Methods of Mathematical Physics

§2 Risidue Theorem

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

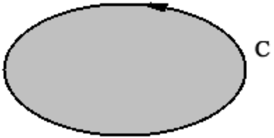
- Laurent展开
- 留数定理

Laurent展开

把负次幂补上，但其实最重要的只是-1次幂

上讲内容摘要

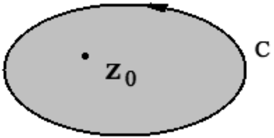
柯西定理：**解析函数沿解析区域边界上的积分为零。**（当然，要求函数在边界上连续）。



$$\oint_C f(z)dz = 0$$

上讲内容摘要

柯西积分公式：**解析函数在解析区域内任意一点的任意阶导数都可以用边界上的积分表示出来。**

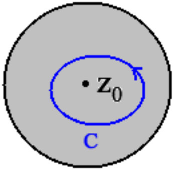


$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

C可以是包含z_0的任意解析区域的边界（当然，要求函数在边界上连续）。

上讲内容摘要

在一个圆内解析的函数可以看成在圆心展开的Taylor级数。



设$f(z)$在圆$|z-z_0|<R$ (这里允许$R=\infty$)内解析，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, |z-z_0|<R.$$

其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

围道C为任意逆时针方向围绕z_0一周的分段光滑曲线。

思考题

柯西积分公式

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

等式右边是沿边界的积分，按柯西定理结果恒为零......吗？感觉哪里不对了😭

思考题

一个比较直观的说法就是，解析函数就是能用加减乘除表示出来的函数。例如z, $1/(1+z)$等都是（定义域内的）解析函数，而诸如$|z|$，$\operatorname{Arg} z$之类的函数因为无法用z的加减乘除表示出来，所以不是解析函数。

为什么在圆内解析的函数用加减乘除表示出来(即Taylor展开)之后，只包含$z-z_0$的非负次幂项，而不包含如$(z-z_0)^{-1}, (z-z_0)^{-2}, \ldots$等的负次幂项?

在一个环里解析的函数: Laurent展开定理

设$f(z)$在环区域$r < |z - z_0| < R$ (这里允许$r = 0$和$R = \infty$)内解析，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

积分路径C可以是环内任意的一条逆时针绕z_0一周的分段光滑曲线。

这个展开式称为Laurent展开。注意和Taylor展开不同，指标的求和范围从$-\infty$到∞。而且a_n不再和f在z_0处的n阶导数相关（z_0根本就不在函数的定义域内)。

Laurent

Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

Laurent和他的定理

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n; \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

第一讲“五步曲”最后一步的另一种证法

对$|z-z_0|=s<r$，取$s<q<r$并以q为半径作圆区域C_q：$|z-z_0|<q$。根据柯西积分公式：

$$
\begin{aligned}
f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{f(\zeta)}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{1}{\zeta-z_0}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n
\end{aligned}
$$

其中$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$.
请用类似的方法证明Laurent展开定理。

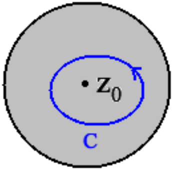
求Laurent展开的例子

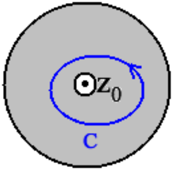
$f(z) = \frac{1}{z(1+z)}$在环区域$0 < |z| < 1$内解析，Laurent展开为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1+z)} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \ldots \end{aligned}$$

级数展开的很多技巧我们之后会结合习题进行专门讲解，先不展开讨论。

总结: Taylor展开和Laurent展开





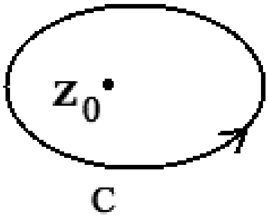
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

快速理解展开系数



设C是逆时针围绕z_0一圈的简单围道，计算积分

$$\oint_C (z-z_0)^n dz.$$

由此你能说出为什么Taylor和Laurent级数展开中n次幂项的系数总是

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

吗?

