Methods of Mathematical Physics

§9 Problem Set I

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容：估算是物理的根本

- 热传导方程
- 解析函数的邻域近似
- Stirling 公式
- n维限和积分公式

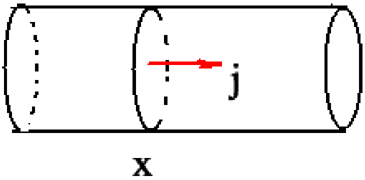
解决物理问题的根本方法是抓住主要物理图像进行估算。只擅长处理细节的物理学家最多只能是二流物理学家。

一维热传导方程

考虑一根很长的不良导体棒(这里指热的传导)的温度$T(x,t)$，其中x是在导体棒上的位置，t是时间。在温度梯度不大的情况下，可以用线性近似：热流正比于温度梯度。显然，这个比例系数是负的，

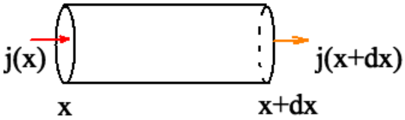
$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

其中$\lambda > 0$为常量，称为导热系数。



注：热流是指单位时间通过单位面积的热量。

一维热传导方程



考虑长为dx的一小段不良导体棒，进入和出去的热流差为

$$j(x) - j(x+dx) = -\lambda \left[\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+dx} \right] \approx \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx.$$

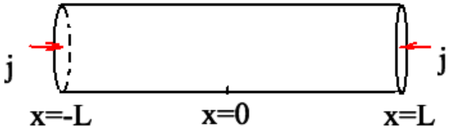
设材料单位质量的比热为c，质量密度为ρ，横截面积为S，则

$$(c\rho S dx) dT = đQ = [j(x) - j(x+dx)] S dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx (S dt)$$

这里的dT和dt都是对固定x而言，两者之比为$\frac{\partial T}{\partial t}$。令$a = \frac{\lambda}{\rho c}$，则:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0}$$

Problem 1.1 ($\star\star\star$)



在一根长为$2L$的不良导体棒在$t=0$时刻温度为T_0。在$t>0$时刻，不良导体棒两端均有强度为j的热流进入。设材料的导热系数λ，质量密度ρ，单位质量的比热c均已知，试计算$t\geq 0$时刻不良导体棒各处的温度$T(x,t)$。

Problem 1.1 解答

根据对称性，在棒中间处热流和温度梯度均为零。写出如下的方程和边界条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
T|_{t=0} &= T_0
\end{aligned}
$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。

Problem 1.1 解答

先分析主要图像。

在t时刻，累计流入的热量维$Q = 2jSt$ (其中S为横截面积)。棒子热容为$C = c\rho(2SL)$。所以t时刻棒子的平均温度为

$$\bar{T} = T_0 + \frac{Q}{C} = T_0 + \frac{j}{\rho c L}t$$

Problem 1.1 解答 (续)

把平均温度去掉，研究各处温度起伏：$\Delta T(x,t) = T(x,t) - \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right)$。显然$\Delta T$满足方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\rho c L} \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
\Delta T|_{t=0} = 0 &
\end{aligned}$$

因为ΔT描述的是温度起伏，还有一个额外条件：

$$\int_0^L \Delta T(x,t)dx = 0$$

Problem 1.1 解答 (续)

当t很大时，棒上的温度梯度趋于稳定，即ΔT仅仅依赖于x，满足

$$
\begin{aligned}
-a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\rho c L} \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
\int_0^L \Delta T(x,t)dx &= 0
\end{aligned}
$$

由此不难解出

$$
\Delta T = \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)
$$

Problem 1.1 解答 (续)

也就是说，当t很大时

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)$$

现在还留下两个问题：

- t多大时算“很大”？
- t不大（即刚开始加热）时，$T(x,t)$的严格解是什么？

第一个问题很容易估算：根据热传导方程，T的典型“变化时间”Δt和“变化尺度”L之间满足$\frac{1}{\Delta t} \sim a\frac{1}{L^2}$。我们所说的$t$很大，即指$t \gg \Delta t \sim \frac{L^2}{a}$。

