

# Methods of Mathematical Physics

## §23 Advanced Topics on $Y_{\ell m}$ 's

Lecturer: 黄志琦

[https://github.com/zqhuang/SYSU\\_MMP](https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP)

# 本讲内容

- ▶  $\delta$ 函数和正交归一完备函数组的关系
- ▶ 球面谐函数的微分表达式
- ▶ 球面谐函数的加法公式

# $\delta$ 函数和正交归一完备函数组的关系

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_i Q_i(\mathbf{x}) Q_i(\mathbf{x}')$$

## $\delta$ 函数和正交归一完备函数组的关系

设 $n$ 维空间的某区域 $\Omega$ 内函数组 $Q_i(\mathbf{x})$ 构成正交归一的完备函数组, 即

$$\int_{\Omega} Q_i(\mathbf{x}) Q_j(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \delta_{ij},$$

由完备性,  $\Omega$ 内的函数总是可以用 $Q_i(\mathbf{x})$ 进行展开, 特别地, 对固定的 $\mathbf{x}'$ , 我们把函数 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 进行展开:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_i c_i Q_i(\mathbf{x})$$

由 $Q_i$ 的正交归一性, 系数

$$c_i = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q_i(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = Q_i(\mathbf{x}')$$

## $\delta$ 函数和正交归一完备函数组的关系

把 $c_i$ 代回去得到:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_i Q_i(\mathbf{x}') Q_i(\mathbf{x}).$$

如果是用复函数内积定义的正交归一性, 则上式变为

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_i Q_i^*(\mathbf{x}') Q_i(\mathbf{x}).$$

如果正交归一性里的内积定义带权重:  
 $\int_{\Omega} Q_i(\mathbf{x}) Q_j(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \delta_{ij}$ , 则

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_i \rho(\mathbf{x}') Q_i(\mathbf{x}') Q_i(\mathbf{x}).$$

## 单位球面上的 $\delta$ 函数

单位球面上的坐标 $\theta, \phi$ 对应了一个方向 $\mathbf{n}$ (从原点出发指向单位球面上 $\theta, \phi$ 点的单位矢量)。单位球面上的函数可以抽象地写为 $f(\mathbf{n})$ 的形式。单位球面上的面积元 $\sin \theta d\theta d\phi$ 可以抽象地写作 $d^2\mathbf{n}$ 。

在不致引起混淆的情况下，我们也用 $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$ 来表示 $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ 。根据前面的讨论，有

$$\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}') Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

这里的 $\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}')$ 是单位球面上的二维 $\delta$ 函数（在 $\mathbf{n}'$ 处的大小为 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的小面积上的函数值为 $\frac{1}{\epsilon}$ ，其余处处为零）。 $\sum_{\ell m}$ 是双重求和 $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell}$ 的简写。

# 球面谐函数的微分表示

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} \left[ \sin^m \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] e^{im\phi}$$

## 准备工作：乘积多重导数公式

设  $f, g$  为  $x$  的函数，我们都知道

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

这个公式可以推广到任意阶导数：

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

其中  $f^{(k)}$  表示  $f$  的  $k$  重导数。

(和二项式定理一样，这个公式最简明有效的证明方法是用数学归纳法，请自行完成。)



## 准备工作：推广的乘积多重导数公式

设  $\rho, f, g$  为  $x$  的函数，则

$$\left(\rho \frac{d}{dx}\right)^n (fg) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\left(\rho \frac{d}{dx}\right)^k f\right] \left[\left(\rho \frac{d}{dx}\right)^{n-k} g\right],$$

证明思路：令  $y = \int \frac{dx}{\rho}$  并对变量  $y$  应用乘积的多重导数公式。

# 思考题

记算符  $\hat{D} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$ , 请验证:

- ▶  $\hat{D} \sin^2 \theta = 2 \cos \theta$ ;
- ▶  $\hat{D}^2 \sin^2 \theta = -2$ ;
- ▶ 对整数  $n > 2$ ,  $\hat{D}^n \sin^2 \theta = 0$ .
- ▶  $\hat{D} \cos \theta = -1$ ;
- ▶ 对整数  $m$ ,  $\hat{D} \sin^m \theta = m \sin^{m-2} \theta \cos \theta$ ;
- ▶ 对整数  $m$ ,  $\hat{D}(\sin^m \theta \cos \theta) = m \sin^{m-2} \theta - (m+1) \sin^m \theta$ ;

