Methods of Mathematical Physics

§23 Advanced Topics on $Y_{\ell m}$'s

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- δ函数和正交归一完备函数组的关系
- 球面谐函数的微分表达式
- 球面谐函数的加法公式

δ函数和正交归一完备函数组的关系

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sum_i Q_i(\mathbf{x}) Q_i(\mathbf{x}')$$

δ函数和正交归一完备函数组的关系

设n维空间的某区域Ω内函数组$Q_i(\mathbf{x})$构成正交归一的完备函数组，即

$$\int_\Omega Q_i(\mathbf{x}) Q_j(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} = \delta_{ij},$$

由完备性，Ω内的函数总是可以用$Q_i(\mathbf{x})$进行展开，特别地，对固定的$\mathbf{x}'$，我们把函数$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$进行展开：

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i c_i Q_i(\mathbf{x})$$

由Q_i的正交归一性，系数

$$c_i = \int_\Omega \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') Q_i(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} = Q_i(\mathbf{x}')$$

δ函数和正交归一完备函数组的关系

把c_i代回去得到:

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i Q_i(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}).$$

如果是用复函数内积定义的正交归一性，则上式变为

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i Q_i^*(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}).$$

如果正交归一性里的内积定义带权重：$\int_\Omega Q_i(\mathbf{x})Q_j(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} = \delta_{ij}$，则

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i \rho(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}).$$

单位球面上的δ函数

单位球面上的坐标θ,ϕ对应了一个方向$\mathbf{n}$(从原点出发指向单位球面上θ,ϕ点的单位矢量)。单位球面上的函数可以抽象地写为$f(\mathbf{n})$的形式。单位球面上的面积元$\sin\theta d\theta d\phi$可以抽象地写作$d^2\mathbf{n}$。

在不致引起混淆的情况下，我们也用$Y_{\ell m}(\mathbf{n})$来表示$Y_{\ell m}(\theta,\phi)$。根据前面的讨论，有

$$\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}') = \sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}') Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

这里的$\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}')$是单位球面上的二维$\delta$函数（在$\mathbf{n}'$处的大小为$\epsilon\to 0^+$的小面积上的函数值为$\frac{1}{\epsilon}$，其余处处为零）。$\sum_{\ell m}$是双重求和$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}$的简写。

球面谐函数的微分表示

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}$$

准备工作：乘积多重导数公式

设f,g为x的函数，我们都知道

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

这个公式可以推广到任意阶导数：

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)},}$$

其中 $f^{(k)}$表示f的k重导数。

(和二项式定理一样，这个公式最简明有效的证明方法是用数学归纳法，请自行完成。）

准备工作：推广的乘积多重导数公式

设ρ, f, g为x的函数，则

$$\boxed{\left(\rho\frac{d}{dx}\right)^n(fg)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[\left(\rho\frac{d}{dx}\right)^k f\right]\left[\left(\rho\frac{d}{dx}\right)^{n-k} g\right],}$$

证明思路：令$y=\int\frac{dx}{\rho}$并对变量y应用乘积的多重导数公式。

思考题

记算符 $\hat{D} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$，请验证:

- $\hat{D}\sin^2\theta = 2\cos\theta$;
- $\hat{D}^2\sin^2\theta = -2$;
- 对整数$n > 2$，$\hat{D}^n\sin^2\theta = 0$.
- $\hat{D}\cos\theta = -1$;
- 对整数m，$\hat{D}\sin^m\theta = m\sin^{m-2}\theta\cos\theta$;
- 对整数m，$\hat{D}(\sin^m\theta\cos\theta) = m\sin^{m-2}\theta - (m+1)\sin^m\theta$;

球面谐函数的微分表达式

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}$$

证明概要

记

$$N_{\ell m} := \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}};$$

$$\Psi_{\ell m}(\theta) := \sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta.$$

则只要证明微分方程和归一化:

- $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Psi_{\ell m}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Psi_{\ell m}=0.$$

- $$\int_0^\pi[\Psi_{\ell m}(\theta)]^2\sin\theta d\theta=\frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2}=4^\ell(\ell!)^2\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\frac{2}{2\ell+1}.$$

