

Methods of Mathematical Physics

§6 Delta Function and Fourier Transform

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- ▶ 狄拉克 δ 函数
- ▶ 傅立叶变换

又高又瘦的 δ 函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

物理里的理想化模型

物理里有很多“无穷大 \times 无穷小 = 有限”的模型：

- ▶ 瞬时冲量：力无限大，作用时间无穷短，但两者的乘积（冲量）是有限的。
- ▶ 质点：质量密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总质量）是有限的。
- ▶ 点电荷：电荷密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总电荷）是有限的。

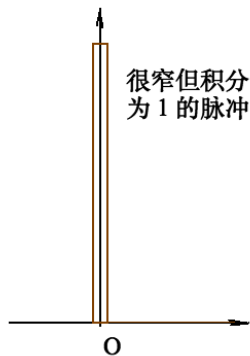
在数学上这些表述都是不合法的，需要搞很多事情才能把这些模型说清楚。不喜欢搞事情的物理学家们于是发明了 δ 函数。

重量级dalao —— Paul Dirac (狄拉克)



你们不要搞事情

Dirac δ function



Dirac δ function 不是传统意义上的函数。它可以通过下面的单位脉冲函数取脉冲时间为零的极限得到：

$$\delta_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{if } -\frac{\epsilon}{2} < x < \frac{\epsilon}{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

其中 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 。

在本课程中，我们简称Dirac δ function为 δ 函数，并简写为 $\delta(x)$ 。

δ 函数的另一种逼近方式

有时候需要计算 δ 函数的导数甚至高阶导数，这时可以考虑用高斯函数逼近方式：

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}},$$

其中 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 。

注：这一般只是为了帮助理解 δ 函数的导数的图像，并非为了计算。如果要用具体的逼近方式来进行计算， δ 函数的便捷性就大打折扣了。

δ 函数的抽象定义

借助上述两种逼近方式的辅助，我们归纳出 δ 函数的下述抽象定义：

$$\delta(0) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{if } x = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

从上述抽象定义中可以看出 δ 函数是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

此外，积分的范围可以限定在0的任意小领域。

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1.$$

δ 函数最重要的性质

从被使用频率上来讲，下式至关重要：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

(请自行用物理图像理解上式)

侮辱智商的思考题（变相点名）



计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x \, dx$$

δ 函数的导函数

利用 δ 函数在两边都是零的特点，可以用分部积分的方法得到 δ 函数的导数的性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^n}{dx^n} \delta(x - x_0) \right] f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

侮辱智商的思考题（变相点名）



计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - \frac{\pi}{2}) \cos x \, dx$$

δ 函数的终极大招

用变量替换的方法可以得到:

$$\delta(\alpha(x)) = \sum_{\text{roots}} \frac{\delta(x - x_i)}{|\alpha'(x_i)|}$$

求和对所有 $\alpha(x)$ 的根 x_1, x_2, \dots 进行。

(请思考当 $\alpha(x)$ 没有根或者有重根的情形上面的等式会如何。)

另一种等价的写法是:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha(x)) f(x) dx = \sum_{\text{roots}} \frac{f(x_i)}{|\alpha'(x_i)|}.$$

侮辱智商的思考题（变相点名）



计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1) e^x dx$$

傅立叶变换

无穷维空间的旋转

据说你们学过线性代数



线。性。代。数。

从实数矢量的内积说起

考虑 n 维平直的内积实空间的矢量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)都是实数。

两个矢量的内积定义为:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

一个矢量的长度定义为

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

换基：正交变换

在内积空间里一个“没有拉伸和变形”的旋转，新基矢可以由老基矢正交变换得到：

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

其中 R 是一个 $n \times n$ 的正交矩阵 ($R^T R = I$)。

在换基的操作下，矢量的分量也会发生变化：

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$$

显然，两个矢量的内积不变

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

复矢量的内积和长度

对复矢量(即矩阵元允许为复数的 $n \times 1$ 矩阵), 我们通常只要把转置变成“共轭转置”(即转置并对每个分量取共轭):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i.$$

矢量长度为

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

注: 共轭转置和转置一样, 可以进行“倒序乘展开”

$$(A_1 A_2 \dots A_{N-1} A_N)^\dagger = A_N^\dagger A_{N-1}^\dagger \dots A_2^\dagger A_1^\dagger.$$

换基：酉变换

在复内积空间里一个“没有拉伸和变形”的旋转，新基矢可以由老基矢酉变换得到：

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

其中 U 是一个 $n \times n$ 的酉矩阵 ($U^\dagger U = I$)。

在换基的操作下，复矢量的分量也会发生变化：

$$\mathbf{x}' = U^* \mathbf{x}$$

显然，两个矢量的内积不变

$$\mathbf{x}'^\dagger \mathbf{y}' = \mathbf{x}^\dagger U^T U^* \mathbf{y} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y}$$

思考题



对任意正整数 N 以及整数 k ，证明

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi nki}{N}} = \begin{cases} N, & \text{if } \text{mod}(k, N) = 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

其中 $\text{mod}(k, N) = 0$ 指 k 能被 N 整除。

思考题



设 $N \times N$ 矩阵 E 的第 m 行第 n 列元素定义为

$$E_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi mni}{N}}$$

这里我们采用C语言的从零计数的习惯， $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ， $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

- 1 试证明 E 是酉矩阵。
- 2 对变换 $\mathbf{x}' = E^* \mathbf{x}$ ，证明其逆变换为 $\mathbf{x} = E^T \mathbf{x}'$ 。
- 3 证明变换 $\mathbf{x}' = E^* \mathbf{x}$ 保持复矢量长度不变。

函数的内积

实变量(但函数值允许为复数)的函数 f 和 g 的内积定义为

$$f \cdot g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx.$$

把函数离散化理解

设想把实轴进行了间隔为 dx 的划分 x_0, x_1, x_2, \dots , 把 $f_i \sqrt{dx}$ 当成复矢量的分量, 其中 $f_i = f(x_i)$.

傅立叶变换

考虑 $N \rightarrow \infty$ 的情况, 利用 $E_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi mni}{N}}$ 为酉矩阵, 把复矢量 f 进行酉变换到另一个“傅立叶空间”。在傅立叶空间里, 通常我们使用变量 k 。

$$\tilde{f}_m \sqrt{dk} = \sum_n E_{mn}^* f_n \sqrt{dx} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-\frac{2\pi mni}{N}} f_n \sqrt{dx}.$$

令傅立叶空间里的划分宽度 $dk = \frac{2\pi}{Ndx}$, 则 $k_m x_n = \frac{2\pi mn}{N}$, 上式可以写成

$$\tilde{f}_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-ik_m x_n} f_n dx.$$

写成积分形式

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

逆变换

利用酉变换的逆变换立刻可以写出傅立叶变换的逆变换:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

傅立叶变换保持矢量长度不变

利用酉变换保持矢量长度不变的性质，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

δ 函数的傅立叶变换

考虑 $f(x) = \delta(x)$ 的傅立叶变换

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

再进行逆变换，我们就得到一个非常有用的恒等式：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x).$$

思考题



利用

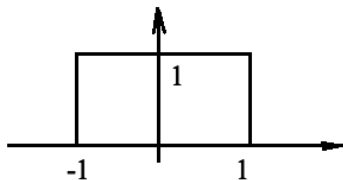
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x),$$

你能直接证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx$$

吗?

思考题



$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

计算如图函数的傅立叶变换，然后利用傅立叶变换保持内积不变的性质，求积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

课后作业

16 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sin x) e^{-|x|} dx.$$

17 计算高斯函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

的傅立叶变换。

18 用你喜欢的方法求积分

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$