

量子场论 I

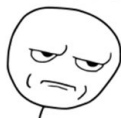
第十三课 第二个Feynman图

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

关于形式解的小bug

$$|\psi\rangle_{t_2} \stackrel{?}{=} e^{-i \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}_I(t) dt} |\psi\rangle_{t_1}$$

你在逗我吗？



上节课我们讲到的Interaction绘景的态的形式解其实有bug。

当你把 $e^{-i \int \hat{H}_I dt}$ 展开到二阶以上时这个bug就可能被触发。

出bug的原因：在不同时刻的 \hat{H}_I 如果不对易，

$$\text{则 } \frac{d e^{-i \int^t \hat{H}_I dt'}}{dt} \neq -i \hat{H}_I(t) e^{-i \int^t \hat{H}_I dt'}$$

神奇的编时算符

我们引入编时算符 \mathcal{T} ，它作用于一串算符的乘积时把算符乘积顺序按时间从晚到早排序，而等时的算符保持乘积次序不变。例如，若 $t_1 > t_2 = t_3 > t_4$ ，则

$$\mathcal{T} \left(\hat{A}(t_3) \hat{B}(t_2) \hat{C}(t_4) \hat{D}(t_1) \right) = \hat{D}(t_1) \hat{A}(t_3) \hat{B}(t_2) \hat{C}(t_4)$$

试证明：对任意算符 \hat{O} 均有

$$\frac{d \left(\mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t \hat{O}(t') dt'} \right) \right)}{dt} = \hat{O}(t) \left(\mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t \hat{O}(t') dt'} \right) \right)$$

神奇的编时超算符

在相互作用表象,

$$|\psi\rangle_{t_2} = \mathcal{T} \left(e^{-i \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}_I(t) dt} \right) |\psi\rangle_{t_1}$$

(这次真的没bug了)

三次项的相互作用

考虑拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{3!} \phi^3 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

的实标量场。其中 $\lambda > 0$ 和 g 都是耦合常数。我们仅考虑它们很小($\lambda \ll 1, g \ll m$)的情况。
我们取如下的相互作用表象:

$$H_0 = H_{\text{free}}, \quad H_I = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{g}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right)$$

其中 $H_{\text{free}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2)$ 是自由场的Hamilton量。

继续上节课的热身问题

上节课的热身问题是：

求两个动量为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 的粒子发生散射，变为两个动量为 $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 的粒子的概率幅。

$$\mathcal{M}T/V\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)d^4k = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_I dt} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

如上节课末尾所讲，我们已经把 $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)d^4k$ 引入了左边的定义式。

我们仍假设这四个动量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 互不相同，即初态和末态粒子都是可以区分的。

一阶微扰展开

我们做微扰展开，对带 λ 的项我们仍展开到一次，对带 g 的项我们要展开到二次。这是因为单个 $g\phi^3$ 最多只能提供三个产生湮灭算符的乘积，无法湮灭两个粒子并产生两个新粒子。

$$\mathcal{T} \left(e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_I dt} \right) \approx 1 - i \int d^4x \frac{g}{3!} \hat{\phi}(x)^3 - \frac{1}{2} \mathcal{T} \left(\left(\int d^4x \frac{g}{3!} \hat{\phi}(x)^3 \right)^2 \right) - i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}^4$$

第一项和第二项均没有贡献，第四项的贡献我们上节课算了。我们这节课来计算第三项的非零贡献：

$$-\frac{g^2}{2(3!)^2} \int d^4x \int d^4y \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \hat{\phi}(x)^3 \hat{\phi}(y)^3 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$