Methods of Mathematical Physics

§17 Bessel Functions of the First Kind II

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

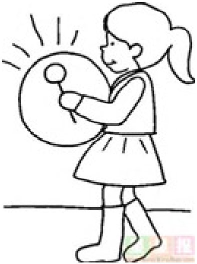
- 回顾：圆形薄膜振动问题
- 推广：圆盘上的热传导问题
- $J_m(x)$的积分表示
- $J_m(x)$在无穷远处的渐进展开
- 无限大板上的热传导问题

圆形薄膜振动问题的回顾

记$J_m(x)$第i个正实数根为μ_i，则

$$\int_0^1 x\, J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x)\, dx = \delta_{ij} \frac{[J_{m+1}(\mu_i)]^2}{2}.$$

例题1:圆形薄膜振动问题的一般初始条件



考虑边界固定，半径为R的圆形薄膜的横向小振动问题。在$t=0$时刻的初始位移为$f(r,\theta)$，初始速度为$g(r,\theta)$。其中(r,θ)是以圆盘中心为原点建立的极坐标。f和g都满足边界条件：$f(r,\theta+2\pi)=f(r,\theta)$，$g(r,\theta+2\pi)=g(r,\theta)$，$f(R,\theta)=g(R,\theta)=0$。求解之后薄膜的振动。

写出方程和边界条件

设位移为$u(r,\theta,t)$。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0,$$
$$u\big|_{r=R} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f(r,\theta),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r,\theta).$$

分离变量

符合边界条件的分离变量形式解为:

$$J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\cos(m\theta)\cos\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right),\ J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\cos(m\theta)\sin\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right),$$

其中$m\in Z$，$\mu_{m,i}$是$J_m(x)$的第i个正实数根。 当$m>0$时还有

$$J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\sin(m\theta)\cos\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right),\ J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\sin(m\theta)\sin\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right).$$

级数展开

完整的级数形式解为

$$
\begin{aligned}
u \;=\; & \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{A_{0,i}}{2}J_0\left(\frac{\mu_{0,i}r}{R}\right)\cos\left(\frac{\mu_{0,i}at}{R}\right)+\frac{B_{0,i}}{2}J_0\left(\frac{\mu_{0,i}r}{R}\right)\sin\left(\frac{\mu_{0,i}at}{R}\right)\right. \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{m,i}J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\cos(m\theta)\cos\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right)\right. \\
& +B_{m,i}J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\cos(m\theta)\sin\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right) \\
& +C_{m,i}J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\sin(m\theta)\cos\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right) \\
& \left.\left.+\;D_{m,i}J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right)\sin(m\theta)\sin\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

(在$A_{0,i}$和$B_{0,i}$里的$\frac{1}{2}$因子是为了和$m\neq 0$的结果看起来更一致。)

初始位移条件

利用初始位移条件得到

$$
\begin{aligned}
f(Rx,\theta) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_{0,i}}{2}J_0\left(\mu_{0,i}x\right) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_{m,i}J_m\left(\mu_{m,i}x\right)\cos\left(m\theta\right)+C_{m,i}J_m\left(\mu_{m,i}x\right)\sin\left(m\theta\right)\right]
\end{aligned}
$$

其中$x=\frac{r}{R}$。
由谐函数的正交性得到

$$A_{m,i}=\frac{2}{\pi\left[J_{m+1}(\mu_{m,i})\right]^2}\int_0^1 xJ_m(\mu_{m,i}x)dx\int_0^{2\pi}\cos\left(m\theta\right)f(Rx,\theta)d\theta$$

$$C_{m,i}=\frac{2}{\pi\left[J_{m+1}(\mu_{m,i})\right]^2}\int_0^1 xJ_m(\mu_{m,i}x)dx\int_0^{2\pi}\sin\left(m\theta\right)f(Rx,\theta)d\theta$$

初始速度条件

利用初始速度条件得到

$$g(Rx,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{0,i}\mu_{0,i}a}{2R}J_0(\mu_{0,i}x)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{B_{m,i}\mu_{m,i}a}{R}J_m(\mu_{m,i}x)\cos(m\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{D_{m,i}\mu_{m,i}a}{R}J_m(\mu_{m,i}x)\sin(m\theta)\right]$$

其中$x=\frac{r}{R}$。
由谐函数的正交性得到

$$B_{m,i}=\frac{2R}{\pi\mu_{m,i}a\left[J_{m+1}(\mu_{m,i})\right]^2}\int_0^1 xJ_m(\mu_{m,i}x)dx\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)g(Rx,\theta)d\theta$$

$$D_{m,i}=\frac{2R}{\pi\mu_{m,i}a\left[J_{m+1}(\mu_{m,i})\right]^2}\int_0^1 xJ_m(\mu_{m,i}x)dx\int_0^{2\pi}\sin(m\theta)g(Rx,\theta)d\theta$$