# 球面谐函数的微分表达式

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} \left[ \sin^m \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] e^{im\phi}$$

# 证明概要

记

$$N_{\ell m} := \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}};$$

$$\Psi_{\ell m}(\theta) := \sin^m \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta.$$

则只要证明微分方程和归一化:



$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \Psi_{\ell m} \right] + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Psi_{\ell m} = 0.$$



$$\int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2} = 4^\ell (\ell!)^2 \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1}.$$

# 第一部分：微分方程

令  $\hat{D} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$ , 在恒等式

$$\sin^2 \theta \hat{D} \sin^{2\ell} \theta = 2\ell \cos \theta \sin^{2\ell} \theta$$

两边作用  $\hat{D}^{\ell+m}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \hat{D}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + 2(\ell+m) \cos \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ & - (\ell+m)(\ell+m-1) \hat{D}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta \\ = & 2\ell \cos \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta - 2\ell(\ell+m) \hat{D}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta. \end{aligned}$$

稍作整理:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \hat{D}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + 2m \cos \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ & + (\ell+m)(\ell-m+1) \hat{D}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

# 第一部分：微分方程

两边同乘以  $\sin^m \theta$ ,

$$\begin{aligned} \sin^{m+2} \theta \hat{D}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + 2m \sin^m \theta \cos \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ + (\ell + m)(\ell - m + 1) \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned}$$

上式可以写成

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \hat{D} \left[ \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] + m \sin^m \theta \cos \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ + (\ell + m)(\ell - m + 1) \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned}$$

# 第一部分：微分方程

两边作用  $\hat{D}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \hat{D} \left\{ \sin^2 \theta \hat{D} \left[ \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \right\} + m^2 \sin^{m-2} \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ & - m(m+1) \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta + m \sin^m \theta \cos \theta \hat{D}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta \\ & + (\ell+m)(\ell-m+1) m \sin^{m-2} \cos \theta \hat{D}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta \\ & + (\ell+m)(\ell-m+1) \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned}$$

利用前面的方程(1), 把上式蓝色部分替换掉, 得到:

$$\begin{aligned} & \hat{D} \left\{ \sin^2 \theta \hat{D} \left[ \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \right\} + m^2 \sin^{m-2} \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ & - m(m+1) \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta - 2m^2 \sin^{m-2} \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ & + 2m^2 \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ & + (\ell+m)(\ell-m+1) \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned}$$

## 第一部分：微分方程

把同类项都写到一起就得到了最后的结果

$$\begin{aligned} & \hat{D} \left\{ \sin^2 \theta \hat{D} \left[ \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \right\} \\ & + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \sin^m \theta \hat{D}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \Psi_{\ell m} \right] + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Psi_{\ell m} = 0.$$

第一部分证毕。



## 第二部分：归一化

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin^{2m} \theta \left[ \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \sin \theta d\theta \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left[ \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell \right]^2 dx \end{aligned}$$

在最后一步我们做了变量替换  $x = \cos \theta$ 。

## 第二部分：归一化

分部积分 $\ell + m$ 次，注意 $1 - x^2$ 在端点总是消失，就得到

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta \\ &= (-1)^{\ell+m} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell \right] dx \\ &= \frac{(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell dx \end{aligned}$$

注意蓝色部分之所以为常数，是因

为 $(1-x^2)^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell$ 是 $\ell + m$ 次多项式，求导 $\ell + m$ 次后只有最高次幂有非零贡献。

## 第二部分：归一化

最后，做变量替换  $t = \frac{1+\cos\theta}{2}$ ，得到

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin\theta d\theta \\
 = & \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \int_0^1 t^\ell (1-t)^\ell dt \\
 = & \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{[\Gamma(\ell+1)]^2}{\Gamma(2\ell+2)} \\
 = & \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{(\ell!)^2}{(2\ell+1)!} \\
 = & 4^\ell (\ell!)^2 \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1}
 \end{aligned}$$

第二部分证毕。

# 罗巨格公式

在球面谐函数的微分表示中令  $m = 0$ , 即得到

$$Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^\ell \sin^{2\ell} \theta.$$

利用  $P_\ell(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell 0}(\theta, \phi)$ , 上式成为

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell.$$

这就是著名的罗巨格公式 (Rodrigues' Formula).

