量子场论 I

第四课 标量场的量子化(II)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

实标量场的量子化

傅立叶变换后的$\phi(\mathbf{k})$的拉氏量：

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2}|\dot{\phi}(\mathbf{k})|^2 - \frac{\omega^2}{2}|\phi(\mathbf{k})|^2\right]$$

考虑到$\phi(\mathbf{k})$是实数场的傅立叶变换，必须满足$\phi^\dagger(\mathbf{k}) = \phi(-\mathbf{k})$，上述积分可以只对半个$\mathbf{k}$空间(例如限定$k_1 \geq 0$)进行。 在半空间内把$\phi(\mathbf{k})$分解为实部和虚部$\phi(\mathbf{k}) = \frac{u(\mathbf{k})+iv(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}$， u和v就是独立变量了：

$$L = \int_{k_1 \geq 0} d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2}\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2\right) - \frac{\omega^2}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right]$$

实标量场的量子化

于是每个$u(\mathbf{k})\sqrt{d^3\mathbf{k}}$和$\upsilon(\mathbf{k})\sqrt{d^3\mathbf{k}}$均为单位质量谐振子，我们可以写出

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_u(\mathbf{k}) + \hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

$$\hat{\upsilon}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_\upsilon(\mathbf{k}) + \hat{a}_\upsilon^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

于是

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}\left(\frac{\hat{a}_u(\mathbf{k})+i\hat{a}_\upsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k})+i\hat{a}_\upsilon^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}\right), & \text{if } k_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}\left(\frac{\hat{a}_u(-\mathbf{k})-i\hat{a}_\upsilon(-\mathbf{k})}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_u^\dagger(-\mathbf{k})-i\hat{a}_\upsilon^\dagger(-\mathbf{k})}{\sqrt{2}}\right), & \text{if } k_1 < 0 \end{cases} \tag{1}$$

实标量场的量子化

为了简化符号，我们定义

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_u(\mathbf{k}) + i\hat{a}_\upsilon(\mathbf{k})\right), & \text{if } k_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_u(-\mathbf{k}) - i\hat{a}_\upsilon(-\mathbf{k})\right), & \text{if } k_1 < 0 \end{cases}$$

并求共轭转置得到

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger_u(\mathbf{k}) - i\hat{a}^\dagger_\upsilon(\mathbf{k})\right), & \text{if } k_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger_u(-\mathbf{k}) + i\hat{a}^\dagger_\upsilon(-\mathbf{k})\right), & \text{if } k_1 < 0 \end{cases}$$

容易验证

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

对任意**k**成立。

实标量场的量子化

注意u和v，以及半空间内的$\mathbf{k}$均标记不相关的自由度，不同自由度的产生或湮灭算符都对易。利用这个来证明：

- $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = 0$
- $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (即当且仅当$\mathbf{k} = \mathbf{k}'$时为1，否则为零)

事实上，$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$和$\hat{a}_{\mathbf{k}}$分别是三维动量为$\mathbf{k}$的粒子的产生算符和湮灭算符。

课堂互动

在海森堡绘景下，态$|0\rangle, |1\rangle, \ldots$均不随时间变化，而算符均按海森堡方程随时间变化：

$$i\frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}]$$

取$\hat{O}$为单位质量谐振子的产生算符和湮灭算符，$\hat{H} = (\hat{N} + 1/2)\omega$，试证明

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega\hat{a}, \quad \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\omega\hat{a}^\dagger$$

根据上面的方程我们可以解出

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_{t=0}e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger_{t=0}e^{i\omega t}$$

实标量场的量子化

上述产生算符和湮灭算符的随时间变化规律对$\hat{a}_u(\mathbf{k})$, $\hat{a}_\upsilon(\mathbf{k})$等均成立，所以对它们的线性组合$\hat{a}_{\mathbf{k}}$和$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$也成立。 于是我们可以写出海森堡绘景下$\hat{\phi}(\mathbf{k})$在任意时刻的表达式：

$$\hat{\phi}(\mathbf{k};t) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

其中右边$\hat{a}$和$\hat{a}^\dagger$为$t=0$时刻的湮灭和产生算符，为了书写方便我们省略了$t=0$的标注。

实标量场的量子化

最后，我们把$\hat{\phi}(\mathbf{k},t)$进行三维空间的反傅立叶变换得到：

$$\hat{\phi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega t}+\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{i\omega t}\right)$$

