Methods of Mathematical Physics

§10 Problem Set II

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容: 复变积分实战技巧

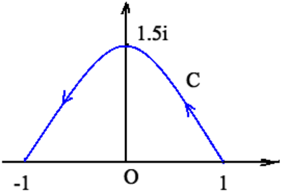
- 复变积分的思考次序
- 复变积分不等式的证明

复变积分的思考次序

复变积分的思考次序

- 是否可以一眼看出原函数
- 是否可以直接用留数定理
- 是否可以构造围道或变量替换间接地用留数定理
- 最后一招：写成实积分硬算

Problem 2.1 ($\star$)

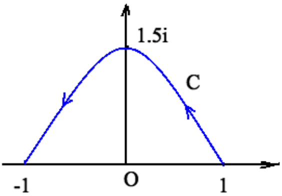


如图，计算从1到-1的一条形状为抛物线的曲线C计算积分

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

约定$z=1$时幅角为零且幅角连续变化。

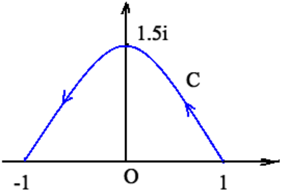
Problem 2.1 解答



一眼可以看出原函数，但注意要弄清积分起点和终点的幅角。

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}|_1^{e^{i\pi}} = 2(e^{i\pi/2} - 1) = 2(i - 1)$$

Problem 2.2 (⋆⋆)



沿如图的抛物线形状路径C计算积分

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2}.$$

Problem 2.2 解答

根据

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

一眼可以看出原函数为

$$F(z) = \frac{1}{2i}\ln\frac{z-i}{z+i}$$

(注意不要凭借高数的经验把$\frac{1}{1+z^2}$的原函数写成$\arctan z$这样随幅角变化规律不明显的形式)。
从起点到终点$\frac{z-i}{z+i}$的模不变，幅角增大了π（这点可能需要仔细画个图分析下才能明白)，所以$\ln\frac{z-i}{z+i}$的变化为$i\pi$。积分结果为

$$\frac{1}{2i}i\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Problem 2.3 (⋆⋆)

计算沿逆时针方向的围道积分：

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-\pi)^4} dz$$

Problem 2.3 解答

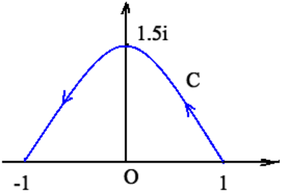
一眼看不出原函数。
围道内只有$z=\pi$一个孤立奇点，可以直接使用留数定理。虽然这是个三阶极点，但是把它当作四阶极点，用去极点法来求留数更方便：

$$\operatorname{res} f(\pi) = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3}\sin z\right]\Big|_{z=\pi} = \frac{1}{3!}\left[-\cos z\right]\Big|_{z=\pi} = \frac{1}{6}$$

于是所求积分

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res} f(\pi) = \frac{\pi i}{3}$$

Problem 2.4 ($\star\star\star$)



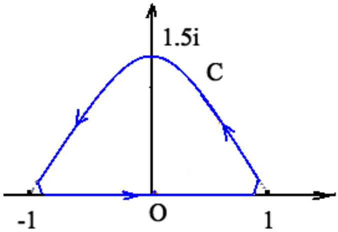
沿如图的抛物线形状路径C计算积分

$$\oint_C (1 - z^2)^{-\frac{3}{4}} dz.$$

约定$1 - z^2$的幅角在路径的中间（即$z = 1.5i$)时为零，且幅角连续变化。

Problem 2.4 解答

看不出原函数。也不能直接用留数定理。



如图，可以通过构造围道间接使用留数定理。
请自行用“绕一圈”的方法判断：可取适当单值分枝使这个围道内被积函数处处解析。另，请验证左右两段小圆弧上的积分（当小圆弧半径趋向于零时）趋向于零。

Problem 2.4 解答

于是

$$\oint_C (1-z^2)^{-\frac{3}{4}} dz + \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{3}{4}} dx = 0.$$

(请验证$1-x^2$的幅角按照题中所给约定确实为零。)
令$x = 2u - 1$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 u^{-\frac{3}{4}} (1-u)^{-\frac{3}{4}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2$$

所以

$$\oint_C (1-z^2)^{-\frac{3}{4}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2$$

无穷远点是个伪概念

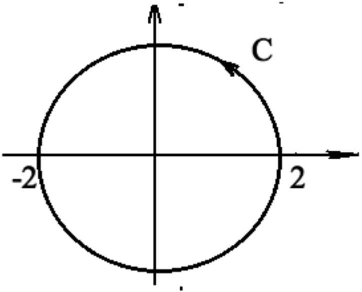
在很多复变函数的教材中有无穷远点和无穷远点处的留数的概念：这些都是为了多折腾几个公式让你背🤭。

实际上并不需要把无穷远点当作一个点，用构造围道和变量替换间接使用留数定理的方法完全可以解决。典型的技巧有：

(1) 画一个半径$\to \infty$的大圆，考虑大圆和已有围道之间的区域。

(2) 换元$u = \frac{1}{z}$。

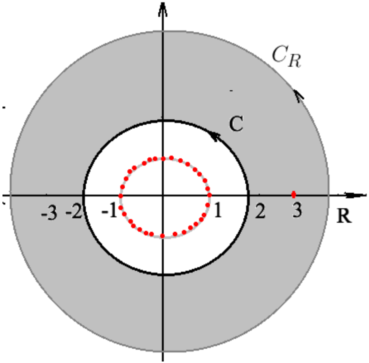
Problem 2.5 (⋆⋆)