第二个问题涉及一些数学技巧(“二流物理学家的研究对象”),我们留到下半学期再讨论。

解析函数的邻域近似

非常数的解析函数的邻域近似$f(z) \approx f(z_0) + a_n(z - z_0)^n$。其中$n$是使$a_n$非零的最小正整数。

我们曾用上述估算方法证明了最大模原理和解析延拓原理。下面我们再用它来解决一些其他问题。

Problem 1.2 ($\star\star$)

试证明：非常数的解析函数把开区域映射为开区域。

Problem 1.2 解答

证明：设T为开区域，非常数的解析函数f把T映射为V。
设z_0是T内任意一点，由于邻域近似 $f(z)-f(z_0)\approx a_n(z-z_0)^n$能取到任意幅角和模，所以$f(z_0)$是$V$的内点，证毕。

Problem 1.3 ($\star\star$)

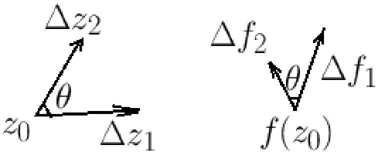
试证明：存在单值的反函数的解析函数是保角映射。即如果存在单值的反函数的解析函数f把两条相交的曲线映射为两条相交的曲线，则两曲线的夹角在映射前后保持不变。

Problem 1.3 解答

证明：设两曲线相交点为z_0。f的邻域近似为$f(z) \approx f(z_0) + c(z - z_0)^n$。因为存在单值的反函数，只能是$n = 1$ （否则附近的$z - z_0$有n个解)，这样对模很小的复数Δz_1，Δz_2 ， $\Delta f_2 \equiv f(z_0 + \Delta z_2) - f(z_0)$和$\Delta f_1 \equiv f(z_0 + \Delta z_1) - f(z_0)$的幅角差为

$$\arg \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} \approx \arg \frac{c\Delta z_2}{c\Delta z_1} = \arg \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}$$

即两曲线交角在映射前后不变。



Stirling公式

当$x \gg 1$时，有如下的近似表达式 (Stirling公式):

$$\boxed{x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x}$$

Stirling公式的证明

利用Γ函数的定义：

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t+x\ln t} dt$$

被积函数在极大值点$t = x$附近贡献较大，所以把$-t + x\ln t$在$t = x$附近泰勒展开:

$$-t + x\ln t \approx -x + x\ln x - \frac{(t-x)^2}{2x}$$

$$\begin{aligned} x! &\approx \int_0^\infty e^{-x+x\ln x} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \\ &\approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \\ &= \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \end{aligned}$$

Stirling公式的加强版

Stirling公式的终级版本为：

$$x! = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\frac{1}{1680x^7}\cdots}$$

（证明略）
如果取截断

$$\boxed{x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}}}$$

对$x \geq 3$，结果的相对误差仅为3×10^{-6}。因此，一个快速用初等函数计算 Γ函数的办法是用递推公式转化为$x \geq 3$时的Γ函数的计算问题。

Problem 1.4 ($\star\star$)

计算$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$，要求误差小于$10^{-5}$。

Problem 1.4 解法一

大多数编程语言和脚本语言都有内置的Γ函数。例如，
在python环境中输入命令：

```
from math import *
gamma(1/3.)
```

得到输出结果

```
2.678938534707748
```

Problem 1.4 解法二

如果手头没有可以现成计算Γ函数的工具，那么就利用Stirling公式的加强版：

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)!}{\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}\times\frac{10}{3}} \approx \sqrt{\frac{20\pi}{3}}\left(\frac{10}{3e}\right)^{\frac{10}{3}} e^{\frac{1}{40}-\frac{3}{4000}} \times \frac{81}{280} \approx 2.678934$$

Euler常数 —— 重要性仅次于π和e的数学常数

可以用连续的积分

$$T_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

来近似级数和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

误差当$n \to \infty$时趋向于一个常数，定义其为Euler常数：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772156649\ldots$$

Problem 1.5 ($\star\star\star$)

证明Γ函数的无穷乘积表达式：

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Problem 1.5 解答

证明:利用Γ函数递推关系

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{(z+n)!} \\
&= \frac{n!z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{(z+n)!}
\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，并利用Stirling公式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{z+n}{e}\right)^{n+z}} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-n} e^z n^{-z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{-z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-z\ln n} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\gamma z-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)
\end{aligned}$$

Problem 1.6 ($\star\star$)

