Methods of Mathematical Physics

§14 Source Terms and High Dimensions

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 回顾
- 有源的方程
- 高维情况的分离变量法

回顾

实验报告是把杀猪刀，老身感觉什么都不记得了……

目前学过的线性齐次偏微分方程解法

1. **分离变量法** 是首选方案。一般的套路：
   1. 假设分离变量形式的解$\Phi(x)\Psi(t)$并求出Φ和Ψ允许的形式。
   2. 如果空间边界条件是非齐次的，求（猜）特解把空间边界条件化为齐次；
   3. 用齐次空间边界条件确定展开式中的函数如何选取；
   4. 用初始条件确定展开系数
2. **积分变换方法** 是分离变量法在无穷长区间上的推广。区别是：积分变换的存在性本身默认了一些无穷远处的性质，无须对展开式中的函数进行选取。(分离变量法第3步可以省略）
3. **格林函数方法** 也需要把空间边界条件化为齐次。区别是：不用分离变量的乘积形式函数对解进行分解；而用格林函数（初始条件为$\delta(x-x_0)$的解，或者说对x_0处的单位脉冲的响应）对解进行分解。

目前学过的两种方程

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0$$

具有衰减和趋于稳定的特性。一维情况格林函数为$\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}$。

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$$

具有波动特性。一维无边界情况通解为$C(x-at)+D(x+at)$。

有源的方程

原则上可以暴力解决，实际上……心好累

有源的问题

有源的例子：

- 不良导体棒上处处有热源 （烤串）；

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

- 弦作受迫振动（弹琴）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

其中f正比于单位时间单位长度输入的热量或外力。

例题1

求解$0 \le x \le L$上的烤串问题：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \phi(x,t), \\ u|_{x=0} = 0&, \\ u|_{x=L} = 0&, \\ u|_{t=0} = 0&. \end{aligned}$$

自发演化的时间依赖模式被源破坏

如果没有$\phi(x,t)$的存在，我们将进行分解：

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

有$\phi(x,t)$的情况，解的自发衰减性被破坏，那么我们猜想$e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}}$必须被替换掉了：

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

其中每个$T_n(t)$都是待定函数。利用初始条件显然有

$$T_n(0)=0.$$

源也要进行分解

为了求出T_n，我们把等式右边的$\phi(x,t)$也进行级数展开：

$$\phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

代入到原方程，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}T(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

两边比较系数得到

$$T_n'(t)+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}T(t)=G_n(t).$$

再利用初始条件$T_n(0)=0$，原则上()可以求出$T_n(t)$。

比较非齐次的边界条件和有源的方程

- 有源的方程的解法有固定的流程，从概念上讲非常简单。但实际操作上求解$T_n(t)$经常会很困难（高难度推土）。
- 无源但空间边界条件是非齐次的情况，求（猜）特解并无固定的流程，不易掌握。但从实际操作上讲，如果有好的数学或物理基础，特别是强大的物理图像和直觉，往往可以出奇制胜，很快求出一个形式很简洁的解。

对于喜欢推土的同学来说，有一个好消息：非齐次边界问题可以转化为有源的问题。

例题2

来回顾一下上一讲中的非齐次边界问题:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= A\sin(\omega t), \\
u\big|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

一个不幸的瞎解

如果你不是老司机，你可能会闭着眼睛瞎猜一个“特解”

$$\frac{Ax}{L}\sin(\omega t)$$

然后仔细一看，坏了，它不满足方程！这不是特解，是瞎解！

强用瞎解

因为你已经放弃了用经验肝一个特解这条路，就只能硬着头皮用你找的这个瞎解了： 令

$$u(x,t)=\frac{Ax}{L}\sin(\omega t)+v(x,t)$$

代回原方程，得到你最爱的推土问题：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{A\omega^2 x}{L}\sin(\omega t),\\
v\big|_{x=0} &= 0,\\
v\big|_{x=L} &= 0,\\
v\big|_{t=0} &= 0,\\
\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} &= -\frac{A\omega x}{L}
\end{aligned}$$

后面的推土工作略。

高维情况的分离变量法

寻找谐函数是关键

关于分离变量法的一个疑惑

分离变量第1步设$\Phi(x)\Psi(t)$......那如果变量超过2个怎么办?

例题2

边长为L的正方形弹性膜，四边都固定，求解膜的小振动问题：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= 0, \\
u\big|_{y=0} &= 0, \\
u\big|_{y=L} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= \phi(x,y), \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi(x,y),
\end{aligned}
$$

其中$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

解答

先寻找分离变量型解，令$u = \Phi(x, y)\Psi(t)$，代入波动方程，得到

$$\frac{1}{a^2}\frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{\nabla^2\Phi}{\Phi}$$

等式左边是t的函数，右边是x, y的函数，要两边恒等，只能是常数：

$$\frac{1}{a^2}\frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{\nabla^2\Phi}{\Phi} = -k^2$$

（$\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi} = k^2$的情形对常见边界条件用处不大，被无情抛弃。）

解出分离变量型解：

$$u_1 = Q(x, y)e^{\pm iakt}$$

其中$Q(x, y)$是

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的解，称为 谐函数。

谐函数

在边界为正方形的情况下，取直角坐标系是很漂亮的操作，那么

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的解是平面波

$$Q = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

这里我们用矢量写法$\mathbf{x}$来表示(x, y)，$\mathbf{k}$来表示(k_x, k_y) (满足$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k$)。
和一维的情况类似，对应一组$|k_x|, |k_y|$有四种满足条件的解(因为k_x, k_y分别可以取正负)，可以重新写成正弦和余弦的实数表达形式。

级数展开

空间边界条件已经是齐次的了，会对k_x, k_y产生限制。经过分析容易得到

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi y}{L} \cos\left(\pi a\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{L}t\right) \\ &+ \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi y}{L} \sin\left(\pi a\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{L}t\right). \end{aligned}$$

利用两个初始条件分别可以求出系数c_{mn}和s_{mn}。

思考

可以直接一次性进行分离变量设解为$U(x)V(y)\Psi(t)$吗?

思考

既然解是熟悉的平面波，为什么要引入“谐函数”的概念?

例题

有孤立的，半径为R的均匀厚度圆形金属片。初态$t=0$时刻金属片中心温度为T_0，金属片上距离中心r处的温度为

$$T(r) = T_0\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right).$$

已知金属片质量密度为ρ，导热系数为λ，单位质量比热为c。求之后圆盘上各点的温度变化。

（😂这题看着好眼熟）

写出方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a\nabla^2 T &= 0, \\
\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} &= 0, \\
T|_{t=0} &= T_0\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right).
\end{aligned}
$$

然后思考，$\nabla^2 T$具体是什么？好像还缺了一个空间边界条件，你知道怎么写吗?

课后作业 (题号 30-31)

30 课上讲了“瞎解法”求解

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= A\sin(\omega t), \\
u\big|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}$$

的办法。请把课上没有完成的计算部分补充完整，并把解和上次作业得到的解进行比较。

课后作业 (题号 30-31)

31 一张四边固定的水平正方形均匀薄膜，张力系数为（单位长度线元受力）为σ，质量面密度为ρ。记薄膜上的点坐标为(x, y) $(0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L)$。初始$t = 0$时刻薄膜在横向（垂直薄膜平面方向）有微小的位移$Axy(L - x)(L - y)$，初始速度为零。求解之后薄膜的横向位移$u(x, y, t)$ $(0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, t \geq 0)$。