留数定理

其实就是$\frac{1}{z-z_0}$的原函数$\ln(z-z_0)$绕z_0一圈变化$2\pi i$

孤立奇点

如果$f(z)$在z_0的邻域$0 < |z - z_0| < \delta$内解析（δ可以是任意一个小的正数），但在$z = z_0$不解析（没有定义或者有定义却不可导），则称z_0为$f(z)$的**孤立奇点**。

$0, 1, 2$都是函数$\frac{1}{z^2(z^2-3z+2)}$的孤立奇点。
$\pm i$都是函数$\frac{1}{z^2+1}$的孤立奇点。

孤立奇点的留数

如果z_0是$f(z)$的孤立奇点，则f可在邻域$0<|z-z_0|<\delta$内Laurent展开。因为我们知道$(z-z_0)^n$绕z_0积分一圈当且仅当$n=-1$时结果不为零(为$2\pi i$)，所以我们特别关注$(z-z_0)^{-1}$前的系数a_{-1}，并把它称为f在z_0处的**留数**，**记作**$\operatorname{res} f(z_0)$.

$$\operatorname{res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

留数定理

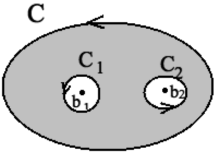
留数定理：设f在区域T内除有限个孤立奇点$b_1, b_2, \ldots, b_n$之外解析，在T的边界上连续，则f沿T的边界的积分等于$2\pi i$乘以f在所有孤立奇点处的留数之和

$$\oint_{\partial T} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f\left(b_k\right)$$

图解留数定理

两个孤立奇点的例子。根据柯西定理

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$



在C_1和C_2上的积分前多了个负号，是因为C_1和C_2方向和左内法则规定的正方向相反。

再利用$(z-b_1)^n$沿C_1积分当且仅当$n=-1$时不为零(为$2\pi i$)，即可得到

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(b_1)$$

同理有

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(b_2)$$

代回最上面的式子就得到留数定理。当孤立奇点个数更多时同理可证。

留数定理应用举例

计算定积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

留数定理应用举例

思路：首先$\frac{\sin x}{x}$是偶函数，所以

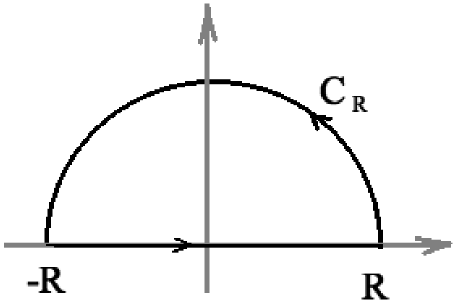
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$\sin x$是e^{ix}的虚部，即

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right)$$

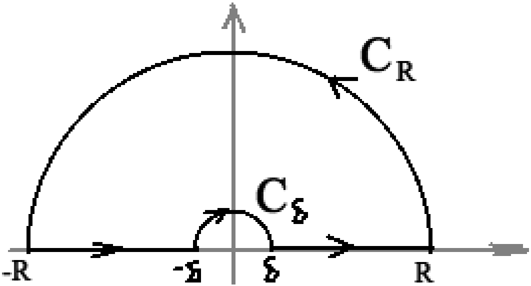
留数定理应用举例

想使用留数定理就必然要把积分路径补成一个闭合围道。考虑到e^{iz}当z的虚部很大时趋向于零，我们就尽量在上半平面补。最简单当然是补一个上半圆C_R(半径$R \to \infty$)，如下图所示：

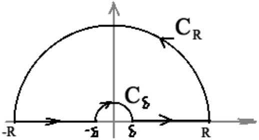


留数定理应用举例

问题是，在这个围道上$\frac{e^{iz}}{z}$在$z=0$处没有定义，我们就要想办法绕开这个奇点。
如下图所示，在原点附近拐个弯，再取一个小半圆C_δ (半径$\delta \to 0^+$)。



留数定理应用举例



在这个围道内部，$\frac{e^{iz}}{z}$处处解析，根据柯西定理或留数定理，

$$\left(\int_{-R}^{-\delta}+\int_{\delta}^{R}+\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

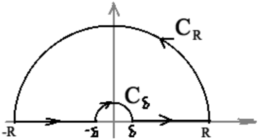
当$\delta\to 0^+$时，

$$\int_{C_\delta}\frac{e^{iz}}{z}dz\to\int_{C_\delta}\frac{1}{z}dz=\Delta\ln z=-i\pi$$

当$R\to\infty$时，可以(这里还是要稍作思考)估算出

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\to 0$$

留数定理应用举例



所以我们最后得到$\delta \to 0$, $R \to \infty$时,

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^{R}\right) \frac{e^{iz}}{z} dz \to i\pi$$

即

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(i\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

课后作业

4. 函数$\frac{e^{iz}}{z}$在环形区域$0 < |z| < \infty$内解析，试求它的Laurent展开。
5. 计算函数$\frac{e^{iz}}{z}$在$z = 0$处的留数。
6. 仿照课上用$\frac{e^{iz}}{z}$的围道积分计算

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

的方法，但是取围道时把小半圆C_δ取成下半圆，如图所示。用这个围道重新计算I。