

# 量子场论 I

## 第一课：坐标系和张量场简介

授课：黄志琦

教材：《简明量子场论》，王正行，北京大学出版社  
课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# 评分 (Evaluation)

总分 = 作业30分 + 课堂表现20分 + 期末考试50分

# 互相简单介绍

自我介绍:

- ▶ 名字
- ▶ 物理基础: 高等数学, 线性代数, 理论力学, 狭义相对论, 量子力学这五门课的学习情况 (这些是什么鬼? 学过大部分忘了? 学过大部分还会? 精通?)

# 第一章要掌握的内容

- ▶ 自然单位制和量纲
- ▶ 坐标，度规和张量
- ▶ 作用量和拉氏密度的概念
- ▶ Euler-Lagrange方程的推导
- ▶ Noether定理的推导

# 自然单位制和量纲

自然单位制  $c = \hbar = 1$

长度量纲 = 时间量纲 = 质量量纲<sup>-1</sup> = 能量量纲<sup>-1</sup>



力的量纲

= 质量量纲 × 长度量纲/时间量纲<sup>2</sup>

= 质量量纲<sup>2</sup>

# 思考题



下面物理量的量纲是质量的多少次方？

速度 $v$

角速度 $\omega$

角动量 $L$

加速度 $a$

能量密度 $\rho$

压强 $p$

牛顿引力常数 $G$

## 思考题

1 kg的倒数是多少 cm?



根本不知道你在说什么.jpg

# 时空坐标的标记以及一些约定

- ▶ 时空用坐标 $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 来标记，其中 $x^0$ 为时间坐标，有时也写作 $t$ ；省略上标的坐标 $x$ 是 $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 的简写。
- ▶ 希腊字母指标 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$  默认跑遍 $0, 1, 2, 3$
- ▶ 拉丁字母指标 $i, j, k, l, \dots$  默认跑遍 $1, 2, 3$
- ▶ 黑体表示三维空间矢量，例如  $\mathbf{dx} \equiv (dx^1, dx^2, dx^3)$



# 时空坐标的标记以及一些约定

- ▶ 爱因斯坦求和规则：重复出现的指标默认求和。例如： $dx^\mu dx_\mu$  若无特殊说明等价于  $\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu$
- ▶ 空间坐标的偏微分  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  经常简写成  $\partial_\mu$ 。省略下标的偏微分符号  $\partial$  是  $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$  的简写。算符  $\nabla$  则仅是空间偏微分  $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  的简写。
- ▶ 克罗内克符号 (Kronecker delta)  $\delta^\mu_\nu$  当  $\mu = \nu$  时为 1，否则为 0。

# 度规(metric)

时空间隔元的定义:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

# 度规 (metric)

时空间隔元：狭义相对论的平直时空，也叫闵氏空间(Minkowski spacetime)的度规

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这样时空间隔元可以简写成  $ds^2 = dt^2 - \mathbf{dx}^2$

# 一般性张量(tensor)的定义

一般性张量在坐标变换 $x \rightarrow \tilde{x}$ 下的变化:

$$\tilde{T}^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} = \left( \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \dots \right) T^{\rho\sigma\dots}_{\gamma\lambda\dots}$$

(上个学年很多同学看到这里就退课了😁)

## 思考题

如果 $\phi$ 是一个标量（0阶张量，在坐标变换下不变），时空度规为 $g_{\mu\nu}$ ，时空度规的逆矩阵为 $g^{\mu\nu}$ 。试证明：

- ▶ 任何常数都是标量
- ▶ 时空微元 $dx^\mu$ 是张量（一阶张量，也称为矢量）
- ▶  $g_{\mu\nu}$ 本身是张量（二阶张量）
- ▶  $\partial_\mu\phi$ 是张量（矢量）
- ▶ 克罗内克符号 $\delta^\mu_\nu$ 是张量
- ▶ 度规的逆矩阵 $g^{\mu\nu}$ 是张量
- ▶ 如果定义 $dx_\mu \equiv g_{\mu\nu}dx^\nu$ ，则 $dx_\mu$ 也是张量
- ▶ 如果定义 $\partial^\mu\phi \equiv g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$ ，则 $\partial^\mu\phi$ 是张量
- ▶ 如果 $T^{\mu\nu}$ 是二阶张量，则 $T^\mu_\mu$ 是标量
- ▶ 如果 $A^\mu$ 和 $B^\mu$ 都是矢量，则 $A^\mu B^\nu$ 是二阶张量

# 张量指标的升降

通过前面的讨论，我们发现张量的坐标可以通过度规 $g_{\mu\nu}$ 和其逆矩阵 $g^{\mu\nu}$ 来升降



$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$T^{\mu}_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu\rho}$$

$$g^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

# 张量指标的相乘

通过前面的讨论，我们发现一个 $m$ 阶张量和一个 $n$ 阶张量可以直接相乘生成 $m+n$ 阶张量。



$dx^\mu dx^\nu$  是二阶张量。  
 $g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}$  是四阶张量

# 张量指标的收缩

通过前面的讨论，我们发现张量的上下指标可以收缩，产生低两阶的张量。



$$dx^\mu dx_\mu = ds^2$$

$$g^\mu_\mu = 4$$

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$$



# 课堂互动



如果 $\phi$ 是标量，那么 $\partial_\mu \partial_\nu \phi$ 是张量吗？

# 课后作业

- 1 自然单位制下力矩的量纲是什么（=质量的多少次方）？
- 2 某散射过程的截面为 $\sigma = 10^{-3}/m_W^2$ ，其中 $m_W \approx 80\text{GeV}$ 是 $W^\pm$ 的粒子质量。试换算出以 $\text{cm}^2$ 为单位的截面值。
- 3 设四维时空度规为 $g_{\mu\nu}$ ，试化简 $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ 。