随机抛100次硬币，估算恰好有50次正面向上的概率。

Problem 1.6 解答

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2^{100}} \times \frac{100!}{(50!)^2} \\
&\approx \frac{1}{2^{100}} \times \frac{\sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{100\pi\left(\frac{50}{e}\right)^{100}} \\
&= \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&\approx 0.080
\end{aligned}
$$

请尝试用Stirling公式的加强版来计算更加精确的结果。

n维限和积分公式 (B函数的推广)

$$\int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}f(x_1+x_2+\ldots+x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$
$$=\quad \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\int_0^1 f(u)u^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-1}du\,.$$

其中等式左边的积分区域$\Omega_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0; x_1+x_2+\ldots+x_n\leq 1\}$.

n维限和积分公式的证明

证明：用归纳法，$n=1$时命题显然成立。假设命题对$n-1$成立，考虑积分

$$J=\int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}\delta(x_1+x_2+\ldots+x_n-1)dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

先对x_n积分，得到

$$J=\int_{\Omega_{n-1}} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}(1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1})^{\alpha_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

利用对$n-1$的归纳假设，以及B函数和Γ函数的关系，得到

$$\begin{aligned} J &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}\int_0^1(1-t)^{\alpha_n-1}t^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}-1}dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}\frac{\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} \end{aligned}$$

n维限和积分公式的证明(续)

然后对任意$0 < u < 1$，考虑积分

$$I(u) = \int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \ldots x_n^{\alpha_n - 1} \delta(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - u) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \quad (1)$$

做变量替换$x_i = uy_i$，并利用前面得到的积分J，就得到

$$\begin{aligned} I(u) &= u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1} \int_{\Omega_n} y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1} \ldots y_n^{\alpha_n - 1} \delta(y_1 + y_2 + \ldots + y_n - 1) dy_1 dy_2 \ldots dy_n \\ &= u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) \ldots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)} \quad (2) \end{aligned}$$

最后，分别利用(1)和(2)可以看出所要求证的等式左右两边都等于

$$\int_0^1 I(u) f(u) du$$

于是证毕。

Problem 1.7 ($\star\star$)

计算n-维空间的球体的体积 ($n \in Z^+$)。

Problem 1.7 解答

$$V_n = \int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

利用对称性可以写成

$$V_n = 2^n \int_{x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0; x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

作变量替换$x_i = \sqrt{y_i}$,

$$V_n = \int_{\Omega_n} y_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} \ldots y_n^{-\frac{1}{2}} dy_1 dy_2 \ldots dy_n$$

再利用n维限和积分公式:

$$V_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Problem 1.8 ($\star\star\star\star$)

满足标准正态分布

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

的随机变量x的100次独立采样值为$x_1, x_2, \ldots, x_{100}$；请估算$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 > 200$ 的概率。

Problem 1.8 解答

我们先考虑n个独立地满足标准正态分布的变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的平方和不大于s $(s \geq 0)$的概率：

$$P_n(s) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2<s} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

由正态分布的对称性，可以把积分限定在$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$的范围内：

$$P_n(s) = \frac{2^n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0; x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2<s} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

做变量替换$x_i = \sqrt{sy_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，并利用n维限和积分公式：

$$\begin{aligned}
P_n(s) &= \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_n} y_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} \ldots y_n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{2}} dy_1 dy_2 \ldots dy_n \\
&= \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 e^{-\frac{su}{2}} u^{\frac{n}{2}-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt.
\end{aligned}$$

Problem 1.8 解答(续)

我们需要计算的是:

$$p = 1 - P_{100}(200) = \frac{1}{\Gamma(50)} \int_{100}^{\infty} t^{49} e^{-t} dt = \frac{1}{\Gamma(50)} \int_{100}^{\infty} e^{-t+49\ln t} dt$$

被积函数随着t增大而迅速减少。因此我们在$t = 100$附近做泰勒展开

$$-t + 49\ln t \approx -100 + 49\ln 100 - 0.51(t - 100)$$

积分得到

$$\int_{100}^{\infty} t^{49} e^{-t} dt \approx e^{-100+49\ln 100} \int_{100}^{\infty} e^{-0.51(t-100)} dt \approx \frac{e^{-100+49\ln 100}}{0.51}$$

再利用Stirling公式,

$$p \approx \frac{e^{-100+49\ln 100-(-49+49\ln 49)}}{0.51 \times \sqrt{98\pi}} \approx 1.2 \times 10^{-8}$$