第一部分：微分方程

令 $\hat{D} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$，在恒等式

$$\sin^2\theta\,\hat{D}\sin^{2\ell}\theta = 2\ell\cos\theta\sin^{2\ell}\theta$$

两边作用 $\hat{D}^{\ell+m}$，得到

$$\begin{aligned} & \sin^2\theta\,\hat{D}^{\ell+m+1}\sin^{2\ell}\theta + 2(\ell+m)\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta \\ & -(\ell+m)(\ell+m-1)\,\hat{D}^{\ell+m-1}\sin^{2\ell}\theta \\ = \ & 2\ell\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta - 2\ell(\ell+m)\,\hat{D}^{\ell+m-1}\sin^{2\ell}\theta. \end{aligned}$$

稍作整理：

$$\begin{aligned} & \sin^2\theta\,\hat{D}^{\ell+m+1}\sin^{2\ell}\theta + 2m\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta \\ & +(\ell+m)(\ell-m+1)\,\hat{D}^{\ell+m-1}\sin^{2\ell}\theta = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

第一部分：微分方程

两边同乘以$\sin^m\theta$，并利用

$$\sin^{m+2}\theta\,\hat{D}^{\ell+m+1}\sin^{2\ell}\theta + 2m\sin^m\theta\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta$$
$$+(\ell+m)(\ell-m+1)\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m-1}\sin^{2\ell}\theta = 0.$$

上式可以写成

$$\sin^2\theta\,\hat{D}\left[\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right] + m\sin^m\theta\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta$$
$$+(\ell+m)(\ell-m+1)\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m-1}\sin^{2\ell}\theta = 0.$$

第一部分：微分方程

两边作用 $\hat{D}$，得到

$$\hat{D}\left\{\sin^2\theta\,\hat{D}\left[\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]\right\}+m^2\sin^{m-2}\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta$$
$$-m(m+1)\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta+m\sin^m\theta\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m+1}\sin^{2\ell}\theta$$
$$+(\ell+m)(\ell-m+1)m\sin^{m-2}\cos\theta\,\hat{D}^{\ell+m-1}\sin^{2\ell}\theta$$
$$+(\ell+m)(\ell-m+1)\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta=0.$$

利用前面的方程(1)，把上式蓝色部分替换掉，得到：

$$\hat{D}\left\{\sin^2\theta\,\hat{D}\left[\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]\right\}+m^2\sin^{m-2}\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta$$
$$-m(m+1)\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta-2m^2\sin^{m-2}\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta$$
$$+2m^2\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta$$
$$+(\ell+m)(\ell-m+1)\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta=0.$$

第一部分：微分方程

把同类项都写到一起就得到了最后的结果

$$\hat{D}\left\{\sin^2\theta\,\hat{D}\left[\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]\right\} + \left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\sin^m\theta\,\hat{D}^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta = 0.$$

即

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Psi_{\ell m}\right] + \left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Psi_{\ell m} = 0.$$

第一部分证毕。

第二部分：归一化

$$\int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin\theta d\theta$$
$$= \int_0^\pi \sin^{2m}\theta \left[\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]\sin\theta d\theta$$
$$= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m\left[\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(1-x^2)^\ell\right]^2 dx$$

在最后一步我们做了变量替换$x=\cos\theta$。

第二部分：归一化

分部积分$\ell + m$次，注意$1 - x^2$在端点总是消失，就得到

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin\theta d\theta \\
= \;& (-1)^{\ell+m} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^\ell \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \left[(1-x^2)^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell \right] dx \\
= \;& \frac{(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^\ell dx
\end{aligned}
$$

注意蓝色部分之所以为常数，是因为$(1-x^2)^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(1-x^2)^\ell$是$\ell + m$次多项式，求导$\ell + m$次后只有最高次幂有非零贡献。

第二部分：归一化

最后，做变量替换$t = \frac{1+x}{2}$，得到

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin\theta d\theta \\ = & \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \int_0^1 t^\ell (1-t)^\ell dt \\ = & \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{[\Gamma(\ell+1)]^2}{\Gamma(2\ell+2)} \\ = & \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{(\ell!)^2}{(2\ell+1)!} \\ = & 4^\ell (\ell!)^2 \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1} \end{aligned}$$

