Methods of Mathematical Physics

§13 Wave Equation

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

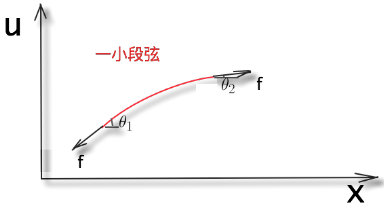
- 波动方程的例子:
  - 弦的横振动
  - 杆的纵振动
  - 电磁波和引力波
- 齐次边界条件下的解法
- 非齐次边界条件

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0$$

弦的横振动方程

完全均匀沿水平方向绷直的的弦，线密度为λ，张力为f。弦的各部分沿垂直方向稍稍偏离平衡位置，偏离量u是水平位置x的函数。

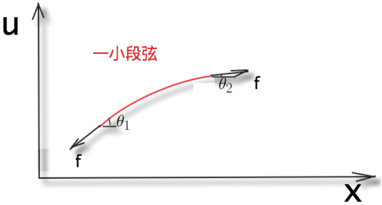


如图考虑弦的一小段，弦的纵向（沿x向）净受力为

$$f\cos\theta_2 - f\cos\theta_1 \approx \frac{1}{2}\left(\theta_1^2 - \theta_2^2\right) f$$

这是θ_1和θ_2的高阶小量，我们将它忽略掉（即认为横向是受力平衡的）。

弦的横振动方程



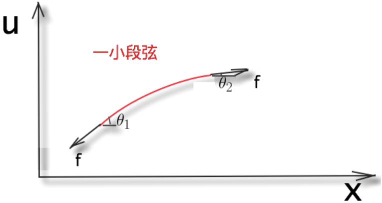
弦的横向净受力为

$$f \sin\theta_2 - f \sin\theta_1 \approx (\theta_2 - \theta_1) f$$

θ_2和θ_1可以近似用弦的斜率来代替，设这一小段的坐标从x到$x + dx$

$$\theta_2 - \theta_1 \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

弦的横振动方程



根据$F=ma$，得到弦的这一段沿垂直方向的加速度

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{f\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx}{\rho dx}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中ρ为质量线密度， a定义为$\sqrt{\frac{f}{\rho}}$，具有速度的量纲。

弦的横振动方程

最后，得到弦的横振动方程为波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

波动方程和热传导方程不同：

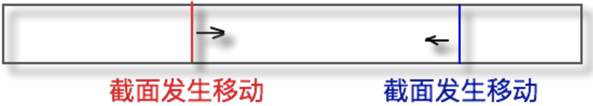
- 热传导方程分离变量之后得到的时间因子方程是$\Psi'/\Psi =$常数，解的变化规律是指数式衰减（指数式增长模式因一般不符合物理图像而被无情地抛弃）；
- 波动方程分离变量后得到的时间因子方程是$\Psi''/\Psi =$常数，解的变化规律是无衰减的波动(正弦和余弦）。

思考题

弦一振动不是就被拉长了吗？为什么在前面的推导过程中把张力f当成常量？

杆的纵振动方程

设一根均匀弹性杆，一开始处于静止并受力平衡，各个切面的位置可以用x来标记。
然后考虑沿杆的方向发生压缩-拉伸的变化： 每个初始坐标为x的切面沿着杆的方向有小小的偏离平衡位置的位移$u(x)$。



在线性近似下，应力P（横截面上单位面积受力）和$\frac{\partial u}{\partial x}$成正比(可以对一小段杆运用胡克定律导出这个结论)：

$$P = E\frac{\partial u}{\partial x},$$

其中E称为杨氏模量 （Young's modulus).

杆的纵振动方程

按照套路，对x和$x+dx$之间的一小段杆运用强大的$F=ma$，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{(P(x+dx)-P(x))S}{\rho S dx}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 S为截面积，ρ为质量密度。

令$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$，则又得到了波动方程。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

电磁波和引力波

上述两个例子里空间是一维的，一般的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$$

我们马上会看到，a的物理意义为波速。

电磁波和引力波都满足上述方程(a为光速)。
电磁波的情况，u是垂直电磁波的传播方向的电场强度或磁场强度；
引力波的情况，u是度规二阶张量的分量(此处有黑人问号.jpg)。

齐次边界条件下的解法

按套路来就行

分离变量法

仍然回到一维空间的情况:
令 $u = \Phi(x)\Psi(t)$，代入波动方程，得到

$$a^2\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\Psi''}{\Psi},$$

等式两边分别是x和t的函数，所以只能是常数。由此得到两个解

$$e^{ik(x\mp at)},$$

其中k是任意的常数。
如果我们追踪相位为零的点，则得到$x = \pm at$；即 $e^{ik(x-at)}$描述的是沿x轴正向传播的波，$e^{ik(x+at)}$ 描述的是沿x轴负向传播的波。