# 罗巨格公式的直接证明

用球面谐函数的微分表示导出罗巨格公式有点杀鸡用牛刀的感觉。

令  $t = x - 1$ ，也可以直截了当地用  $P_\ell$  的定义证明罗巨格公式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[ (x^2 - 1)^\ell \right] &= \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{dt^\ell} \left[ t^\ell \left(1 + \frac{t}{2}\right)^\ell \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{2^k k! (\ell - k)!} \frac{d^\ell}{dt^\ell} \left[ t^{\ell+k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell + k)!}{(k!)^2 (\ell - k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^k \\ &= P_\ell(x) \end{aligned}$$

## 连带勒让德函数(Associated Legendre Functions)

很多MMP教材上的推导次序是相反的：从勒让德函数引出一个连带勒让德函数：

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \ell.$$

然后再通过连带勒让德函数引出  $m \geq 0$  的球面谐函数，最后再定义  $Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*$  来确定  $m < 0$  的球面谐函数。

$P_{\ell}^m$  跟  $\Psi_{\ell m}$  之间的关系显而易见：

$$P_{\ell}^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \Psi_{\ell m}(\theta).$$

# 例题1

把 $x^n$  ( $n \geq 0, n \in Z, -1 \leq x \leq 1$ ) 展开成

$$x^n = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell} P_{\ell}(x)$$

计算系数 $c_{\ell}$ 。

## 解答

根据  $P_\ell(x)$  的正交归一性以及罗巨格公式，分部积分  $\ell$  次，得到：

$$\begin{aligned} c_\ell &= \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(x) x^n dx \\ &= \frac{2\ell+1}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^1 x^n \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell \\ &= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell x^{n-\ell} dx \end{aligned}$$

显然当  $n-\ell$  为奇数时， $c_\ell = 0$ 。



## 解答 (续)

当  $n - \ell$  为偶数时, 设  $n - \ell = 2k$ , 并做变量替换  $t = x^2$ :

$$\begin{aligned}
 c_\ell &= \frac{(2\ell + 1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!} \int_0^1 (1-t)^\ell t^{k-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \frac{(2\ell + 1)(2k + \ell)!}{2^{\ell+1}\ell!(2k)!} \frac{\Gamma(\ell + 1) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + k + \frac{3}{2})} \\
 &= \frac{(2\ell + 1)(2k + n)! \Gamma(\frac{n-\ell+1}{2})}{2^{\ell+1}(2k)! \Gamma(\frac{n+\ell+3}{2})} \\
 &= \frac{2^\ell(2\ell + 1)(\ell + k)!(\ell + 2k)!}{k!(2\ell + 2k + 1)!}
 \end{aligned}$$

因此最后得到:

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{2^{n-2k}(2n-4k+1)(n-k)!n!}{k!(2n-2k+1)!} P_{n-2k}(x).$$

## 例题2

把 $e^{i\lambda x}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ 为变量,  $\lambda$ 为任意实数参量)展开成级数:

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell}(\lambda) P_{\ell}(x).$$

试计算展开系数 $c_{\ell}(\lambda)$ 的显式表达式。

## 解答

$$\begin{aligned}
e^{i\lambda x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \lambda^n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{i^n \lambda^n}{n!} \frac{2^{n-2k} (2n-4k+1)(n-k)! n!}{k! (2n-2k+1)!} P_{n-2k}(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{\ell+2k} (\ell+k)!}{k! (2\ell+2k+1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_{\ell}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\ell+2k+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(\lambda) P_{\ell}(x)
\end{aligned}$$

