量子场论 I

第十三课 第二个Feynman图

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

关于形式解的小bug

$$|\psi\rangle_{t_2} \stackrel{?}{=} e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}_I(t')dt'}|\psi\rangle_{t_1}$$

上节课我们讲到的Interaction绘景的态的形式解其实有bug。

当你把$e^{-i\int H_I dt}$展开到二阶以上时这个bug就可能被触发。

在不同时刻的$\hat{H}_I$如果不对易，则$de^{-i\int \hat{H}_I dt'}/dt \neq -i\hat{H}_I e^{-i\int \hat{H}_I dt'}$

神奇的编时算符

三次项的相互作用

考虑拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

的实标量场。其中$\lambda > 0$和g都是耦合常数。我们仅考虑它们很小($\lambda \ll 1$, $g \ll m$)的情况。
我们取如下的相互作用表象：

$$H_0 = H_{\rm free}, \quad H_I = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{g}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)$$

其中$H_{\rm free} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{1}{2}(\dot\phi^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2)$是我们以前学过的自由场的Hamilton量。

继续上节课的热身问题

上节课的热身问题是:

求两个动量为$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$的粒子发生散射，变为两个动量为$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$的粒子的概率幅。

$$\mathcal{M}T/V\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k = \langle \mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4|e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt}|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle$$

如上节课末尾所讲，我们已经把$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$引入了左边的定义式。

我们仍假设这四个动量$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$互不相同，即初态和末态粒子都是可以区分的。

一阶微扰展开

我们做微扰展开，对带λ的项我们仍展开到一次，对带g的项我们要展开到二次。这是因为单个$g\phi^3$最多只能提供三个产生湮灭算符的乘积，无法湮灭两个粒子并产生两个新粒子。

$$e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt} \approx 1 - i\int d^4x\, \frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3 - \frac{1}{2}\left(\int d^4x\, \frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3\right)^2 - i\int d^4x\, \frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4$$

第一项和第二项均没有贡献，第四项的贡献我们上节课算了。我们这节课来计算第三项的非零贡献：

$$-\frac{g^2}{2(3!)^2}\int d^4x \int d^4y\, \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4|\hat{\phi}(x)^3\hat{\phi}(y)^3|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$$

有了新问题。

等等，这样直接写下来的式子还不完全正确。

上节课中出现的算符是$\hat{\phi}^4(x)$，不存在次序问题。现在出现了$\hat{\phi}^3(x)\hat{\phi}^3(y)$这样的项，它和$\hat{\phi}^3(y)\hat{\phi}^3(x)$不是等价的，到底该怎么排序呢?

化简

利用四维空间的积分公式：

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x} = \delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

我们最终得到：

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{(2\pi)^2}\frac{(d^3\mathbf{k})^2}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

注意到$d^3\mathbf{k}=(2\pi)^3/V$(例如考虑一个边长为L的立方盒子)，以及$d^4k=(2\pi/T)d^3\mathbf{k}$，我们可以把上式写成

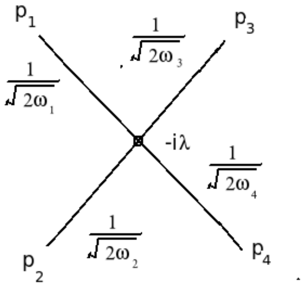
$$\mathcal{M} \approx -i\lambda\frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$$

对结果的物理讨论

结果中的$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$在$p_1+p_2-p_3-p_4=0$时为1，否则为零。这是散射问题能量动量守恒的自然结果。一般定义散射振幅时会把这个能量动量守恒因子排除在外，按这样的定义方法，最后结果就是:

$$\mathcal{M} \approx -i\lambda \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}$$

这个问题对应的Feynman图和Feynman规则



实标量场$\frac{\lambda}{4!}\phi^4$相互作用项的Feynman规则：

- 四线交叉顶角给出因子$-i\lambda$
- 每条外线给出因子$1/\sqrt{2\omega}$

选择题时间

我们算完了人生中第一个Feynman图，你的感想是：

A 无敌是多么寂寞

B 老师你故意找个最好算的图逗我们的吧！

C 刚才发生了什么……

答案是B

下节课我们要动真格的了。