第二部分证毕。

罗巨格公式

在球面谐函数的微分表示中令$m=0$，即得到

$$Y_{\ell 0}(\theta,\phi)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^\ell \sin^{2\ell}\theta.$$

利用$P_\ell(\cos\theta)=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell 0}(\theta,\phi)$，上式成为

$$P_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell.$$

这就是著名的罗巨格公式 (Rodrigues' Formula).

罗巨格公式的直接证明

用球面谐函数的微分表示导出罗巨格公式有点杀鸡用牛刀的感觉。

令$t = x - 1$，也可以直截了当地用P_ℓ的定义证明罗巨格公式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right] &= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^\ell(1+\frac{t}{2})^\ell\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{2^k k!(\ell-k)!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^{\ell+k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^k \\
&= P_\ell(x)
\end{aligned}$$

连带勒让德函数(Associated Legendre Functions)

很多MMP教材上的推导次序是相反的：从勒让德函数引出一个连带勒让德函数：

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \ell.$$

然后再通过连带勒让德函数引出$m \geq 0$的球面谐函数，最后再定义$Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y^*_{\ell m}$来确定$m < 0$的球面谐函数。

P_ℓ^m跟$\Psi_{\ell m}$之间的关系显而易见：

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\Psi_{\ell m}(\theta).$$

例题1

把x^n $(n \geq 0, n \in Z, -1 \leq x \leq 1)$ 展开成

$$x^n = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell P_\ell(x)$$

计算系数c_ℓ。

解答

根据$P_\ell(x)$的正交归一性以及罗巨格公式，分部积分ℓ次，得到:

$$
\begin{aligned}
c_\ell &= \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)x^n dx \\
&= \frac{2\ell+1}{2^{\ell+1}\ell!}\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \\
&= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\ell x^{n-\ell} dx
\end{aligned}
$$

显然当$n-\ell$为奇数时，$c_\ell = 0$。

解答（续）

当$n-\ell$为偶数时，设$n-\ell=2k$，并做变量替换$t=x^2$：

$$
\begin{aligned}
c_\ell &= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!}\int_0^1 (1-t)^\ell t^{k-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{(2\ell+1)(2k+\ell)!}{2^{\ell+1}\ell!(2k)!}\,\frac{\Gamma(\ell+1)\;\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell+k+\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{(2\ell+1)(2k+n)!\,\Gamma\left(\frac{n-\ell+1}{2}\right)}{2^{\ell+1}(2k)!\,\Gamma\left(\frac{n+\ell+3}{2}\right)} \\
&= \frac{2^\ell(2\ell+1)(\ell+k)!(\ell+2k)!}{k!(2\ell+2k+1)!}
\end{aligned}
$$

因此最后得到：

$$
x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{2^{n-2k}(2n-4k+1)(n-k)!n!}{k!(2n-2k+1)!}P_{n-2k}(x).
$$

例题2

把$e^{i\lambda x}$ $(-1 \le x \le 1$为变量，λ为任意实数参量)展开成级数：

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(\lambda) P_\ell(x).$$

试计算展开系数$c_\ell(\lambda)$的显式表达式。

解答

$$
\begin{aligned}
e^{i\lambda x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \lambda^n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{i^n \lambda^n}{n!} \frac{2^{n-2k}(2n-4k+1)(n-k)!n!}{k!(2n-2k+1)!} P_{n-2k}(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell}(2\ell+1) P_\ell(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{\ell+2k}(\ell+k)!}{k!(2\ell+2k+1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_\ell(x) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\ell+2k+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_\ell(\lambda) P_\ell(x)
\end{aligned}
$$

评论

在最后得到的结果

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}j_{\ell}(\lambda)P_{\ell}(x)$$

里，令$\lambda = kr$，$x = \cos\theta$，则得到

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}j_{\ell}(kr)P_{\ell}(\cos\theta)$$