## 评论

在最后得到的结果

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(\lambda) P_{\ell}(x)$$

里, 令  $\lambda = kr$ ,  $x = \cos \theta$ , 则得到

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

这相当于把波矢沿z轴方向的平面波写成了 $k$ 相同的一堆球坐标系谐函数的线性组合（由轴对称性显然 $m \neq 0$ 的项不会出现），再次验证了我们之前说过的“**同一个 $k$ 对应的不同坐标系下谐函数只是重新进行了线性组合而已**”。

### 例题3: $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$ 和 $Y_{\ell, m}(-\mathbf{n})$ 之间的关系

证明: 对相反的两个方向, 有

$$Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(-\mathbf{n})$$

## 解答

如果  $\mathbf{n}$  对应  $(\theta, \phi)$ , 则  $-\mathbf{n}$  对应  $(\pi - \theta, \pi + \phi)$ 。

$$\begin{aligned} & Y_{\ell m}(\pi - \theta, \pi + \phi) \\ = & N_{\ell m} \left\{ \sin^m(\pi - \theta) \left[ \frac{1}{\sin(\pi - \theta)} \frac{d}{d(\pi - \theta)} \right]^{\ell+m} \sin^{2\ell}(\pi - \theta) \right\} e^{im(\pi + \phi)} \\ = & N_{\ell m} \left\{ \sin^m \theta \left( -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right\} (-1)^m e^{im\phi} \\ = & (-1)^{\ell+2m} N_{\ell m} \left[ \sin^m \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] e^{im\phi} \\ = & (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

## 例题4: $Y_{\ell m}$ 和 $Y_{\ell, -m}$ 之间的关系

证明

$$Y_{\ell, -m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi)$$

## 解答

把  $Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = N_{\ell, m} \Psi_{\ell m}(\theta) e^{-im\phi}$  在单位球面上展开:

$$Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = \sum_{\ell', m'} c_{\ell' m'} Y_{\ell' m'}(\theta, \phi).$$

两边同乘以  $Y_{\ell' m'}^*$ , 并在单位球面上积分, 得到

$$c_{\ell' m'} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi).$$

即

$$c_{\ell' m'} = N_{\ell' m'} N_{\ell m} \int_0^\pi \Psi_{\ell' m'}(\theta) \Psi_{\ell m}(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m' + m)\phi}.$$

显然, 当  $m' + m \neq 0$  时上式为零。当  $m' = -m$ , 但  $\ell \neq \ell'$  时,  $\Psi_{\ell m}(\theta) \cos m\phi$  和  $\Psi'_{\ell' m'}(\theta) \cos m\phi$  都是单位球面上的谐函数, 且它们对应不同的  $k_{2D}^2$  (即  $\ell(\ell+1)$  和  $\ell'(\ell'+1)$ ), 根据一般正交定理, 上式的积分仍为零。



## 解答(续)

因此我们只需要计算  $c_{\ell, -m}$ 。剩下的计算和证明  $\Psi_{\ell m}$  归一化积分时的过程几乎完全相同:

$$\begin{aligned}
 c_{\ell, -m} &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell, -m} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \Psi_{\ell m}(\theta) \Psi_{\ell, -m}(\theta) \\
 &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell, -m} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell-m} \sin^{2\ell} \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\
 &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell, -m} \int_{-1}^1 \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} (x^2 - 1)^\ell \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell dx \\
 &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell, -m} (-1)^{\ell+m} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}} (x^2 - 1)^\ell dx \\
 &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell, -m} (-1)^m (2\ell)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^\ell dx \\
 &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell, -m} (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2} \\
 &= (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \frac{N_{\ell, -m}}{N_{\ell m}} \\
 &= (-1)^m
 \end{aligned}$$

## 例题5: 3个 $Y_{\ell m}$ 积分的对称性

证明, 要使单位球面上的积分

$$\int Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n}$$

非零, 则必须有:

- ▶  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ ;
- ▶ 以  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  为三条边可以构成三角形,  
即  $|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$ ;
- ▶  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$  是偶数。

# 第一个条件的证明

$$Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) \propto \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta) \Psi_{\ell_2 m_2}(\theta) \Psi_{\ell_3 m_3}(\theta) e^{i(m_1 + m_2 + m_3)\phi}.$$

