

Methods of Mathematical Physics

§7 More about Fourier Transform

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- ▶ 高维空间的 δ 函数和傅立叶变换
- ▶ 共轭关系
- ▶ 梯度算符和拉普拉斯算符
- ▶ 卷积定理

高维空间的 δ 函数和傅立叶变换

就是每个维度来一下

n 维内积空间

n 维内积空间的点可以记作 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可以简单写成 $f(\mathbf{x})$ 。

两个矢量 \mathbf{x}, \mathbf{y} 的内积为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

函数 $f(\mathbf{x})$ 在全空间的积分可以简单写作

$$\int f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

用你们熟悉的语言写出来就是

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

n 维空间的 δ 函数

n 维 δ 函数标记为 $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ ，既可以理解为

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n),$$

也可以直接抽象地理解为在**原点附近**体积为 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的邻域内，函数值为 $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty$ ，而在其余位置函数值均为零的函数。



三维空间某点 \mathbf{x}' 处的点电荷的电荷密度可以写成

$$\rho(\mathbf{x}) = Q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

n 维空间的 δ 函数的性质

和一维空间类似,

$$\int \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)$$

n 维空间的傅立叶变换

n 维内积空间的函数 $f(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换就是对每个维度都进行傅立叶变换:

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x}$$

(如果对上式感到困惑, 请自行写出2维空间和3维空间的“你们熟悉的表达式”)
显然, 其逆变换为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{k}.$$

非常重要的积分式

反复应用一维空间的傅立叶变换的性质，很容易得到

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \delta^{(n)}(\mathbf{k}).$$

思考题



试证明：高维空间傅立叶变换保持内积不变的结论也依然成立，设 \tilde{f}, \tilde{g} 分别为 f, g 的傅立叶变换，则

$$\int f^*(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} = \int \tilde{f}^*(\mathbf{k})\tilde{g}(\mathbf{k}) d^n\mathbf{k}.$$

共轭关系

源像互换取共轭

先精简一下符号

我们用

$$f \xrightarrow{\mathcal{FT}} F$$

表示 $f(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换为 $F(\mathbf{k})$ 。

共轭关系

设 $f \xrightarrow{FT} F$ 。对逆变换

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

两边取共轭得到

$$f^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

上式等价于 $F^* \xrightarrow{FT} f^*$ ，这说明

傅立叶变换的源和像，可以取共轭并对换位置

。

实的偶函数

显然，实的偶函数(满足 $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ 的实函数)的傅立叶变换仍然是实的偶函数。

(可以通过对傅立叶变换式两边取共轭并对积分变量作 $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ 的替换得到)。

在这种情况下，无所谓哪个是源，哪个是像，可以使用下述符号：

$$f \xLeftrightarrow{FT} F$$

思考题



求 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的傅立叶变换。

梯度算符和拉普拉斯算符

引而不发才是高境界

算符

算符是把一种对象映射到另一种对象的操作。



感觉等于什么都没说.jpg

梯度算符

n 维空间梯度算符 ∇ 把 n 维空间的函数 $f(\mathbf{x})$ 映射为该函数的梯度(矢量)



$$\nabla f \equiv (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f).$$

(为了简单起见，我们把第 i 个方向的偏导算符 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 简写为了 ∂_i 。)

广义矢量

n 维空间的矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 可以看成 n 个基的线性组合:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

对广义矢量, 基的线性组合可以不仅仅用数字作为系数, 还能用任何对象。例如, 在二维内积空间,

$$(\text{苹果}, \text{橘子}) = \text{苹果} \times \mathbf{e}_1 + \text{橘子} \times \mathbf{e}_2.$$

$$(\text{震小羊}, \text{桂小荣}) = \text{震小羊} \times \mathbf{e}_1 + \text{桂小荣} \times \mathbf{e}_2.$$

思考题



计算矢量 $(3, 2)$ 和(苹果, 橘子) 的内积。

梯度算符

梯度算符 ∇ 又可以看成一个广义矢量，它的每个分量是偏导算符：

$$\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).$$

这就是数学中省略作用对象的“引而不发”的写法。如果在两边补充写个 f ，则又回到熟悉的小学生可以理解的形式：

$$\nabla f \equiv (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f).$$

散度

梯度算符 ∇ 和普通矢量 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ 的内积为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \dots + \partial_n E_n$$

这通常称为 \mathbf{E} 的散度。

(在三维空间的情形可以勾起你们对电磁学的美好回忆🤔)

拉普拉斯算符

梯度算符作用到一个普通函数 $f(\mathbf{x})$ 上，就得到一个矢量函数 $\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)$ 。然后 ∇ 和 ∇f 的内积就是

$$\nabla \cdot \nabla f \equiv \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \dots + \partial_n^2 f.$$

上式左边的 $\nabla \cdot \nabla$ 称为拉普拉斯算符，通常简写为 ∇^2 ，重写一遍就是：

$$\nabla^2 f \equiv \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \dots + \partial_n^2 f.$$

在静电磁学里，电场强度 \mathbf{E} 是电势 φ 的梯度： $\mathbf{E} = \nabla \varphi$ 。高斯定律（电场的散度正比于电荷密度）就可以写成

