量子场论 I

第二次课后作业 （共八次，每次2.5分）
交作业时间: 10月10日，星期一，13：30pm

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题(0.5分)

对质量为m的自由实标量场ϕ，四维动量k满足$k^0 = \omega \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$，其中$\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2, k^3)$为三维动量。对任意洛仑兹变换下不变的函数$f(k)$，证明积分$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} f(k)$ 也是洛仑兹变换下的不变量。

第2题(0.5分）

对质量为m的自由实标量场ϕ，证明四维时空下的任意两点场算符的对易$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]$是洛仑兹变换下的不变量。(提示：利用$\hat{\phi}$的算符表达式和第1题结论。）

第3题(0.5分)

质量为m的自由复标量场,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

把ϕ和$\phi^\dagger$分别看作独立自由度，它们对应的正则动量分别为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger,\ \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}$$

于是Hamilton密度为

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^\dagger \pi^\dagger + \dot{\phi}\pi - \mathcal{L} = \pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi$$

我们在课堂上推到了量子化后的ϕ为

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_\mathbf{k} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_\mathbf{k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

试求量子化后的总Hamilton量$\hat{H}$.

第4题(0.5分)

考虑和规范场耦合的复标量场的拉氏密度:

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

利用Euler-Lagrange方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

证明j_μ是守恒流.

第5题(0.5分）

关于三维空间转动算符

- 证明相反方向的角动量算符相差一个负号$\hat{J}_{-\mathbf{n}} = -\hat{J}_{\mathbf{n}}$
- 因为绕固定轴转动2π的没有任何效果，所以转动算符$e^{-2\pi i \hat{J}_{\mathbf{n}}} = 1$，由此证明$\hat{J}_{\mathbf{n}}$的本征值一定是整数。
- 三个形成右手正交系的方向$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$,对应的转动算符分别为$\hat{J}_1$，$\hat{J}_2$，$\hat{J}_3$，证明$\hat{J}_1^{\,2} + \hat{J}_2^{\,2} + \hat{J}_3^{\,2} = 2$。.