量子场论 I

脑洞大开作业参考解答

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题 二维空间的Casimir力

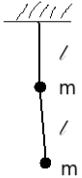
假设“脑洞大开世界”是2维空间加1维时间的平直时空，时空度量元为

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$$

在这个世界里的“脑洞大开人”发现真空中的相距为d的很长的（长度$\gg d$)两根平行金属线之间有大小为F的相互作用力，他们认为这是两条金属线之间的真空能的改变引起的作用力，并把这种力称为Casimir力。现在问，当把金属线之间的距离变为$d/2$，Casimir力变为多大?

解答：当$L \to \infty$时，问题中唯一的有量纲量为d。自然单位制下，单位长度受力的量纲为质量三次方，故正比于距离的-3次方。所以距离减半时，Casimir力变为8倍。

第2题 只有两个自由度的“量子场”



如图，在一个长度为ℓ，质量为m的理想刚性单摆下再悬挂一个相同的单摆。节点处都认为可以无阻力自由在所示的平面内转动。本地重力常数为g。试求该系统的量子零点能。

解答：仅考虑小幅振动。取两个质点的横向位移分别为x_1，x_2。则垂直位移分别为$\frac{x_1^2}{2\ell}$和$\frac{x_1^2}{2\ell}+\frac{(x_2-x_1)^2}{2\ell}$，系统的拉氏量为

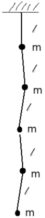
$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)-\frac{mg}{2\ell}\left[2x_1^2+(x_2-x_1)^2\right]=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}m\mathbf{x}^T\Omega^2\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \Omega^2=\frac{g}{\ell}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

假设Ω^2的本征值为ω_1^2和ω_2^2，则$\omega_1^2+\omega_2^2=\mathrm{Tr}\left(\Omega^2\right)=4\frac{g}{\ell}$，$\omega_1^2\omega_2^2=\det\left(\Omega^2\right)=2\frac{g^2}{\ell^2}$。所以真空能$E_{\mathrm{vac}}=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)=\frac{1}{2}\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\sqrt{\omega_1^2\omega_2^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\frac{g}{\ell}}$

第3题 奇怪的一维量子场



把上题推广到N个长度为ℓ，质量为m的理想刚性单摆首位连接挂起来(如左图给出了一个$N=5$的例子)，所有的单摆都可以无摩擦在所示的平面内转动。记系统的总量子零点能为E_N。当$N\to\infty$时，$E_N/N^{3/2}$趋向于一个常数，试计算这个常数（用ℓ，g，m来表示）。

解答：如上题一样设N个质点的横向位移分别为x_1，x_2，...，x_N。把拉氏量写为

$$L=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}m\mathbf{x}^T\Omega^2\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix},\ \Omega^2=\frac{g}{\ell}\begin{pmatrix} 2N-1 & -(N-1) & & & & & \\ -(N-1) & 2N-3 & -(N-2) & & & & \\ & -(N-2) & 2N-5 & -(N-3) & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & -2 & 3 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

第3题解答续

于是问题转化为求解Ω^2的本征值$\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_N^2$。
我们先忘掉原问题，考虑一个相对较简单的矩阵的本征值问题，对$n \in Z$，定义一个$n \times n$ 的矩阵

$$S_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

取变量$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})^T$，则$S_n$对应的二次型耦合谐振子系统的势能可以写为

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T S_n \mathbf{x} = \frac{1}{2}\left[x_0^2 + (x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \ldots + (x_{n-2} - x_{n-1})^2 + x_{n-1}^2\right]$$

为了使上式有周期对称性，我们给上述势能加上一项 $-x_0 x_{n-1}$，并（不加证明地，厚颜无耻地）认为当$n \to \infty$时这样加一项造成的影响可以忽略。

$$\mathbf{x}^T S_n \mathbf{x} \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2$$

其中我们约定符号$x_n = x_0$。

第3题解答续

现在我们取离散傅立叶变换

$$y_i \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-\frac{2\pi ij}{n}\imath}$$

其逆变换为

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{\frac{2\pi ij}{n}\imath}$$

上式的证明如下：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{\frac{2\pi ij}{n}\imath} &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi(i-k)j}{n}\imath} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=i} x_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi(i-k)j}{n}\imath} + \frac{1}{n} \sum_{k\neq i} x_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi(i-k)j}{n}\imath} \\
&= \frac{1}{n} x_i \sum_{j=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{n} \sum_{k\neq i} x_k \frac{1 - e^{\frac{2\pi(i-k)n}{n}\imath}}{1 - e^{\frac{2\pi(i-k)}{n}\imath}} \\
&= x_i + 0 \\
&= x_i
\end{aligned}$$

