量子场论 I

第十六课 量子电动力学(QED)初步介绍

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

Background

自然界有四种基本作用力——引力，电磁力，强相互作用力和弱相互作用力。我们以前学过的电动力学是对电磁力的经典描述。量子电动力学(QED)则是对电磁力的量子描述，它是物理学里最严谨最精密的一个分支。

QED研究的是自旋为1/2的Dirac场和自旋为1的$U(1)$规范场的相互作用。拉氏密度为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

其中$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$，$q$为Dirac场粒子的电荷。

定域规范不变性

证明QED在定域规范变换

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \gamma$$

$$\psi \to \psi e^{i\gamma}$$

下作用量不变。

场方程

试推导QED的场方程：

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

和

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

电荷守恒

显然

$$j^\nu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

是守恒流(可以直接用上面的场方程证明或者用全局规范对称性和Noether定理来证明)，

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\, j^0 = q\int d^3\mathbf{x}\, \bar{\psi}\gamma^0\psi$$

是守恒电荷。

QED的相互作用绘景

在$A_0 = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$的规范下，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(|\dot{\mathbf{A}}|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2\right) + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\not{A}\psi$$

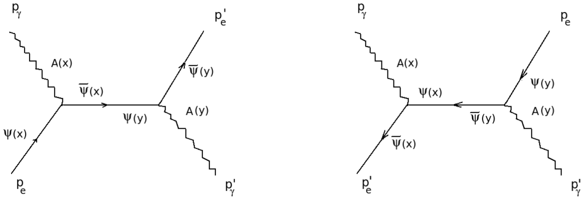
我们仍然把自由场的Hamilton量作为$\hat{H}_0$，相互作用Hamilton量为

$$\hat{H}_I = \int d^3\mathbf{x}\, A_\mu j^\mu = q\int d^3\mathbf{x}\, \bar{\psi}\not{A}\psi$$

热身问题：Compton散射

QED里最简单的问题是Compton散射问题：一个电子和一个光子发生碰撞，变成不同动量的电子和光子。

设电子和光子的动量初态为p_e和p_γ，末态为p'_e和p'_γ。因为现在相互作用为两个ψ和一个**A**, 最简单的Feynman图就长这样：



再加上x，y互换，每个图要乘以2，恰好和泰勒展开中的1/(2!)抵消。注意对固定的电子(正粒子), $\hat{\psi}$只包含湮灭算符，$\hat{\bar{\psi}}$只包含产生算符。所以图中的$\bar{\psi}$和ψ不能随意交换次序。

Feynman传播子

为了计算QED的Feynman图，我们先计算Feynman传播子

$$\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y)$$

同样它也可以看成自由ψ场的关联矩阵的矩阵元。自由ψ场的关联矩阵为

$$i\left(i\partial\!\!\!/ - m + i\epsilon\right)^{-1} \to \frac{i}{k\!\!\!/ - m + i\epsilon}$$

在傅立叶空间计算矩阵元：

$$\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{ie^{-ik(x-y)}}{k\!\!\!/ - m + i\epsilon}$$

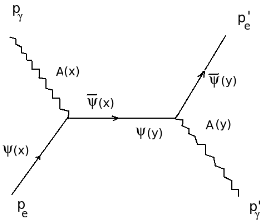
当然，我们希望能绕开这些积分过程直接用Feynman规则进行计算。体积元$d^3\mathbf{p}$和e^{-ipx}等的组合最后都会给出正确的$T/V\delta(p_\gamma + p_e - p'_\gamma - p'_e)d^4k$因子，所以我们在推导Feynman规则时不再关注它们。

其他几条Feynman规则

- 顶点给出因子$-iq\gamma^\mu$
- 电子内线给出Feynman传播子$\frac{i}{\not{k}-m}$
- 对于一个初态的动量为$\mathbf{p}$,自旋为s的电子外线，我们需要从$\hat{\psi}$中提取一个湮灭算符$\hat{a}_{\mathbf{p},s}$，对应的系数为$u_{\mathbf{p},s}$。
- 对于一个末态的电子外线，则需要提取产生算符$\hat{\bar{\psi}}$里的$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p},s}$，随之带来的因子为$\bar{u}_{\mathbf{p},s}$。
- 初态的光子对应的因子为$(\mathrm{e}_{\mathbf{p},s})_\mu/\sqrt{2\omega}$。这里的$\mu$为跟它连接的顶点的$-iq\gamma^\mu$里的指标$\mu$。
- 末态的光子对应的因子为$(\mathrm{e}_{\mathbf{p},s})^*_\mu/\sqrt{2\omega}$。这里的$\mu$为跟它连接的顶点的$-iq\gamma^\mu$里的指标$\mu$。

