Methods of Mathematical Physics

§20 Harmonics in Spherical Coordinates

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 球谐函数的推导回顾
- 球坐标系的谐函数

球谐函数的推导回顾

上一讲好像有一个严重bug......

回顾

回顾：我们上一讲把单位球面上的谐函数分解为$\Psi(\theta)\Lambda(\phi)$，并按照分离变量法的套路很快得出$\Lambda(\phi)=e^{im\phi}$，$m\in Z$。剩下$\Psi(\theta)$的方程由微分方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\Psi'\sin\theta\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Psi=0.$$

或者等价的

$$\Psi''+\cot\theta\,\Psi'+\left(k^2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Psi=0.$$

确定。

求解$\Psi(\theta)$是一个非常典型的数学方法（虽然从物理实用角度讲并不十分重要），很多特殊函数都能用类似的方法确定。

令人困惑的分解

由$[0,\pi]$上$\cos(n\theta), \sin(n\theta)$的完备性可以把$\Psi$分解为这些三角函数的线性组合。

但是在上一讲的操作：**仅仅凭边界条件$\Psi' = 0$就排除$\sin(n\theta)$类的项是有bug的**。

（在分离变量法确定谐函数的k时我们曾不止一次这样做，思考和现在的情况有什么区别。）

最安全的做法

令

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos^n\theta + \sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos^n\theta.$$

(思考：这样为什么就安全了？）在后面的推导中，我不再详细地追踪n的下界。(只需要默认$c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$, $d_{-1} = d_{-2} = \ldots = 0$就不会有任何理解困难）。

开始推土

$$\begin{aligned}
\Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos^n\theta + \sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos^n\theta; \\
\Psi' &= \sum_n (-nc_n)\cos^{n-1}\theta\,\sin\theta + \sum_n d_n \cos^{n+1}\theta - \sum_n nd_n \cos^{n-1}\theta \sin^2\theta \\
&= -\sum_n (n+1)c_{n+1}\cos^n\theta\,\sin\theta + \sum_n d_{n-1}\cos^n\theta - \sum_n nd_n\left(\cos^{n-1}\theta - \cos^{n+1}\theta\right) \\
&= -\sum_n (n+1)c_{n+1}\cos^n\theta\,\sin\theta + \sum_n \left[nd_{n-1} - (n+1)d_{n+1}\right]\cos^n\theta; \\
\Psi'' &= \sum_n \Big\{ n(n+1)c_{n+1}\cos^{n-1}\theta\sin^2\theta - (n+1)c_{n+1}\cos^{n+1}\theta \\
&\quad -n\sin\theta\left[nd_{n-1} - (n+1)d_{n+1}\right]\cos^{n-1}\theta \Big\} \\
&= \sum_n \left\{ (n+1)(n+2)c_{n+2} - n^2 c_n + \sin\theta\left[(n+1)(n+2)d_{n+2} - (n+1)^2 d_n\right]\right\}\cos^n\theta
\end{aligned}$$

继续推土

$$\Psi' \cos\theta = -\sum_n n c_n \sin\theta \cos^n\theta + \sum_n \left[(n-1)d_{n-2} - n d_n\right] \cos^n\theta$$

如果$m = 0$，则由

$$\Psi' \cos\theta + \sin\theta(\Psi'' + k^2\Psi) = 0.$$

可以得到上式左边$\sin\theta \cos^n\theta$项的系数：

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \left[k^2 - n(n+1)\right] c_n = 0$$

这和我们之前得到的递推式是一样的，用同样的方式可以证明$k^2 = \ell(\ell+1), \ell = 0, 1, 2 \ldots$

思考题

我们只验证了$\sin\theta\cos^n\theta$的系数为零，还需要考虑$\cos^n\theta$的系数，这会给出什么结果？

球坐标下的谐函数

解球坐标系数理方程的必备工具

球坐标系的谐函数

把自由度r重新纳入之后，令谐函数为$Q = f(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$，则由$\nabla^2 Q = -k^2 Q$得到：

$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)f = 0$$

这个方程看着“几乎”就是贝塞尔方程，只是f'前面的系数变成了$\frac{2}{r}$。怎么去求解呢?

思考题1

方程

$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) f = 0,$$

当$k = 0$时，你能在$r > 0$范围内猜出两个线性独立的解吗?

思考题2

证明：类贝塞尔方程

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x}y' + \left[\beta^2\gamma^2x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2)}{x^2}\right]y = 0$$

在$x>0$范围内有两个线性无关解：$x^\alpha J_\nu(\beta x^\gamma)$和$x^\alpha Y_\nu(\beta x^\gamma)$.

