

Methods of Mathematical Physics

§18 Bessel Functions of the Second Kind

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- ▶ 谐函数的一般正交定理
- ▶ 任意阶第一类贝塞尔函数
- ▶ 第二类贝塞尔函数
- ▶ 环形区域数理方程

据说上次课又翻车了.....



不得不翻的车

分离变量法的套路

自古深情留不住
总是套路得人心



- ▶ 通过减去一个特解（或瞎解）把边界条件齐次化
- ▶ 把解展开成谐函数 $Q_k(\mathbf{x})$ （和时间依赖因子的乘积）的线性组合：热传导方程的时间依赖因子是 e^{-ak^2t} ，波动方程的时间依赖因子是 $e^{\pm iakt}$ 。
- ▶ 如果是有限区间，用边界条件来选择 k 的允许取值。
- ▶ 用初始条件和谐函数的正交性求出展开系数。

疑问

那个.....万一谐函数不正交怎么办?



You asked too much!

谐函数的一般正交定理

并不懂为什么，反正感觉该正交时就会正交的...

什么齐次边界条件是在套路内的？

把在某个 n 维空间的区域 Ω 内对应本征值为 $-k^2$ ，即满足

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的谐函数记作 $Q_k(\mathbf{x})$ (约定 $k \geq 0$)。

在区域的边界面 $\partial\Omega$ 上，如果谐函数和它的梯度沿边界面法向的分量(记作 $(\nabla Q)_\perp$)的某个固定的非平凡线性组合处处为零，则称该区域内的谐函数满足**一般零边界条件**。

(边界面的法向即垂直边界面的方向。一般零边界条件就是指： $\lambda_1 Q + \lambda_2 (\nabla Q)_\perp = 0$ ，其中权重 λ_1, λ_2 不同时为零。注意边界面上不同的点的权重允许不同，但是同一点的权重对所有谐函数必须相同。)

谐函数的一般正交定理

设 $Q_{k_1}(\mathbf{x})$ 和 $Q_{k_2}(\mathbf{x})$ 是满足一般零边界条件的谐函数, 且 $k_1 \neq k_2$ 。
则在区域 Ω 内 $Q_{k_1}(\mathbf{x})$ 和 $Q_{k_2}(\mathbf{x})$ 正交:

$$\int_{\Omega} Q_{k_1}(\mathbf{x}) Q_{k_2}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = 0.$$

证明

$$\begin{aligned} & (k_1^2 - k_2^2) \int_{\Omega} Q_{k_1}(\mathbf{x}) Q_{k_2}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [Q_{k_1}(\mathbf{x}) \nabla^2 Q_{k_2}(\mathbf{x}) - Q_{k_2}(\mathbf{x}) \nabla^2 Q_{k_1}(\mathbf{x})] d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [Q_{k_1}(\mathbf{x}) \nabla Q_{k_2}(\mathbf{x}) - Q_{k_2}(\mathbf{x}) \nabla Q_{k_1}(\mathbf{x})] d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\partial \Omega} [Q_{k_1}(\mathbf{x}) \nabla Q_{k_2}(\mathbf{x}) - Q_{k_2}(\mathbf{x}) \nabla Q_{k_1}(\mathbf{x})]_{\perp} dS \end{aligned}$$

最后一步利用了高斯定理（散度的体积分等于边界面上的法向分量的面积分）。

证明(续)

我们得到

$$\int_{\Omega} Q_{k_1} Q_{k_2} d^n \mathbf{x} = \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} \int_{\partial\Omega} [Q_{k_1} \nabla Q_{k_2} - Q_{k_2} \nabla Q_{k_1}]_{\perp} dS$$

现在分两种情况讨论:

