量子场论 I

第八课 旋量

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

我们仅在平直时空内讨论旋量

历史渊源，想把方程$(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta + m^2)\phi = 0$拆成一次算符的乘积：

$$(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

进而考虑满足一次方程$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$的场$\psi$

显然，要满足这样的条件必须有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

由此引发了一系列的故事......

我们仅在平直时空内讨论旋量

因为对一般度规寻找$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$变得非常困难，在讨论旋量时，我们仅在平直时空中取Minkowski度规:
$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

数学准备：γ矩阵

约定矩阵A, B的反对易符号$\{A, B\} \equiv AB + BA$。已知存在四个$n \times n$复数矩阵γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$满足$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I$,其中I是$n \times n$单位矩阵。另外，我们定义$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$。

- 证明 $(\gamma^5)^2 = I$和$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$
- 若$\mu \neq \nu$ （可取$0, 1, 2, 3, 5$中任两个），证明I和$\gamma^\mu\gamma^\nu$线性独立
- 若μ, ν, λ互不相同（可取$0, 1, 2, 3, 5$中任三个），证明$I, \gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\nu\gamma^\lambda, \gamma^\lambda\gamma^\mu$这4个矩阵线性独立
- 证明$\gamma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\gamma^5\gamma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$这8个矩阵线性独立
- 证明I, γ^5, $\gamma^\mu\gamma^\nu(0 \leq \mu < \nu \leq 3)$这8个矩阵线性独立
- 最后，证明 I, γ^5, $\gamma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\gamma^5\gamma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\gamma^\mu\gamma^\nu(0 \leq \mu < \nu \leq 3)$这16个矩阵线性独立

数学准备：γ矩阵

因为已经找到了16个线性独立的$n \times n$的矩阵，n至少等于4。
Dirac找到了$n = 4$的一组具体解：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

其中σ^i为2×2的Pauli矩阵，

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

这样可以直接算出：

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

对Dirac的γ矩阵，容易验证$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ $(i = 1, 2, 3)$, $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$.

数学准备：γ矩阵

今后默认$n=4$，并在不致引起混淆时不再写出I，例如$\{\gamma^\nu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$, $(\gamma^5)^2=1$等。

为了进一步简化符号，对任意矢量A, Feynman定义了符号：$\not{A}\equiv\gamma^\mu A_\mu$。

讨论：试证明 $(\not{A})^2=A^\mu A_\mu$

数学准备：γ矩阵

从γ^5和γ^0可以定义 $P_L = \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)$, $P_R = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)$ 证明：

$$P_L^2 = P_L;\ P_R^2 = P_R; P_L P_R = P_R P_L = 0$$

今后我们会看到P_L，P_R分别为左旋投影算符和右旋投影算符

假设四维动量$k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$满足$k^\mu k_\mu = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$，定义

$$P_+ = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\not{k}}{m}\right), P_- = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\not{k}}{m}\right)$$

证明

$$P_+^2 = P+;\ P_-^2 = P_-; P_+ P_- = P_- P_+ = 0$$

今后我们会看到P_+和P_-分别为粒子与反粒子的投影算符。

数学准备:γ矩阵

对洛仑兹变换$x^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ (变换矩阵$a^\mu{}_\nu$满足$a^\mu{}_\lambda a^\lambda{}_\nu = g^\mu{}_\nu$)，存在一个矩阵$\Lambda$，使得对$\mu = 0, 1, 2, 3$均有

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu .$$

我们称Λ为该洛仑兹变换下的旋量变换矩阵。

重要的概念澄清:

- Λ为$n \times n$矩阵，它作用于旋量的内部n维空间，而$a^\mu{}_\nu$作用于普通的坐标空间。只不过刚好在Dirac表示下取$n = 4$使得Λ看起来跟$a^\mu{}_\nu$类似。
- 不要把$a^\mu_\nu\gamma^\nu$看成γ矩阵的坐标变换规则。事实上，γ矩阵在洛仑兹变换下是不变的。

正规洛仑兹变换（$\det(a) = 1$）可以看成很多无穷小的正规洛仑兹变换的乘积，试先对无穷小的正规洛仑兹变换求解旋量变换矩阵，并推广到任意的正规洛仑兹变换。

空间反射下的旋量变换矩阵

在空间反射下：

$$\gamma^0 \to \gamma^0,\ \gamma^i \to -\gamma^i (i = 1, 2, 3)$$

显然$\Lambda = \gamma^0$满足

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

因为任何非正规（行列式为-1）的洛仑兹变换可以看成空间反射和正规洛仑兹变换的乘积，我们就已经相当于求解出了对任意洛仑兹变换的旋量变换矩阵。

数学准备:γ矩阵

证明

- 正规洛仑兹变换下的旋量变换矩阵Λ和γ^5对易，非正规洛仑兹变换下的旋量变换矩阵和γ^5反对易。
- 如果取γ矩阵的Dirac表示，任意洛仑兹变换下的旋量变换矩阵Λ满足$\Lambda^\dagger = \gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^0$

提示：先证明对无穷小变换成立，再推广到任意变换。

数学准备:γ矩阵

总算把γ矩阵的数学准备讲完了……（退课还来得及吗？）

旋量的定义

设Λ为洛仑兹变换下的旋量变换矩阵，旋量定义为满足下述坐标变换规则的有n个复分量的变量:

$$\psi \to \Lambda\psi$$

注意：这里讲的旋量仅为描述自旋1/2的粒子的旋量，或称Dirac旋量。一般性的自旋为$3/2, 5/2, ...$的旋量我们暂不讨论。

非常重要的概念澄清：因为在Dirac的γ矩阵表示下$n = 4$，所以旋量在Dirac表示下是有四个复分量的变量$(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3)$。但旋量的分量描述的是旋量在内部$n$维空间的投影，千万不要把旋量看成矢量，也不要用普通空间的度规对旋量进行指标的升降。

Dirac共轭

旋量的Dirac共轭在Dirac的γ矩阵表示下定义为：

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

在洛仑兹变换下证明：

- $\bar{\psi}\psi$是标量
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$和$\bar{\psi}\gamma^5\psi$是矢量
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$是反对称张量
- $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 是赝标量
- $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ 是赝矢量

有了标量就可以开始构造拉氏密度了，下节课我们开始讲旋量场的拉氏密度和场方程。（是的，悲伤才刚刚开始......）