Methods of Mathematical Physics

§23 Advanced Topics on $Y_{\ell m}$'s

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 勒让德多项式的各种性质
- 球谐函数的微分表达式和连带勒让德函数
- 球谐函数的加法公式
- 物理问题举例

勒让德多项式的各种性质

学完后很快会忘，所以有个印象就可以

例题1：罗巨格公式

上一讲我们定义了勒让德多项式

$$P_\ell(x) := \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k .$$

试证明罗巨格公式(Rodrigues' Formula)：

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right].$$

证明

令$t = x - 1$，证明直截了当：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right] &= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^\ell(1+\frac{t}{2})^\ell\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{2^k k!(\ell-k)!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^{\ell+k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^k \\
&= P_\ell(x)
\end{aligned}
$$

例题2: 其他递推公式

上一讲我们借助母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell,$$

证明了递推公式:

$$(2\ell+1)xP_\ell(x) = (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_\ell(x).$$

试证明其他两个递推公式:

$$P'_{\ell+1}(x) = xP'_\ell(x) + (\ell+1)P_\ell(x);$$

$$P'_{\ell-1}(x) = xP'_\ell(x) - \ell P_\ell(x).$$

当然, 由这两个递推公式还能得到:

$$(2\ell+1)P_\ell(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x).$$

证明

令$t = x - 1$，证明直截了当：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right] &= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^\ell(1+\frac{t}{2})^\ell\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{2^k k!(\ell-k)!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^{\ell+k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^k \\
&= P_\ell(x)
\end{aligned}
$$

题外话，高中知识：乘积多重导数公式

设f,g为x的函数，我们都知道

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

这个公式可以推广到任意阶导数：

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

其中 $f^{(k)}$表示f的k重导数。

(和二项式定理一样，这个公式最简明有效的证明方法是用数学归纳法，请自行完成。)

题外话，高中知识：推广的乘积多重导数公式

设ρ, f, g为x的函数，则

$$\boxed{\left(\rho\frac{d}{dx}\right)^n(fg)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[\left(\rho\frac{d}{dx}\right)^k f\right]\left[\left(\rho\frac{d}{dx}\right)^{n-k} g\right],}$$

证明思路：令$y=\int\frac{dx}{\rho}$并对变量y应用乘积的多重导数公式。

罗巨格公式应用例题1

利用罗巨格公式证明$P_\ell(x)$满足

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell(x)\right]+\ell(\ell+1)P_\ell(x)=0.$$

证明

$\ell = 0$情况显然，假设$\ell \geq 1$，对恒等式:

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^\ell\right] = 2\ell x(x^2-1)^\ell$$

两边同求导ℓ次得到

$$(x^2-1)\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left[(x^2-1)^\ell\right] = \ell(\ell+1)\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left[(x^2-1)^\ell\right].$$

再次两边求导，并除以$2^\ell \ell!$即完成证明。

罗巨格公式应用例题2

利用罗巨格公式证明$P_\ell(x)$满足

$$\int_{-1}^{1} [P_\ell(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2\ell + 1}.$$

证明

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}[P_\ell(x)]^2\,dx &= \frac{1}{4^\ell(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right]\right\}^2 dx \\
&= -\frac{1}{4^\ell(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left[(x^2-1)^\ell\right]\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left[(x^2-1)^\ell\right] dx \\
&= \ldots \\
&= \frac{(-1)^\ell}{4^\ell(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^\ell\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}\left[(x^2-1)^\ell\right] dx \\
&= \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^\ell dx \\
&= \frac{2(2\ell)!}{(\ell!)^2}\int_{0}^{1} t^\ell(1-t)^\ell dt \\
&= \frac{2}{2\ell+1}
\end{aligned}
$$

上面我们做了变量替换：$t=\frac{x-1}{2}$并使用了$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$。

球谐函数的微分表示

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}$$

球谐函数的微分表达式

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}$$

球谐函数的微分表达式

对 $Y_{\ell m}$，我们要证明

课后作业(题号54-56)

54 证明对任意小于ℓ的非负整数n,

$$\int_{-1}^{1} x^n P_\ell(x)dx = 0.$$

55

56