Methods of Mathematical Physics

§15 Orthogonal Coordinate System

Lecturer: 黄志琦

https://github.com/zqhuang/SYSU_MMP

本讲内容

- 回顾
- 正交曲面坐标系
- 贝塞尔函数初步介绍

回顾

关键是求背出谐函数

关键是求背出谐函数

无论是热传导方程$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0$还是波动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$，变量分离后都归结为求

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q$$

的解（谐函数）的问题。

直角坐标系

对固定k，直角坐标系下的谐函数为平面波：

$$Q(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

其中$\mathbf{k}$是长度为k的任意矢量（平面波的波矢），$\mathbf{k}$的方向是平面波传播的方向。

其他情况

在其他情况下，如何把∇^2的具体表达式写出是解决问题的第一步。

为此，我们介绍最常用的正交曲面坐标系。

正交曲面坐标系

先作平坦近似，再修正

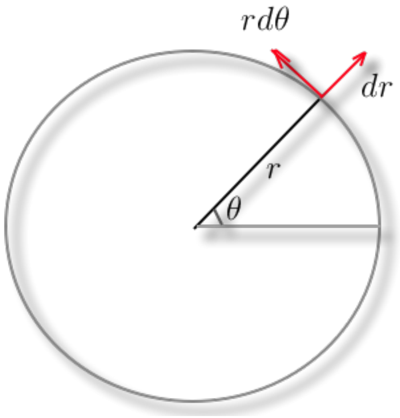
正交曲面坐标系

如果任意点附近的坐标轴方向总是两两垂直，则称该坐标系为正交曲面坐标系。

(所谓附近的坐标轴方向，是指仅变化一个坐标分量所得的曲线在这个点的切线方向。)

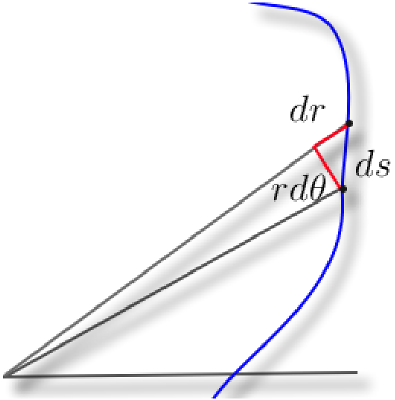
二维的直角坐标系 x, y;
二维的极坐标系 r, θ;
三维的直角坐标系的 x, y, z;
三维的柱坐标系 r, θ, z;
三维的球坐标系r, θ, φ。

极坐标是正交坐标系的图示



变化r和变化θ对应的小长度元分别为dr和$rd\theta$，且方向垂直。

极坐标弧长公式



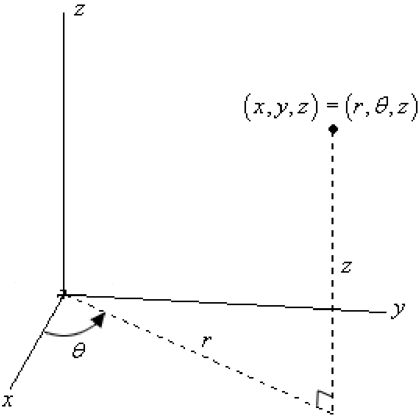
根据勾股定理，显然有

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

如果曲线以$r(\theta)$的函数形式表示，则得到弧长公式

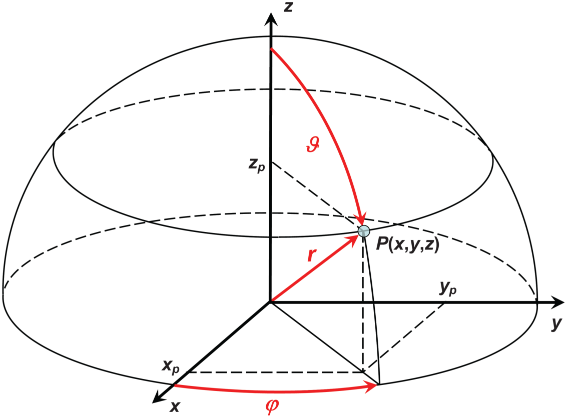
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta$$

思考题



写出柱坐标系(r, θ, z)的正交长度元，由此推导柱坐标系弧长公式。

思考题



写出球坐标系(r,θ,ϕ)的正交长度元，由此推导球坐标系弧长公式。

梯度 = 单位长度内标量函数的变化

以球面坐标系为例：正交长度元分别为dr，$rd\theta$，$r\sin\theta d\phi$。

设f为某个标量函数（如温度，电势等不带方向的量）

- 沿着dr方向（保持θ, ϕ不变，变化r)，f的梯度分量为

$$\lim_{\delta r\to 0}\frac{\delta f}{\delta r}=\frac{\partial f}{\partial r}.$$

- 沿着$rd\theta$方向（保持r, ϕ不变，变化θ)，f的梯度分量为

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta f}{r\delta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

- 沿着$r\sin\theta d\phi$方向（保持r, θ不变，变化ϕ)，f的梯度分量为

$$\lim_{\delta\phi\to 0}\frac{\delta f}{r\sin\theta\delta\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

梯度 = 单位长度内标量函数的变化

因此，球坐标系下的梯度为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

思考题

写出极坐标系和柱坐标系下的梯度。

流j的散度是单位体积的j净流出率

仍以球坐标系为例：
设j沿着长度元dr，$rd\theta$，$r\sin\theta d\phi$的分量为：(j_r, j_θ, j_ϕ).
那么$j_r(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$代表了$j_r$流过垂直于$dr$方向的面积元的量。
它沿dr方向的变化率代表了dr方向的流出流入不平衡，对净流出率的贡献为：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)j_r\right]dr$$

