Methods of Mathematical Physics

§10 Problem Set II

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容: 复变函数知识回顾

- 复数的几何意义
- 柯西-黎曼条件
- 一元n次多项式的根和系数的关系
- 柯西积分公式用于估算
- 无穷远点是个伪概念

Problem 2.1 ($\star$)

区域$|z-3|+|z+3|\leq 10$的面积是多大?

Problem 2.1 解答

我们在小学曾学过：到两点之间距离之和为常数的点的集合为椭圆。所以$|z-3|+|z+3|=10$描述的是半焦距$c=3$，半长轴$a=5$的椭圆。$|z-3|+|z+3|\leq 10$对应的是该椭圆包围的区域，面积为

$$S=\pi ab=\pi a\sqrt{a^2-c^2}=20\pi.$$

Problem 2.2 ($\star\star$)

设z为任意一个复数，则$f(z) = |z-1|^6 + (|z|+1)^6$的最小可能的值是多少?

Problem 2.2 解答

$f(0)=2$是最小值，证明如下：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= |1-6z+\ldots+z^6|+(|z|+1)^6 \\
&\geq 1-6|z|-\ldots-|z|^6+1+6|z|+\ldots+|z|^6 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Problem 2.3 ($\star\star$)

z_1, z_2, z_3, z_4是两两不同的四个复数，且$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)}$为实数。试证明：$z_1, z_2, z_3, z_4$在复平面上对应的四个点共线或共圆。

Problem 2.3 解答

$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}$的幅角和$\frac{z_3-z_4}{z_1-z_4}$的幅角（在允许相差2π整数倍的意义下）或相等或互补，所以z_1, z_2, z_3, z_4共圆或共线。

Problem 2.4 ($\star\star\star$)

设解析函数$f(z)$可以拆分成实虚部u和v，即

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad x, y, u, v \in \Re$$

- 证明柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- 证明u和v都是调和函数

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0,$$

其中算符$\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$。

Problem 2.4 ($\star\star\star$)

证明，设$f'(z) = a + ib$，则

$$df = du + idv = (a + ib)(dx + idy).$$

分离实虚部得到两个全微分表达式：

$$du = adx - bdy; \quad dv = bdx + ady.$$

显然

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -b = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

再根据两个全微分条件:

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x}.$$

即可得到u,v为调和函数的结论。

Problem 2.5 ($\star\star\star$)

证明：一元n次复系数多项式 ($n \in Z^+$)

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0$$

一定可以分解为一次多项式的乘积：

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Problem 2.5 解答

证明：用归纳法。命题对$n = 1$显然。对$n > 1$，假设命题对$n - 1$成立。
在作业题中我们已经用最大模原理证明了$P(z)$至少有一个复数根，不妨设为z_1，用$z - z_1$去除$P(z)$，一定可以得到如下结果：

$$P(z) = (z - z_1)Q(z) + c$$

其中 $Q(z)$为$n - 1$次多项式，c为常数。两边令$z = z_1$并利用z_1是$P(z)$的根这一事实，就得到$c = 0$。也就是说

$$P(z) = (z - z_1)Q(z).$$

再利用归纳假设，$Q(z)$可以分解为一次多项式的乘积。证毕。

初中知识回顾：多项式的根和系数关系

设多项式$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0$的所有根为 $z_1, z_2, \ldots, z_n$，则

$$(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0$$

比较两边的同次项系数，可以得到

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + \ldots + z_n &= -c_{n-1} \\
\sum_{1\le i<j\le n} z_i z_j &= c_{n-2} \\
\sum_{1\le i<j<k\le n} z_i z_j z_k &= -c_{n-3} \\
&\ldots \\
z_1 z_2 \ldots z_n \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right) &= (-1)^{n-1} c_1 \\
z_1 z_2 \ldots z_n &= (-1)^n c_0
\end{aligned}$$

Problem 2.6 ($\star$)

方程$z^5 + z^4 + 5z^3 + 1 = 0$的所有复数根的平方和等于多少?

Problem 2.6 解答

设五个根为$z_1, z_2, \ldots, z_5$，根据根和系数的关系

$$\sum_{i=1}^{5} z_i = -1, \quad (1)$$

$$\sum_{1\le i<j\le 5} z_i z_j = 5. \quad (2)$$

(1) $-2\times$ (2) 得到

$$\sum_i z_i^2 = -9.$$

Problem 2.7 ($\star\star\star$)

证明对任意正整数n,

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

Problem 2.7 解答

考虑$\frac{1-(1-z)^n}{z} = 0$的$n-1$个根$z_k = 1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k = 1, \dots, n-1)$，
利用$|z_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$，以及根与系数关系

$$|z_1 z_2 \dots z_{n-1}| = n\,.$$

立刻可以得到结论。

Problem 2.8 ($\star\star$)

设$f(z)$在单位圆$|z| \leq 1$内部解析，边界上连续；而且已知当$|z| = 1$时，$|f(z) - z| \leq 1$。试证明：

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2^{n+2}.$$

Problem 2.8 解答

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}dz\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)-z|+|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^{n+1}}|dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}|dz| \\
&= 2^{n+2}
\end{aligned}$$

