Methods of Mathematical Physics

§6 Delta Function and Fourier Transform

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 狄拉克δ函数
- 傅立叶变换

又高又瘦的δ函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$$

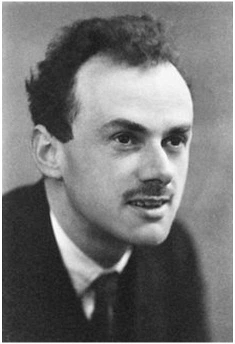
物理里的理想化模型

物理里有很多“无穷大×无穷小 = 有限“的模型：

- 瞬时冲量： 力无限大，作用时间无穷短，但两者的乘积（冲量）是有限的。
- 质点：质量密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总质量）是有限的。
- 点电荷：电荷密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总电荷）是有限的。

在数学上这些表述都是不合法的，需要搞很多事情才能把这些模型说清楚。 不喜欢搞事情的物理学家们于是发明了δ函数。

重量级dalao —— Paul Dirac （狄拉克）



你们不要搞事情

Dirac δ function

Dirac δ function 不是传统意义上的函数。它可以通过下面的单位脉冲函数取脉冲时间为零的极限得到：

$$\delta_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{if } -\frac{\epsilon}{2} < x < \frac{\epsilon}{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

其中$\epsilon \to 0^+$。

在本课程中，我们简称Dirac δ function为δ函数，并简写为$\delta(x)$。

δ函数的另一种逼近方式

有时候需要计算δ函数的导数甚至高阶导数，这时可以考虑用高斯函数逼近方式：

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}},$$

其中$\epsilon \to 0^+$。

注：这一般只是为了帮助理解δ函数的导数的图像，并非为了计算。如果要用具体的逼近方式来进行计算，δ函数的便捷性就大打折扣了。

δ函数的抽象定义

借助上述两种逼近方式的辅助，我们归纳出δ函数的下述抽象定义：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{if } x = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

从上述抽象定义中可以看出δ函数是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

此外，积分的范围可以限定在0的任意小领域。

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\, dx = 1.$$

δ函数最重要的性质

从被使用频率上来讲，下式至关重要：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0).$$

（请自行用物理图像理解上式）

侮辱智商的思考题（变相点名）

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{\pi}{2}) \cos x \, dx$$

δ函数的导函数

利用δ函数在两边都是零的特点，可以用分部积分的方法得到δ函数的导数的性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^n}{dx^n}\delta(x-x_0)\right]f(x)\,dx=(-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

侮辱智商的思考题（变相点名）

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - \frac{\pi}{2}) \cos x \, dx$$

δ函数的终极大招

用变量替换的方法可以得到：

$$\boxed{\delta\left(\alpha(x)\right) = \sum_{\text{roots}} \frac{\delta(x - x_i)}{|\alpha'(x_i)|}}$$

求和对所有$\alpha(x)$的根$x_1, x_2, \ldots$进行。

（请思考当$\alpha(x)$没有根或者有重根的情形上面的等式会如何。）

另一种等价的写法是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\alpha(x)\right) f(x)\, dx = \sum_{\text{roots}} \frac{f(x_i)}{|\alpha'(x_i)|}.$$

侮辱智商的思考题（变相点名）

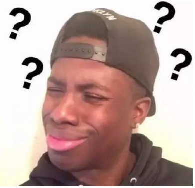
计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1)e^x \, dx$$

傅立叶变换

无穷维空间的旋转

据说你们学过线性代数



线。性。代。数。

从实数矢量的内积说起

考虑n维平直的内积实空间的矢量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$都是实数。

两个矢量的内积定义为：

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

一个矢量的长度定义为

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

换基：正交变换

在内积空间里一个“没有拉伸和变形”的旋转，新基矢可以由老基矢正交变换得到：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}'_1 \\ \mathrm{e}'_2 \\ \cdots \\ \mathrm{e}'_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 \\ \mathrm{e}_2 \\ \cdots \\ \mathrm{e}_n \end{pmatrix}$$

