量子场论 I

第一次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn）

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题：题目和思路

题目：若算得的截面为$\sigma = 10^{-3}/m_W^2$, $m_W \approx 80GeV$是$W^{\pm}$的粒子质量，试换算出以cm^{2}为单位的截面值。若算得的寿命的$\tau = 100/m_w$，试问等于多少秒?

思路：这道题要求把自然单位制表示的物理量用普通单位制表示出来。首先要理解$\sigma = 10^{-3}/m_W^2$这种自然单位制写法的含义：它表示在普通单位制里选取适当的p, q可以使$\sigma = 10^{-3}/m_W^2 c^p \hbar^q$，在自然单位制下规定$c = \hbar = 1$所以可以不写$c^p \hbar^q$。我们只要求出$p$和$q$就能知道$\sigma$在普通单位制下的表示。

第1题：第一种解法

设在普通单位制下$\sigma = 10^{-3}/m_W^2 c^p \hbar^q$。我们用$M$, L, T分别表示普通单位制下的质量，长度，时间量纲。则无论是按"截面"的字面意思，还是按题目要求（普通单位制下用cm^2表示)，都能确定左边是一个面积，量纲为L^2；右边的量纲为$M^{-2}(LT^{-1})^p(ML^2T^{-1})^q = M^{q-2}L^{p+2q}T^{-p-q}$。很显然要两边在普通单位制下量纲一致必须有$p = -2$, $q = 2$。 所以

$$\sigma = 10^{-3}\hbar^2/m_W^2/c^2$$

注意题目给的m_W以能量单位$\mathrm{GeV} = 1.6022 \times 10^{-10} J$表示，实际上是普通单位制里的$m_W c^2$。所以我们把上式写成:

$$\begin{aligned}
\sigma &= 10^{-3}\hbar^2 c^2/(m_W c^2)^2 \\
&= 10^{-3} \times \frac{(1.0546 \times 10^{-34}\mathrm{J\cdot s})^2(2.9979 \times 10^{10}\mathrm{cm\,s^{-1}})^2}{(80 \times 1.6022 \times 10^{-10}\mathrm{J})^2} \\
&= 6.08 \times 10^{-35}\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

第1题：第一种解法(续)

同样，可以假设$\tau = 100/m_W c^p \hbar^q$。左边的量纲为$T$，右边的量纲为$M^{q-1}L^{p+2q}T^{-p-q}$。于是$p=-2$，$q=1$。

$$\begin{aligned}\tau &= 100\hbar/(m_W c^2)\\ &= 100\times(1.0546\times10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s})/(80\times1.6022\times10^{-10}\mathrm{J})\\ &= 8.23\times10^{-25}\mathrm{s}\end{aligned}$$

第1题：第二种解法

在自然单位制下可以任意地乘或除c和$\hbar$。所以我们总结出：

- 显然时间和长度可以用乘或除c来互相转化。
- 根据$E = mc^2$,能量和质量可以通过乘或除c^2互相转化。
- 根据量子力学的能量测不准原理$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$, 时间和能量可以用$\hbar$去除相互转化。
- 根据量子力学的动量测不准原理$\Delta(mv)\Delta x \gtrsim \hbar$, v和c量纲相同，所以质量和长度可以用$\hbar/c$去除互相转化。

第1题：第二种解法(续)

我们先把GeV（能量）换算成时间：

$$1\mathrm{GeV} = \frac{1.6022 \times 10^{-10} J}{1.0546 \times 10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}} = \frac{1}{6.582 \times 10^{-25}\mathrm{s}}$$

然后把时间转化为长度。

$$6.582\times10^{-25}\mathrm{s} = (6.582\times10^{-25}\mathrm{s})(2.9979\times10^{10}\mathrm{cm/s}) = 1.973\times10^{-14}\mathrm{cm}$$

所以第一问答案为：

$$\sigma = \frac{10^{-3}}{80^2}\mathrm{GeV}^{-2} = \frac{10^{-3}}{80^2}\times(1.973\times10^{-14}\mathrm{cm})^2 = 6.08\times10^{-35}\mathrm{cm}^2$$

第二问答案为：

$$\tau = 100/80\mathrm{GeV}^{-1} = 1.25 \times (6.582 \times 10^{-25}\mathrm{s}) = 8.23 \times 10^{-25}\mathrm{s}$$

第2题: 题目和思路

题目：证明任意四维时空坐标系(x^0, x^1, x^2, x^3)的积分元$\sqrt{-g}d^4x$是一个标量。其中g是度规矩阵$g_{\mu\nu}$的行列式的简写，d^4x是积分元$dx^1dx^2dx^3dx^4$的简写。

思路：$g_{\mu\nu}$矩阵的变换规则按张量定义可以写出来。d^4x的变化在微积分课程里学过:多元函数积分进行变量替换时，积分元要乘Jacobian行列式的绝对值的倒数。

第2题解答

假设坐标变换为$x \to \tilde{x}$，则Jacobian矩阵为$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$，其行列式简写为$\det J$。按多元函数积分的变量替换规则，

$$d^4x = |\det J|^{-1} d^4\tilde{x} \tag{1}$$

张量$g_{\mu\nu}$的变换规则为$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \tilde{g}_{\alpha\beta}$
把$g_{\mu\nu}$矩阵简写为G，上式可写成矩阵乘法$G = J^T \tilde{G} J$
两边取行列式，并根据"积的行列式等于行列式的积"，以及"矩阵转置不改变行列式"，得到:

$$\det G = |\det J|^2 \det \tilde{G} \tag{2}$$

结合(1)和(2)即得所求证的结论$\sqrt{-g}\, d^4x = \sqrt{-\tilde{g}}\, d^4\tilde{x}$。

第3题题目和思路

题目： 考虑一维空间x和一维时间t构成的时空里的标量场$\phi(x,t)$，若其作用量为

$$S = \int dxdt\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - V(\phi)\right],$$

