

量子场论 I

第一次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn）

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题：题目和思路

题目：若算得的截面为 $\sigma = 10^{-3}/m_W^2$, $m_W \approx 80\text{GeV}$ 是 W^\pm 的粒子质量，试换算出以 cm^2 为单位的截面值。若算得的寿命的 $\tau = 100/m_W$ ，试问等于多少秒？

思路：这道题要求把自然单位制表示的物理量用普通单位制表示出来。首先要理解 $\sigma = 10^{-3}/m_W^2$ 这种自然单位制写法的含义：它表示在普通单位制里选取适当的 p, q 可以使 $\sigma = 10^{-3}/m_W^2 c^p \hbar^q$ ，在自然单位制下规定 $c = \hbar = 1$ 所以可以不写 $c^p \hbar^q$ 。我们只要求出 p 和 q 就能知道 σ 在普通单位制下的表示。

第1题：第一种解法

设在普通单位制下 $\sigma = 10^{-3}/m_W^2 c^p \hbar^q$ 。我们用 M, L, T 分别表示普通单位制下的质量，长度，时间量纲。则无论是按“截面”的字面意思，还是按题目要求（普通单位制下用 cm^2 表示），都能确定左边是一个面积，量纲为 L^2 ；右边的量纲为 $M^{-2}(LT^{-1})^p (ML^2 T^{-1})^q = M^{q-2} L^{p+2q} T^{-p-q}$ 。很显然要两边在普通单位制下量纲一致必须有 $p = -2, q = 2$ 。所以

$$\sigma = 10^{-3} \hbar^2 / m_W^2 / c^2$$

注意题目给的 m_W 以能量单位 $\text{GeV} = 1.6022 \times 10^{-10} \text{J}$ 表示，实际上是普通单位制里的 $m_W c^2$ 。所以我们把上式写成：

$$\begin{aligned}\sigma &= 10^{-3} \hbar^2 c^2 / (m_W c^2)^2 \\ &= 10^{-3} \times \frac{(1.0546 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})^2 (2.9979 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1})^2}{(80 \times 1.6022 \times 10^{-10} \text{J})^2} \\ &= 6.08 \times 10^{-35} \text{cm}^2\end{aligned}$$

第1题：第一种解法(续)

同样，可以假设 $\tau = 100/m_W c^p \hbar^q$ 。左边的量纲为 T ，右边的量纲为 $M^{q-1} L^{p+2q} T^{-p-q}$ 。于是 $p = -2$, $q = 1$ 。

$$\begin{aligned}\tau &= 100\hbar/(m_W c^2) \\ &= 100 \times (1.0546 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}) / (80 \times 1.6022 \times 10^{-10} \text{J}) \\ &= 8.23 \times 10^{-25} \text{s}\end{aligned}$$

第1题：第二种解法

在自然单位制下可以任意地乘或除 c 和 \hbar 。所以我们总结出：

- ▶ 显然时间和长度可以用乘或除 c 来互相转化。
- ▶ 根据 $E = mc^2$, 能量和质量可以通过乘或除 c^2 互相转化。
- ▶ 根据量子力学的能量测不准原理 $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$, 时间和能量可以用 \hbar 去除互相转化。
- ▶ 根据量子力学的动量测不准原理 $\Delta(mv) \Delta x \gtrsim \hbar$, v 和 c 量纲相同, 所以质量和长度可以用 \hbar/c 去除互相转化。

第1题：第二种解法(续)

我们先把GeV（能量）换算成时间：

$$1\text{GeV} = \frac{1.6022 \times 10^{-10} \text{J}}{1.0546 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}} = \frac{1}{6.582 \times 10^{-25} \text{s}}$$

然后把时间转化为长度。

$$6.582 \times 10^{-25} \text{s} = (6.582 \times 10^{-25} \text{s})(2.9979 \times 10^{10} \text{cm/s}) = 1.973 \times 10^{-14} \text{cm}$$

所以第一问答案为：

$$\sigma = \frac{10^{-3}}{80^2} \text{GeV}^{-2} = \frac{10^{-3}}{80^2} \times (1.973 \times 10^{-14} \text{cm})^2 = 6.08 \times 10^{-35} \text{cm}^2$$

第二问答案为：

$$\tau = 100/80 \text{GeV}^{-1} = 1.25 \times (6.582 \times 10^{-25} \text{s}) = 8.23 \times 10^{-25} \text{s}$$

第2题: 题目和思路

题目: 证明任意四维时空坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 的积分元 $\sqrt{-g}d^4x$ 是一个标量。其中 g 是度规矩阵 $g_{\mu\nu}$ 的行列式的简写, d^4x 是积分元 $dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ 的简写。

思路: $g_{\mu\nu}$ 矩阵的变换规则按张量定义可以写出来。 d^4x 的变化在微积分课程里学过:多元函数积分进行变量替换时, 积分元要乘Jacobian行列式的绝对值的倒数。

第2题解答

假设坐标变换为 $x \rightarrow \tilde{x}$ ，则Jacobian矩阵为 $J^\mu_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ ，其行列式简写为 $\det J$ 。按多元函数积分的变量替换规则，

$$d^4x = |\det J|^{-1} d^4\tilde{x} \quad (1)$$

张量 $g_{\mu\nu}$ 的变换规则为 $g_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}$

