm{e}_n.$$

对广义矢量，基的线性组合可以不仅仅用数字作为系数，还能用任何对象。例如，在二维内积空间，

(苹果，橘子) $=$ 苹果$\times\mathrm{e}_1$ $+$ 橘子$\times\mathrm{e}_2$.

(震小羊，桂小荣) $=$ 震小羊$\times\mathrm{e}_1$ $+$ 桂小荣$\times\mathrm{e}_2$.

思考题

计算矢量$(3,2)$和(苹果，橘子) 的内积。

梯度算符

梯度算符∇又可以看成一个广义矢量，它的每个分量是偏导算符：

$$\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n).$$

这就是数学中省略作用对象的“引而不发”的写法。如果在两边补充写个f，则又回到熟悉的小学生可以理解的形式：

$$\nabla f \equiv (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f).$$

散度

梯度算符∇和普通矢量$\mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$的内积为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \ldots + \partial_n E_n$$

这通常称为$\mathbf{E}$的散度。

(在三维空间的情形可以勾起你们对电磁学的美好回忆🤗)

拉普拉斯算符

梯度算符作用到一个普通函数$f(\mathbf{x})$上，就得到一个矢量函数$\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f)$。然后$\nabla$和$\nabla f$的内积就是

$$\nabla \cdot \nabla f \equiv \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \ldots + \partial_n^2 f.$$

上式左边的$\nabla \cdot \nabla$称为拉普拉斯算符，通常简写为∇^2，重写一遍就是：

$$\boxed{\nabla^2 f \equiv \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \ldots + \partial_n^2 f.}$$

在静电磁学里，电场强度$\mathbf{E}$正比于电势φ的梯度：$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$。高斯定律（电场的散度正比于电荷密度）就可以写成

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$

设$f \stackrel{\mathcal{FT}}{\Longrightarrow} F$，对逆变换式

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

两边作用∂_j

$$\partial_j f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (ik_j F(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

当j取遍$1, 2, \ldots, n$，上式可以写成矢量形式：

$$\nabla f(\mathbf{x}) \stackrel{\mathcal{FT}}{\Longrightarrow} i\mathbf{k}F(\mathbf{k})$$

它的具体含义就是：$\partial_j f(\mathbf{x})$的傅立叶变换为$ik_jF(\mathbf{k})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$。

思考题

设$f(\mathbf{x}) \overset{\mathcal{FT}}{\Longrightarrow} F(\mathbf{k})$， 试证明

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \overset{\mathcal{FT}}{\Longrightarrow} -k^2 F(\mathbf{k})$$

其中$k \equiv |\mathbf{k}|$。

第一个数理方程的例子

用高斯定律来计算在原点的点电荷Q造成的电势φ

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

对这个方程两边进行傅立叶变换，

$$-k^2\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{Q}{\epsilon_0},$$

即

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\epsilon_0}\frac{Q}{k^2}.$$

再进行逆变换

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{(2\pi)^3\epsilon_0}\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2}d^3\mathbf{k}$$

第一个数理方程的例子

取$\mathbf{x}$方向为北极方向建立球坐标(k,θ,ϕ)，记$r=|\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2}d^3\mathbf{k} &= \int_0^\infty k^2dk\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\int_0^{2\pi}\frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2}d\phi \\
&= 2\pi\int_0^\infty dk\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)e^{ikr\cos\theta} \\
&= 2\pi\int_0^\infty dk\frac{2\sin(kr)}{kr} \\
&= \frac{2\pi^2}{r}
\end{aligned}$$

由此我们求出

$$\varphi(\mathbf{x})=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

思考题

电势可以随便取零点，为什么解出来的电势不带积分常数?

卷积定理

在同一个频道上的两个. . .

时间序列的频谱分析

让我们再次回到一维的情况： 假设$f(t)$是依赖于时间的信号，其傅立叶变换$\tilde{f}(k)$代表了以k为频率的信号。
如果要研究两个信号$f(t)$和$g(t)$是否显著地包含相同频率的信号，则有两种方法。一种是直接计算 $\tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)$并找出使乘积(的模)比较大的$k$，另一种是计算延时乘积

$$C(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+\Delta t)dt$$

的傅立叶变换$\tilde{C}(k)$，找出使$\tilde{C}(k)$(的模)比较大的k。
(如果f和g显著具有相同频率k的信号，则当Δt为调制相位加上$\frac{2\pi}{k}$的整数倍时$C(\Delta t)$的信号比较强，也就是说$\tilde{C}(k)$包含有较强的频率为k的信号。)
这两种方法之间有什么内在联系呢?

卷积定理的延时表述

设f和g的延时关联函数定义为：

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t')g(t'+t)\,dt',$$

则C, f, g的傅立叶变换$\tilde{C}, \tilde{f}, \tilde{g}$满足：

$$\tilde{C}(k) = \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)$$

卷积定理的延时表述的证明

$$\begin{aligned}\tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iku} f^*(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv} g(v)dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(u-v)} f^*(u)du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)dv\end{aligned}$$

做变量替换$t = v - u$, $t' = u$得到

$$\begin{aligned}\tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} dt \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t')g(t'+t)dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} C(t)dt \\ &= \tilde{C}(k)\end{aligned}$$

卷积定理的对称表述

上述表述虽然有很强的物理背景，但并不容易记忆，一般书中介绍的是下面的对称形式：

两个函数的卷积定义为

$$(f * g)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt'$$

显然，卷积满足交换律： $f * g = g * f$。更重要的是卷积定理：设f, g的傅立叶变换依次为$\tilde{f}, \tilde{g}$，则$f * g$的傅立叶变换为$\tilde{f}\tilde{g}$，即

卷积的傅立叶变换等于傅立叶变换的乘积

注：在有些文献中的傅立叶变换定义不带$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$因子，则卷积的定义中也不含$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$因子。

卷积定理的对称表述的证明

令$h(t)=f^*(-t)$，则

$$\tilde{h}^*(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(-t)e^{ikt}dt$$

做积分变量的替换$t'=-t$，得到

$$\tilde{h}^*(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')e^{-ikt'}dt'=\tilde{f}(k)$$

h和g的延时关联函数为

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h^*(u)g(t+u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(-u)g(t+u)du$$

做变量替换$t'=-u$，得到

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')g(t-t')dt'=(f*g)(t)$$

最后，利用卷积定理的延时表述即得结论。

课后作业

19 三维空间的top-hat函数在单位球内取值为1，否则为零：

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } |\mathbf{x}| < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

求$f(\mathbf{x})$的傅立叶变换$F(\mathbf{k})$。

20 设$\phi(\mathbf{x})$是三维空间中的场，其傅立叶变换为$\tilde{\phi}(\mathbf{k})$，试证明

$$\int |\nabla\phi(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = \int k^2 |\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2 \, d^3\mathbf{k},$$

其中$k = |\mathbf{k}|$。

21 设$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}\sin x}{x}$的傅立叶变换为$F(k)$，试计算

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)$$

的值。