量子场论 I

第六课 角动量理论和矢量场的自旋

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

矩阵的函数简要回顾

上节课末尾讲到，对任意的解析函数$f(x)$总能定义矩阵的函数$f(A)$。它有如下性质。

- 若A的本征值和本征矢为$(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$; $(\lambda_2, \mathbf{v}_2)$;... 则$f(A)$有相同的本征矢，相应的本征值则变为$f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ...
- 矩阵的函数满足复合函数规则，即：若解析函数f, g, h满足$h(x) = f(g(x))$，则对任意矩阵A有$h(A) = f(g(A))$。特别地，$(e^A)^n = e^{nA}$。
- 共轭转置和函数可以交换位置。即$(f(A))^\dagger = f(A^\dagger)$。由此得出若$A$是厄米矩阵$(A = A^\dagger)$，则$f(A)$也是厄米矩阵。注意厄米矩阵的本征值都是实数。
- 若两个矩阵A, B对易，则它们的任意函数$f(A)$与$g(B)$也对易。特别地，$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$。

三维空间转动算符

任意三维矢量$\mathbf{v}$绕方向$\mathbf{n}$（我们约定方向矢总是归一化的，即$\mathbf{n}^2=1$）旋转无穷小角度ϵ总是可以写成：

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v} - i\epsilon \hat{J}_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = e^{-i\epsilon \hat{J}_{\mathbf{n}}}\mathbf{v}\,.$$

其中$\hat{J}_{\mathbf{n}}$是3×3的转动矩阵，它只跟$\mathbf{n}$有关。为了防止同三维空间指标i混淆，以后我们用符号$\imath$来表示虚数单位。
对于有限大小的转动角θ，因为总是可以把转动划分成很多份的小转动，所以取足够大的N即有

$$\mathbf{v} \to \left(e^{-\imath(\theta/N)\hat{J}_{\mathbf{n}}}\right)^N\mathbf{v} = e^{-\imath\theta\hat{J}_{\mathbf{n}}}\mathbf{v}$$

也就是说绕$\mathbf{n}$旋转θ的操作仍然可以写成$e^{-\imath\theta\hat{J}_{\mathbf{n}}}$。算符$\hat{J}_{\mathbf{n}}$是对应于$\mathbf{n}$方向的转动算符，它不依赖于坐标系而存在。仅当我们需要写出$\hat{J}_{\mathbf{n}}$的具体矩阵表达式时，才需要选定一个坐标系。

课堂互动

对三个形成右手正交系的方向$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$,对应的转动算符分别为$\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$。试证明

- 对任意角度θ，有$e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1\cos\theta + \mathbf{n}_2\sin\theta$, $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2\cos\theta - \mathbf{n}_1\sin\theta$, $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3$.
- 对任意角度θ, 算符$e^{-i\theta\hat{J}_3}$的三组本征矢量和本征值分别为$(\mathbf{n}_3, 1)$, $(\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2, e^{-i\theta})$, $(\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2, e^{i\theta})$。
- 根据上题结论，证明$\hat{J}_3$的三组本征矢量和本征值分别$(\mathbf{n}_3, 0)$, $(\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2, 1)$, $(\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2, -1)$.
- 根据上题结论，证明$\hat{J}_3\mathbf{n}_1 = i\mathbf{n}_2$, $\hat{J}_3\mathbf{n}_2 = -i\mathbf{n}_1$。通过置换1, 2, 3可以得到$\hat{J}_i\mathbf{n}_j = i\epsilon_{ijk}\mathbf{n}_k$。其中$\epsilon_{ijk}$为完全反对称张量（当$ijk$为123的偶置换时为$\epsilon_{ijk} = 1$，当$ijk$为123的奇置换时$\epsilon_{ijk} = -1$, ijk有重复指标时$\epsilon_{ijk} = 0$)。
- $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$

空间转动对称性和角动量守恒

由于作用量是拉氏密度在全空间的积分，所以对固定的**n**，整体空间的转动$e^{i\epsilon\hat{J}_{\mathbf{n}}}$保持作用量不变。对应的Noether定理中的守恒量就是角动量。

首先，我们形式上把三维转动矩阵$\hat{J}_{\mathbf{n}}$拓写成四维张量$J^{\mu}_{\ \nu}$，规定$J^0_{\ \nu} = J^{\mu}_{\ 0} = 0$，对$i, j$均不为零的情况$J^i_{\ j}$则是$\hat{J}_{\mathbf{n}}$矩阵的第$i$行第$j$列元素。(显然，这样定义的$J^{\mu}_{\ \nu}$并不是任意坐标变换下的张量，我们这里仅仅讨论三维空间的转动则没有问题。)由转动带来的坐标变动为

$$\delta x^{\mu} = i\epsilon J^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$$

这样，对拉氏密度中的所有标量自由度ϕ而言，ϕ在转动后的x^{μ}的位置的值，等于ϕ在转动之前的坐标$x^{\mu} - i\epsilon J^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$处的值。所以

$$\delta\phi = (-i\epsilon J^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu})\partial_{\mu}\phi$$

空间转动对称性和角动量守恒

于是我们得到

$$\frac{\delta \phi}{\delta \epsilon} = -iJ^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \partial_{\mu} \phi$$

.