- 1 如果 Q_{k_1} 和 Q_{k_2} 满足的都是边界上 $Q = 0$ 的零边界条件, 则贡献显然为零。
- 2 如果 Q_{k_1} 和 Q_{k_2} 满足的是 $\lambda Q + (\nabla Q)_{\perp} = 0$, 则根据

$$Q_{k_1} \nabla Q_{k_2} - Q_{k_2} \nabla Q_{k_1} = Q_{k_1} (\lambda Q_{k_2} + \nabla Q_{k_2}) - Q_{k_2} (\lambda Q_{k_1} + \nabla Q_{k_1})$$

贡献还是零。

求归一化因子的办法

$k_1 = k_2$ 的情况下求归一化因子的方法:

取 Q_{k_1} 严格满足一般零边界条件, 取 $k_2 = k_1 + \epsilon$ 并令 $\epsilon \rightarrow 0$ 取极限得到。

例题1



设 m 为非负整数， λ 为实数。满足 $\lambda J_m(x) + xJ'_m(x) = 0$ 的所有正实数解为 μ_1, μ_2, \dots ，试推导函数序列 $J_m(\mu_i x)$ ($i = 1, 2, \dots$)的正交定理。

解答

取单位圆为研究区域并建立极坐标。则 $J_m(\mu_i r) \cos(m\theta)$ 为区域内的本征值为 $-\mu_i^2$ 的谐函数，且满足一般零边界条件 $\lambda J_m(\mu_i r) + \frac{d}{dr} J_m(\mu_i r) \Big|_{r=1} = 0$ 。根据一般正交定理， $J_m(\mu_i r) \cos(m\theta)$ ($i = 1, 2, \dots$) 在单位圆内构成一组正交函数：

$$\int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta J_m(\mu_i r) \cos(m\theta) J_m(\mu_j r) \cos(m\theta) \propto \delta_{ij}.$$

因为 θ 的积分可以独立积掉，所以正交性可以写成：

$$\int_0^1 J_m(\mu_i r) J_m(\mu_j r) r dr = \delta_{ij} C_i.$$

难点在于求归一化因子 C_i 。

归一化因子

由单位圆区域内的高斯定理导出

$$\begin{aligned} & \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta J_m(\mu_i r) J_m(kr) \cos^2(m\theta) \\ &= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} \int_0^{2\pi} d\theta [J_m(\mu_i) k J'_m(k) - J_m(k) \mu_i J'_m(\mu_i)] \cos^2(m\theta). \end{aligned}$$

把 θ 的积分约去后即:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 r dr J_m(\mu_i r) J_m(kr) \\ &= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} [J_m(\mu_i) k J'_m(k) - J_m(k) \mu_i J'_m(\mu_i)] \\ &= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} \{ J_m(\mu_i) [\lambda J_m(k) + k J'_m(k)] - J_m(k) [\lambda J_m(\mu_i) + \mu_i J'_m(\mu_i)] \} \\ &= \frac{1}{\mu_i^2 - k^2} J_m(\mu_i) [\lambda J_m(k) + k J'_m(k)] \end{aligned}$$

归一化因子

让 $k = \mu_i + \epsilon$, 并取 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限:

$$\int_0^1 [J_m(\mu_i r)]^2 r dr = -\frac{1}{2\mu_i} J_m(\mu_i) [(1 + \lambda) J'_m(\mu_i) + \mu_i J''_m(\mu_i)]$$

再利用 $J'_m(\mu_i) = -\frac{\lambda}{\mu_i} J_m(\mu_i)$, 以及

$$J''_m(\mu_i) + \frac{1}{\mu_i} J'_m(\mu_i) + (1 - \frac{m^2}{\mu_i^2}) J_m(\mu_i) = 0$$

可以把上述结果综合写为:

$$\int_0^1 J_m(\mu_i r) J_m(\mu_j r) r dr = \delta_{ij} \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2 - m^2}{\mu_i^2}\right) [J_m(\mu_i)]^2}{2}.$$