不难验证，上述逆变换公式对$i = n$的情况也会正确地给出$x_n = x_0$，或更一般地可以拓宽下标的范围：$x_{n+i} = x_i$，$y_{n+i} = y_i$。

第3题解答续

此外，我们还可以验证离散傅立叶变换是保持矢量模不变的幺正变换，即

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y_i|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2$$

上式证明如下:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i^* x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j^* e^{-\frac{2\pi ij}{n} i} \sum_{k=0}^{n-1} y_k e^{\frac{2\pi ik}{n} i} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} y_j^* y_k \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i(k-j)}{n} i} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} y_j^* y_k \delta_{jk} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} |y_j|^2
\end{aligned}$$

第3题解答续

利用

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{\frac{2\pi ij}{n} i}$$

即得到

$$x_i - x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(1 - e^{\frac{2\pi j}{n} i}\right) e^{\frac{2\pi ij}{n} i}$$

定义 $z_j \equiv y_j \left(1 - e^{\frac{2\pi j}{n} i}\right)$，则由上式可以看出$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$是$x_0 - x_1, x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$的离散傅立叶变换。根据离散傅立叶变换保持模不变的性质，即有

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |z_i|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} 4 \sin^2 \frac{\pi i}{n} |y_i|^2$$

也就是说，原先势能为$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T S_n \mathbf{x}$的耦合谐振子，经过离散傅立叶变换可以对角化为频率分别为$2 \sin \frac{\pi i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$的独立谐振子（模仿课上对实标量场进行对角化的最后一步，把y进行实，虚步分离，可以化为标准的谐振子形式）。所以我们得到S_n的频谱为 $\omega_i = 2 \sin \frac{\pi i}{n}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$。其每个自由度的平均频率在$n \to \infty$的极限下为

$$\bar{\omega} = \frac{\int_0^\pi 2 \sin x \, dx}{\int_0^\pi dx} = \frac{4}{\pi}$$

第3题解答续

最后我们回到原问题，当N很大时，我们取$N = np$ 并令$p \gg n \gg 1$。
我们再次（不加证明地，厚颜无耻地）把$\frac{l}{g}\Omega^2$ "近似" 为

$$\frac{\ell}{g}\Omega^2 \approx \begin{pmatrix} pnS_n & & & & & \\ & (p-1)nS_n & & & & \\ & & (p-2)nS_n & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & 2nS_n & \\ & & & & & nS_n \end{pmatrix}.$$

根据前面对S_n的讨论可知，knS_n的平均本征频率为$\frac{4}{\pi}\sqrt{kn}$，即本征频率之和为$\frac{4n^{3/2}}{\pi}\sqrt{k}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$。所以$\frac{l}{g}\Omega^2$的本征频率之和为 $\frac{4n^{3/2}}{\pi}\sum_{k=1}^{p}\sqrt{k} \approx \frac{4n^{3/2}}{\pi}\int_0^p \sqrt{k} = \frac{8n^{3/2}}{3\pi}p^{3/2} = \frac{8}{3\pi}N^{3/2}$
即$N \to \infty$时，

$$E_N/N^{3/2} \to \frac{4}{3\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

第4题 环上的量子场

假设“脑洞大开世界”为一个一维圆环加上一维时间，时空度量元为

$$ds^2 = dt^2 - R^2 d\theta^2$$

其中$R > 0$为固定常数，(t, θ)为时空坐标。在这个时空里的质量为m的实标量场$\phi(t, \theta)$满足周期性边界条件

$$\phi(t, \theta + 2\pi) = \phi(t, \theta)$$

其自由场拉氏量为

$$L_{\text{free}} = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right]$$

试把ϕ场量子化。

第4题解答

解答：由周期性边界条件可以把ϕ展开为

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{ik\theta}$$

且由ϕ为实数可以得到$\phi_{-k} = \phi_k^*$。可以仿照课上对实标量场的量子化方法把ϕ量子化(过程略），唯一的区别是动量k为离散的整数值。

第5题 环上的量子场的散射

给上题中的场ϕ加一个自相互作用的拉氏量，

$$L = L_{\text{free}} - \int_0^{2\pi} d\theta \ \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

其中$\lambda \ll 1$为耦合常数。

试证明，这个场的两个粒子不可能发生散射变成和初态不同的两个粒子。

解答：设散射初态动量为p_1，p_2，末态动量为p_3，p_4。因为是一维的情况，由能量动量守恒即知道p_3，p_4必须和p_1，p_2相同。