对矢量分量A^σ，则由于A本身也会发生旋转，所以多了额外一项。

$$\frac{\delta A^\sigma}{\delta \epsilon} = -iJ^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \partial_{\mu} A^\sigma + iJ^{\sigma}_{\nu} A^{\nu}$$

.

空间转动对称性和角动量守恒

最后，拉氏密度作为一个标量，它的变化仅仅由坐标变动而引起:

$$\delta\mathcal{L} = (-i\epsilon J^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu})\partial_{\mu}\mathcal{L}$$

另外，有

$$\partial_{\mu}(J^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}) = J^{\mu}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\mu} = J^{\mu}_{\mu} = 0$$

最后一个等号是因为$\hat{J}_{\mathbf{n}}$的迹(Trace)是所有本征值的和$(= 1 + (-1) + 0 = 0)$.
所以我们得到

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_{\mu}(-iJ^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}\mathcal{L})$$

也就是Noether定理中的$F^{\mu} = -iJ^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}\mathcal{L}$. 显然$F^{0} = 0$.

空间转动对称性和角动量守恒

综上所述，我们得到Noether定理守恒荷密度：

$$j^0 = \sum_q (iJ^\mu_{\ \nu} x^\nu \partial_\mu q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)} - iJ^\sigma_{\ \nu} A^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\sigma)}$$

其中 q取遍标量自由度和矢量所有分量自由度。因为$J^0_{\ \nu} = J^\mu_{\ 0} = 0$，上式也可写成仅对空间坐标求和

$$j^0 = iJ^i_{\ j} x^j \sum_q (\partial_i q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)} - iJ^i_{\ j} A^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)}$$

空间转动对称性和角动量守恒

最后，利用上节课的结论$\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)} = -F^0_{\ i}$，以及以前讨论过的空间平移带来的动量密度 $p_i = \sum_q (\partial_i q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)}$，有

$$j^0 = iJ^i_{\ j}(x^j p_i + A^j F^0_{\ i})$$

注意到$F^0_{\ i}$即为“电场强度” $\mathbf{E}$, 可以不失一般性地取右手正交坐标系，并设$\mathbf{n}$沿$\mathbf{n}_3$轴方向，根据$\hat{J}_3\mathbf{n}_1 = i\mathbf{n}_2$, $\hat{J}_3\mathbf{n}_2 = -i\mathbf{n}_1$，$\hat{J}_3\mathbf{n}_3 = 0$, 上面的式子可以写成

$$j^0 = (\mathbf{x} \times \mathbf{p} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}_3$$

注意因为取了$+---$的度规，p_i和p^i相差一个负号。上式第一项为轨道角动量（包含了所有自由度），第二项是由于空间转动时矢量会随之变化而带来的“自旋”。

$U(1)$规范场的量子化

现在考虑一个自由$U(1)$规范场

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

怎样把它量子化?

显然，由于矢量场存在自旋，它不能看成许多不相关的谐振子的叠加。我们首先需要建立自旋为1的粒子的量子理论。
大致思路是，仍然把时间维特殊化，取库仑规范排除冗余自由度，然后把A^μ场进行傅立叶变换。由于拉氏密度仍然是二次的，所以傅立叶变换后每一个傅立叶波矢$\mathbf{k}$对拉氏量的贡献都是独立的。我们就只要对固定$\mathbf{k}$的拉氏量研究其量子化。

$U(1)$规范场的量子化

我们先猜测一个形式解，由于A^μ是实数场，它必须是互为共轭的两组算符的和。跟标量场不同的是，现在对每一个$\mathbf{k}$，粒子均可能有自旋s：

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

对每个$\mathbf{k}$，自旋均按$\hat{J}_\mathbf{k}$的本征矢进行分解。我们前面讨论过，本征值为零的本征矢$\mathbf{e}_0$就是$\mathbf{k}$方向的单位矢量，取了库仑规范$\nabla \cdot A = 0$之后$\mathbf{A}$不能有这个方向的分量，因此上面求和只要对自旋为$s = \pm 1$求和。