

Methods of Mathematical Physics

§1 Complex Functions

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/mmp>

本讲内容

- ▶ 复变函数
- ▶ 复变函数的求导
- ▶ 复变函数的积分
- ▶ 解析函数

复变函数

复数到复数的映射

从实变函数到复变函数的推广



实变函数

$$f(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R})$$

可以推广为复变函数

$$f(z) = z^2. \quad (z \in \mathbb{C})$$

从实变函数到复变函数的推广

实变函数



$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

可以推广为复变函数

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2}, \quad (z \in \mathbb{C})$$



这种推广简直弱爆了！

那我们继续

实变函数

$$f(x) = e^x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

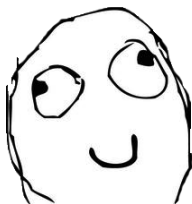
推广为复变函数

$$f(z) = ? \quad (z \in \mathbb{C})$$



当然是 e^z 啊！

但, e^z 到底是什么意思?



e^{2+3i} 是什么意思?

转化为加减乘除的问题

实变的指数函数可以用“加减乘除”来替代:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

由此自然而然地定义复变的指数函数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$



对推广到复数域的指数函数，证明“它是指数函数”。即对任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ，有

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

证明 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

命题等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{n_1! n_2!}$$

对任意 $n_1, n_2 \geq 0$, 我们来比较两边 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ 的项的系数:

左边 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ 的项只能来自于 $n = n_1 + n_2$ 的项的展开, 在展开 $(z_1 + z_2)^n$ 时在 n_1 个括号内取 z_1 , n_2 个括号内取 z_2 , 总共有 $\frac{n!}{n_1! n_2!}$ 种取法, 即左边 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ 的系数为

$$\frac{1}{n!} \frac{n!}{n_1! n_2!} = \frac{1}{n_1! n_2!}$$

和右边相同。

Euler公式

对实数 θ , 按定义

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$

上式右边 n 为偶数的项是实数项, n 为奇数的项是虚数项。分离实虚部即得:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

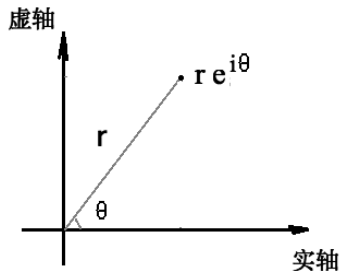
实部和虚部恰好分别是三角函数 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的级数展开式, 于是

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

这就是著名的**欧拉公式**。

复数的指数表示和复数的乘法规则

模为 r ，幅角为 θ 的复数可以写成 $re^{i\theta}$ 。



对两个复数 $r_1 e^{i\theta_1}$ 和 $r_2 e^{i\theta_2}$ ，利用刚刚证明的 $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ，就有

$$(r_1 e^{i\theta_1}) (r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2) (e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

这就是模相乘，幅角相加的复数乘法法则。

对数函数 $\ln z$ 是多值函数

设 z 的模为 r , 幅角为 θ , 则

$$e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta} = z$$

那么, 是否可以定义推广的对数函数:

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z$$

不幸地是, 因为幅角 $\arg z$ 可以随意加上 2π 的整数倍, 所以上式是一对多的映射, 不是普通意义上的函数。在复变函数论里把这样的映射称为“多值函数”。

复变函数的导数

跟实变函数没多大区别，但要小心多值函数

复变函数的导数

复变函数 $f(z)$ 的导数还是定义为 f 的微小改变量和 z 的微小改变量之比:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

因为 Δz 可以从任何方向趋向于零, 所以复变函数的可导性 (即上述极限的存在性) 是一个比较强的条件。

复变函数的导数

对 $f(z) = z^2$, 根据定义:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

复变函数的导数

对 $f(z) = \frac{1}{1+z}$, 根据定义:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+z+\Delta z} - \frac{1}{1+z}}{\Delta z} \\ &= - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{(1+z)(1+z+\Delta z)} \\ &= - \frac{1}{(1+z)^2} \end{aligned}$$