注:
1. 如果是反粒子则把u换成v。
2. 在库仑规范下矢量e第0分量为零。

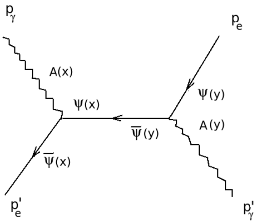
第一个图



$$+\ (x,\ y\ 互换)$$

$$= \frac{(-iq)^2}{2\sqrt{\omega_\gamma \omega'_\gamma}} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}^*_{p'_\gamma, s'_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} u_{p_e, s_e}$$

第二个图



$$+ (x,\ y\ 互换)$$

$$= \frac{(-iq)^2}{2\sqrt{\omega_\gamma \omega'_\gamma}} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \not{\epsilon}^*_{p'_\gamma, s'_\gamma} u_{p_e, s_e}$$

世界上最遥远的距离，就是Feynman图和最终结果之间的距离

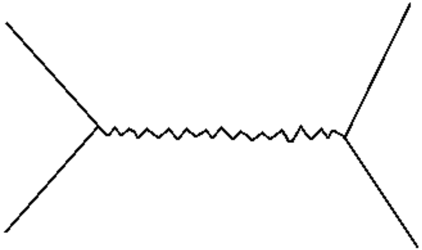
我们需要计算总散射截面的绝对值的平方，假设初态和末态的自旋都未知，则需要对所有初态求平均(共4种自旋态)，对末态求和：

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{4\omega_\gamma \omega'_\gamma} \frac{1}{4} \sum_{s_e, s_\gamma, s'_e, s'_\gamma} \left| \bar{u}_{p'_e, s'_e} \left(\not{\epsilon}^*_{p'_\gamma, s'_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} + \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \not{\epsilon}^*_{p'_\gamma, s'_\gamma} \right) u_{p_e, s_e} \right|^2$$

只要十来页纸的计算就能把上式化简到最后结果，但今天我们比较忙，这点小事先放一放，来聊点别的。

最后一条Feynman规则

先撇开那些令人赏心悦目（shēng bù rú sǐ)的计算不说，我们还差最后一条Feynman规则没讨论。如果初态和末态都是Dirac费米子，那么我们需要把两个A收缩掉。对应的Feynman图长成这样：



最后一条Feynman规则

我们还是用直接写出矩阵元的方法。 在洛仑兹规范下写出傅立叶空间的拉氏密度:

$$i\mathcal{L} = -\frac{1}{2}A_\mu (C^{-1})_{\mu\nu} A_\nu$$

其中

$$C_{\mu\nu} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

于是有了最后一条Feynman规则:

- 光子内线对应的$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}$, 其中的μ, ν为跟它连接的两个顶点的指标(即这两个顶点分别为$-iq\gamma^\mu$和$-iq\gamma^\nu$)。

下节课我们讲那些计算的小事。

第五次课后作业（题号14-16

14 考虑一个有自相互作用的复标量场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^\dagger \phi \right)^2$$

这里$0 < \lambda \ll 1$。我们已经知道复标量场有a, b两种粒子互为反粒子。两个动量为p_1，p_2的a粒子发生散射变为动量为p_3，p_4的粒子。仅考虑最低阶近似。证明末态粒子只能都是a粒子，并求出散射振幅。

注：p_1，p_2，p_3，p_4均为四维动量。

第五次课后作业（题号14-16

15 仍然考虑上题中的有自相互作用的复标量场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^\dagger \phi \right)^2$$

试在质心参考系求两个动量为p_1，p_2的a粒子发生散射的散射截面，仍只要求算到最低阶近似。

注：p_1，p_2均为四维动量。

第五次课后作业（题号14-16)

16 对自由实标量场ϕ，定义n点Green函数为：

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \langle 0 | \mathcal{T}\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\right)|0\rangle$$

其中$|0\rangle$为真空态。

证明：当n为奇数时$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$，当$n$为偶数时$G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$等于把$x_1, x_2, \ldots, x_n$进行两两配对所得两点Green函数的乘积的遍历配对方式之和，例如$n=4$时，

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4) = G(x_1,x_2)G(x_3,x_4) + G(x_1,x_3)G(x_2,x_4) + G(x_1,x_4)G(x_2,x_3$$

提示：用Wick定理或者路径积分基本定理