Methods of Mathematical Physics

§11 Heat Equation (I)

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 热传导方程的直观理解
- 分离变量法求解热传导方程

热传导方程的直观理解

散度是单位体积流出率

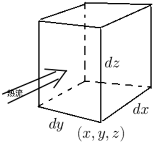
流密度

流密度$\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$: 单位时间单位面积流过的某种物理量。

热流密度 （或简称热流）

散度等于单位体积流出率

考虑以(x, y, z)和$(x + dx, y + dy, z + dz)$连线为对角线的小长方体。



如果只有x方向有热流，则如图示，在坐标为x的横截面上，单位时间进入的热量为

$$j_x(x, y, z)dydz$$

而在对面坐标为$x + dx$的横截面上，单位时间流出的热量为

$$j_x(x + dx, y, z)dydz$$

因此，单位时间内小长方体内积累的热量为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = (-j_x(x + dx, y, z) + j_x(y, z))dydz \approx -\frac{\partial j_x}{\partial x}dxdydz$$

散度等于单位体积流出率 （续）

考虑三个方向都有这种不平衡的热流，就有

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) dxdydz = -\nabla \cdot \mathbf{j}\, dxdydz$$

把热量写成热量密度乘以体积，$Q = \rho dxdydz$ ，上式可以写成

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0}$$

这就是守恒流方程。

也就是说：**对守恒量X，X流的散度可以看成X的单位体积流出率。** 这里的X可以是电荷，热量，质量等。

据说你们理论力学学过守恒流

热传导方程的直观理解

根据导热系数的定义

$$j = -\lambda \nabla T$$

两边取散度得到

$$\nabla \cdot j = -\lambda \nabla^2 T$$

根据散度等于流出率

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial (c\rho T)}{\partial t}$$

（注意我们直接把热量密度写成了$c\rho T$)
结合上面两个式子得到

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\nabla^2 T = 0,$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。这就是我们之前在一维情况下推导过的热传导方程。

分离变量法求解热传导方程

$$f(x,t)=\sum_{i,j}\phi_i(x)\psi_j(t)$$

猜一猜

先不管边界条件，对热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

你能猜出一个非常数解吗?

分离变量法的大致想法

寻找形如$\phi(x)\psi(t)$的解。

把解拆分成一堆$\phi(x)\psi(t)$的和。

寻找形如$\phi(x)\psi(t)$的解

对热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

设某个解为$\phi(x)\psi(t)$，代入上式，得到

$$\frac{\psi'}{\psi} = a\frac{\phi''}{\phi}$$

因为等式左边只是t的函数，右边只是x的函数，两者要恒等就必须是常数。记这个常数为λ，则有

$$\psi = e^{\lambda t},\ \phi = e^{\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x}.$$

也就是我们找到了一种满足热传导方程的解

$$e^{\lambda t+\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x}$$

寻找形如$\phi(x)\psi(t)$的解

$$e^{\lambda t+\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x}$$

根据λ的正负，有

- 指数增长模式：

$$e^{ak^2t}e^{kx}$$

- 指数衰减模式：

$$e^{-ak^2t}e^{ikx}.$$

如果需要实数解，可以把衰减模式对应k和$-k$的解进行线性组合，写成$e^{-ak^2t}\cos(kx)$和$e^{-ak^2t}\sin(kx)$。

物理分析

物理上我们知道温度会自发地趋向于均匀。

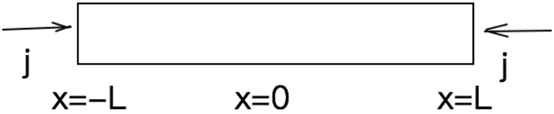
- 衰减模式$e^{-ak^2t}e^{ikx}$可以描述热自发地趋向于均匀这一过程，对大多数有限边界条件都适用。
- 增长模式$e^{ak^2t}e^{kx}$需要外界强加一个指数增长的热流输入，自然中很难有这样的边界条件，即使在实验室要得到一个指数增长的热流也非易事。

衰减模式的典型衰减时间

当$t \gg \frac{1}{ak^2}$时，显然衰减模式$e^{-ak^2t}e^{ikx}$会变得非常小（跟初始条件比）。

之前我们考虑过的不良导体棒的问题，因棒长有限，空间频率只可能取到$k \gtrsim \frac{1}{L}$。所以一开始对稳恒态的偏差（可以看作很多不同k的衰减模式的线性叠加）需要的时间$\frac{1}{ak^2} \lesssim \frac{L^2}{a}$进行衰减。

热求导方程求解举例



以我们讲过的如下边界条件为例：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
T|_{t=0} &= T_0
\end{aligned}
$$