圆盘上的热传导问题

记$J'_m(x)$的第i个正实数根为λ_i，则

$$\int_0^1 x\,J_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x)dx = \delta_{ij}\frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)[J_m(\lambda_i)]^2}{2}$$

例题2:圆盘上的热传导问题

有孤立的，半径为R的均匀圆形金属薄片。初态$t=0$时刻金属片上距离中心r处的温度为

$$T(r) = T_0\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right).$$

已知金属片质量密度为ρ，导热系数为λ，单位质量比热为c。求$t\geq 0$时圆盘上各点的温度。

写出方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} - a\nabla^2 T &= 0, \\
\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} &= 0, \\
T|_{t=0} &= T_0\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right).
\end{aligned}
$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

按谐函数展开

一般的分离变量解为$J_m(kr)e^{\pm im\theta}e^{-ak^2t}$。但因为初始条件旋转对称（不依赖于$\theta$），所以解只包含$m=0$，也就是$J_0(kr)e^{-ak^2t}$的形式。

根据边界条件知道$k=\frac{\lambda_i}{R}$，其中λ_i是$J_0'(x)$的第i个正实数根。$\lambda_0=0$，$\lambda_1=3.8317$，$\lambda_2=7.0156$，$\lambda_3=10.1735$，$\lambda_4=13.3237, \lambda_5=16.4706, \ldots$ 我们把$\lambda_0=0$这个特殊情形包括了进来，代表的是常数项。（思考：以前解固定边界的圆形薄膜振动问题时为什么没有这样做？）

于是，按谐函数展开

$$T=\sum_{i=0}^{\infty}c_iJ_0\left(\frac{\lambda_i r}{R}\right)e^{-\frac{a\lambda_i^2 t}{R^2}}.$$

按谐函数展开

从初始条件可以得到，

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i J_0\left(\lambda_i x\right) = T_0\left(1 + x^2\right),$$

其中$x = \frac{r}{R}$.

看起来要求出c_i就要研究下$J_0(\lambda_i x)$的正交性。我们来考虑更一般的$J_m(\lambda_i x)$（λ_i为$J'_m(x)$的正实数根)的正交性。

第一类贝塞尔函数的第二个正交定理

设λ_i为$J_m'(x)$的第i个正实数根，则

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) dx = \delta_{ij} \frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)[J_m(\lambda_i)]^2}{2}$$

当$m=0$时，允许取$\lambda_0=0$这个特殊情形，这时需要约定等式右边$\frac{m^2}{\lambda_0^2}=0$。

证明

贝塞尔函数满足贝塞尔方程

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(x)\right]+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)J_m(x)=0.$$

把x换成$\lambda_i x$，得到

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(\lambda_i x)\right]+\left(\lambda_i^2-\frac{m^2}{x^2}\right)J_m(\lambda_i x)=0.$$

注意符号$\frac{d}{dx}J_m(\lambda_i x)$和$J_m'(\lambda_i x)$的不同：前者多$\lambda_i$的因子。

（如果你还没弄清楚，请看例子：由$f(x)=x^2$，可以得到$f'(x)=2x$；把x换为$2x$可以得到$f(2x)=4x^2$，$f'(2x)=4x$；显然$\frac{d}{dx}f(2x)=8x=2f'(2x)$。）

证明

两边同乘以$xJ_m(\lambda_j x)$，得到

$$J_m(\lambda_j x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(\lambda_i x)\right]+\left(\lambda_i^2-\frac{m^2}{x^2}\right)xJ_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x)=0. \tag{1}$$

交换i和j，得到

$$J_m(\lambda_i x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_m(\lambda_j x)\right]+\left(\lambda_j^2-\frac{m^2}{x^2}\right)xJ_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x)=0. \tag{2}$$

证明（续）

(1)减去(2)，得到

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_m(\lambda_j x)\frac{d}{dx}J_m(\lambda_i x) - xJ_m(\lambda_i x)\frac{d}{dx}J_m(\lambda_j x)\right]$$
$$+(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)xJ_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x) = 0. \tag{3}$$

如果$i \neq j$，两边从0到1积分即得到

$$\int_0^1 xJ_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x) = 0.$$

证明（续）

事实上，在推导(3)时，λ_i，λ_j可以为任何正实数，所以我们还可以取λ_i为J_m'的零点，而$\lambda_j = \lambda_i + \epsilon$。同样从0到1积分，得到

$$-(\lambda_i+\epsilon)J_m(\lambda_i)J_m'(\lambda_i+\epsilon)-(2\lambda_i+\epsilon)\epsilon\int_0^1 xJ_m(\lambda_i x)J_m[(\lambda_i+\epsilon)x]dx = 0$$