思考题



你能从例题的结论导出之前学习过的两个 J_m 的正交定理吗？

从此正交性，归一化这些都成为了枯燥的推土工作。



我就喜欢推土！

任意阶第一类贝塞尔函数

非整数阶 $J_{-\nu}$ 和 J_{ν} 线性独立，整数阶满足 $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$

任意阶贝塞尔函数

直接把 m 推广到任意实数 ν ,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

定义对所有 $x > 0$ 有效。当 $\nu \geq 0$, 还可以取 $x \rightarrow 0$ 的极限。

- ▶ 当 ν 不是整数时, $(k+\nu)!$ 要理解为 $\Gamma(k+\nu+1)$ 。
- ▶ $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 的零点为 $0, -1, -2, \dots$, 或者说负整数的阶乘是无穷大。所以上面的级数也可以写成 k 从 $-\infty$ 到 ∞ 求和
- ▶ 如果你乐意, 还可以把定义解析延拓到 $-\pi < \arg x < \pi$ 。

贝塞尔函数的性质

递推公式对所有 ν 成立:

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x); \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x);$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x); \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

渐近公式对所有 ν 都成立: $x \gg \nu^2$ 时

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

另外, 三个正交定理对 $\nu \geq 0$ 都成立。

整数阶 $J_{-m}(x)$ 和 $J_m(x)$ 的线性关系

设 $m \geq 0$ 为整数, 利用负整数的阶乘为 ∞ , 有

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+m)-m} \\ &= (-1)^m J_m(x) \end{aligned}$$

非整数阶 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 线性独立

当 $x \rightarrow \infty$ 时

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

两者的相位差 $\nu\pi$, ν 不是整数时, 无法通过线性叠加完全消失。

这个结论也能从 $x \rightarrow 0^+$ 时的渐近行为得到, 请自行研究。

第二类贝塞尔函数

和第一类贝塞尔函数渐近正交，大多数性质相同，除了在 $x \rightarrow 0^+$ 时发散

贝塞尔方程的线性独立解

设 $\nu > 0$ 为非整数, 贝塞尔方程

$$f'' + \frac{1}{x}f' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)f = 0$$

有两个线性独立的解: $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 。

这无法推广到 ν 为整数的情形。我们来思考其背后的原因。

J_ν 和 $J_{-\nu}$ 之间的“独立性”随着 ν 逼近整数而趋向于消失

如果考虑一下 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 的渐近展开:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

当 ν 趋向于一个整数, 两者的“独立性”趋向于消失。

因为 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 之间的独立性依赖于 ν , 取它们作为两个独立解并不合适。最合理的方法是取 J_ν 和另一个渐近行为为

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

的解。这样两个解就类似于余弦和正弦一样“正交”了。

第二类贝塞尔函数

利用

$$\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos(\nu\pi) - \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin(\nu\pi)$$

只要定义

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

则 $Y_\nu(x)$ 满足我们期待的渐近公式:

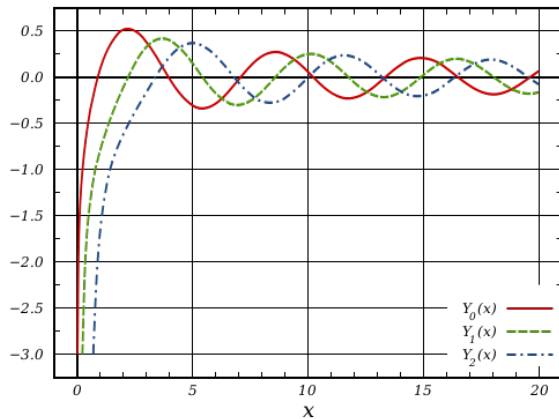
$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg \nu^2$$

整数阶 $Y_m(x)$

为了对整数阶也适用，我们把定义修改为极限

$$Y_\nu(x) := \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

因为 Y_ν 和 J_ν 渐近正交，不可能线性相关。所以 对任意 ν ， J_ν 和 Y_ν 都是贝塞尔方程的两个线性独立解。

Y_0, Y_1, Y_2 

Y_ν 的定性图像

对 $\nu \geq 0$, Y_ν 和 J_ν 都是振幅以 $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ 方式衰减, 周期近似为 2π 的振荡函数。区别是 $x \rightarrow 0^+$ 时的行为。