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$$

设 $f \xrightarrow{\mathcal{FT}} F$, 对逆变换式

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{k}.$$

两边作用 ∂_j

$$\partial_j f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (ik_j F(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{k}.$$

当 j 取遍 $1, 2, \dots, n$, 上式可以写成矢量形式:

$$\nabla f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{FT}} i\mathbf{k} F(\mathbf{k})$$

它的具体含义就是: $\partial_j f(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换为 $ik_j F(\mathbf{k})$
($j = 1, 2, \dots, n$)。

思考题



设 $f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{FT}} F(\mathbf{k})$, 试证明

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{FT}} -k^2 F(\mathbf{k})$$

其中 $k \equiv |\mathbf{k}|$ 。

第一个数理方程的例子

用高斯定律来计算在原点的点电荷 Q 造成的电势 φ

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

对这个方程两边进行傅立叶变换,

$$-k^2 \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{Q}{\epsilon_0},$$

即

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \epsilon_0} \frac{Q}{k^2}.$$

再进行逆变换

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2} d^3\mathbf{k}$$

第一个数理方程的例子

取 \mathbf{x} 方向为北极方向建立球坐标 (k, θ, ϕ) , 记 $r = |\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2} d^3\mathbf{k} &= \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} d\phi \\
 &= 2\pi \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty dk \frac{2 \sin(kr)}{kr} \\
 &= \frac{2\pi^2}{r}
 \end{aligned}$$

由此我们求出

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

思考题



电势可以随便取零点，为什么解出来的电势不带积分常数？

卷积定理

在同一个频道上的两个...

时间序列的频谱分析

让我们再次回到一维的情况：假设 $f(t)$ 是依赖于时间的信号，其傅立叶变换 $\tilde{f}(k)$ 代表了以 k 为频率的信号。

如果要研究两个信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是否显著地包含相同频率的信号，则有两种方法。一种是直接计算 $\tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)$ 并找出使乘积(的模)比较大的 k ，另一种是计算延时乘积

$$C(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t + \Delta t)dt$$

的傅立叶变换 $\tilde{C}(k)$ ，找出使 $\tilde{C}(k)$ (的模)比较大的 k 。

(如果 f 和 g 显著具有相同频率 k 的信号，则当 Δt 为 $\frac{2\pi}{k}$ 的整数倍时 $C(\Delta t)$ 的信号比较强，也就是说 $\tilde{C}(k)$ 包含有较强的频率为 k 的信号。)

这两种方法之间有什么内在联系呢？

卷积定理的延时表述

设 f 和 g 的延时关联函数定义为:

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t')g(t' + t) dt',$$

则 C, f, g 的傅立叶变换 $\tilde{C}, \tilde{f}, \tilde{g}$ 满足:

$$\tilde{C}(k) = \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)$$

卷积定理的延时表述的证明

$$\begin{aligned}\tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iku} f^*(u) du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv} g(v) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(u-v)} f^*(u) du \int_{-\infty}^{\infty} g(v) dv\end{aligned}$$

做变量替换 $t = v - u$, $t' = u$ 得到

$$\begin{aligned}\tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} dt \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t') g(t' + t) dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} C(t) dt \\ &= \tilde{C}(k)\end{aligned}$$

卷积定理的对称表述

上述表述虽然有很强的物理背景，但并不容易记忆，一般书中介绍的是下面的对称形式：

两个函数的卷积定义为

$$(f * g)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t - t')dt'$$

显然，卷积满足交换律： $f * g = g * f$ 。更重要的是卷积定理：设 f, g 的傅立叶变换依次为 \tilde{f}, \tilde{g} ，则 $f * g$ 的傅立叶变换为 $\tilde{f}\tilde{g}$ ，即

卷积的傅立叶变换等于傅立叶变换的乘积

注：在有些文献中的傅立叶变换定义不带 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 因子，则卷积的定义中也不含 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 因子。

卷积定理的对称表述的证明

令 $h(t) = f^*(-t)$, 则

$$\tilde{h}^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{ikt} dt$$

做积分变量的替换 $t' = -t$, 得到

$$\tilde{h}^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-ikt'} dt' = \tilde{f}(k)$$

h 和 g 的延时关联函数为

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(u)g(t+u)dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-u)g(t+u)dt'$$

做变量替换 $t' = -u$, 得到

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt' = (f * g)(t)$$

最后, 利用卷积定理的延时表述即得结论。

课后作业

- 19 三维空间的top-hat函数在单位球内取值为1，否则为零：

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } |\mathbf{x}| < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

求 $f(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换 $F(\mathbf{k})$ 。

- 20 设 $\phi(\mathbf{x})$ 是三维空间中的场，其傅立叶变换为 $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$ ，试证明

$$\int |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = \int k^2 |\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2 d^3\mathbf{k},$$

其中 $k = |\mathbf{k}|$ 。

- 21 设 $f(x) = \frac{e^{-x^2/2} \sin x}{x}$ 的傅立叶变换为 $F(k)$ ，试计算

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)$$

的值。