思考题3

根据上题结论，在$k > 0$时求解方程

$$f'' + \frac{2}{r} f' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f = 0.$$

球贝塞尔函数

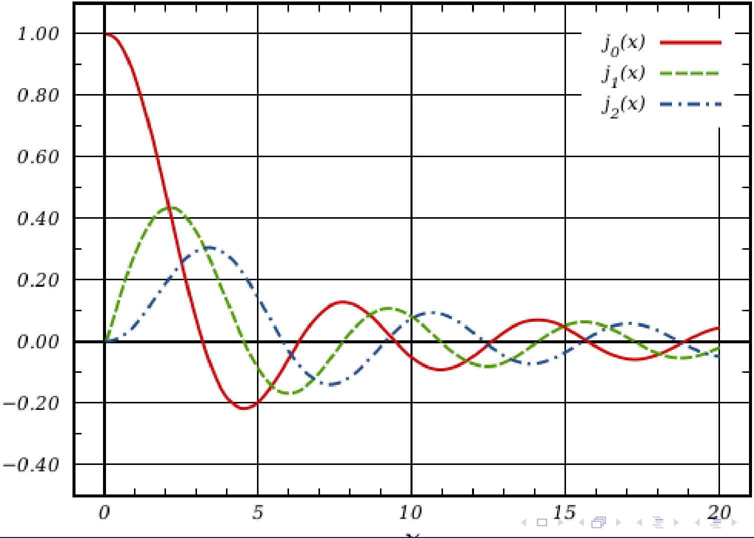
$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) f = 0.$$

两个线性无关解$f = (kr)^{-1/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$和$f = (kr)^{-1/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$可以重新写为$j_\ell(kr)$和$y_\ell(kr)$。 其中第一类球贝塞尔函数$j_\ell$和第二类球贝塞尔函数$y_\ell$分别定义为:

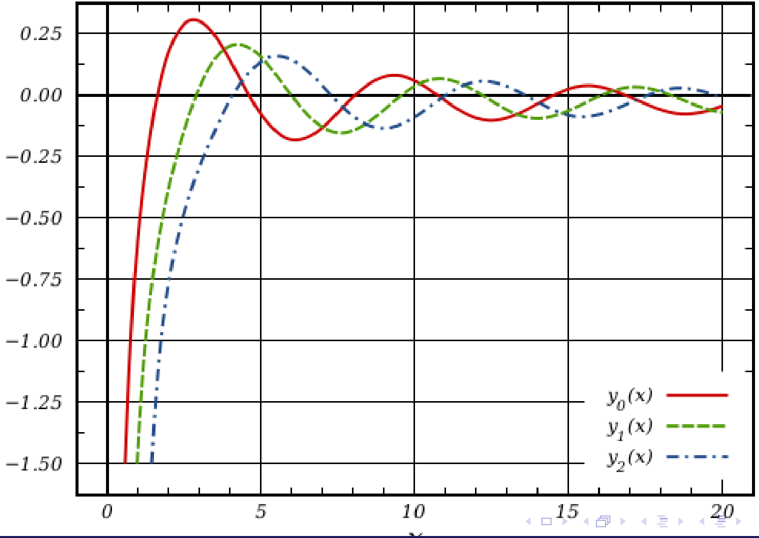
$$j_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x),$$

$$y_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\ell+1/2}(x).$$

前几个j_ℓ



前几个y_ℓ



思考题

证明:

$$y_\ell(x) = (-1)^{\ell+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-\ell-1/2}(x).$$

球坐标系谐函数的总结

综合前面的思考题结果，容易总结出：

- 对$k>0$，球坐标系的包含球心的谐函数为$j_\ell(kr)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$;不包含球心的谐函数则多了另一个线性独立解$y_\ell(kr)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$.
- 对$k=0$，球坐标系包含球心的谐函数为$r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\phi)$；不包含球心的谐函数则多了另一个线性独立解$r^{-\ell-1}Y_{\ell m}(\theta,\phi)$.

(思考：在$k>0$情况的解里令$k\to 0^+$，是否得到和$k=0$情况一样的结果。

课后作业(题号46-48)

46 求微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(4x^2 - \frac{15}{x^2}\right)y = 0$$

在$x > 0$范围内的两个线性无关解。

47 证明球贝塞尔函数j_n和y_n满足

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x};$$

$$y_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x};$$

48 利用之前学过的贝塞尔函数的正交定理证明球贝塞尔函数的正交定理：设$k_1, k_2 > 0$，则

$$\int_0^\infty j_\ell(k_1 r) j_\ell(k_2 r) r^2 dr = \frac{\pi}{2k_1^2}\delta(k_1 - k_2).$$