不想蛮干

我们并不准备蛮干，先分析下解的渐近行为总不会吃亏。

题目所给的边界条件比较简单，所以猜测解有稳恒的渐近行为。按照第9讲的分析方法可以得到：当$t \gg L^2/a$时，

$$T \to \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)$$

不想蛮干

那么，令

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right) + \delta T(x,t),$$

这里的$\delta T(x,t)$描述了解对稳恒态的偏差如何衰减。把$T(x,t)$直接代入初始的方程和边界条件，易见δT也满足热传导方程，并满足如下的边界条件：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0 \\
\left.\delta T\right|_{t=0} &= -\frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)
\end{aligned}$$

$0+0=0$

通过上述操作，我们得到了每一项都是T或T的导数的一次幂的“齐次边界条件”。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0
\end{aligned}
$$

容易看出，所有形如$e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $(n=0,1,2,\ldots)$的衰减模式的**线性叠加**都符合要求。因此我们不妨假设

$$
\delta T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).
$$

还得回顾下高数知识

最后，利用$t = 0$时的初始条件，有

$$-\frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L}-\frac{L}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

这是个标准的正交级数展开问题。两边乘以$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ 并对x从 0 到 L进行积分，利用余弦函数的正交性得到：

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_n &= (-1)^{n+1}\frac{2jL}{\lambda n^2\pi^2} \end{aligned}$$

大功告成

最后，完整的解为：

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right) - \frac{2jL}{\lambda\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

这个解的第一个括号内是平均温度的变化，第二部分描述稳恒态的形状，第三部分描述初始时对稳恒态的偏离是如何衰减掉的。

现在我们可以清楚地看到，当$t \gg L^2/a$时，所有衰减项确实都被指数式压缩（终于放心了。）

总结

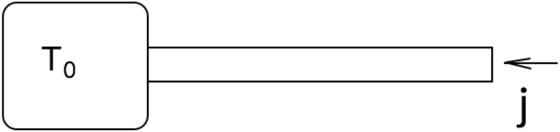
上述问题的求解过程包含了三步:

(1) 分离变量找到所有形如$\phi(x)\psi(t)$的解。

(2) 通过物理分析求出解的稳恒渐近行为。

(3) 令解 $=$ 稳恒渐近项 $+$ 衰减项。根据衰减项满足的齐次边界条件进行级数展开。

Practice I的那道送分题



长度为L的不良导体棒一端和温度为T_0的热库接触，并在$t=0$时刻和热库处于热平衡。从$t=0$时刻开始，在不良导体棒的另一端注入恒定大小为j的热流。设不良导体棒的导热系数λ，单位质量的比热c和质量密度ρ均已知。求解不良导体棒上温度$T(x,t)$ $(0\le x\le L, t\ge 0)$。

边界条件

方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0\,.$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。
边界条件为

$$\begin{aligned} T\big|_{t=0} &= T_0 \\ T\big|_{x=0} &= T_0 \\ \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \end{aligned}$$

渐近行为分析

假设当t远大于典型的变化时间L^2/a时，系统处于稳恒状态（温度梯度不再变化）。因为一端温度是固定的，要得到稳恒状态的必要条件是热量不在不良导体棒上积累，也就是说进来的热流j必须保持不变地通过整个不良导体棒，最后从另一端进入热库。这说明稳恒状态下$\frac{\partial T}{\partial x}$处处等于$\frac{j}{\lambda}$。由此得出：

$$T(x,t) \to T_0 + \frac{j}{\lambda}x$$

分离变量法

虽然很快如愿得到了解的渐近行为，但刚学习了分离变量法，必须求出严格解炫耀一下。令

$$T(x,t) = T_0 + \frac{j}{\lambda}x + \delta T(x,t)$$

易见δT也满足热传导方程，且

$$\begin{aligned} \delta T|_{x=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0, \\ \delta T|_{t=0} &= -\frac{j}{\lambda}x. \end{aligned}$$

级数展开

熟练地利用零边界条件进行衰减模式的分解：

$$\delta T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-a\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\right).$$

利用$t=0$时的初始条件

$$-\frac{j}{\lambda}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\right).$$

最后，上式两边乘以$\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)$并两边对$x$从0积分到$L$，得到：

$$c_n = (-1)^{n+1}\frac{2jL}{\lambda\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}.$$

再次大功告成

最后的结果是

$$T(x,t) = T_0 + \frac{j}{\lambda}x - \frac{2jL}{\lambda\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-a\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\right).$$

课后作业 (题号25)

25 长度为L的不良导体棒一端 ($x = 0$处) 和温度为T_0的热库接触，并在$t = 0$时刻和热库处于热平衡。从$t = 0$时刻开始，把不良导体棒的另一端 ($x = L$处) 和温度为T_1的热库保持接触。设不良导体棒的导热系数λ，单位质量的比热c和质量密度ρ均已知。求解不良导体棒上温度$T(x, t)$ $(0 \le x \le L, t \ge 0)$。