利用四维内积$k_\mu x^\mu=\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$我们可以进一步把上面的式子简化写成

$$\hat{\phi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-ik_\mu x^\mu}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}e^{ik_\mu x^\mu}\right)$$

在作业中我们会证明：四维时空中两点的$\hat{\phi}$的对易$\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\rangle$是洛仑兹变换下的不变量。

复标量场

复标量场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \,.$$

跟实标量场相比少了个1/2因子，我们之后会看到这样定义的原因。

同样对固定时刻的ϕ作傅立叶变换之后可得到拉氏量

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[|\dot{\phi}(\mathbf{k})|^2 - \omega^2 |\phi(\mathbf{k})|^2 \right] \,.$$

复标量场的量子化

对复标量场，我们可以在全$\mathbf{k}$空间分解$\phi(\mathbf{k}) = \frac{u(\mathbf{k})+i\upsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}$而无须担心自由度重复的问题。

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2}\left(\dot{u}^2 + \dot{\upsilon}^2\right) - \frac{\omega^2}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right]$$

复标量场没有两个半$\mathbf{k}$空间的重复求和带来的因子2，而开始的$\mathcal{L}$的定义少了1/2因子，所以两者抵消后$u\sqrt{d^3\mathbf{k}}$, $\upsilon\sqrt{d^3\mathbf{k}}$仍为单位质量谐振子。
于是

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_u(\mathbf{k}) + \hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}},\quad \hat{\upsilon}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_\upsilon(\mathbf{k}) + \hat{a}_\upsilon^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

复标量场的量子化

通过重新定义

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}_u(\mathbf{k}) + i\hat{a}_v(\mathbf{k})\right], \;\; \hat{b}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}_u(-\mathbf{k}) - i\hat{a}_v(-\mathbf{k})\right]$$

就得到

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

课堂互动

- 证明：除了$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$，其余$\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$之间均两两对易。也就是说：$\hat{a}$和$\hat{b}$代表三维动量为$\mathbf{k}$的两种不同粒子的湮灭算符。
- 对上述复标量场$\hat{\phi}$证明

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

复标量场的规范变换和守恒荷

复标量场的作用量显然在变换$\phi \to \phi e^{iq\epsilon}$下是严格的不变量($q$为任意实常数,$\epsilon \to 0^+$），所以必然有一个守恒量与之对应。在这个变换下： $\frac{\delta\phi}{\delta\epsilon} = iq\phi$, $\frac{\delta\phi^\dagger}{\delta\epsilon} = -iq\phi^\dagger$, $\delta\mathcal{L} = 0$ （即Noether定理中的$F^\mu = 0$）。按照Noether定理:

$$j^\mu = iq\left(\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^\dagger\right)$$

是个守恒流。对三维空间积分我们得到复标量场的守恒电荷:

$$Q = iq\int d^3\mathbf{x}\,\left(\phi^\dagger\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^\dagger\right).$$

变换$\phi \to \phi e^{i\epsilon}$又称为规范变换，下面我们从量子场的观点来讨论复标量场的守恒荷。

复标量场的守恒荷

根据实空间的内积等价于傅立叶空间的内积的数学定理（请回顾上节课内容），守恒荷的表达式可以写成

$$Q = iq \int d^3\mathbf{k} \left(\phi^\dagger(\mathbf{k})\dot{\phi}(\mathbf{k}) - \phi(\mathbf{k})\dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}) \right) .$$

把$\hat{\phi} = \frac{\hat{a}_\mathbf{k} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$代入上式，并利用前面得到的$d\hat{a}_\mathbf{k}/dt = -i\omega\hat{a}_\mathbf{k}$, $d\hat{b}_\mathbf{k}/dt = -i\omega\hat{b}_\mathbf{k}$, $d\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}/dt = i\omega\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}$, $d\hat{b}^\dagger_\mathbf{k}/dt = i\omega\hat{b}^\dagger_\mathbf{k}$ 就得到

$$Q = q \sum_\mathbf{k} \left(\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}\hat{a}_\mathbf{k} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{k}\hat{b}_\mathbf{k} \right)$$

我们看到a和b实际上是荷相反的两种粒子(互为反粒子)，故有荷的守恒律。而实数标量场的粒子是中性的，所以没有守恒荷。

定域规范变换

思考：如果把上述规范变换的q替换为一个依赖时空坐标的函数$\gamma(x)$（这样的规范变换称为定域规范变换），拉氏密度和作用量就都不是不变的了。怎样修改拉氏密度可以使作用量不变?