其中R是一个$n \times n$的正交矩阵 ($R^T R = I$)。

在换基的操作下，矢量的分量也会发生变化：

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$$

显然，两个矢量的内积不变

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

复矢量的内积和长度

对复矢量(即矩阵元允许为复数的$n \times 1$矩阵)，我们通常只要把转置变成“共轭转置”（即转置并对每个分量取共轭）：

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i.$$

矢量长度为

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

注：共轭转置和转置一样，可以进行“倒序乘展开”

$$(A_1 A_2 \ldots A_{N-1} A_N)^\dagger = A_N^\dagger A_{N-1}^\dagger \ldots A_2^\dagger A_1^\dagger.$$

换基：酉变换

在复内积空间里一个"没有拉伸和变形"的旋转，新基矢可以由老基矢酉变换得到：

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

其中U是一个$n \times n$的酉矩阵 $(U^\dagger U = I)$。

在换基的操作下，复矢量的分量也会发生变化：

$$\mathbf{x}' = U^* \mathbf{x}$$

显然，两个矢量的内积不变

$$\mathbf{x}'^\dagger \mathbf{y}' = \mathbf{x}^\dagger U^T U^* \mathbf{y} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y}$$

思考题

对任意正整数N以及整数k，证明

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi nki}{N}} = \begin{cases} N, & \text{if } \mathrm{mod}(k,N)=0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

其中$\mathrm{mod}(k,N)=0$指k能被N整除。

思考题

设$N \times N$矩阵E的第m行第n列元素定义为

$$E_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi mni}{N}}$$

这里我们采用C语言的从零计数的习惯，$m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$。

1. 试证明E是酉矩阵。
2. 对变换$\mathbf{x}' = E^*\mathbf{x}$，证明其逆变换为$\mathbf{x} = E^T\mathbf{x}'$。
3. 证明变换$\mathbf{x}' = E^*\mathbf{x}$保持复矢量长度不变。

函数的内积

实变量(但函数值允许为复数)的函数f和g的内积定义为

$$f \cdot g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x)\, dx.$$

把函数离散化理解

设想把实轴进行了间隔为dx的划分$x_0, x_1, x_2, \ldots$，把 $f_i\sqrt{dx}$ 当成复矢量的分量，其中$f_i = f(x_i)$.

傅立叶变换

考虑$N\to\infty$的情况，利用$E_{mn}=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{\frac{2\pi mni}{N}}$为酉矩阵， 把复矢量$f$进行酉变换到另一个“傅立叶空间”。在傅立叶空间里，通常我们使用变量k。

$$\tilde{f}_m\sqrt{dk}=\sum_n E^*_{mn}f_n\sqrt{dx}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n e^{-\frac{2\pi mni}{N}}f_n\sqrt{dx}.$$

令傅立叶空间里的划分宽度$dk=\frac{2\pi}{Ndx}$，则$k_mx_n=\frac{2\pi mn}{N}$， 上式可以写成

$$\tilde{f}_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n e^{-ik_mx_n}f_ndx.$$

写成积分形式

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)dx$$

逆变换

利用酉变换的逆变换立刻可以写出傅立叶变换的逆变换:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

傅立叶变换保持矢量长度不变

利用酉变换保持矢量长度不变的性质，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx.$$

δ函数的傅立叶变换

考虑$f(x) = \delta(x)$ 的傅立叶变换

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

再进行逆变换，我们就得到一个非常有用的恒等式：

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x).}$$

思考题

利用

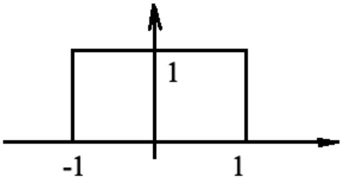
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \delta(x),$$

你能直接证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

吗?

思考题



$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

计算如图函数的傅立叶变换，然后利用傅立叶变换保持内积不变的性质，求积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

课后作业

16 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sin x)\, e^{-|x|} dx.$$

17 计算高斯函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

的傅立叶变换。

18 用你喜欢的方法求积分

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$