

# 量子场论 I

## 第二课 作用量原理和Noether定理

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

## 课堂互动：函数与稳定点

稳定点：所有一阶导数全为零的点（极值点一定是稳定点，反之则未必）

- ▶  $f(\phi) = \phi$  存在稳定点吗
- ▶ 求  $f(\phi) = \phi^2$  的稳定点
- ▶ 求  $f(\phi) = \frac{1}{3}\phi^3 - \phi$  的稳定点
- ▶ 求  $f(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{3}\phi_1^3 - \phi_1 + (\phi_2 - \phi_1)^2$  的稳定点
- ▶ 求  $f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \frac{1}{3}\phi_1^3 - \phi_1 + \sum_{j=2}^n (\phi_j - \phi_1)^2$  的稳定点
- ▶ 求  $f(\phi_1, \phi_2, \dots) = \frac{1}{3}\phi_1^3 - \phi_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (\phi_j - \phi_1)^2$  的满足“边界条件”  $\phi_1 > 0$  的稳定点。

我们看到函数如存在多个稳定点，则可以添加适当的“边界条件”使得稳定点唯一。

# 场的函数

以自然数标记自由度的变量 $(\phi_1, \phi_2, \dots)$ 的进一步推广就是用坐标来标记自由度的“场” $\phi_t$  ( $t \in (-\infty, \infty)$ )。当然，我们更习惯把它记成 $\phi(t)$ 。在学习场论的过程中，我们通常不把场看成坐标的函数，而是把坐标 $t$ 看成自由度的标记，把场看成有无穷多自由度的变量。

场既然只是一个无穷多元变量，当然就可以定义它的函数，数学上叫“泛函”(functional):



$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

把 $\phi(t)$ 映射为一个数。这里 $\omega$ 是具有角速度量纲的常量， $m$ 是具有质量量纲的常量。

# 四维时空里的场的泛函

四维时空里的场（也同样可以看成是一个无穷多自由度的变量，其自由度用四维时空坐标来标记）也可以有它的泛函，例如。

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$$

举个栗子



把场 $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 映射为一个数 $S$ 。其中 $g$ 是度规 $g_{\mu\nu}$ 的行列式的简写。 $d^4x$ 是 $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ 的简写。 $m$ 是质量量纲的常量。积分范围是整个四维时空。

# 作用量

泛函

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

定义了一个物理系统(谐振子)。反过来的等价说法是这个物理系统的“作用量”(Action)是上述泛函。

作用量的满足边界条件的稳定点给出了物理系统的经典解。原则上所有经典物理问题都可以归结为求解作用量的稳定点。

# 课堂互动

求谐振子

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

的运动方程。在边界条件  $\phi|_{t=0} = 1, \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t=0} = 0$  下写出它的经典解  $\phi(t)$ 。

# 课堂互动

考虑一维空间 $x$ 和一维时间 $t$ 构成的时空里的标量场 $\phi(x, t)$ ，若其作用量为

$$S = \int dx dt \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right],$$

求 $\phi(x, t)$ 的运动方程。

# Euler-Lagrange方程

一般性地，作用量为

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

的运动方程（即Euler-Lagrange方程）为

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

其中 $\mathcal{L}$ 称为拉氏密度(Lagrangian density).注意拉氏密度在形式上必须写成场和场的时空偏导的函数。

注意：推导Euler-Lagrange方程并不像很多教科书上那样需要对边界条件进行一些假设。



## 时间维特殊化

如果想回到我们习惯的“时间”的概念，可以把时间维特殊化。把场 $\phi$ 看成用三维坐标标记的无穷多元变量 $\phi(\mathbf{x})$ 随时间的演化。把作用量写成拉氏量（Lagrangian, 定义为拉氏密度的空间积分 $L \equiv \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}$ ）的时间积分。

$$S = \int L(\phi, \dot{\phi}) dt$$

这里 $\dot{\phi}$ 是 $\phi$ 的时间偏导数（即固定 $\mathbf{x}$ 处的 $\phi$ 的时间导数）。注意：一旦我们采用这种把时间维特殊化的描述方法,  $\phi$ 的空间微分在形式上就只是看成不同空间点的 $\phi$ 联合得到的函数，而不看成 $L$ 所依赖的变量了。

在这种描述方法下，Euler-Lagrange方程简化为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial L}{\partial \phi(\mathbf{x})} .$$

## Hamilton量

把时间维度 $t$ 特殊化后,  $\phi(\mathbf{x})$ 共轭的正则动量定义为:

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right|_{\mathbf{x}} .$$

显然 $\pi(\mathbf{x})$ 也随时间变化。  
场的Hamilton密度定义为

$$\mathcal{H} \equiv \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

注意Hamilton密度形式上必须写成正则变量 $\phi$  (包括空间偏导都必须离散化后写成 $\phi$ 的函数)和正则动量 $\pi$ 的函数,时间导数 $\dot{\phi}$ 不允许出现在 $\mathcal{H}$ 的最终表达式里。

场的Hamilton函数 $H$ 则是 $\mathcal{H}$ 的空间积分。

$$H(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x})) .$$

# Hamilton方程

理论力学里的Hamilton方程对有无穷多自由度的场依然成立, 在任意时间 $t$ :

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi(\mathbf{x})}, \quad \dot{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi(\mathbf{x})}$$

# Noether定理

仍回到四维时空的作用量。

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

考虑场的一个无穷小变化：

$$\delta\phi = \epsilon \frac{\delta\phi}{\delta\epsilon}$$

若这个映射使得作用量的变化严格为零，则 $\mathcal{L}$ 的变化必然可以写成 $\delta\mathcal{L} = \epsilon \partial_\mu F^\mu$ 的形势。

Noether定理：

$$j^\mu = F^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{\delta\phi}{\delta\epsilon}$$

是一个守恒流（即 $\partial_\mu j^\mu = 0$ ）。

# Noether定理的证明

证明:

$$\begin{aligned}\epsilon \partial_\mu j^\mu &= \epsilon \partial_\mu F^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \\ &= \delta \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi \\ &= 0\end{aligned}$$

中间我们利用了Euler-Lagrange方程。

## 课后作业(题号4-6)

- 4 考虑一维空间 $x$ 和一维时间 $t$ 构成的时空里的标量场 $\phi(x, t)$ , 若其作用量为

$$S = \int dx dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \right],$$

其中 $V(\phi)$ 为给定的势能函数。试用求作用量稳定点的方法推导 $\phi(x, t)$ 的运动方程并将结果与Euler-Lagrange方程做比较。

- 5 谐振子

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

把时间维特殊化以后就只有一个自由度 $\phi$ 。写出 $\phi$ 对应的正则动量 $\pi$ ，系统的Hamilton量，以及Hamilton方程。试把 $\pi$ 从两个Hamilton方程中消去，得到的结果和Euler-Lagrange方程一致吗？

## 6 作用量

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

在坐标平移下显然具有不变性。由此用Noether定理推导场 $\phi$ 的能量动量守恒方程。

提示：考虑四种无穷小变化 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon_r \delta_r^\mu$  ( $r = 0, 1, 2, 3$ )带来的 $\phi$ 的变化和 $\mathcal{L}$ 的变化。