只涉及加減乘除的复变函数的求导运算和实变函数完全相同。

指数函数的导数

对 $f(z) = e^z$ 按定义式逐项求导:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d(z^n)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z$$

$\ln z$ 的连续变化观点和导数

当 $z = re^{i\theta}$ 沿复平面上的一条(不经过原点的)曲线连续变化时, 我们让幅角 θ 也连续地变化 (即不允许突然心血来潮加个 2π 什么的), 这样 $\ln z = \ln r + i\theta$ 也连续地发生变化。在这个意义下可以定义导数。

不出所料地:

$$d \ln z = d \ln r + i d\theta = \frac{dr}{r} + i d\theta = \frac{e^{i\theta} dr + i r e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta}} = \frac{dz}{z}$$

复变函数的积分

原函数如果是多值函数就要小心了

复变函数的积分

当 z 沿着一条(带方向的)分段光滑曲线 C 连续变化时, z 的变化量 dz 和 $f(z)$ 的乘积之和(当 dz 趋向于零时)的极限可以写成积分:

$$\int_C f(z)dz \equiv \lim_{dz \rightarrow 0} \sum_{z \in C} f(z)dz.$$

显然,如果把沿着曲线积分的方向改成相反,则积分结果相差个负号。

原函数

模仿实变函数的定积分技巧:

如果能找到一个函数 $F(z)$ 使得它的导数为 $f(z)$, 即

$$f(z)dz = dF(z)$$

那么 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分就只要计算从起点到终点 $F(z)$ 的总改变量就可以了。

$$\int f(z)dz = \Delta F$$

$F(z)$ 称为 $f(z)$ 的原函数。

(要注意, 原函数未必是存在的🤔)

把我们之前讨论的一切反过来写，就有

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$$

$$\int e^z dz = e^z + c,$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z + c,$$

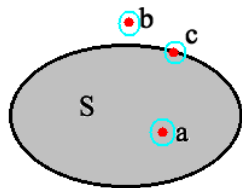
当然，最后一个等式仍然需要遵循幅角连续变化的约定。

解析函数

在任何圆内都是幂级数

内部, 外部和边界

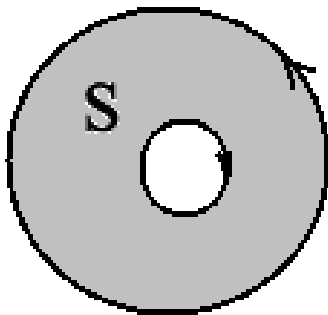
设复平面上有个点集 S 。



- ▶ 内部的点 a : 可取足够小的 δ , 使邻域 $\{z : |z - a| < \delta\}$ 完全在 S 之内。
- ▶ 外部的点 b : 可取足够小的 δ , 使邻域 $\{z : |z - b| < \delta\}$ 完全在 S 之外。
- ▶ 边界的点 c : 无论取多小的 δ , 邻域 $\{z : |z - c| < \delta\}$ 总是部分在 S 内, 部分在 S 外。

边界的方向：左内法则

我们可以对复平面上的点集 S 的边界规定一个方向：当沿着边界的正方向移动，内部的点总在你的左手边。



开区域和闭区域

- 如果点集 S 只包含内部的点，则称 S 为开区域。

举个栗子



$z : 1 < |z| < 2$ 是开区域

- 如果点集 S 包含所有边界上的点，则称 S 为闭区域。

举个栗子



$z : 1 \leq |z| \leq 2$ 是闭区域

解析函数的定义

如果复变函数 $f(z)$ 在某个开区域 S 内处处可导, 则称 $f(z)$ 为 S 上的解析函数。

(可导已经比较苛刻了, “处处可导”是更加苛刻的条件。)

思考题



在解析函数的定义里，为什么要限定处处可导的范围是开区域？
换成闭区域行吗？

解析函数的例子



$$f(z) = z^2$$

是全复平面上的解析函数。

解析函数的例子



$$f(z) = \frac{z^2}{z+1}$$

是全复平面挖去 $z = -1$ 后的区域上的解析函数。

解析函数的例子



$$f(z) = e^z$$

是全复平面上的解析函数。

解析函数的例子

$$f(z) = \ln z$$

举个栗子



在任何可以限定幅角范围且不会导致幅角不连续变化的区域内，我们都可以通过限定幅角范围的方法来限定 $\ln z$ 为连续的单值函数，在这个意义下 $\ln z$ 是解析函数。

