Methods of Mathematical Physics

§15 Bessel Functions of the First Kind I

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 固定边界的圆形薄膜的振动问题

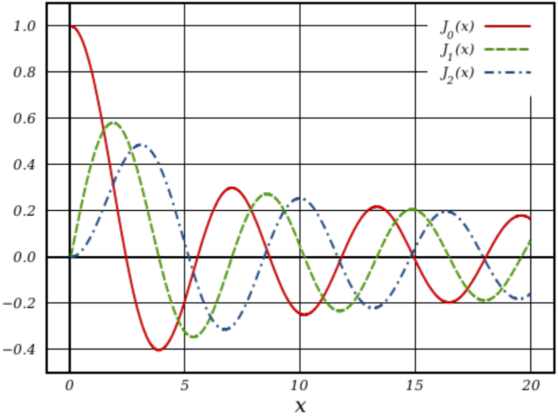
第一类贝塞尔函数的级数定义

第一类贝塞尔函数定义为

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

先讨论物理问题中最常用的$m = 0, 1, 2, \ldots$的情形（m不是整数和$m < 0$的情况且听下回分解）。

J_0, J_1, 和 J_2



$J_m(x)$的定性特点

第一个峰，也就是最大值，大致在$x \approx m$处取到

第一个峰左边近似以x^m增长

第一个峰右边是振幅不断衰减的振荡型函数

注： 在x比较大时，振幅大致上$\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$，周期趋向于2π。

思考题

请一位同学在黑板上画出$J_{100}(x)$的大致图像.

怎么计算$J_m(x)$

大多数编程语言(C, Fortran等)和带数学库的脚本语言 （Python, Mathematica等)都内置有贝塞尔函数，直接调用就能计算。

致手算强迫症患者😁：有一整套的近似公式可以满足你的需求，欢迎来电采购，量大优惠。

贝塞尔函数的递推关系

贝塞尔函数大概有几十条性质。养生MMP课里不可能全部介绍，因此，从最重要也最普遍的递推关系出发

贝塞尔函数的第一条递推性质

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right] = x^m J_{m-1}(x).$$

贝塞尔函数的第二条递推性质

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m(x)\right] = -x^{-m} J_{m+1}(x).$$

（之所以说这是普遍关系，是因为第二类贝塞尔函数$Y_m(x)$也满足完全一样的递推关系。）

贝塞尔函数的递推关系的简单应用

证明：

$$
\begin{aligned}
J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= 2J'_m(x), \\
J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x).
\end{aligned}
$$

剩下几十条性质，从哪儿开始入手呢?

圆形薄膜的振动问题

考虑半径为R的圆形薄膜的横向小振动问题。在$t=0$时刻的初始位移为$A\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$（其中$A$为常量，$r$为距离圆盘中心的距离，$0\le r\le R$)，初始速度为零。求解之后薄膜的振动。

写出方程和边界条件

取极坐标系，设位移为$u(r,\theta,t)$。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u &= 0,\\
u\big|_{r=R} &= 0,\\
u\big|_{t=0} = A\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]&,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

分离变量

我们知道圆盘内的谐函数为$J_m(kr)e^{\pm im\theta}$。在这个问题里初始条件是旋转对称的（不依赖于θ)，所以解也不依赖于θ。也就是说，只需要考虑$m=0$的情形，分离变量形式的解为

$$J_0(kr)\cos(akt),\quad J_0(kr)\sin(akt)$$

然后考虑边界条件：符合$J_0(kR)=0$的解为

$$k=\frac{\mu_i}{R}, i=1,2,\ldots$$

其中μ_i是贝塞尔函数$J_0(x)$的第i的正实数根。
$\mu_1\approx 2.4048$, $\mu_2\approx 5.5201$, $\mu_3\approx 8.6537$, $\mu_4\approx 11.7915$,
$\mu_5\approx 14.9309$, ...

展开

解的展开形式就是

$$u=\sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\cos\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right)+s_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\sin\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right).$$

利用速度为零的初始条件，立刻可以扔掉所有sin(akt)项。

$$u=\sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\cos\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right).$$

再利用初始位移，得到

$$\sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)=A\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

展开

为了看得更清楚一点，我们把$\frac{r}{R}$记作x $(0 \leq x \leq 1)$:

$$\sum_i c_i J_0\left(\mu_i x\right) = A\left(1 - x^2\right),$$

那么问题来了，怎么求系数c_i?

求系数的套路

记得我们以前的套路是两边同乘上谐函数（正弦或余弦），然后在所求问题的物理范围内积分。利用谐函数的积分正交性就可以求出系数。

这个套路还能用吗？我们来研究一下贝塞尔函数的正交性——

贝塞尔函数的正交定理

设μ_i, μ_j是$J_m(x)$第i个和第j个正实数根，则

$$\boxed{\int_0^1 x\, J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x)\, dx = \delta_{ij}\frac{[J_{m+1}(\mu_i)]^2}{2}.}$$

也就是说，只要定义内积时乘上权重x（这个权重来自于极坐标系的散度的"面积修正因子"），那么$J_m(\mu_i x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$就是在$[0, 1]$内的正交函数组了。