把 $g_{\mu\nu}$ 矩阵简写为 G ，上式可写成矩阵乘法 $G = J^T \tilde{G} J$

两边取行列式，并根据“积的行列式等于行列式的积”，以及“矩阵转置不改变行列式”，得到：

$$\det G = |\det J|^2 \det \tilde{G} \quad (2)$$

结合(1)和(2)即得所求证的结论 $\sqrt{-g} d^4x = \sqrt{-\tilde{g}} d^4\tilde{x}$ 。

第3题题目和思路

题目：考虑一维空间 x 和一维时间 t 构成的时空里的标量场 $\phi(x, t)$ ，若其作用量为

$$S = \int dx dt \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \right],$$

其中 $V(\phi)$ 为给定的势能函数。试用求作用量稳定点的方法推导 $\phi(x, t)$ 的运动方程并将结果与Euler-Lagrange方程做比较。

思路：仿照课上的离散化方法取作用量的稳定点。

第3题解答

把时间和空间均进行离散化。固定格点的间隔 dx 和 dt 。该物理系统的所有自由度为 $\phi(x + idx, t + jdt)$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$)。作用量可以写成离散求和:

$$\begin{aligned} \frac{S}{dx dt} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\phi(x, t + dt) - \phi(x, t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi(x, t) - \phi(x, t - dt)}{dt} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi(x + dx, t) - \phi(x, t)}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi(x, t) - \phi(x - dx, t)}{dx} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} V(\phi(x, t)) \\ & + \dots \end{aligned}$$

其中...代表所有跟 $\phi(x, t)$ 这个自由度无关的项。

第3题解答 (续)

作用量对 $\phi(x, t)$ 求偏导并令其为零, 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{dt} \left[-\frac{\phi(x, t+dt) - \phi(x, t)}{dt} + \frac{\phi(x, t) - \phi(x, t-dt)}{dt} \right] \\ &\quad - \frac{1}{dx} \left[-\frac{\phi(x+dx, t) - \phi(x, t)}{dx} + \frac{\phi(x, t) - \phi(x-dx, t)}{dx} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} V'(\phi(x, t)) \\ &= \frac{1}{dt} [-\partial_t \phi(x, t+dt/2) + \partial_t \phi(x, t-dt/2)] \\ &\quad - \frac{1}{dx} [-\partial_x \phi(x+dx/2, t) + \partial_x \phi(x-dx/2, t)] \\ &\quad - \frac{1}{2} V'(\phi(x, t)) \\ &= (-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi - \frac{1}{2} V'(\phi) \end{aligned}$$

第3题解答（续）

最终得到运动方程： $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + \frac{1}{2}V'(\phi) = 0.$ ，
和Euler-Lagrange方程一致。

注意：一般习惯上写拉氏密度时把 V 单独拿出来不乘 $1/2$ 因子。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] - V(\phi)$$

按这种定义推导出来的运动方程就是 $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + V'(\phi) = 0.$
题目采取了比较奇怪的定义（逻辑上完全没有问题，但会对以后阅读文献有不好影响），是因为我出题不够仔细。对此非常抱歉。

第4题题目和思路

题目：谐振子

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

把时间维特殊化以后就只有一个自由度 ϕ 。写出 ϕ 对应的正则动量 π ，系统的Hamilton量，以及Hamilton方程。试把 π 从两个Hamilton方程中消去，得到的结果和Euler-Lagrange方程一致吗？

思路：世上再也没有比套公式更令人愉快的事了。

第4题解答

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\dot{\phi})} = m\dot{\phi}$$

$$H = \dot{\phi}\pi - L = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\phi^2$$

Hamilton方程:

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial\phi} = -m\omega^2\phi$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial\pi} = \frac{\pi}{m}$$

消去 π 后得到,

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$$

和Euler-Lagrange方程相同。

第5题题目和思路

作用量

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

在坐标平移下显然具有不变性。由此用Noether定理推导场 ϕ 的能量动量守恒方程。

思路：能量动量守恒是由时间平移和空间平移对称性导致的。所以我们考虑四种无穷小变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^r \delta_r^\mu$ ($r = 0, 1, 2, 3$)。

第5题解答

考虑无穷小变换（即坐标系不动，时空以及时空里的场一起相对于坐标系平移） $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^r \delta_r^\mu$ （这里不对 r 求和，分别考虑固定 $r = 0, 1, 2, 3$ 时的守恒流）。

移动后在坐标 x^μ 处的 ϕ 实际上是移动前在 $x^\mu - \epsilon^r \delta_r^\mu$ 处的 ϕ 。所以 ϕ 的变化为：

$$\delta\phi = -\epsilon^r \delta_r^\mu \partial_\mu \phi$$

即

$$\frac{\delta\phi}{\delta\epsilon^r} = \delta_r^\mu \partial_\mu \phi = \partial_r \phi$$

同理

$$\delta\mathcal{L} = -\epsilon^r \delta_r^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$$

对固定的 r 而言 δ_r^μ 是不依赖于坐标 x^μ 的常数，所以上式可写成

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^r \partial_\mu (-\delta_r^\mu \mathcal{L})$$

第5题解答(续)

根据Noether定理, 有

$$j_r^\mu = -\delta_r^\mu \mathcal{L} + \partial_r \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

为守恒流。

写成更对称的“能量动量张量”形式:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

积分 $\int T^{00} d^3\mathbf{x}$, $\int T^{0i} d^3\mathbf{x}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别对应总能量和三个方向的动量。它们都是守恒的。