例如挖掉负实轴和原点的复平面满足上述条件。
开圆 $|z - 1| < 1$ 也满足上述条件。

解析函数的反例



$$f(z) = |z|$$

处处不可导，所以在任何开区域内**不是**解析函数。

解析函数的反例



$$f(z) = \operatorname{Arg} z$$

处处不可导，所以在任何开区域内**不是**解析函数。

注：幅角主值 $\operatorname{Arg} z$ 一般约定取值范围为 $(-\pi, \pi]$ 。

解析函数的反例



$$f(z) = z^2 \operatorname{Arg} z$$

仅在 $z = 0$ 可导，无法在一个开区域内处处可导，所以在任何开区域内**不是**解析函数。

dalao 泰勒



Brook Taylor (1685-1731)

泰勒展开： 一级近似

假设函数 f 在 z_0 无限次可导且各阶导数已知，我们想求 f 在 z_0 附近的一点 z 处的函数值。

按照物理学家的思路，先求个一阶近似：

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

泰勒级数： 二级近似

当然这样的一阶近似对导函数 f' 也成立，且对 z_0 附近的任何一点 ζ 成立：

$$f'(\zeta) \approx f'(z_0) + f''(z_0)(\zeta - z_0).$$

把上式对 ζ 从 z_0 到 z 积分，得到

$$f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2,$$

移项即得 $f(z)$ 的二阶近似：

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2$$

泰勒级数： 三级近似

同理，这样的二阶近似对导函数 f' 也成立，且对 z_0 附近的任何一点 ζ 成立：

$$f'(\zeta) \approx f'(z_0) + f''(z_0)(\zeta - z_0) + \frac{f^{(3)}(z_0)}{2}(\zeta - z_0)^2.$$

把上式对 ζ 从 z_0 到 z 积分，得到

$$f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z - z_0)^3.$$

移项即得 $f(z)$ 的三级近似：

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z - z_0)^3.$$

泰勒级数

把这样的过程进行无限多次，就得到泰勒展开公式：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中 $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

(在数学严谨性上毫无节操的)物理学家对上述一系列操作表现得十分自信，但仍默默担心一件事情：这个级数有可能是发散的。例如：按上述操作得到的 $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ 就在 $|z| > 1$ 时明显发散。

好在对在整个圆内解析的函数而言，这个问题并不存在——

解析函数的本质: 任何圆内的泰勒级数收敛

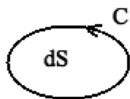
如果 $f(z)$ 在圆 $C_R: |z - z_0| < R$ 内解析, 则 $f(z)$ 在 C_R 内无限次可导, 且泰勒级数收敛

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in C_R.$$

其中 $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

证明第一步：物理学家的直觉

设 f 是很小的简单闭合围道内的解析函数，且在围道上连续，则 f 沿这个围道的积分是围道包围的面积的高阶无穷小量。



$$\oint_C f(z) dz = o(dS)$$

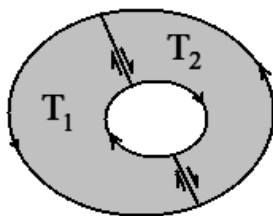
- ▶ 先估算主要部分：因为解析函数可导，在很小区域内可用线性函数来近似，任何线性函数 $(a + bz)$ 都存在单值的原函数 $(az + \frac{b}{2}z^2)$ ，起点到终点的变化为零，所以积分严格为零。
- ▶ 再估算误差：函数值的误差为围道的尺度的高阶无穷小量，再乘以 dz 积分后，误差为围道尺度平方的高阶无穷小量。对简单闭合围道而言，面积为尺度平方的量级，故得证。

