

# Methods of Mathematical Physics

## §5 Contour Integration

Lecturer: 黄志琦

[https://github.com/zqhuang/SYSU\\_MMP](https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP)

# 响应教务部号召，开动点名神器



请一位同学计算一下

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 1}$$

在每个孤立奇点处的留数。

# 本讲内容

- ▶ 用留数定理计算定积分

# 据说我们学过积分？

不信谣，不传谣🤔

# 例1 (研究生面试题)



计算积分

$$\int_0^1 \ln x \, dx.$$

## 例 1 解答

$$\int_0^1 \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1$$

## 例2



计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx.$$

## 例2 解法一 (三角函数有理分式标准推土法)

回忆下高数课学过的(?)的知识: 凡是三角函数有理分式, **原则上**都能用变量替换  $t = \tan \frac{x}{2}$  求出原函数。  
请先验算:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$



## 例2 解法一 (三角函数有理分式标准推土法)

剩下的就是毫无技巧地推土:

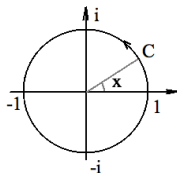
$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{2}{3+t^2} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + c \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c
 \end{aligned}$$

不必为原函数在  $x = \pi$  不连续而惊慌, 利用一下三角函数周期性把积分换到  $(-\pi, \pi)$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

## 例2 解法二 (围道积分法)

考虑逆时针方向的单位圆 $|z| = 1$ ,



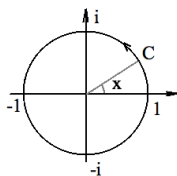
记幅角为 $x$ , 则 $z = e^{ix}$ , 请先验算:

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

## 例2 解法二 (围道积分法)



$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx &= \oint_C \frac{1}{2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{iz} \\
 &= -2i \oint_C \frac{1}{4z + z^2 + 1} dz \\
 &= -2i \left( 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$



其实我更喜欢毫无技巧地推土

## 例3



计算积分

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \, d\theta$$

### 例3 解法一

利用一个非常有用的**B函数**和**Γ函数**的关系来解决问题。

对 $\alpha, \beta > 0$ , B函数定义为:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

它和Γ函数有如下关系:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

令 $x = \cos^2 \theta$  即得到所求积分:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = 2 \int_0^1 x^{n-1/2} (1-x)^{-1/2} dx = 2B\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

# 附：补充证明 $B$ 函数和 $\Gamma$ 函数的关系（技巧似曾相识）

根据 $\Gamma$ 函数定义：

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \int_0^\infty v^{\beta-1} e^{-v} dv$$

做替换 $u = s^2, v = t^2$ ;

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4 \int_0^\infty s^{2\alpha-1} e^{-s^2} ds \int_0^\infty t^{2\beta-1} e^{-t^2} dt$$

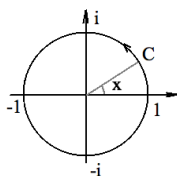
然后转换到极坐标 $s = r \cos \theta, t = r \sin \theta$ ;

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2\alpha+2\beta-2} r dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1} \theta \sin^{2\beta-1} \theta d\theta$$

最后做变量替换 $w = r^2, x = \cos^2 \theta$ ，即得证。

### 例3 解法二 围道积分

还是取单位圆进行围道积分：



$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \oint_C \left( \frac{1+z^2}{2z} \right)^{2n} \frac{dz}{iz}.$$

等式右边是标准的围道积分，围道内只有  $z=0$  一个孤立奇点。  
易看出留数为

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 i}$$

乘以  $2\pi i$  即得积分结果。



## 例4



计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx.$$

## 例4 解法一 (级数展开大法)

回忆热学课上的高斯积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} a^{-1/2}.$$

两边对  $a$  求导  $n$  次并除以  $(2n)!$ :

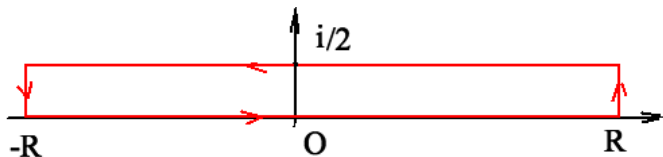
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{n!} a^{-\frac{1}{2}-n}$$

(上面我们用到了  $(2n)! = (2^n n!) \times 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$ .)

