

# Methods of Mathematical Physics

## §16 Bessel Functions of the First Kind I

Lecturer: 黄志琦

[https://github.com/zqhuang/SYSU\\_MMP](https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP)

# 本讲内容

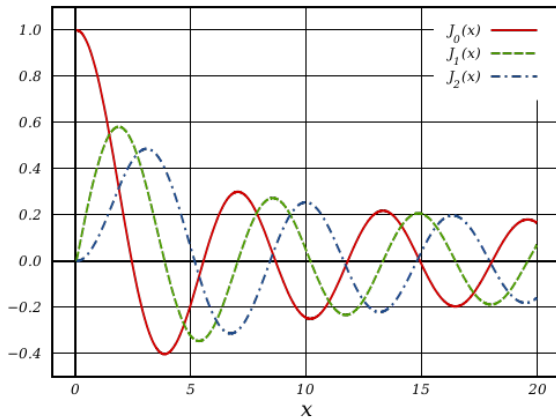
- 固定边界的圆形薄膜的振动问题

# 第一类贝塞尔函数的级数定义

第一类贝塞尔函数定义为

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

先讨论物理问题中最常用的  $m = 0, 1, 2, \dots$  的情形（ $m$ 不是整数和  $m < 0$  的情况且听下回分解）。

$J_0$ ,  $J_1$ , 和  $J_2$ 

## $J_m(x)$ 的定性特点

第一个峰，也就是最大值，大致在 $x \approx m$ 处取到

第一个峰左边近似以 $x^m$ 增长

第一个峰右边是振幅不断衰减的振荡型函数

注：在 $x$ 比较大时，振幅大致上 $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，周期趋向于 $2\pi$ 。

# 思考题



请一位同学在黑板上画出  $J_{100}(x)$  的大致图像.

# 怎么计算 $J_m(x)$

大多数编程语言(C, Fortran等)和带数学库的脚本语言 (Python, Mathematica等)都内置有贝塞尔函数，直接调用就能计算。

致手算强迫症患者😄：有一整套的近似公式可以满足你的需求，欢迎来电采购，量大优惠。

# 贝塞尔函数的递推关系

贝塞尔函数大概有几十条性质。养生MMP课里不可能全部介绍，因此，从最重要也最普遍的递推关系出发

## 贝塞尔函数的第一条递推性质

$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x).$$

## 贝塞尔函数的第二条递推性质

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x).$$

(之所以说这是普遍关系，是因为第二类贝塞尔函数  $Y_m(x)$  也满足完全一样的递推关系。)



# 贝塞尔函数的递推关系的简单应用



证明:

$$\begin{aligned}J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= 2J'_m(x), \\J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x}J_m(x).\end{aligned}$$



剩下几十条性质，从哪儿开始入手呢？

# 圆形薄膜的振动问题



考虑固定边界的，半径为 $R$ 的圆形薄膜的横向小振动问题。  
在 $t = 0$ 时刻的初始位移为 $A \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$ （其中 $A$ 为常量， $r$ 为距离圆盘中心的距离， $0 \leq r \leq R$ ），初始速度为零。求解之后薄膜的振动。

# 写出方程和边界条件

取极坐标系，设位移为  $u(r, \theta, t)$ 。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=R} &= 0, \\ u|_{t=0} &= A \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

## 分离变量

我们知道圆盘内的谐函数为  $J_m(kr)e^{\pm im\theta}$ 。在这个问题里初始条件是旋转对称的（不依赖于  $\theta$ ），所以解也不依赖于  $\theta$ 。也就是说，只需要考虑  $m = 0$  的情形，分离变量形式的解为

$$J_0(kr) \cos(akt), \quad J_0(kr) \sin(akt)$$

然后考虑边界条件：符合  $J_0(kR) = 0$  的解为

$$k = \frac{\mu_i}{R}, i = 1, 2, \dots$$

其中  $\mu_i$  是贝塞尔函数  $J_0(x)$  的第  $i$  个正实数根。

$$\mu_1 \approx 2.4048, \mu_2 \approx 5.5201, \mu_3 \approx 8.6537, \mu_4 \approx 11.7915, \\ \mu_5 \approx 14.9309, \dots$$

# 展开

解的展开形式就是

$$u = \sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \cos\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right) + s_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \sin\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right).$$

利用速度为零的初始条件，立刻可以扔掉所有 $\sin(akt)$ 项。

$$u = \sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \cos\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right).$$

再利用初始位移，得到

$$\sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) = A \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

## 展开

为了看得更清楚一点，我们把  $\frac{r}{R}$  记作  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ):

$$\sum_i c_i J_0(\mu_i x) = A(1 - x^2),$$

那么问题来了，怎么求系数  $c_i$ ?