如果  $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$ , 则对  $\phi$  积分已经是零。

## 第二个条件的证明

下面考虑  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$  的情况, 如果  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  不能构成三角形, 不妨设  $\ell_1 > \ell_2 + \ell_3$ , 则运用分部积分的技巧:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta) \Psi_{\ell_2 m_2}(\theta) \Psi_{\ell_3 m_3}(\theta) \sin \theta d\theta \\
 = & \int_{-1}^1 \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}} (x^2-1)^{\ell_1} \frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}} (x^2-1)^{\ell_2} \frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}} (x^2-1)^{\ell_3} dx \\
 = & (-1)^{\ell_1+m_1} \int_{-1}^1 (x^2-1)^{\ell_1} \\
 & \times \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}} \left[ \frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}} (x^2-1)^{\ell_2} \frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}} (x^2-1)^{\ell_3} \right] dx \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

最后一步的结果是根据蓝色部分是次数低于  $\ell_1 + m_1$  次的多项式, 求导  $\ell_1 + m_1$  次后显然为零。

## 第三个条件的证明

$$\begin{aligned} & Y_{\ell_1 m_1}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(-\mathbf{n}) \\ = & (-1)^{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}), \end{aligned}$$

显然若  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$  为奇数时，积分在  $\mathbf{n}$  和  $-\mathbf{n}$  处两两抵消，结果为零。

# 球谐函数的加法公式

$$P_{\ell}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2)$$

# 球谐函数的加法公式

设 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 为任意两个方向, 则

$$P_{\ell}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2),$$

这里的 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ 是 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的夹角的余弦。它可以用 $\mathbf{n}_1$ 的坐标 $(\theta_1, \phi_1)$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的坐标 $(\theta_2, \phi_2)$ 明确地表示出来:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

## 证明

考虑在单位球面上的电荷产生的电势。  
在单位球内:

$$u(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell, m} c_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r < 1;$$

在单位球外:

$$u(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell, m} c_{\ell m} r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r > 1.$$

根据高斯定理算出单位球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\mathbf{n}) = \epsilon_0 \sum_{\ell, m} (2\ell + 1) c_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$



## 证明 (续)

然后考虑球面上 $\mathbf{n}_1$ 处有点电荷的情况:

$$\sigma(\mathbf{n}) = Q\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_1) = Q \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

对比系数我们确定

$$c_{\ell m} = \frac{Q}{(2\ell + 1)\epsilon_0} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1).$$

即在球内的电势为

$$u(r, \mathbf{n}_2) = \frac{Q}{(2\ell + 1)\epsilon_0} \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2) r^\ell, \quad r < 1.$$

## 证明 (续)

另一方面, 根据库仑定律直接可以算出  $(r, \mathbf{n}_2)$  处的电势为

$$u(r, \mathbf{n}_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 + r^2 - 2r\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} P_{\ell}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) r^{\ell}.$$

比较  $r^{\ell}$  的系数, 即得证。

## 课后作业(题号54-56)

### 54 计算积分

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) \ln(1-x) dx,$$

其中  $P_{\ell}$  为勒让德多项式。

### 55 证明 $\cos \theta Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ 可以写成 $Y_{\ell+1,m}(\theta, \phi)$ 和 $Y_{\ell-1,m}(\theta, \phi)$ 的线性组合:

$$\cos \theta Y_{\ell m}(\theta, \phi) = a Y_{\ell+1,m}(\theta, \phi) + b Y_{\ell-1,m}(\theta, \phi),$$

其中  $a, b$  为只依赖于  $\ell, m$  的常数。

## 课后作业(题号54-56)

- 56 我们曾经提到过同样的 $\mathbf{k}$ 对应的不同坐标系的谐函数可以互相线性表示出来。对直角坐标系和球坐标系而言，我们在课上证明了轴对称的情况。请利用球面谐函数的加法公式把这个结果推广到任意的平面波：

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell, m} i^\ell Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) j_\ell(kr),$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$ ， $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}$ 分别是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量。