Methods of **M**athematical **P**hysics

§18 Bessel Functions of the Second Kind

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 谐函数的一般正交定理
- 任意阶第一类贝塞尔函数
- 第二类贝塞尔函数
- 环形区域数理方程

据说上次课又翻车了……

不得不翻的车

分离变量法的套路

- 通过减去一个特解（或瞎解）把边界条件齐次化
- 把解展开成谐函数$Q_k(\mathbf{x})$（和时间依赖因子的乘积）的线性组合：热传导方程的时间依赖因子是e^{-ak^2t}，波动方程的时间依赖因子是$e^{\pm iakt}$。
- 如果是有限区间，用边界条件来选择k的允许取值。
- 用初始条件和谐函数的正交性求出展开系数。

疑问

那个……万一谐函数不正交怎么办?

谐函数的一般正交定理

> 并不懂为什么，反正感觉该正交时就会正交的. . .

什么齐次边界条件是在套路内的?

把在某个n维空间的区域Ω内对应本征值为$-k^2$，即满足

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的谐函数记作$Q_k(\mathbf{x})$ (约定$k \geq 0$)。

在区域的边界面$\partial\Omega$上，如果谐函数和它沿边界面法向的分量(记作$(\nabla Q)_\perp$)的某个固定的非平凡线性组合处处为零，则称该区域内的谐函数满足一般零边界条件。

（边界面的法向即垂直边界面的方向。一般零边界条件就是指：$\lambda_1 Q + \lambda_2 (\nabla Q)_\perp = 0$，其中权重$\lambda_1, \lambda_2$不同时为零。注意边界面上不同的点的权重允许不同，但是同一点的权重对所有谐函数必须相同。）

谐函数的一般正交定理

设$Q_{k_1}(\mathbf{x})$和$Q_{k_2}(\mathbf{x})$是满足一般零边界条件的谐函数，且$k_1 \neq k_2$。则在区域Ω内$Q_{k_1}(\mathbf{x})$和$Q_{k_2}(\mathbf{x})$正交：

$$\int_\Omega Q_{k_1}(\mathbf{x}) Q_{k_2}(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} = 0.$$

证明

$$
\begin{aligned}
&(k_1^2 - k_2^2)\int_\Omega Q_{k_1}(\mathbf{x})Q_{k_2}(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} \\
= &\int_\Omega \left[Q_{k_1}(\mathbf{x})\nabla^2 Q_{k_2}(\mathbf{x}) - Q_{k_2}(\mathbf{x})\nabla^2 Q_{k_1}(\mathbf{x})\right] d^n\mathbf{x} \\
= &\int_\Omega \nabla\cdot\left[Q_{k_1}(\mathbf{x})\nabla Q_{k_2}(\mathbf{x}) - Q_{k_2}(\mathbf{x})\nabla Q_{k_1}(\mathbf{x})\right] d^n\mathbf{x} \\
= &\int_{\partial\Omega} \left[Q_{k_1}(\mathbf{x})\nabla Q_{k_2}(\mathbf{x}) - Q_{k_2}(\mathbf{x})\nabla Q_{k_1}(\mathbf{x})\right]_\perp dS
\end{aligned}
$$

最后一步利用了高斯定理（散度的体积分等于边界面上的法向分量的面积分）。

证明(续)

我们得到

$$\int_{\Omega} Q_{k_1} Q_{k_2} d^n\mathbf{x} = \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} \int_{\partial\Omega} \left[Q_{k_1}\nabla Q_{k_2} - Q_{k_2}\nabla Q_{k_1}\right]_{\perp} dS$$

现在分两种情况讨论:

1. 如果Q_{k_1}和Q_{k_2}满足的都是边界上$Q=0$的零边界条件，则贡献显然为零。
2. 如果Q_{k_1}和Q_{k_2}满足的是$\lambda Q + (\nabla Q)_{\perp} = 0$，则根据

$$Q_{k_1}\nabla Q_{k_2} - Q_{k_2}\nabla Q_{k_1} = Q_{k_1}(\lambda Q_{k_2} + \nabla Q_{k_2}) - Q_{k_2}(\lambda Q_{k_1} + \nabla Q_{k_1})$$

贡献还是零。

求归一化因子的办法

$k_1 = k_2$的情况下求归一化因子的方法:
取Q_{k_1}严格满足一般零边界条件，取$k_2 = k_1 + \epsilon$并令$\epsilon \to 0$取极限得到。

例题1

设m为非负整数，λ为实数。满足$\lambda J_m(x) + xJ'_m(x) = 0$的所有正实数解为$\mu_1, \mu_2, \ldots$，试推导函数序列$J_m(\mu_i x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$的正交定理。

解答

取单位圆为研究区域并建立极坐标。则$J_m(\mu_i r)\cos(m\theta)$为区域内的本征值为$-\mu_i^2$的谐函数，且满足一般零边界条件$\lambda J_m(\mu_i r) + \frac{d}{dr}J_m(\mu_i r)\Big|_{r=1} = 0$。根据一般正交定理，$J_m(\mu_i r)\cos(m\theta)$ $(i = 1, 2, \ldots)$在单位圆内构成一组正交函数:

$$\int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\theta\, J_m(\mu_i r)\cos(m\theta) J_m(\mu_j r)\cos(m\theta) \propto \delta_{ij}.$$

因为θ的积分可以独立积掉，所以正交性可以写成:

$$\int_0^1 J_m(\mu_i r) J_m(\mu_j r)\, rdr = \delta_{ij} C_i.$$

难点在于求归一化因子C_i。

归一化因子

由单位圆区域内的高斯定理导出

$$\int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\theta\, J_m(\mu_i r) J_m(kr) \cos^2(m\theta)$$
$$= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} \int_0^{2\pi} d\theta\, [J_m(\mu_i) k J_m'(k) - J_m(k) \mu_i J_m'(\mu_i)] \cos^2(m\theta).$$

把θ的积分约去后即:

$$\int_0^1 rdr\, J_m(\mu_i r) J_m(kr)$$
$$= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} [J_m(\mu_i) k J_m'(k) - J_m(k) \mu_i J_m'(\mu_i)]$$
$$= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} \{J_m(\mu_i) [\lambda J_m(k) + k J_m'(k)] - J_m(k) [\lambda J_m(\mu_i) + \mu_i J_m'(\mu_i)]\}$$
$$= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} J_m(\mu_i) [\lambda J_m(k) + k J_m'(k)]$$

归一化因子

让$k=\mu_i+\epsilon$，并取$\epsilon\to 0$的极限：

$$\int_0^1 [J_m(\mu_i r)]^2\, r dr = -\frac{1}{2\mu_i} J_m(\mu_i)\left[(1+\lambda)J_m'(\mu_i)+\mu_i J_m''(\mu_i)\right]$$

再利用$J_m'(\mu_i)=-\frac{\lambda}{\mu_i}J_m(\mu_i)$，以及

$$J_m''(\mu_i)+\frac{1}{\mu_i}J_m'(\mu_i)+(1-\frac{m^2}{\mu_i^2})J_m(\mu_i)=0$$

可以把上述结果综合写为：

$$\int_0^1 J_m(\mu_i r)J_m(\mu_j r) r dr = \delta_{ij}\frac{\left(1+\frac{\lambda^2-m^2}{\mu_i^2}\right)[J_m(\mu_i)]^2}{2}.$$

思考题

你能从例题的结论导出之前学习过的两个J_m的正交定理吗?