## 求系数的套路

记得我们以前的套路是两边同乘上谐函数（正弦或余弦），然后在所求问题的物理范围内积分。利用谐函数的积分正交性就可以求出系数。

这个套路还能用吗？我们来研究一下贝塞尔函数的正交性——



# 贝塞尔函数的正交定理

设 $\mu_i, \mu_j$ 是 $J_m(x)$ 第 $i$ 个和第 $j$ 个正实数根, 则

$$\int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) dx = \delta_{ij} \frac{[J_{m+1}(\mu_i)]^2}{2}.$$

也就是说, 只要定义内积时乘上权重 $x$  (这个权重来自于极坐标系的散度的“面积修正因子”), 那么 $J_m(\mu_i x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ )就是在 $[0, 1]$ 内的正交函数组了。

## 证明

回忆  $J_m(\mu_i x)$  满足的贝塞尔方程:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d}{dx} J_m(\mu_i x) \right] + \left( \mu_i^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) J_m(\mu_i x) = 0.$$

两边同乘以  $x J_m(\mu_j x)$ , 得到

$$J_m(\mu_j x) \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d}{dx} J_m(\mu_i x) \right] + \left( \mu_i^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0. \quad (1)$$

交换  $i$  和  $j$ , 得到

$$J_m(\mu_i x) \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d}{dx} J_m(\mu_j x) \right] + \left( \mu_j^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0. \quad (2)$$

## 证明 (续)

(1)减去(2), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ xJ_m(\mu_j x) \frac{d}{dx} J_m(\mu_i x) - xJ_m(\mu_i x) \frac{d}{dx} J_m(\mu_j x) \right] \\ & + (\mu_i^2 - \mu_j^2) x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

如果  $i \neq j$ , 两边从0到1积分即得到

$$\int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0.$$

## 证明 (续)

事实上, 在推导(3)时,  $\mu_i, \mu_j$  可以为任何正数, 所以 we 还可以取  $\mu_i$  为  $J_m$  的零点, 而  $\mu_j = \mu_i + \epsilon$ 。同样从 0 到 1 积分, 得到

$$\mu_i J_m(\mu_i + \epsilon) J'_m(\mu_i) - (2\mu_i + \epsilon) \epsilon \int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m[(\mu_i + \epsilon)x] dx = 0$$

两边除以  $\epsilon$  并令  $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$\int_0^1 x [J_m(\mu_i x)]^2 dx = \frac{[J'_m(\mu_i)]^2}{2}$$

最后, 在递推关系

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x)$$

两边取  $x = \mu_i$ , 即得到  $J'_m(\mu_i) = -J_{m+1}(\mu_i)$ 。于是命题在  $i = j$  时也得到了证明。

## 回到原题

既然有了正交关系，在

$$\sum_i c_i J_0(\mu_i x) = A(1 - x^2),$$

两边乘上  $xJ_0(\mu_j x)$  并从0到1积分，得到

$$\frac{c_j}{2} [J_1(\mu_j)]^2 = A \int_0^1 x(1 - x^2) J_0(\mu_j x) dx,$$

那么，右边的积分能化简吗？

# 回到原题

考虑积分

$$I = \int_0^1 x (1 - x^2) J_0(\mu_j x) dx.$$

利用

$$\mu_j x J_0(\mu_j x) = \frac{d}{dx} [x J_1(\mu_j x)].$$

分部积分, 即得到

$$I = \left. \frac{1 - x^2}{\mu_j} x J_1(\mu_j x) \right|_0^1 + \frac{2}{\mu_j} \int_0^1 x^2 J_1(\mu_j x) dx.$$

再利用

$$\mu_j x^2 J_1(\mu_j x) = \frac{d}{dx} [x^2 J_2(\mu_j x)]$$

得到

$$I = \frac{2}{\mu_j} \int_0^1 x^2 J_1(\mu_j x) dx = \frac{2}{\mu_j^2} J_2(\mu_j).$$

## 求出系数

最后，利用

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$$

得到

$$J_2(\mu_j) = \frac{2}{\mu_j} J_1(\mu_j).$$

综合前面所有结果，得到

$$\frac{c_j}{2} [J_1(\mu_j)]^2 = A \frac{4}{\mu_j^3} J_1(\mu_j).$$

也就是

$$c_j = \frac{8A}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)}$$

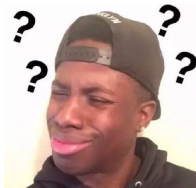
# 最终解

薄膜的振动解为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8A}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)} J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right) \cos \frac{\mu_j a t}{R}.$$

(思考: 会不会发生某个分母中的  $J_1(\mu_j) = 0$  的情况? )





刚才发生了什么.jpg

## 课后作业(题号35-37)

35 通过逐项求导的办法证明贝塞尔函数的两个递推关系

36 如果  $J_m(\mu) = 0$  ( $\mu$  为正实数,  $m$  为非负整数), 计算积分

$$\int_0^1 x [J_{m+1}(\mu x)]^2 dx.$$

37 考虑固定边界的, 半径为  $R$  的圆形薄膜的横向小振动问题。在  $t = 0$  时刻的初始速度为  $A \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$  (其中  $A$  为常量,  $r$  为距离圆盘中心的距离,  $0 \leq r \leq R$ ), 初始位移为零。求解之后薄膜的振动。