证明

回忆$J_m(\mu_i x)$满足的贝塞尔方程:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(\mu_i x)\right]+\left(\mu_i^2-\frac{m^2}{x^2}\right)J_m(\mu_i x)=0.$$

两边同乘以$xJ_m(\mu_j x)$，得到

$$J_m(\mu_j x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(\mu_i x)\right]+\left(\mu_i^2-\frac{m^2}{x^2}\right)xJ_m(\mu_i x)J_m(\mu_j x)=0. \tag{1}$$

交换i和j，得到

$$J_m(\mu_i x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(\mu_j x)\right]+\left(\mu_j^2-\frac{m^2}{x^2}\right)xJ_m(\mu_i x)J_m(\mu_j x)=0. \tag{2}$$

证明（续）

(1)减去(2)，得到

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_m(\mu_j x)\frac{d}{dx}J_m(\mu_i x) - xJ_m(\mu_i x)\frac{d}{dx}J_m(\mu_j x)\right]$$
$$+(\mu_i^2 - \mu_j^2)xJ_m(\mu_i x)J_m(\mu_j x) = 0.$$

如果$i \neq j$，两边从0到1积分即得到

$$\int_0^1 xJ_m(\mu_i x)J_m(\mu_j x) = 0.$$

证明（续）

(1)减去(2)，得到

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_m(\mu_j x)\frac{d}{dx}J_m(\mu_i x) - xJ_m(\mu_i x)\frac{d}{dx}J_m(\mu_j x)\right] \\ +(\mu_i^2 - \mu_j^2)xJ_m(\mu_i x)J_m(\mu_j x) = 0. \tag{3}$$

如果$i \neq j$，两边从0到1积分，并利用μ_i, μ_j为J_m的零点，即得到

$$\int_0^1 xJ_m(\mu_i x)J_m(\mu_j x) = 0.$$

证明（续）

事实上，在推导(3)时，μ_i，μ_j可以为任何正数，所以我们还可以取μ_i为J_m的零点，而$\mu_j = \mu_i + \epsilon$。同样从0到1积分，得到

$$\mu_i J_m(\mu_i + \epsilon) J'_m(\mu_i) - 2\mu_i \epsilon \int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m[(\mu_i + \epsilon)x] dx = 0$$

两边除以ϵ并令 $\epsilon \to 0^+$

$$\int_0^1 x \left[J_m(\mu_i x)\right]^2 dx = \frac{[J'_m(\mu_i)]^2}{2}$$

最后，在递推关系

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m(x)\right] = -x^{-m} J_{m+1}(x)]$$

两边取$x = \mu_i$，即得到 $J'_m(\mu_i) = -J_{m+1}(\mu_i)$。于是命题在$i = j$时也得到了证明。

回到原题

既然有了正交关系，在

$$\sum_i c_i J_0\left(\mu_i x\right) = A\left(1-x\right),$$

两边乘上$xJ_0(\mu_j)$并从0到1积分，得到

$$\frac{c_j}{2}\left[J_1\left(\mu_j\right)\right]^2 = A\int_0^1 x\left(1-x^2\right) J_0(\mu_j x) dx,$$

那么，右边的积分能化简吗?

回到原题

考虑积分

$$I = \int_0^1 x\left(1 - x^2\right) J_0(\mu_j x) dx.$$

利用

$$\mu_j x J_0(\mu_j x) = \frac{d}{dx}\left[x J_1(\mu_j x)\right].$$

分部积分，即得到

$$I = \frac{1 - x^2}{\mu_j} x J_1(\mu_j x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu_j}\int_0^1 x^2 J_1(\mu_j x) dx.$$

再利用

$$\mu_j x^2 J_1(\mu_j x) = \frac{d}{dx}\left[x^2 J_2(\mu_j x)\right]$$

得到

$$I = \frac{2}{\mu_j}\int_0^1 x^2 J_1(\mu_j x) dx = \frac{2}{\mu_j^2} J_2(\mu_j).$$

求出系数

最后，利用

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$$

得到

$$J_2(\mu_j) = \frac{2}{\mu_j} J_1(\mu_j).$$

综合前面所有结果，得到

$$\frac{c_j}{2} \left[J_1\left(\mu_j\right)\right]^2 = A \frac{4}{\mu_j^3} J_1(\mu_j).$$

也就是

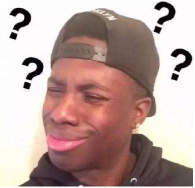
$$c_j = \frac{8A}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)}$$

最终解

薄膜的振动解为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8A}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)} J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right) \cos\frac{\mu_j a t}{R}.$$

（思考：会不会发生分母中的$J_1(\mu_i) = 0$的情况？）



刚才发生了什么.jpg

课后作业(题号35-37)

35 通过逐项求导的办法证明贝塞尔函数的两个递推关系

36 如果$J_m(\mu) = 0$ （μ为正实数)，计算积分

$$\int_0^1 x \left[J_{m+1}(\mu x)\right]^2 dx.$$

37 考虑半径为R的圆形薄膜的横向小振动问题。在$t = 0$时刻的初始速度为$A\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ （其中A为常量，r为距离圆盘中心的距离，$0 \le r \le R$)，初始位移为零。求解之后薄膜的振动。