在如图的围道上计算积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{60}}{(z-3)\left(z^{32}-1\right)^2}\, dz\,.$$

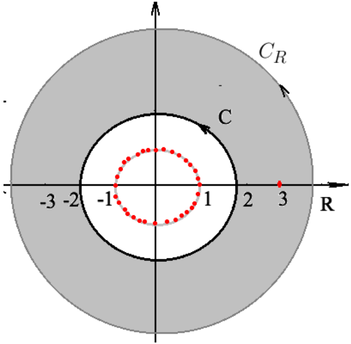
Problem 2.5 解法一



令区域$T: 2 < |z| < R$。所考虑的函数在T内只有一个孤立奇点：$z = 3$。根据留数定理：

$$\left(\oint_{C_R} - \oint_{C}\right) f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(3)$$

Problem 2.5 解法一(续)



容易看出当$R \to \infty$时，在C_R上有$|f(z)| \sim \frac{1}{R^5}$，沿$C_R$积分后最多$\sim \frac{1}{R^4} \to 0$。因此得到

$$\oint_C f(z)dz = -2\pi i \,\mathrm{res}\, f(3) = -2\pi i \frac{3^{60}}{(3^{32}-1)^2}$$

Problem 2.5 解法二

令$u = \frac{1}{z}$，则

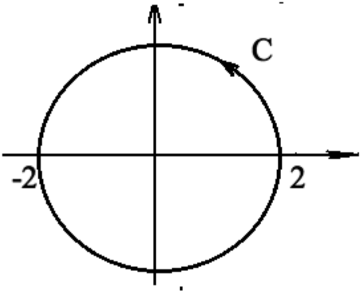
$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{60}}{(z-3)(z^{32}-1)^2} dz = \int_{|u|=\frac{1}{2}} \frac{u^3}{(1-3u)(1-u^{32})^2} du$$

注意映射$u = 1/z$使逆时针方向的围道变为顺时针方向，换回到（默认的）逆时针方向后又多了个负号。

在围道内仅有$u = 1/3$一个孤立奇点，容易用留数定理算出

$$\int_{|u|=\frac{1}{2}} \frac{u^3}{(1-3u)(1-u^{32})^2} du = -\frac{2\pi i}{3} \frac{1}{3^3\left(1-\frac{1}{3^{32}}\right)^2} = -2\pi i \frac{3^{60}}{(3^{32}-1)^2}$$

Problem 2.6 (⋆⋆)



在如图的围道上计算积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z} dz.$$

Problem 2.6 解法一

$f(z)=\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$在围道内部有两个孤立奇点：$z=0$和$z=-1$。

$$\mathrm{res}\, f(-1) = -e^{-1}$$

在$z=0$邻域则可以直接进行Laurent展开：

$$f(z)=(z^3-z^4+z^5-\ldots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\, f(0) &= \frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\ldots \\ &= e^{-1}-\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) \\ &= e^{-1}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

所以所求积分为

$$2\pi i\left(e^{-1}-\frac{1}{3}-e^{-1}\right)=-\frac{2\pi i}{3}.$$

Problem 2.6 解法二

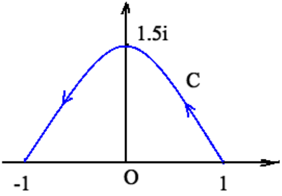
令$u = \frac{1}{z}$，则所求积分为

$$\oint_{|u|=\frac{1}{2}} \frac{e^u}{u^4(u+1)} du,$$

在围道内仅有一孤立奇点$u = 0$，故所求积分为

$$\begin{aligned} & 2\pi i \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{du^3} \frac{e^u}{1+u} \right) \Big|_{u=0} \\ = & \frac{\pi i}{3} \frac{e^u}{1+u} \left(1 - \frac{3}{1+u} + \frac{6}{(1+u)^2} - \frac{6}{(1+u)^3} \right)_{u=0} \\ = & -\frac{2\pi i}{3}. \end{aligned}$$

Problem 2.7 ($\star\star\star$)



在如图的抛物线路径上计算积分

$$\int_C (z^* dz - z dz^*)$$

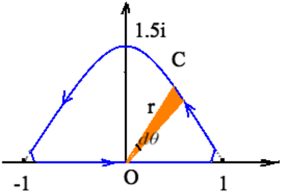
其中z^*表示z的共轭复数。

Problem 2.7 解答

依赖于z^*的函数一般都不是解析函数，原函数还是留数定理都希望不大。无奈只能写成实积分。先尝试极坐标，令$z = re^{i\theta}$：

$$\begin{aligned}\int_C (z^* dz - z dz^*) &= \int_C re^{-i\theta}(dr + ird\theta)e^{i\theta} - re^{i\theta}(dr - ird\theta)e^{-i\theta} \\ &= 2ir^2 d\theta\end{aligned}$$

而$\frac{1}{2}r^2 d\theta$恰巧是图中扫过的面积元。



因此原积分等于抛物线下的面积乘以$4i$，即结果为$8i$。

复变积分不等式的证明

$$\left|\int f(z)dz\right| \leq \int |f(z)||dz|$$

Problem 2.8 ($\star\star$)

设$f(z)$在单位圆$|z| \leq 1$内部解析，边界上连续；而且已知当$|z| = 1$时，$|f(z) - z| \leq 1$。试证明：

$$\left| f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2^{n+2} n!.$$

Problem 2.8 解答

$$
\begin{aligned}
\left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}dz\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^{n+1}}|dz| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)-z|+|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^{n+1}}|dz| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}|dz| \\
&= 2^{n+2}n!
\end{aligned}
$$