量子场论 I

第七次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题

如果不改变时空的度规，是否可能从真空中产生出一对正负粒子？为什么？

解答：　不可能。因为真空态是能量最低态。产生任何粒子都违反能量守恒。

第2题

阐述什么是自由场。为什么自由场量子化之前先要对场进行傅立叶变换?

解答：自由场是可以把拉氏量写成由每个自由度单独的拉氏量之和，也就是拉氏量可以对角化的场。(答只含场的二次项也正确。)
对场进行傅立叶变换是为了把拉氏量对角化。

第3题 题目和思路

题目：在课上我们把自由实标量场量子化为

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

考虑两个实标量场ϕ和ψ，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\psi\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m^2(\phi^2 + \psi^2 + \phi\psi)$$

把ϕ和ψ都量子化 (写成独立的产生湮灭算符的线性迭加)。

思路：先做简单的矩阵对角化即可把拉氏量写成独立实标量场之和，对独立的实标量场则可套用课上结论。

第3题解答

令$\chi = \frac{\phi+\psi}{\sqrt{2}}$, $\sigma = \frac{\phi-\psi}{\sqrt{2}}$则

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{M_\chi^2}{2}\chi^2 - \frac{M_\sigma^2}{2}\sigma^2$$

其中$M_\chi = \sqrt{\frac{3}{2}}m$, $M_\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}m$。 于是

$$\chi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_\chi}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},\chi}e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\chi}e^{ik_\mu x^\mu}\right)$$

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_\sigma}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}e^{ik_\mu x^\mu}\right)$$

其中$\omega_\chi \equiv \sqrt{M_\chi^2 + \mathbf{k}^2}$, $\omega_\sigma^2 = \sqrt{M_\sigma^2 + \mathbf{k}^2}$。
再解出$\phi = \frac{\chi+\sigma}{\sqrt{2}}$, $\psi = \frac{\chi-\sigma}{\sqrt{2}}$ 即把ϕ, ψ都表示成了独立的谐振子产生湮灭算符的线性组合。

第4题 题目和思路

题目：设p为电子的四维动量，k为光子的四维动量，m为电子质量，求下列矩阵的迹

- $\not{k}$
- $\not{p}\gamma^5$
- $\not{p}\not{k}\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}$
- $\not{k}(\not{p}+\not{k}+m)^3\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}(\not{p}-\not{k}+m)^2\not{k}$
- $(\not{p}+m)\gamma^\mu\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\not{k}\gamma_\mu\not{k}$

思路：利用$\not{p}^2=p^2=m^2$, $\not{k}^2=k^2=0$以及课上学习的一些γ矩阵求迹技巧即可解答。

第4题 解答

利用$\not{p}^2 = p^2 = m^2$, $\not{k}^2 = k^2 = 0$,奇数个Feynman符号乘积的迹为零，$\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\right) = 4pk$，$\gamma^\mu \not{A}\gamma_\mu = -2\not{A}$, $\gamma^\mu \not{A}\not{B}\gamma_\mu = 4AB$ 以及$\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m} = \frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2} = \frac{\not{p}+\not{k}+m}{2pk}$，可以得到

- $\mathrm{Tr}\left(\not{k}\right) = 0$
- $\mathrm{Tr}\left(\not{p}\gamma^5\right) = p_\mu \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^5\right) = 0$ (零迹定理，剔除γ^5)
- $\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\right) = \frac{1}{2pk}\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}(\not{p}+\not{k}+m)\right) = \frac{m}{2pk}\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\right) = 2m$
- $\mathrm{Tr}\left(\not{k}(\not{p}+\not{k}+m)^3\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}(\not{p}-\not{k}+m)^2\not{k}\right) = \mathrm{Tr}\left(\not{k}^2(\not{p}+\not{k}+m)^3\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}(\not{p}-\not{k}+m)^2\right) = 0$
- $\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^\mu\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\not{k}\gamma_\mu\not{k}\right) = \frac{1}{2pk}\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m)\not{k}\gamma_\mu\not{k}\right) =$
  $\frac{1}{2pk}\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)(4pk-2m\not{k})\not{k}\right) = 2\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\not{k}\right) = 2\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\right) = 8pk$

第5题

电子和μ子可以分别看成独立的两个Dirac场ψ_e，ψ_μ的粒子。和电磁场一起的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_e(i\not{D} - m_e)\psi_e + \bar{\psi}_\mu(i\not{D} - m_\mu)\psi_\mu$$

其中

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

画出散射过程

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$$

的非零的最低阶近似Feynman图。

解答： 见课本143页图7-5