这相当于把波矢沿z轴方向的平面波写成了k相同的一堆球坐标系谐函数的线性组合（由轴对称性显然$m \neq 0$的项不会出现），再次验证了我们之前说过的“同一个k对应的不同坐标系下谐函数只是重新进行了线性组合而已“。

例题3：$Y_{\ell m}(\mathbf{n})$和$Y_{\ell,m}(-\mathbf{n})$之间的关系

证明：对相反的两个方向，有

$$\boxed{Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(-\mathbf{n})}$$

解答

如果**n**对应(θ,ϕ)，则$-$**n**对应$(\pi-\theta,\pi+\phi)$。

$$
\begin{aligned}
& Y_{\ell m}(\pi-\theta,\pi+\phi) \\
= \quad & N_{\ell m}\left\{\sin^m(\pi-\theta)\left[\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}\frac{d}{d(\pi-\theta)}\right]^{\ell+m}\sin^{2\ell}(\pi-\theta)\right\}e^{im(\pi+\phi)} \\
= \quad & N_{\ell m}\left\{\sin^m\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right\}(-1)^m e^{im\phi} \\
= \quad & (-1)^{\ell+2m}N_{\ell m}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi} \\
= \quad & (-1)^{\ell}Y_{\ell m}(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

例题4: $Y_{\ell m}$和$Y_{\ell,-m}$之间的关系

证明

$$\boxed{Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)}$$

解答

把$Y^*_{\ell m}(\theta,\phi) = N_{\ell,m}\Psi_{\ell m}(\theta)e^{-im\phi}$在单位球面上展开：

$$Y^*_{\ell m}(\theta,\phi) = \sum_{\ell',m'} c_{\ell' m'} Y_{\ell' m'}(\theta,\phi).$$

两边同乘以$Y^*_{\ell' m'}$并在单位球面上积分，得到

$$c_{\ell' m'} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi).$$

即

$$c_{\ell' m'} = N_{\ell' m'} N_{\ell m} \int_0^\pi \Psi_{\ell' m'}(\theta)\Psi_{\ell m}(\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m'+m)\phi}.$$

显然，当$m' + m \neq 0$时上式为零。当$m' = -m$，
但$\ell \neq \ell'$时，$\Psi_{\ell m}(\theta)\cos m\phi$和$\Psi'_{\ell' m'}(\theta)\cos m\phi$都是单位球面上的谐函数，且它们对应不同的$k^2_{2D}$ (即$\ell(\ell+1)$和$\ell'(\ell'+1)$)，根据一般正交定理，上式的积分仍为零。

解答(续)

因此我们只需要计算$c_{\ell,-m}$。剩下的计算和证明$\Psi_{\ell m}$归一化积分时的过程几乎完全相同：

$$
\begin{aligned}
c_{\ell,-m} &= 2\pi N_{\ell m}N_{\ell,-m}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \Psi_{\ell m}(\theta)\Psi_{\ell,-m}(\theta) \\
&= 2\pi N_{\ell m}N_{\ell,-m}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell-m}\sin^{2\ell}\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta \\
&= 2\pi N_{\ell m}N_{\ell,-m}\int_{-1}^1 \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m}N_{\ell,-m}(-1)^{\ell+m}\int_{-1}^1 (x^2-1)^\ell\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m}N_{\ell,-m}(-1)^m(2\ell)!\int_{-1}^1(1-x^2)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m}N_{\ell,-m}(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2} \\
&= (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{N_{\ell,-m}}{N_{\ell m}} \\
&= (-1)^m
\end{aligned}
$$

例题5: 3个$Y_{\ell m}$积分的对称性

证明，要使单位球面上的积分

$$\int Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n}$$

非零，则必须有：

- $m_1 + m_2 + m_3 = 0$;
- 以ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3为三条边可以构成三角形，即$|\ell_1 - \ell_2| \le \ell_3 \le \ell_1 + \ell_2$;
- $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$是偶数。

第一个条件的证明

$$Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n})Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n})Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) \propto \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta)\Psi_{\ell_2 m_2}(\theta)\Psi_{\ell_3 m_3}(\theta)e^{i(m_1+m_2+m_3)\phi}.$$