其中$V(\phi)$为给定的势能函数。试用求作用量稳定点的方法推导$\phi(x,t)$的运动方程并将结果与Euler-Lagrange方程做比较。

思路：仿照课上的离散化方法取作用量的稳定点。

第3题解答

把时间和空间均进行离散化。固定格点的间隔dx和dt。该物理系统的所有自由度为$\phi(x+idx, t+jdt)$ $(i, j = 0, \pm1, \pm2 \ldots)$。作用量可以写成离散求和:

$$\begin{aligned}
\frac{S}{dx\,dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\phi(x,t+dt)-\phi(x,t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\phi(x,t)-\phi(x,t-dt)}{dt}\right)^2 \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{\phi(x+dx,t)-\phi(x,t)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi(x,t)-\phi(x-dx,t)}{dx}\right)^2 \\
&- \frac{1}{2}V(\phi(x,t)) \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

其中...代表所有跟$\phi(x,t)$这个自由度无关的项。

第3题解答（续）

作用量对$\phi(x,t)$求偏导并令其为零，得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{dt}\left[-\frac{\phi(x,t+dt)-\phi(x,t)}{dt}+\frac{\phi(x,t)-\phi(x,t-dt)}{dt}\right] \\
&\quad -\frac{1}{dx}\left[-\frac{\phi(x+dx,t)-\phi(x,t)}{dx}+\frac{\phi(x,t)-\phi(x-dx,t)}{dx}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}V'\left(\phi(x,t)\right) \\
&= \frac{1}{dt}\left[-\partial_t\phi(x,t+dt/2)+\partial_t\phi(x,t-dt/2)\right] \\
&\quad -\frac{1}{dx}\left[-\partial_x\phi(x+dx/2,t)+\partial_x\phi(x-dx/2,t)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}V'\left(\phi(x,t)\right) \\
&= (-\partial_t^2+\partial_x^2)\phi-\frac{1}{2}V'(\phi)
\end{aligned}
$$

第3题解答（续）

最终得到运动方程：$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + \frac{1}{2}V'(\phi) = 0$.,
和Euler-Lagrange方程一致。

注意：一般习惯上写拉氏密度时把V单独拿出来不乘1/2因子。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] - V(\phi)$$

按这种定义推导出来的运动方程就是$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + V'(\phi) = 0$.
题目采取了比较奇怪的定义，虽然逻辑上完全没有问题，但会对以后阅读文献有不好影响。这是因为我出题不够仔细。对此非常抱歉。

第4题题目和思路

题目：谐振子

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2}\left[(\frac{d\phi}{dt})^2 - \omega^2\phi^2\right] dt$$

把时间维特殊化以后就只有一个自由度ϕ。写出ϕ对应的正则动量π，系统的Hamilton量，以及Hamilton方程。试把π从两个Hamilton方程中消去，得到的结果和Euler-Lagrange方程一致吗?

思路：世上再也没有比套公式更令人愉快的事了。

第4题解答

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\dot{\phi})} = m\dot{\phi}$$

$$H = \dot{\phi}\pi - L = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\phi^2$$

Hamilton方程:

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -m\omega^2\phi$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial \pi} = \frac{\pi}{m}$$

消去π后得到,

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$$

和Euler-Lagrange方程相同。

第5题题目和思路

作用量

$$S = \int d^4x \ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,.$$

在坐标平移下显然具有不变性。由此用Noether定理推导场ϕ的能量动量守恒方程。

思路：能量动量守恒是由时间平移和空间平移对称性导致的。所以我们考虑四种无穷小变换$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^r \delta_r^\mu \ (r = 0, 1, 2, 3)$。

第5题解答

考虑无穷小变换（即坐标系不动，时空以及时空里的场一起相对于坐标系平移）$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^r \delta^\mu_r$（这里不对$r$求和，分别考虑固定$r = 0, 1, 2, 3$时的守恒流）。
移动后在坐标x^μ处的ϕ实际上是移动前在$x^\mu - \epsilon^r \delta^\mu_r$处的$\phi$。所以$\phi$的变化为:

$$\delta\phi = -\epsilon^r \delta^\mu_r \partial_\mu \phi$$

即

$$\frac{\delta\phi}{\delta\epsilon^r} = -\delta^\mu_r \partial_\mu \phi = -\partial_r \phi$$

同理

$$\delta\mathcal{L} = -\epsilon^r \delta^\mu_r \partial_\mu \mathcal{L}$$

对固定的r而言δ^μ_r是不依赖于坐标x^μ的常数，所以上式可写成

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^r \partial_\mu (-\delta^\mu_r \mathcal{L})$$

第5题解答(续)

根据Noether定理，有

$$j_r^\mu = -\delta_r^\mu \mathcal{L} + \partial_r \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

为守恒流。
写成更对称的“能量动量张量”形式：

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

积分$\int T^{00} d^3\mathbf{x}$, $\int T^{0i} d^3\mathbf{x}$ $(i = 1, 2, 3)$分别对应总能量和三个方向的动量。它们都是守恒的。