

量子场论 I

第十六课 量子电动力学(QED)初步介绍

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

Background

自然界有四种基本作用力——引力，电磁力，强相互作用力和弱相互作用力。我们以前学过的电动力学是对电磁力的经典描述。量子电动力学(QED)则是对电磁力的量子描述，它是物理学里最严谨最精密的一个分支。

QED研究的是自旋为1/2的Dirac场和自旋为1的 $U(1)$ 规范场的相互作用。拉氏密度为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, q 为Dirac场粒子的电荷。

定域规范不变性

证明QED在定域规范变换

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \gamma$$

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\gamma}$$

下作用量不变。

场方程

试推导QED的场方程:

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

和

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

电荷守恒

显然

$$j^\nu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

是守恒流(可以直接用上面的场方程证明或者用全局规范对称性和Noether定理来证明),

$$Q = \int d^3\mathbf{x} j^0 = q \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}\gamma^0\psi$$

是守恒电荷。

QED的相互作用绘景

在 $A_0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的规范下,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(|\dot{\mathbf{A}}|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right) + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\not{A}\psi$$

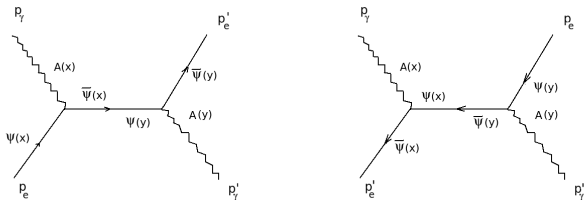
我们仍然把自由场的Hamilton量作为 \hat{H}_0 , 相互作用Hamilton量为

$$\hat{H}_I = \int d^3\mathbf{x} A_\mu j^\mu = q \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}\not{A}\psi$$

热身问题：Compton散射

QED里最简单的问题是Compton散射问题：一个电子和一个光子发生碰撞，变成不同动量的电子和光子。

设电子和光子的动量初态为 p_e 和 p_γ ，末态为 p'_e 和 p'_γ 。因为现在相互作用为两个 ψ 和一个 \mathbf{A} ，最简单的Feynman图就长这样：



再加上 x, y 互换，每个图要乘以2，恰好和泰勒展开中的 $1/(2!)$ 抵消。注意对固定的电子(正粒子)， $\hat{\psi}$ 只包含湮灭算符， $\hat{\bar{\psi}}$ 只包含产生算符。所以图中的 $\bar{\psi}$ 和 ψ 不能随意交换次序。

Feynman传播子

为了计算QED的Feynman图，我们先计算Feynman传播子

$$\overline{\hat{\psi}(x)}\hat{\psi}(y)$$

同样它也可以看成自由 ψ 场的关联矩阵的矩阵元。自由 ψ 场的关联矩阵为

$$i(i\not{\partial} - m + i\epsilon)^{-1} \rightarrow \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon}$$

在傅立叶空间计算矩阵元：

$$\overline{\hat{\psi}(x)}\hat{\psi}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{ie^{-ik(x-y)}}{\not{k} - m + i\epsilon}$$

当然，我们希望能绕开这些积分过程直接用Feynman规则进行计算。体积元 $d^3\mathbf{p}$ 和 e^{-ipx} 等的组合最后都会给出正确的 $T/V\delta(p_\gamma + p_e - p'_\gamma - p'_e)d^4k$ 因子，所以我们在推导Feynman规则时不再关注它们。

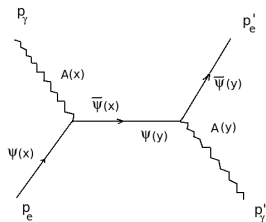
其他几条Feynman规则

- ▶ 顶点给出因子 $-iq\gamma^\mu$
- ▶ 电子内线给出Feynman传播子 $\frac{i}{\not{k}-m}$
- ▶ 对于一个初态的动量为 \mathbf{p} , 自旋为 s 的电子外线, 我们需要从 $\hat{\psi}$ 中提取一个湮灭算符 $\hat{a}_{\mathbf{p},s}$, 对应的系数为 $u_{\mathbf{p},s}$ 。
- ▶ 对于一个末态的电子外线, 则需要提取产生算符 $\hat{\psi}^\dagger$ 里的 $\hat{a}_{\mathbf{p},s}^\dagger$, 随之带来的因子为 $\bar{u}_{\mathbf{p},s}$ 。
- ▶ 初态的光子对应的因子为 $(e_{\mathbf{p},s})_\mu/\sqrt{2\omega}$ 。这里的 μ 为跟它连接的顶点的 $-iq\gamma^\mu$ 里的指标 μ 。
- ▶ 末态的光子对应的因子为 $(e_{\mathbf{p},s})_\mu^*/\sqrt{2\omega}$ 。这里的 μ 为跟它连接的顶点的 $-iq\gamma^\mu$ 里的指标 μ 。