如果 $\nu > 0$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad Y_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

如果 $\nu = 0$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$J_0(x) \approx 1, \quad Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x$$

证明非常简单, 留为作业😊

因为 $Y_\nu(kr)$ 在 $r \rightarrow 0$ 时发散, 当且仅当考虑的区域为去心的环形区域时才需要考虑谐函数: $Y_m(kr)e^{\pm im\theta}$.

Y_ν 的递推关系

Y_ν 和 J_ν 一样满足递推关系:

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x); \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

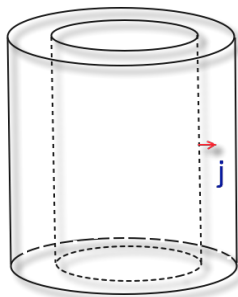
$$Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) = 2Y'_\nu(x); \quad Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x).$$

证明非常简单, 留为作业🤔

环形区域上的数理方程

当圆心被挖掉时, $Y_m(kr)e^{\pm im\theta}$ 也是合法解

例题2



如图，一根外半径为 R_1 ，内半径为 R_2 的无限长的均匀材质空心圆柱。外表面和温度为 T_0 的热库接触，保持温度为 T_0 。在 $t = 0$ 时刻空心圆柱处于热平衡，温度为 T_0 。在 $t > 0$ 时，从内表面处处都注入热流 j 。已知材质的导热系数为 λ ，质量密度为 ρ ，单位质量比热为 c 。计算该空心圆柱各处的温度。

例题2解答思路

当达到温度梯度不再变化的稳恒状态时，因为外表面温度已经固定，所有位置的温度将保持恒定。那么流入的热流将不再积累，直接穿过空心圆柱流出外表面。这时，距离中心轴为 r 处的热流为

$$\frac{j(2\pi R_2)}{2\pi r},$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{jR_2}{\lambda r}.$$

解出稳恒解：

$$T|_{t \rightarrow \infty} = T_0 - \frac{jR_2}{\lambda} \ln \frac{r}{R_1}.$$

例题2解答思路 (续)

设严格解为

$$T = T_0 - \frac{jR_2}{\lambda} \ln \frac{r}{R_1} + u(r, t).$$

则 u 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u = 0,$$

$$u|_{r=R_1} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \frac{jR_2}{\lambda} \ln \frac{r}{R_1}.$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

例题2解答思路 (续)

把解按满足边界条件的谐函数展开:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i [Y_0(k_i R_1) J_0(k_i r) - J_0(k_i R_1) Y_0(k_i r)] e^{-a k_i^2 t}.$$

其中 k_i 是满足

$$Y_0(k_i R_1) J'_0(k_i R_2) - J_0(k_i R_1) Y'_0(k_i R_2) = 0$$

的第 i 个解。

剩下的用正交关系求系数的推土工作留为作业。

课后作业(题号41-43)

- 41 对 $0 < \nu < 1$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 取 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 的级数展开的最低次近似, 证明:

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(-\nu) \cos \nu\pi}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

在上式中对 x 求导, 然后令 $\nu \rightarrow 0$ 求极限, 再对 x 积分, 导出

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x + c,$$

其中 c 为常数, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时可以忽略它的贡献。

提示: 要用到 Γ 函数的递推关系和互余宗量关系

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (\text{推导见第5讲}).$$

课后作业(题号41-43)

- 42 在上一题中，我们无耻地交换了求极限和求导/积分的次序。请保持这种无耻，用 Y_ν 的极限定义证明它的两个递推关系：

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x).$$

课后作业(题号41-43)

- 43 把例题2的推土部分推完，写出系数 c_i 的积分表达式，并使
出洪荒之力进行化简。