从此正交性，归一化这些都成为了枯燥的推土工作。

我就喜欢推土！

任意阶第一类贝塞尔函数

非整数阶$J_{-\nu}$和J_{ν}线性独立，整数阶满足$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$

任意阶贝塞尔函数

直接把m推广到任意实数ν，

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

定义对所有$x > 0$有效。当$\nu \geq 0$，还可以取$x \to 0$的极限。

- 当ν不是整数时，$(k+\nu)!$要理解为$\Gamma(k+\nu+1)$。
- $\frac{1}{\Gamma(z)}$的零点为$0, -1, -2, \ldots$，或者说负整数的阶乘是无穷大。所以上面的级数也可以写成k从$-\infty$到∞求和
- 如果你乐意，还可以把定义解析延拓到$-\pi < \arg x < \pi$。

贝塞尔函数的性质

递推公式对所有ν成立：

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x);\ \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x);$$

$$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_{\nu}'(x);\ J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x).$$

渐近公式对所有ν都成立：$x\gg\nu^2$时

$$J_{\nu}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

另外，三个正交定理对$\nu\geq 0$都成立。

整数阶$J_{-m}(x)$和$J_m(x)$的线性关系

设$m \geq 0$为整数，利用负整数的阶乘为∞，有

$$
\begin{aligned}
J_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+m)-m} \\
&= (-1)^m J_m(x)
\end{aligned}
$$

非整数阶J_ν和$J_{-\nu}$线性独立

当$x \to \infty$时

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

两者的相位差$\nu\pi$，ν不是整数时，无法通过线性叠加完全消失。

这个结论也能从$x \to 0^+$时的渐近行为得到，请自行研究。

第二类贝塞尔函数

和第一类贝塞尔函数渐近正交，大多数性质相同，除了在$x \to 0^+$时发散

贝塞尔方程的线性独立解

设$\nu > 0$为非整数，贝塞尔方程

$$f'' + \frac{1}{x}f' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0$$

有两个线性独立的解：$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$。

这无法推广到ν为整数的情形。我们来思考其背后的原因。

J_ν和$J_{-\nu}$之间的“独立性”随着ν逼近整数而趋向于消失

如果考虑一下J_ν和$J_{-\nu}$的渐近展开：

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

当ν趋向于一个整数，两者的“独立性”趋向于消失。

因为J_ν和$J_{-\nu}$之间的独立性依赖于ν，取它们作为两个独立解并不合适。最合理的方法是取J_ν和另一个渐近行为为

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

的解。这样两个解就类似于余弦和正弦一样“正交”了。

第二类贝塞尔函数

利用

$$\cos\left(x+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\nu\pi)-\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin(\nu\pi)$$

只要定义

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

则$Y_\nu(x)$满足我们期待的渐近公式:

$$\boxed{Y_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad x\gg\nu^2}$$

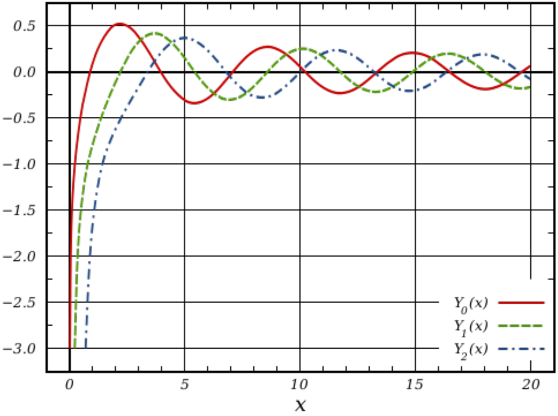
整数阶 $Y_m(x)$

为了对整数阶也适用，我们把定义修改为极限

$$\boxed{Y_\nu(x) := \lim_{\alpha\to\nu} \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}}$$

因为 Y_ν 和 J_ν 渐近正交，不可能线性相关。所以 对任意 ν，J_ν 和 Y_ν 都是贝塞尔方程的两个线性独立解。

Y_0, Y_1, Y_2



Y_ν的定性图像

对$\nu \geq 0$， Y_ν和J_ν都是振幅以$\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$方式衰减，周期近似为2π的振荡函数。区别是$x \to 0^+$时的行为。

如果$\nu > 0$，当$x \to 0^+$时

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad Y_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

如果$\nu = 0$，当$x \to 0^+$时

$$J_0(x) \approx 1, \quad Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln x$$

证明非常简单，留为作业

因为$Y_\nu(kr)$在$r \to 0$时发散，当且仅当考虑的区域为去心的环形区域时才需要考虑谐函数：$Y_m(kr)e^{\pm im\theta}$.