除以体积元$dr(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$，得到贡献：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_r\right)$$

流j的散度是单位体积的j净流出率

同理，沿$rd\theta$方向的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(dr)(r\sin\theta d\phi)j_\theta\right]d\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta j_\theta\right)$$

沿$r\sin\theta d\phi$方向的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[(dr)(rd\theta)j_\phi\right]d\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\phi$$

总结快速写出散度的办法

1 以三个长度元写出直角坐标系形式的“平坦近似散度”：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \approx \frac{\partial}{\partial r} j_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

2 每一项都在微分号内乘以面积修正因子，在外面除掉。例如垂直dr方向的面积元为$rd\theta r \sin\theta d\phi$，含$r$的因子(即$r^2$，剩余部分$d\theta \sin\theta d\phi$因为可以直接提到偏微分号外面被除掉，所以不用考虑)是面积修正因子。于是 $\frac{\partial}{\partial r} j_r$被修正为$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_r)$。

演算草稿

以球坐标系为例

正交长度元:	dr	$rd\theta$	$r\sin\theta d\phi$
垂直面积元:	$rd\theta\, r\sin\theta d\phi$	$dr\, r\sin\theta d\phi$	$dr\, rd\theta$
面积修正因子:	r^2	$\sin\theta$	1

平坦近似散度:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}\approx\frac{\partial}{\partial r}j_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\phi$$

修正后:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta j_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\phi$$

顺便提下：旋度算符的快速写法

对旋度算符，只要把面积修正换为长度元修正。仍以球坐标系为例

正交长度元: dr $rd\theta$ $r\sin\theta d\phi$

平坦近似旋度:

$$\nabla\times\mathbf{j}\approx\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_\phi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_r-\frac{\partial}{\partial r}j_\phi,\frac{\partial}{\partial r}j_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_r\right).$$

修正后右边为

$$\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta j_\phi)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj_\phi),\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_r\right)$$

思考题

写出柱坐标系下的散度和旋度

总结

先平坦近似， 然后

- 梯度不需要修正
- 散度需要面积元修正
- 旋度需要长度元修正

极坐标/柱坐标系里的谐函数

贝塞尔函数

柱坐标系的拉普拉斯算符

以柱坐标系r, θ, z为例，长度元为：dr，$rd\theta$，dz。
对标量函数f，梯度

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

再对梯度求散度，先作平坦近似：

$$\nabla^2 f \approx \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

然后面积元修正：

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

极坐标的拉普拉斯算符

极坐标的拉普拉斯算符，只要去掉z：

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

极坐标的谐函数

极坐标系里的谐函数$Q(r,\theta)$满足

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2}=-k^2Q$$

事实上通过变量替换$x=kr$（物理上理解：取了个方便的长度单位$1/k$来研究问题，x就是无量纲长度)，就可以写成

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+x^2Q=-\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2}$$

极坐标的谐函数

我们来求分离变量形式的解$Q = Z(x)f(\theta)$，代入方程得到

$$x\frac{(xZ')'}{Z} + x^2 = -\frac{f''}{f}$$

上式左边为x的函数，右边为θ的函数，因此只能是常数。再考虑到f满足周期性边界条件$f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$，就容易得到$f = e^{\pm im\theta}$ $(m = 0, 1, 2 \ldots)$，那么，Z满足

$$x\frac{(xZ')'}{Z} + x^2 = m^2.$$

稍加整理得到著名的**贝塞尔方程**:

$$Z'' + \frac{1}{x}Z' + (1 - \frac{m^2}{x^2})Z = 0$$

贝塞尔方程的解

当m为整数时，贝塞尔方程

$$Z'' + \frac{1}{x}Z' + (1 - \frac{m^2}{x^2})Z = 0$$

有两个线性独立的解： 第一类贝塞尔函数$J_m(x)$和第二类贝塞尔函数$Y_m(x)$。

它们的最重要区别是：

- 第一类贝塞尔函数$J_m(x)$在$x = 0$取有限值，所以可以描述圆盘内部解。
- 第二类贝塞尔函数$Y_m(x)$在$x = 0$发散，所以只能描述圆盘外部解。

极坐标下的谐函数

极坐标下的谐函数就是

$$Q = J_m(x)e^{\pm im\theta}$$

和

$$Q = Y_m(x)e^{\pm im\theta}$$

$(m = 0, 1, 2 \ldots)$

第一类贝塞尔函数

定义第一类贝塞尔函数最简单的办法是用级数:

$$J_m(x) \equiv \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

思考题

验证按上述级数定义的第一类贝塞尔函数满足贝塞尔方程。

课后作业(题号32-34)

32 椭圆坐标(μ, ν)表示平面直角坐标系里的点$(\cosh\mu\cos\nu, \sinh\mu\sin\nu)$。说明椭圆坐标系是一种正交曲面坐标系，然后写出椭圆坐标系的拉普拉斯算符的表达式。

33 设四维的正交曲面坐标系(t, x, y, z)的正交线元长度分别为dt，$a(t)dx$，$a(t)dy$，$a(t)dz$，其中$a(t)$为某个已知的函数。写出该坐标系的拉普拉斯算符的表达式。

34 利用第一类贝塞尔函数的级数定义，计算下列函数值至少精确到两位有效数字：

$$J_0(0),\ J_0(0.2),\ J_1(0),\ J_1(0.2).$$