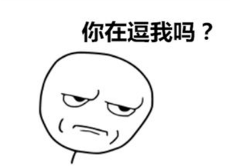
量子场论 I

第十三课 第二个Feynman图

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

关于形式解的小bug

$$|\psi\rangle_{t_2} \stackrel{?}{=} e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}_I(t)dt}|\psi\rangle_{t_1}$$



上节课我们讲到的Interaction绘景里态的形式解其实有bug。
当你把$e^{-i\int H_I dt}$展开到二阶以上时这个bug就可能被触发。

出bug的原因：在不同时刻的$\hat{H}_I$如果不对易，则一般地

$$\frac{de^{-i\int^t \hat{H}_I dt'}}{dt} \neq -i\hat{H}_I(t)e^{-i\int^t \hat{H}_I dt'}$$

下面先来解决这个bug，为此我们要引入一个新的概念：编时算符。

编时算符

编时算符$\mathcal{T}$作用于一串算符的乘积时把算符乘积顺序按时间从晚到早排序（如等时则保持乘积次序不变）。并额外规定：如果发生了费米子产生湮灭算符的奇数次置换，则添加因子-1。
例如，若$t_1 > t_2 = t_3 > t_4$，A, B, C, D均为玻色子的产生湮灭算符，则

$$\mathcal{T}\left(\hat{A}(t_3)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_4)\hat{D}(t_1)\right) = \hat{D}(t_1)\hat{A}(t_3)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_4)$$

若A, B, C, D为费米子的产生湮灭算符，则因为总共发生了3次置换(D与C换位置，D与B换位置，D与A换位置)，上式右边要乘以$(-1)^3 = -1$

更一般的一些情况：

- 如果编时算符作用于多个乘积之和，就把编时算符分别作用于每一项。
- 编时算符对乘积中的普通数无影响，因为普通数可以放在乘积的任何位置。

课堂讨论

大多数情形费米子的产生湮灭算符都是等时成对出现（例如在拉氏量或者Hamilton量里），发生置换总是偶数次。并不会产生−1因子。我们把这种仅包含玻色子产生湮灭算符或者成对等时费米子产生湮灭算符的乘积称为类玻色子乘积。
现在来证明：

- 如果算符$\hat{O}$仅含类玻色子乘积，则

$$\mathcal{T}\left(\frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'\right)^n\right)$$
$$=\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t_1)dt_1\int_{t_0}^{t_1}\hat{O}(t_2)dt_2\int_{t_0}^{t_2}\hat{O}(t_3)dt_3\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\hat{O}(t_n)dt_n$$

课堂讨论

- 利用上面的结论证明, 对$n \geq 1$有

$$\frac{d\,\mathcal{T}\left(\frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'\right)^n\right)}{dt} = \hat{O}(t)\,\mathcal{T}\left(\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'\right)^{n-1}\right)$$

- 再利用上面结论证明

$$\frac{d\,\mathcal{T}\left(e^{\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'}\right)}{dt} = \hat{O}(t)\,e^{\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'}$$

Interaction绘景里态的形式解

在相互作用表象，若$\hat{H}_I$仅包含类玻色子乘积，则

$$|\psi\rangle_{t_2} = \mathcal{T}\left(e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}_I(t)dt}\right)|\psi\rangle_{t_1}$$

（bug解决！）

是不是觉得这种排序什么的很好玩?
那我们再来一种……

正则排序算符

正则排序算符$\mathcal{R}$把一系列产生湮灭算符的乘积按产生算符在左，湮灭算符在右的顺序重新排序(同类算符的相对次序不变)。此外额外规定：如果发生了费米子产生湮灭算符的奇数次置换，则添加因子-1。
例如若$\hat{a}$为电子湮灭算符，$\hat{b}$为谐振子湮灭算符。

$$\mathcal{R}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}_3}\hat{b}_{\mathbf{k}_4}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_5}\right) = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}_3}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_5}\hat{a}_{\mathbf{k}_1}\hat{b}_{\mathbf{k}_4}$$

