Methods of Mathematical Physics

§12 Heat Equation (II)

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

积分变换和格林函数方法

- 积分变换方法
- 格林函数方法

积分变换方法

其实就是分离变量法的连续极限

有限到无限，离散到连续

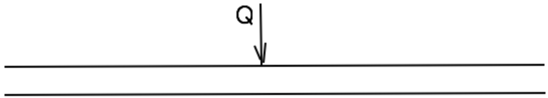
热传导方程的解通常是

渐近解 $+$ 一堆e^{-ak^2t+ikx}的线性叠加

长为L的不良导体棒上满足齐次边界条件的解对k有限制，这些允许的k之间的间隔通常为$\sim \frac{1}{L}$的量级。

无界或者半无界问题可以看成$L\to\infty$的极限，允许的k之间的间隔$\sim \frac{1}{L}$趋向于零。也就是说，k可以连续取值。

瞬时点注入的热



在一根均匀的无限长不良导体棒上的某点注入热量Q，不良导体棒上的温度分布将如何变化？设初始温度T_0，截面积S，质量密度ρ, 单位质量比热c，导热系数λ均已知。

写出方程和边界条件

设注入点为$x = x_0$，记注入时间为$t = 0$。假设刚注入时热量分布在小区间$[x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}]$上，则在这个小区间上温度升高了$\frac{Q}{c\rho S\epsilon}$，这可以用$\delta$函数来描述。
于是写出如下的方程和初始条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0, \\
T_{t=0} &= T_0 + b\,\delta(x - x_0), \\
T_{x=\pm\infty} &= T_0.
\end{aligned}
$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$，$b = \frac{Q}{c\rho S}$。
为了看得更清楚，我特地补上了最后一条“齐次边界条件”，这是根据简单的物理分析得出的（热在有限时间内不可能传播到无穷远处）。

按套路出牌

按套路第一步，根据物理分析求渐近解。显然，热量均匀分配到无穷长的不良导体棒上后对温度不会有什么影响。所以$t \to \infty$时的渐近解是$T \to T_0$。

按套路出牌

按套路第二步，把$T(x,t)$分解为：渐近解 + 衰减模式

$$T(x,t) = T_0 + u(x,t).$$

为了不和δ函数的符号发生混淆，我们用$u(x,t)$来表示对稳恒渐近解的偏离。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u_{t=0} &= b\,\delta(x-x_0), \\ u_{x=\pm\infty} &= 0. \end{aligned}$$

对套路的迷惑

因为$u(x,t)$满足齐次边界条件，所以令

$$u(x,t) = \sum_k c_k e^{-ak^2 t} e^{ikx}.$$

考虑边界条件对k的限制时出了一点小小的bug：似乎任何一个e^{ikx}或$\sin(kx)$或$\cos(kx)$都不在无穷远处趋向于零……

傅立叶变换的默认设置

记得某叫兽曾经讲过：$f(x)$可以进行傅立叶变换的默认设置是f在无穷远处为零。

当然这句话并非绝对正确，数学上很容易构造出一堆反例。

把喜欢搞事情的数学家都踢飞之后，写出

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)e^{-ak^2t}e^{ikx}dk$$

也就是说，之前的c_k被写成了$\frac{c(k)dk}{\sqrt{2\pi}}$，在$k$连续取值的极限下，求和变成了积分。

利用初始条件求系数

仍然按照套路，为了求出系数$c(k)$，令$t=0$并利用初始条件，

$$b\delta(x-x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)e^{ikx}dk$$

把上式看成傅立叶逆变换，显然$c(k)$可以用傅立叶变换求得：

$$c(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}b\delta(x-x_0)e^{-ikx}dx=\frac{be^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

于是得到

$$u(x,t)=\frac{b}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ak^2t}e^{ik(x-x_0)}dk$$

大功告成

再进行简单的积分（回忆用长方形围道计算 $e^{-x^2}\cos x$的积分时的技巧）：

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{b}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ak^2t}e^{ik(x-x_0)}dk \\
&= \frac{b}{2\pi}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at(k+i\frac{x-x_0}{2at})^2}dk \\
&= \frac{b}{2\pi}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}\sqrt{\frac{\pi}{at}} \\
&= b\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}
\end{aligned}
$$

即最后的解为

$$
T = T_0 + b\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}
$$

物理直觉大补汤：随机热运动的时间积累

$$T = T_0 + b\frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}$$

这个解说明一开始集中在一点的热，经过时间t后大致分布在宽度为$\sqrt{at}$的范围内。这是随机热运动的一般特性：

随机走动的探索范围和$\sqrt{t}$成正比.

可以设想你（譬如，失恋后）漫无目的地在城市中行走，在每个路口随机地变换方向。那么，你的探索范围（走过的地方之间的最大直线距离）会和$\sqrt{t}$近似成正比。走的步数越多，这种近似就越精确。

格林函数

线性系统对单位脉冲的响应

Green's function

在$b=1$的情况下的u的解有个特殊的名字：格林函数。

满足线性齐次的微分方程和边界条件，初始条件为任意一点上的δ函数的解称为格林函数(Green's function)。

无边界的热传导方程的格林函数是

$$G(x,t;x_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}$$

格林函数的物理意义

格林函数是线性系统对初始脉冲输入的响应。

无边界的热传导方程的格林函数

$$G(x,t;x_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}$$

是无边界的一维均匀热传导系统对初始x_0处脉冲输入的响应。

格林函数方法

容易直接验证，如果f是在无穷远处趋向于零的函数，无边界热传导问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0, \\ T_{t=0} &= f(x). \end{aligned}$$

的解为

$$\boxed{T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) G(x,t;x_0)\, dx_0}$$

它的物理意义非常简单，就是线性系统对初始各处的输入分别发生响应，这些响应的线性叠加就是所求的解。

例题

有长为$2L$，温度为T_0的均匀不良导体棒。导热系数λ，质量密度ρ，单位质量比热c均已知。在$t=0$时刻，在它的两端$x=\pm L$处分别接上温度为T_1的相同材质相同截面形状的非常长的均匀不良导体棒。求之后不良导体棒上的温度变化。

写出方程

令$T(x,t) = T_1 + u(x,t)$，则u满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u_{t=0} &= (T_0 - T_1)\theta_L(x). \end{aligned}$$

其中$\theta_L(x)$当且仅当$|x| < L$时为1，否则为零。

直接求解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} (T_0 - T_1) dx_0 \\
&= \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} dx_0
\end{aligned}
$$

当然，如果你喜欢，可以把上述积分写成误差函数。
最后结果为

$$
T(x,t) = T_1 + \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} dx_0
$$

思考题

在一根很长的不良导体棒一端输入热量Q，之后温度将如何变化？设初始温度T_0，截面积S，质量密度ρ，单位质量比热c，导热系数λ均已知。

课后作业（题号26）

26 有长为L，温度为T_0的均匀不良导体棒。导热系数λ，质量密度ρ，单位质量比热c均已知。在$t=0$时刻，在它的一端$x=L$处接上温度为T_1的相同材质相同截面形状的非常长的均匀不良导体棒。求之后不良导体棒上的温度变化。