两边除以ϵ并令 $\epsilon \to 0^+$

$$\int_0^1 x\left[J_m(\lambda_i x)\right]^2 dx = -\frac{J_m(\lambda_i)J_m''(\lambda_i)}{2}$$

证明（续）

在贝塞尔方程

$$J_m''(x) + \frac{1}{x}J_m'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(x) = 0$$

中令$x = \lambda_i$，即得到

$$J_m''(\lambda_i) = -\left(1 - \frac{m^2}{\lambda_i^2}\right) J_m(\lambda_i).$$

代回前面得到的结论就完成了$\lambda_i, \lambda_j \neq 0$情况下的证明。

证明（续）

最后我们考虑$m=0$，$\lambda_i=0$的情况。这时如果$\lambda_j\neq\lambda_i$，则

$$\int_0^1 xJ_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x)dx=\int_0^1 xJ_0(\lambda_j x)dx=\frac{1}{\lambda_j}xJ_1(\lambda_j x)\Big|_0^1=0$$

我们用到了$J_0(0)=1$。在最后一步利用了$m=0$时的第二个递推关系: $J_0'(x)=-J_1(x)$，以及$J_0'(\lambda_j)=0$。

如果$\lambda_j=\lambda_i=0$，则可以直截了当地进行计算

$$\int_0^1 xJ_m(\lambda_i x)J_m(\lambda_j x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

这样我们对$m=0$, $\lambda_i=0$的特殊情况完成了证明。

思考题

之前得到的结论

$$\int_0^1 x\left[J_m(\lambda_i x)\right]^2 dx = -\frac{J_m(\lambda_i)J_m''(\lambda_i)}{2}$$

对$m = 0,\ \lambda_0 = 0$的特殊情形成立吗?

回到原问题

在

$$\sum_i c_i J_0\left(\lambda_i x\right) = T_0\left(1+x^2\right),$$

两边同乘以$xJ_0(\lambda_j x)$并从0到1积分，得到

$$\frac{c_j\left[J_0(\lambda_j)\right]^2}{2} = T_0\int_0^1 (1+x^2)xJ_0(\lambda_j x)dx$$

对$j=0$（即$\lambda_j=0$）的特殊情况，

$$\int_0^1 (1+x^2)xJ_0(\lambda_j x) = \int_0^1 x(1+x^2)dx = \frac{3}{4}$$

即

$$c_0 = \frac{3}{2}T_0$$

回到原问题

若$j>0$，利用$\lambda_j x J_0(\lambda_j x)=\frac{d}{dx}\left[xJ_1(\lambda_j x)\right]$进行分部积分：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+x^2)xJ_0(\lambda_j x)dx &= \frac{1+x^2}{\lambda_j}xJ_1(\lambda_j x)\Big|_0^1 - \frac{2}{\lambda_j}\int_0^1 x^2 J_1(\lambda_j x)dx \\
&= -\frac{2}{\lambda_j}\int_0^1 x^2 J_1(\lambda_j x)dx \\
&= -\frac{2}{\lambda_j^2}x^2 J_2(\lambda_j x)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{\lambda_j^2}J_2(\lambda_j) \\
&= \frac{2}{\lambda_j^2}J_0(\lambda_j)
\end{aligned}$$

最后一步利用了$J_0(\lambda_j)+J_2(\lambda_j)=\frac{2}{\lambda_j}J_1(\lambda_j)=-\frac{2}{\lambda_j}J_0'(\lambda_j)=0$

最终的解

得到

$$c_j = \frac{4T_0}{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j)}$$

即

$$T = \frac{3}{2}T_0 + 4T_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_j r}{R}\right) e^{-\frac{a\lambda_j^2 t}{R^2}}}{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j)}$$

有趣的是，令$r = R$，$t = 0$，可以得到:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{1}{8}$$

贝塞尔函数的积分表示

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - m\theta)}\,d\theta$$

贝塞尔函数的积分表示

除了递推公式，整数阶贝塞尔函数最为常用的性质是它的积分表示：

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - m\theta)}\,d\theta$$

被积函数的周期为2π，上面的积分区间可以取任何一个完整周期。

证明

把$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-m\theta)}d\theta$进行泰勒展开，其$n$次系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi n!}\int_{-\pi}^{\pi}(i\sin\theta)^n e^{-im\theta}d\theta$$

转化为单位圆上的围道积分：

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi n! i}\oint(z-\frac{1}{z})^n\frac{1}{z^{m+1}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}(-1)^k z^{n-2k-m-1}dz \end{aligned}$$

根据留数定理，仅有的非零项为$c_{2k+m}=\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}$，和$J_m$的级数定义相同。证毕。

贝塞尔函数的积分表示

把积分式右边用欧拉公式展开，发现虚部为奇函数，积分为零；而实部为偶函数。所以

$$\boxed{J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x\sin\theta - m\theta\right)d\theta}$$