无穷远点是个伪概念

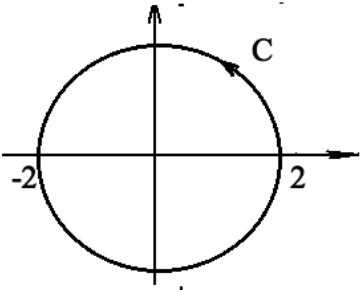
在很多复变函数的教材中有无穷远点和无穷远点处的留数的概念。

我们并不想这样自寻烦恼：有两种很简单的方法可以解决问题：

(1) 画一个半径$\to \infty$的大圆，考虑大圆和已有围道之间的区域。

(2) 换元$u = \frac{1}{z}$。

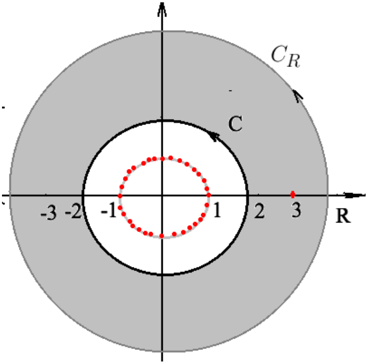
Problem 2.9 (⋆⋆)



在如图的围道上计算积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{60}}{(z-3)\left(z^{32}-1\right)^2}\,dz\,.$$

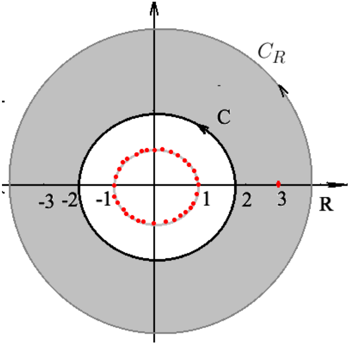
Problem 2.9 解法一



令区域$T: 3 < |z| < R$。所考虑的函数在T内只有一个孤立奇点：$z = 3$。根据留数定理：

$$\left(\oint_{C_R} - \oint_{C} \right) f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(3)$$

Problem 2.9 解法一(续)



容易看出当$R \to \infty$时，在C_R上有$|f(z)| \sim \frac{1}{R^5}$，沿$C_R$积分后最多$\sim \frac{1}{R^4} \to 0$。因此得到

$$\oint_C f(z)dz = -2\pi i \operatorname{res} f(3) = -2\pi i \frac{3^{60}}{(3^{32}-1)^2}$$

Problem 2.9 解法二

令$u = \frac{1}{z}$，则

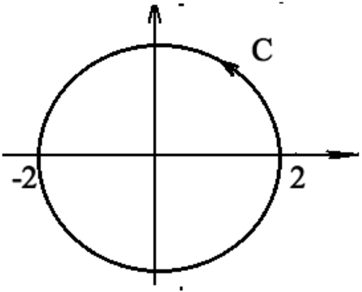
$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{60}}{(z-3)\left(z^{32}-1\right)^2} dz = \int_{|u|=\frac{1}{2}} \frac{u^3}{(1-3u)\left(1-u^{32}\right)^2} du$$

注意映射$u = 1/z$使逆时针方向的围道变为顺时针方向，换回到（默认的）逆时针方向后又多了个负号。

在围道内仅有$u = 1/3$一个孤立奇点，容易用留数定理算出

$$\int_{|u|=\frac{1}{2}} \frac{u^3}{(1-3u)\left(1-u^{32}\right)^2} du = -\frac{2\pi i}{3} \frac{1}{3^3\left(1-\frac{1}{3^{32}}\right)^2} = -2\pi i \frac{3^{60}}{\left(3^{32}-1\right)^2}$$

Problem 2.10 ($\star\star$)



在如图的围道上计算积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z} dz.$$

Problem 2.10 解法一

$f(z)=\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$在围道内部有两个孤立奇点：$z=0$和$z=-1$。

$$\mathrm{res}\, f\,(-1)\;=-e^{-1}$$

在$z=0$邻域则可以直接进行Laurent展开：

$$f(z)=(z^3-z^4+z^5-\dots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\dots\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\, f\,(0) &= \frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\dots\\ &= e^{-1}-\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)\\ &= e^{-1}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

所以所求积分为

$$2\pi i\left(e^{-1}-\frac{1}{3}-e^{-1}\right)=-\frac{2\pi i}{3}.$$

Problem 2.10 解法二

令$u=\frac{1}{z}$，则所求积分为

$$\oint_{|u|=\frac{1}{2}}\frac{e^u}{u^4(u+1)}du,$$

在围道内仅有一孤立奇点$u=0$，故所求积分为

$$\begin{aligned}
& 2\pi i\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{du^3}\frac{e^u}{1+u}\right)\bigg|_{u=0} \\
= \quad & \frac{\pi i}{3}\frac{e^u}{1+u}\left(1-\frac{3}{1+u}+\frac{6}{(1+u)^2}-\frac{6}{(1+u)^3}\right)_{u=0} \\
= \quad & -\frac{2\pi i}{3}.
\end{aligned}$$