分离变量法

虽然

$$e^{ik(x\mp at)},$$

具有很容易看出波速的优点，但这并不是唯一的写法。

当我们需要实数解时，可以把解写成：

$$\cos(kx)\cos(akt),\ \sin(kx)\cos(akt),\ \cos(kx)\sin(akt),\ \sin(kx)\sin(akt)$$

的线性组合。

无界的情形

在空间无边界的情况下，可以按照套路写出：

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int c(k)e^{ik(x-at)}dk+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d(k)e^{ik(x+at)}dk$$

设$c(k)$和$d(k)$的傅立叶逆变换为$C(x)$和$D(x)$。上式只是把傅立叶逆变换中的x换成了$x\mp at$，结果应为：

$$u(x,t)=C(x-at)+D(x+at).$$

这就是无边界波动问题的最一般解。C和D的形式可以通过初始条件来确定。

$u(x,t)$显然除了依赖于初始的位移u，还依赖于初始的速度$\frac{\partial u}{\partial t}$，因此需要两个初始条件，相应可以确定两个未知函数$C$和$D$。

例题

求解满足下列初始条件的无边界波动方程:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

其中A, σ均为已知常量。

解答

令 $u(x,t) = C(x-at) + D(x+at)$，则根据初始条件，有

$$C(x) + D(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

以及

$$C'(x) = D'(x)$$

由此易解出

$$u(x,t) = \frac{A}{2}\left(e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+at)^2}{2\sigma^2}}\right).$$

思考题

把初始条件换成一般的

$$
\begin{aligned}
u\big|_{t=0} &= \phi(x), \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi(x).
\end{aligned}
$$

其中$\phi(x)$和$\psi(x)$为给定的函数，你还能求解吗?

思考题

波动方程也是线性方程，可以用积分变换和格林函数的方法来求解无边界问题吗?

有边界的情况

设弦的两端固定于$x=0$和$x=L$处，则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= \phi(x), \\
\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \psi(x).
\end{aligned}$$

其中ϕ和ψ均为给定的函数。

套路

（空间）边界条件已经是齐次的了，可以直接看出解为$\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos\frac{n\pi a}{L}t$和$\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin\frac{n\pi a}{L}t$的线性组合。不妨设：

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\left(c_n\cos\frac{n\pi a}{L}t+s_n\sin\frac{n\pi a}{L}t\right).$$

利用第一个初始条件：

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)=\phi(x)$$

可以确定c_n。 再利用第二个初始条件：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi a}{L}s_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)=\psi(x)$$

可以确定 s_n。

非齐次边界条件

凑/蒙特解：能否成功看人品...

非齐次边界条件

考虑固定在$x=0$和$x=L$之间的弦的横振动问题。设一开始$t=0$时刻弦处于平衡位置静止，在$t>0$时强迫弦的$x=L$端以振幅A，频率ω振动。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\\
u\Big|_{x=0} &= 0,\\
u\Big|_{x=L} &= A\sin(\omega t),\\
u\Big|_{t=0} &= 0,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

求（蒙）特解化为齐次边界条件问题

考虑如下的满足边界条件但不满足初始条件的特解：

$$u_0(x,t) = A\sin(\omega t)\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega L}{a}}$$

令$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$，则$v(x,t)$满足：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\
v\big|_{x=0} &= 0, \\
v\big|_{x=L} &= 0, \\
v\big|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} &= -A\omega\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega L}{a}}
\end{aligned}$$

求解$v(x,t)$的问题我们前面已经讨论过。

课后作业 (题号 27-29)

27 求解无边界的定解问题:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\\ u\Big|_{t=0} &= Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= Bxe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.\end{aligned}$$

其中a, A, B, σ均为已知常量。

课后作业 (题号 27-29)

28 求解$0 \le x \le L$上的定解问题:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= \phi(x), \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi(x)
\end{aligned}$$

其中 a为常量， ϕ和ψ为已知函数。

课后作业 (题号 27-29)

29 我们在课上讨论了$0 \le x \le L$上的定解问题：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= A\sin(\omega t), \\
u\big|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0
\end{aligned}
$$

其中a, A, ω均为已知常量。把求解过程补充完整，求出最终的解，并讨论：当$\frac{\omega L}{\pi a}$为整数时，是否有可能维持这种振动？