令  $a = 1$  并两边对  $n$  从 0 到  $\infty$  求和

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx = \sqrt{\pi} e^{-1/4}$$

## 例4 解法二 围道积分



在如图的围道上对函数 $e^{-x^2}$ 进行积分。

容易验证当 $R \rightarrow \infty$ 时，两条短边上的积分趋向于零。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + \frac{i}{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

化简并取实部即得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx = \sqrt{\pi} e^{-1/4},$$

(思考：取虚部可以得到什么结论)

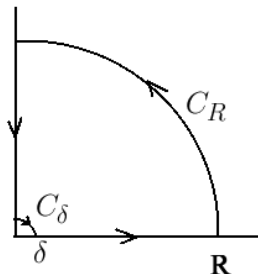
## 例5



计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx.$$

## 例5 解答概要



对  $\frac{e^{iz}}{z}$  在如图围道上积分，易估算出当  $R \rightarrow \infty$  时在  $C_R$  上积分趋向于零。 $\delta \rightarrow 0^+$  时在  $C_\delta$  上积分为  $-\frac{\pi}{2}i$ 。因此得到

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{ix} d(ix) = \frac{\pi}{2}i$$

对比两边实部即得

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0.$$

(思考：对比两边虚部得到什么结论?)

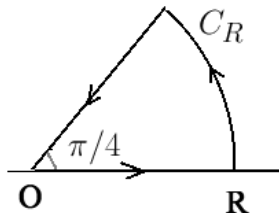
## 例 6



计算积分

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

## 例6 解答概要



对  $e^{iz^2}$  在如图围道上积分。不难估算出当  $R \rightarrow \infty$  时在  $C_R$  上积分趋向于零（请自行补充完整这部分证明）。

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx - e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 0$$

对比两边虚部即得

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

（思考：对比两边实部得到什么结论？）

## 例 7



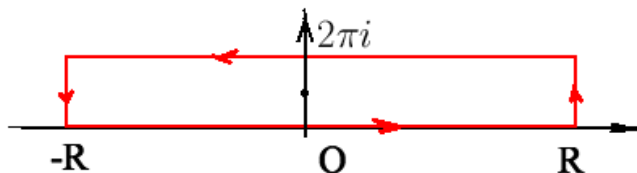
计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx,$$

其中实常数 $\alpha$ 满足 $0 < \alpha < 1$ 。



## 例7 解答概要



按如图的围道对  $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$  进行积分，并注意到围道内有一个孤立奇点  $z = \pi i$ 。记所求积分为  $I$ ，则有

$$(1 - e^{2\pi\alpha i})I = \operatorname{res} f(\pi i) = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

从而得出

$$I = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

# Γ函数的互宇宗量关系

作变量替换  $t = \frac{e^x}{1+e^x}$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-\alpha} dt = B(\alpha, 1-\alpha)$$

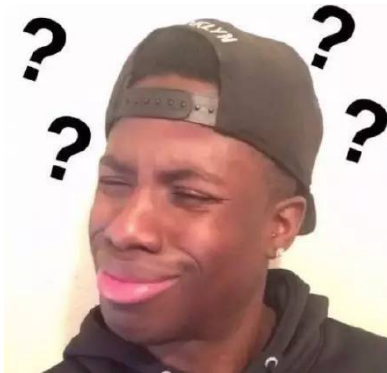
再结合之前的 $B$ 函数和 $\Gamma$ 函数的关系, 就得到著名的Γ函数的互宇宗量关系

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

用解析延拓的办法可以把上式推广到 $\alpha$ 为任何非整数的情形。

(请思考: 我们是怎样做到从一条线( $0 < \alpha < 1$ )出发进行解析延拓的.)

# 总结



完全不知道这些围道哪来的.jpg

技艺无止境：留给学神们的思考题🤔

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\int_0^1 \frac{x^{1/4}(1-x)^{3/4}}{(1+x)^3} dx;$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}}}{(x+a)^p(x+b)^p} dx, \quad p > \frac{1}{2}, a > 0, b > 0.$$

# 课后作业

## 13 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2},$$

其中常数 $\alpha$ 满足 $0 < \alpha < 1$ 。

## 14 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx.$$

## 15 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + \alpha^2} dx,$$

其中常数 $\alpha > 0$ 。