无穷远处的渐近行为

当$x \gg m^2$时，

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

无穷远处的渐近行为

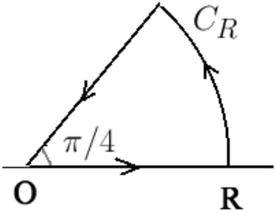
$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x\sin\theta - m\theta\right)d\theta$$

当x很大时，$\cos(x\sin\theta - m\theta)$快速振荡，对积分无贡献。唯一的例外是$\theta = \frac{\pi}{2}$附近，$\sin\theta$变化停滞，积分贡献并不消失。
令$\theta = \frac{\pi}{2} + \epsilon$，把$\sin\theta$作二阶近似展开：

$$\begin{aligned}
J_m(x) &\approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left[x(1-\frac{1}{2}\epsilon^2) - \frac{m}{2}\pi\right]d\epsilon \\
&\approx \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[e^{-i\phi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ix}{2}\epsilon^2}d\epsilon\right] \\
&\approx \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left[e^{-i\phi}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{ix}{2}\epsilon^2}d\epsilon\right]
\end{aligned}$$

其中$\phi = x - \frac{m}{2}\pi$

无穷远处的渐近行为（续）



在如图的围道上积分

$$\oint e^{\frac{ix}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

容易得到

$$\int_0^\infty e^{\frac{ix}{2}\epsilon^2} d\epsilon = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}\epsilon^2} d\epsilon = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

最后得到

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

无限大板上的热传导问题

$$\int_0^\infty J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}.$$

例题3: 无限大板上的热传导问题

一块很大（可以视为无限大）的均匀薄板的温度为T_0，在$t=0$时刻在中心点注入热量Q，求之后板上的温度变化。设板的单位质量比热为c，质量密度为ρ，厚度为h，导热系数为λ。

写出方程

假设一开始的热量被注入到面积为ϵ的小区域内，则该区域内的温度为$T_0 + \frac{Q}{\rho c \epsilon h}$。令$u(r,\theta) = \frac{\rho c h}{Q}(T - T_0)$，写出方程和边界条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u &= 0, \\
u|_{r=\infty} &= 0, \\
u|_{t=0} &= \delta(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。

我们认出这是一个典型的求解格林函数问题。

直角坐标的解

先看直角坐标系下能否求解。把u按谐函数分解:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k}\, c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-ak^2 t},$$

注意这里的$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$; $\mathbf{x} = (x, y)$; $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_x x + k_y y$;
$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$; $\int d^2\mathbf{k}$是全平面积分$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y$的简写。
令$t = 0$,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k}\, c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

这说明$c(\mathbf{k})$是$\delta(\mathbf{x})$的二维傅立叶变换。

直角坐标的解（续）

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int d^2\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi}$$

即解为

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2\mathbf{k}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}e^{-ak^2t} = \frac{1}{4\pi at}e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}},$$

（很容易认出来这其实是两个一维格林函数的乘积。）

极坐标的解

在极坐标里，我们一开始就可以看出问题具有旋转对称性，写出

$$u(r,t)=\int_0^\infty f(k)J_0(kr)e^{-ak^2t}kdk$$

取$t=0$，得到

$$\delta(\mathbf{x})=\int_0^\infty f(k)J_0(kr)kdk$$

为了求出$f(k)$，我们来研究第一类贝塞尔函数在无穷区间上的正交关系。

第一类贝塞尔函数在无穷区间上的正交关系

$$\boxed{\int_0^\infty J_m(k_1 r)J_m(k_2 r)rdr = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}.}$$

证明留为作业。

极坐标系求解（续）

$$\delta(\mathbf{x}) = \int_0^\infty f(k) J_0(kr)\,dk$$

对任意给定的k'，两边乘以$rJ_0(k'r)$并对r从0到∞积分，得到

$$\frac{1}{2\pi} = \int_0^\infty f(k)\frac{\delta(k-k')}{k}k\,dk = f(k')$$

所以解为

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)e^{-ak^2t}k\,dk$$

课后作业(题号38-40)

38 有孤立的，半径为R的均匀圆形金属薄片，以中心为原点建立极坐标(r,θ)。初态$t=0$时刻，金属片上的温度为$f(r,\theta)$。已知金属片质量密度为ρ，导热系数为λ，单位质量比热为c。求$t\geq 0$时刻金属片上各点的温度。

39 利用J_m在有限区间上的正交定理和J_m的渐近表达式证明

$$\int_0^{\infty} J_m(k_1 r)J_m(k_2 r)rdr = \frac{\delta(k_1-k_2)}{k_1}.$$

40 我们在两种不同的坐标系中求解例题3，分别得到

$$\frac{1}{4\pi at}e^{-\frac{r^2}{4at}}$$

和

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} J_0(kr)e^{-ak^2t}kdk.$$

试直接证明这两个解恒等。