注:

1. 如果是反粒子则把 u 换成 v 。
2. 在库仑规范下矢量 \mathbf{e} 第0分量为零。

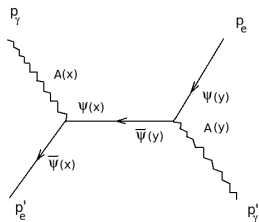
第一个图



+ (x, y 互换)

$$= \frac{(-iq)^2}{2\sqrt{\omega_\gamma \omega'_\gamma}} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma}^* \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} u_{p_e, s_e}$$

第二个图



+ (x, y 互换)

$$= \frac{(-iq)^2}{2\sqrt{\omega_\gamma \omega'_\gamma}} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \not{\epsilon}^*_{p'_\gamma, s'_\gamma} u_{p_e, s_e}$$

世界上最遥远的距离，就是Feynman图和最终结果之间的距离

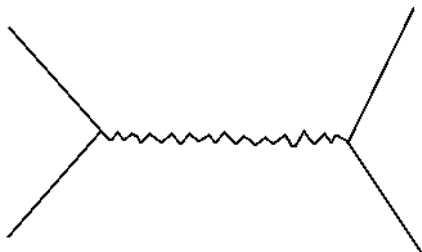
我们需要计算总散射截面的绝对值的平方，假设初态和末态的自旋都未知，则需要对所有初态求平均(共4种自旋态)，对末态求和：

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{4\omega_\gamma \omega'_\gamma} \frac{1}{4} \sum_{s_e, s_\gamma, s'_e, s'_\gamma} \left| \bar{u}_{p'_e, s'_e} \left(\not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma}^* \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} + \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma}^* \right) u_{p_e, s_e} \right|^2$$

只要十来页纸的计算就能把上式化简到最后结果，但今天我们比较忙，这点小事先放一放，来聊点别的。

最后一条Feynman规则

先撇开那些令人赏心悦目 (shēng bù rú sǐ) 的计算不说，我们还差最后一条Feynman规则没讨论。如果初态和末态都是Dirac费米子，那么我们需要把两个 A 收缩掉。对应的Feynman图长成这样：



最后一条Feynman规则

我们还是用直接写出矩阵元的方法。在洛伦兹规范下写出傅立叶空间的拉氏密度：

$$i\mathcal{L} = -\frac{1}{2}A_\mu(C^{-1})_{\mu\nu}A_\nu$$

其中

$$C_{\mu\nu} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

于是有了最后一条Feynman规则：

- ▶ 光子内线对应的 $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}$ ，其中的 μ, ν 为跟它连接的两个顶点的指标(即这两个顶点分别为 $-iq\gamma^\mu$ 和 $-iq\gamma^\nu$)。

下节课我们讲那些计算的小事。

第五次课后作业（题号14-16）

14 考虑一个有自相互作用的复标量场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2$$

这里 $0 < \lambda \ll 1$ 。我们已经知道复标量场有 a , b 两种粒子互为反粒子。两个动量为 p_1 , p_2 的 a 粒子发生散射变为动量为 p_3 , p_4 的粒子。仅考虑最低阶近似。证明末态粒子只能都是 a 粒子，并求出散射振幅。

注： p_1 , p_2 , p_3 , p_4 均为四维动量。

第五次课后作业（题号14-16）

15 仍然考虑上题中的有自相互作用的复标量场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2$$

试在质心参考系求两个动量为 p_1, p_2 的 a 粒子发生散射的散射截面，仍只要求算到最低阶近似。

注： p_1, p_2 均为四维动量。

第五次课后作业（题号14-16）

16 对自由实标量场 ϕ ，定义 n 点Green函数为：

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | \mathcal{T} (\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle$$

其中 $|0\rangle$ 为真空态。

证明：当 n 为奇数时 $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，当 n 为偶数时 $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 等于把 x_1, x_2, \dots, x_n 进行两两配对所得两点Green函数的乘积的遍历配对方式之和，例如 $n = 4$ 时，

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3)$$

提示：用Wick定理或者路径积分基本定理