证明第二步：柯西定理

如果 f 在开区域 T 上解析，在 T 的边界上连续，则 f 沿 T 的边界正方向的积分为零。

把子区域 T 划分成很多简单小区域 T_1, T_2, \dots, T_N ，并在每个小区域的边界上沿正方向进行积分。相邻小区域在公共边界上(按左内原则)规定的边界方向相反，积分互相抵消，所以最后只剩下那些非公共边界（即 T 的边界)上的积分。也就是说，沿 T 的边界的积分等于沿所有小区域的边界的积分之和。

划分成两块例子



另一方面，沿任何小区域的边界积分是小区域面积($\frac{1}{N}$ 量级)的高阶无穷小量。故当划分块数 N 趋向于无穷时，所有沿小区域边界的积分之和（即 N 个 $\frac{1}{N}$ 的高阶无穷小量之和）趋向于零。故得证。

dalao柯西



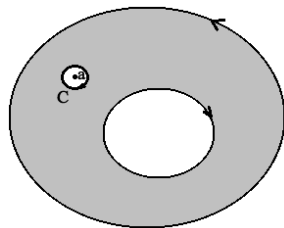
Augustin-Louis Cauchy

证明第三步：柯西积分公式

如果 a 是区域 T 内一点， $f(z)$ 是 T 内的解析函数并在 T 边界上连续，则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial T} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

其中 $\oint_{\partial T}$ 表示沿 T 的边界的正方向积分。



如图，在 T 内以 a 为中心挖掉一个小圆孔。 $\frac{f(z)}{z-a}$ 在剩下的区域内解析，故沿 T 的边界以及（小圆孔的边界） C 的积分之和为零。

而在 C 上积分时，可以把 $\frac{f(z)}{z-a}$ 近似为 $\frac{f(a)}{z-a}$ （请思考这样做带来的误差是否致命），积分一周原函数变化为

$$f(a) \Delta \ln(z-a) = -2\pi i f(a)$$

故得证。

证明第四步：推广的柯西积分公式

柯西积分公式右边可以对 a 进行 n 次求导（请思考这样做的合法性），得到解析函数的 n 阶导数表达式：

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial T} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

这说明解析函数不仅可导，而且无限次可导。
于是得到泰勒展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

证明第五步：泰勒级数展开在圆内收敛

对圆内任意一点 z ，设 $|z - z_0| = s < r$ ，取介于 s 和 r 之间的正数 q ($s < q < r$)，以 q 为半径取圆区域 $C_q: |z - z_0| < q$ ，则 $f(z)$ 在 C_q 内解析，边界上连续。于是

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_q} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

设 $|f(z)|$ 在圆周 ∂C_q 上的上界为 A (有限闭集上的连续实函数一定有上限，请思考为什么)，则

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A}{q^{n+1}} q d\theta = \frac{A}{q^n}$$

因此把幂级数截断后的余项

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{A}{q^n} s^n = \frac{A}{1 - \frac{s}{q}} \left(\frac{s}{q} \right)^N$$

当 $N \rightarrow \infty$ 上式右边趋向于零，故得证。

思考题 (数学灵魂复苏.....)



如果在一个点 a 的任意小邻域内都有点集 S 里的无数个点, 则称 a 为 S 的聚点。例如0是点集 $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 的聚点。
试证明

- 1 在有限大小的闭区域内的无穷点集必然有聚点。
- 2 有限大小的闭区域上的连续实函数必然有上下限。

给不愿刷quiz的大佬们留的书面作业

1. 仿照复数域上指数函数 e^z 的定义方法, 用全复平面收敛的幂级数把正弦和余弦函数推广到复数域:

$$\sin z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

- (1) 用指数函数来表示正弦和余弦函数;
 - (2) 求出满足 $\sin z = 0$ 的全部复数解 z 。
2. 在复平面上画出同时满足 $2 < |z| < 4$ 和 $\operatorname{Re}(z) > -3$ 的区域 T 的边界 ∂T , 并标明边界的正方向。
3. 沿着上题的边界 ∂T 的正方向计算积分:

$$\oint_{\partial T} \frac{\sin z}{(z - \pi)^4} dz.$$