上式中，因为总共发生了2次费米子算符的置换，故无须乘-1因子。

更一般情况的一些规定：

- 若正则排序算符作用于多个乘积之和，就把正则排序算符分别作用于每一项。
- 正则排序算符对乘积中的普通数无影响，因为普通数可以放在乘积的任何位置。

两个产生湮灭算符的收缩

定义两个产生湮灭算符的收缩为：

$$\overbracket{AB} \equiv \mathcal{T}(AB) - \mathcal{R}(AB)$$

注意：**收缩是普通的数**

课堂讨论

若$t_1 > t_0$，$\hat{a}$是频率为ω的湮灭算符，试对玻色子和费米子两种情况证明：

- $$\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_0) = \hat{a}(t_0)\hat{a}^\dagger(t_1) = \hat{a}(t_0)\hat{a}(t_1) = \hat{a}^\dagger(t_0)\hat{a}^\dagger(t_1) = \hat{a}(t_1)\hat{a}(t_0) = \hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}^\dagger(t_0) = 0$$
- $$\hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_0) = \hat{a}^\dagger(t_0)\hat{a}(t_1) = e^{-i\omega(t_1 - t_0)}$$

Wick定理

Wick定理：编时乘积等于穷举所有可能的收缩的正则乘积之和。

在两个算符的情况下，显然根据收缩的定义即有：

$$\mathcal{T}\left(AB\right)=\mathcal{R}\left(AB+\wick{\c A \c B}\right)$$

在三个算符的情况下：

$$\mathcal{T}\left(ABC\right)=\mathcal{R}\left(ABC+\wick{\c A \c B C}+\wick{\c A B \c C}+\wick{A \c B \c C}\right)$$

在四个算符的情况下：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\left(ABCD\right) \quad &= \quad \mathcal{R}\Big(ABCD+\wick{\c A \c B CD}+\wick{\c A B \c C D}+\wick{\c A BC \c D}+\wick{A \c B \c C D}+\wick{A \c B C \c D}+\wick{AB \c C \c D}\\ &\quad +\wick{\c1 A \c1 B \c2 C \c2 D}+\wick{\c1 A \c2 B \c1 C \c2 D}+\wick{\c1 A \c2 B \c2 C \c1 D}\Big)\end{aligned}$$

Wick定理

Wick定理：编时乘积等于穷举所有可能的收缩的正则乘积之和。

在五个算符的情况下

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(ABCDE) = \mathcal{R}\Big(& ABCDE + \contraction{}{A}{}{B}ABCDE + \contraction{}{A}{B}{C}ABCDE + \contraction{}{A}{BC}{D}ABCDE + \contraction{}{A}{BCD}{E}ABCDE \\
& + \contraction{A}{B}{}{C}ABCDE + \contraction{A}{B}{C}{D}ABCDE + \contraction{A}{B}{CD}{E}ABCDE + \contraction{AB}{C}{}{D}ABCDE + \contraction{AB}{C}{D}{E}ABCDE + \contraction{ABC}{D}{}{E}ABCDE \\
& \contraction{}{A}{}{B}\contraction{AB}{C}{}{D}ABCDE + \contraction{}{A}{}{B}\contraction{AB}{C}{D}{E}ABCDE + \contraction{}{A}{}{B}\contraction{ABC}{D}{}{E}ABCDE + \contraction{}{A}{B}{C}\contraction[2ex]{A}{B}{C}{D}ABCDE + \contraction{}{A}{B}{C}\contraction[2ex]{A}{B}{CD}{E}ABCDE + \contraction{}{A}{B}{C}\contraction{ABC}{D}{}{E}ABCDE \\
& + \contraction[2ex]{}{A}{BC}{D}\contraction{A}{B}{}{C}ABCDE + \contraction[2ex]{}{A}{BC}{D}\contraction{A}{B}{CD}{E}ABCDE + \contraction[2ex]{}{A}{BC}{D}\contraction{AB}{C}{D}{E}ABCDE + \contraction[2ex]{}{A}{BCD}{E}\contraction{A}{B}{}{C}ABCDE + \contraction[2ex]{}{A}{BCD}{E}\contraction{A}{B}{C}{D}ABCDE + \contraction[2ex]{}{A}{BCD}{E}\contraction{AB}{C}{}{D}ABCDE \Big)
\end{aligned}
$$