如果$m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$，则对ϕ积分已经是零。

第二个条件的证明

下面考虑$m_1+m_2+m_3=0$的情况，如果ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3不能构成三角形，不妨设$\ell_1>\ell_2+\ell_3$，则运用分部积分的技巧：

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta)\Psi_{\ell_2 m_2}(\theta)\Psi_{\ell_3 m_3}(\theta)\sin\theta d\theta \\
= & \int_{-1}^1 \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}}(x^2-1)^{\ell_1}\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}}(x^2-1)^{\ell_2}\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}}(x^2-1)^{\ell_3}dx \\
= & (-1)^{\ell_1+m_1}\int_{-1}^1 (x^2-1)^{\ell_1} \\
& \times \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}}\left[\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}}(x^2-1)^{\ell_2}\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}}(x^2-1)^{\ell_3}\right]dx \\
= & 0
\end{aligned}$$

最后一步的结果是根据蓝色部分是次数低于ℓ_1+m_1次的多项式，求导ℓ_1+m_1次后显然为零。

第三个条件的证明

$$
\begin{aligned}
& Y_{\ell_1 m_1}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(-\mathbf{n}) \\
= \quad & (-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}),
\end{aligned}
$$

显然若$\ell_1+\ell_2+\ell_3$为奇数时，积分在$\mathbf{n}$和$-\mathbf{n}$处两两抵消，结果为零。

球谐函数的加法公式

$$P_\ell(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2)$$

球谐函数的加法公式

设$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$为任意两个方向，则

$$P_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)=\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2),$$

这里的$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2$是$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$的夹角的余弦。它可以用$\mathbf{n}_1$的坐标$(\theta_1,\phi_1)$和$\mathbf{n}_2$的坐标$(\theta_2,\phi_2)$明确地表示出来:

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2).$$

证明

考虑在单位球面上的电荷产生的电势。
在单位球内：

$$u(r,\mathbf{n}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r < 1;$$

在单位球外：

$$u(r,\mathbf{n}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m} r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r > 1.$$

根据高斯定理算出单位球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\mathbf{n}) = \epsilon_0 \sum_{\ell,m} (2\ell+1) c_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

证明（续）

然后考虑球面上$\mathbf{n}_1$处有点电荷的情况:

$$\sigma(\mathbf{n}) = Q\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}_1) = Q\sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

对比系数我们确定

$$c_{\ell m} = \frac{Q}{(2\ell+1)\epsilon_0}Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1).$$

即在球内的电势为

$$u(r,\mathbf{n}_2) = \frac{Q}{(2\ell+1)\epsilon_0}\sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2)r^\ell, \quad r<1.$$

证明（续）

另一方面，根据库仑定律直接可以算出(r, n_2)处的电势为

$$u(r, \mathbf{n}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1 + r^2 - 2r\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell} P_\ell(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)r^\ell.$$

比较r^ℓ的系数，即得证。

课后作业(题号54-56)

54 计算积分

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\ln(1-x)dx,$$

其中P_ℓ为勒让德多项式。

55 证明$\cos\theta Y_{\ell m}(\theta,\phi)$可以写成$Y_{\ell+1,m}(\theta,\phi)$和$Y_{\ell-1,m}(\theta,\phi)$的线性组合:

$$\cos\theta Y_{\ell m}(\theta,\phi) = aY_{\ell+1,m}(\theta,\phi) + bY_{\ell-1,m}(\theta,\phi),$$

其中a, b为只依赖于ℓ, m的常数。

课后作业(题号54-56)

56 我们曾经提到过同样的k对应的不同坐标系的谐函数可以互相线性表示出来。对直角坐标系和球坐标系而言，我们在课上证明了轴对称的情况。请利用球面谐函数的加法公式把这个结果推广到任意的平面波:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell,m} i^{\ell} Y^{*}_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) j_{\ell}(kr),$$

其中$r = |\mathbf{x}|$， $\hat{\mathbf{x}}$和$\hat{\mathbf{k}}$分别是$\mathbf{x}$和$\mathbf{k}$方向的单位矢量。