Y_ν的递推关系

Y_ν和J_ν一样满足递推关系：

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x);\ \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} Y_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

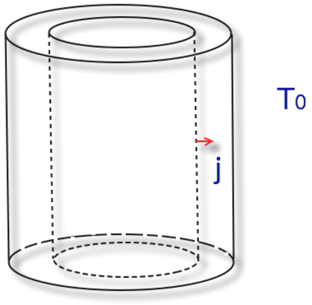
$$Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) = 2Y_\nu'(x);\ Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x).$$

证明非常简单，留为作业🤔

环形区域上的数理方程

当圆心被挖掉时，$Y_m(kr)e^{\pm im\theta}$ 也是合法解

例题2



如图，一根外半径为R_1，内半径为R_2的无限长的均匀材质空心圆柱。外表面和温度为T_0的热库接触，保持温度为T_0。在$t = 0$时刻空心圆柱处于热平衡，温度为T_0。在$t > 0$时，从内表面处处都注入热流j。已知材质的导热系数为λ，质量密度为ρ，单位质量比热为c。计算该空心圆柱各处的温度。

例题2解答思路

当达到温度梯度不再变化的稳恒状态时，因为外表面温度已经固定，所有位置的温度将保持恒定。那么流入的热流将不再积累，直接穿过空心圆柱流出外表面。这时，距离中心轴为r处的热流为

$$\frac{j(2\pi R_2)}{2\pi r},$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{jR_2}{\lambda r}.$$

解出稳恒解：

$$T|_{t\to\infty} = T_0 - \frac{jR_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}.$$

例题2解答思路（续）

设严格解为

$$T = T_0 - \frac{jR_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1} + u(r,t).$$

则u满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\\
u\big|_{r=R_1} &= 0,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2} &= 0,\\
u\big|_{t=0} &= \frac{jR_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}.
\end{aligned}$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

例题2解答思路（续）

把解按满足边界条件的谐函数展开：

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left[Y_0(k_iR_1)J_0(k_ir)-J_0(k_iR_1)Y_0(k_ir)\right]e^{-ak_i^2t}.$$

其中k_i是满足

$$Y_0(k_iR_1)J_0`(k_iR_2)-J_0(k_iR_1)Y_0'(k_iR_2)=0$$

的第i个解。

剩下的用正交关系求系数的推土工作留为作业。

课后作业(题号41-43)

41 对$0<\nu<1$，当$x\to 0^+$时，取J_ν和$J_{-\nu}$的级数展开的最低次近似，证明：

$$Y_\nu(x)\approx -\frac{\Gamma(-\nu)\cos\nu\pi}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

在上式中对x求导，然后令$\nu\to 0$求极限，再对x积分，导出

$$Y_0(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln x+c,$$

其中c为常数，当$x\to 0^+$时可以忽略它的贡献。

提示：要用到Γ函数的递推关系和互余宗量关系
$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$（推导见第5讲）。

课后作业(题号41-43)

42 在上一题中，我们无耻地交换了求极限和求导/积分的次序。请保持这种无耻，用Y_ν的极限定义证明它的两个递推关系：

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu Y_\nu(x)\right] = x^\nu Y_{\nu-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} Y_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x).$$

课后作业(题号41-43)

43 把例题2的推土部分推完，写出系数c_i的积分表达式，并使出洪荒之力进行化简。