Wick定理

Wick定理：编时乘积等于穷举所有可能的收缩的正则乘积之和。

在六个算符的情况下

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(ABCDEF) \quad = \quad & \mathcal{R}\Big(ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \\
& + ABCDEF + ABCDEF + ABCDEF \Big)
\end{aligned}
$$

Wick定理

后面还有100页就不给你们看了

Wick定理的证明

用数学归纳法对n个(产生或者湮灭)算符的乘积加以证明， $n = 2$的情况按收缩的定义Wick定理成立，现在假设对$n-1$个算符乘积Wick定理成立，来证明对n个算符的乘积Wick定理也成立。

记这串算符乘积为 $X_1X_2\dots X_n$，不妨设其中时间最早的算符为X_i (如果有多于一个时间最早的则取最右边那个)。显然有

$$\mathcal{T}\left(X_1X_2\dots X_n\right) = \pm\mathcal{T}\left(X_1X_2\dots X_{i-1}X_{i+1}\dots X_n\right)X_i$$

前面的±符号：当且仅当X_i是费米子的产生或湮灭算符，且$X_{i+1}X_{i+2}\dots X_n$中有奇数个费米子的产生或湮灭算符时才取"$-$"号

按假设Wick定理对n-1个算符成立，$\mathcal{T}\left(X_1X_2\dots X_{i-1}X_{i+1}\dots X_n\right)$就等于$X_1X_2\dots X_{i-1}X_{i+1}\dots X_n$含一切可能收缩的正规乘积的和。

Wick定理的证明

任取一项$X_1X_2\ldots X_{i-1}X_{i+1}\ldots X_n$含某些收缩的正规乘积，不妨设所有收缩给出的因子为$\lambda$, 剩下的未收缩掉的正规乘积为

$$\mathcal{R}\left(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k}X_{j_{k+1}}\ldots X_{j_m}\right)$$

其中$1\le j_1<j_2<\ldots<j_k<i<j_{k+1}<\ldots<j_m\le n$。

我们来证明

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}\left(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k}X_{j_{k+1}}\ldots X_{j_m}\right)X_i \\
= \; & \mathcal{R}\left(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k}X_iX_{j_{k+1}}\ldots X_{j_m}\right) \\
& +\mathcal{R}\left(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k}X_iX_{j_{k+1}}\ldots X_{j_m}\right) \\
& +\mathcal{R}\left(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k}X_iX_{j_{k+1}}\ldots X_{j_m}\right) \\
& \ldots \\
& +\mathcal{R}\left(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k}X_iX_{j_{k+1}}\ldots X_{j_m}\right)
\end{aligned}$$

三次项的相互作用

考虑拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

的实标量场。其中$\lambda > 0$和g都是耦合常数。我们仅考虑它们很小($\lambda \ll 1, \ g \ll m$)的情况。
我们取如下的相互作用表象:

$$H_0 = H_{\text{free}}, \ \ H_I = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{g}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)$$

其中$H_{\text{free}} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2)$是自由场的Hamilton量。

继续上节课的热身问题

上节课的热身问题是：

求两个动量为$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$的粒子发生散射，变为两个动量为$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$的粒子的概率幅。

$$\mathcal{M}T/V\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

如上节课末尾所讲，我们已经把$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$引入了左边的定义式。

我们仍假设这四个动量$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$互不相同，即初态和末态粒子都是可以区分的。

一阶微扰展开

我们做微扰展开，对带λ的项我们仍展开到一次，对带g的项我们要展开到二次。这是因为单个$g\phi^3$最多只能提供三个产生湮灭算符的乘积，无法湮灭两个粒子并产生两个新粒子。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt}\right) \approx\ & 1 - i\int d^4x\, \frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3 - i\int d^4x\, \frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}(x)^4 \\
& -\frac{1}{2}\mathcal{T}\left(\left(\int d^4x\, \frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3\right)\left(\int d^4y\, \frac{g}{3!}\hat{\phi}(y)^3\right)\right)
\end{aligned}
$$

第一项和第二项均没有贡献，第三项的贡献我们上节课算了。我们这节课来计算第四项的贡献：

$$
-\frac{g^2}{2(3!)^2}\int d^4x \int d^4y\, \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathcal{T}\left(\hat{\phi}(x)^3\hat{\phi}(y)^3\right) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle
$$