

量子场论 I

第五课 角动量理论

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

矩阵的函数简要回顾

上节课末尾讲到，对任意的解析函数 $f(x)$ 总能定义矩阵的函数 $f(A)$ 。它有如下性质。

- ▶ 若 A 的本征值和本征矢为 $(\lambda_1, \mathbf{v}_1); (\lambda_2, \mathbf{v}_2); \dots$ 则 $f(A)$ 有相同的本征矢，相应的本征值则变为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots$
- ▶ 矩阵的函数满足复合函数规则，即：若解析函数 f, g, h 满足 $h(x) = f(g(x))$ ，则对任意矩阵 A 有 $h(A) = f(g(A))$ 。特别地， $(e^A)^n = e^{nA}$ 。
- ▶ 共轭转置和函数可以交换位置。即 $(f(A))^\dagger = f(A^\dagger)$ 。由此得出若 A 是厄米矩阵($A = A^\dagger$)，则 $f(A)$ 也是厄米矩阵。注意厄米矩阵的本征值都是实数。
- ▶ 若两个矩阵 A, B 对易，则它们的任意函数 $f(A)$ 与 $g(B)$ 也对易。特别地， $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$ 。

三维空间转动算符

任意三维矢量 \mathbf{v} 绕方向 \mathbf{n} 旋转无穷小角度 ϵ 总是可以写成:

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - i\epsilon \hat{J}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = e^{-i\epsilon \hat{J}_{\mathbf{n}}} \mathbf{v}.$$

其中 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 是 3×3 的转动矩阵, 它只跟 \mathbf{n} 有关。为了防止同三维空间指标 i 混淆, 以后我们用符号 i 来表示复数单位。

对于有限大小的转动角 θ , 因为总是可以把转动划分成很多份的小转动, 所以取足够大的 N 即有

$$\mathbf{v} \rightarrow (e^{-i(\theta/N) \hat{J}_{\mathbf{n}}})^N \mathbf{v} = e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}} \mathbf{v}$$

也就是说绕 \mathbf{n} 旋转 θ 的操作仍然可以写成 $e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}}$ 。算符 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 是对应于 \mathbf{n} 方向的转动算符, 它不依赖于坐标系而存在。仅当我们需要写出 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 的具体矩阵表达式时, 才需要选定一个坐标系。

课堂互动

对三个形成右手正交系的方向 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, 对应的转动算符分别为 $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ 。试证明

- ▶ 对任意角度 θ , 有 $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cos \theta + \mathbf{n}_2 \sin \theta$,
 $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cos \theta - \mathbf{n}_1 \sin \theta$, $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3$.
- ▶ 对任意角度 θ , 算符 $e^{-i\theta\hat{J}_3}$ 的三组本征矢量和本征值分别为 $(\mathbf{n}_3, 1)$, $(\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2, e^{-i\theta})$, $(\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2, e^{i\theta})$ 。
- ▶ 根据上题结论, 证明 \hat{J}_3 的三组本征矢量和本征值分别 $(\mathbf{n}_3, 0)$, $(\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2, 1)$, $(\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2, -1)$ 。
- ▶ 根据上题结论, 证明 $\hat{J}_3\mathbf{n}_1 = i\mathbf{n}_2$, $\hat{J}_3\mathbf{n}_2 = -i\mathbf{n}_1$ 。通过置换1, 2, 3可以得到 $\hat{J}_i\mathbf{n}_j = i\epsilon_{ijk}\mathbf{n}_k$ 。其中 ϵ_{ijk} 为完全反对称张量 (当 ijk 为123的偶置换时为 $\epsilon_{ijk} = 1$, 当 ijk 为123的奇置换时 $\epsilon_{ijk} = -1$, ijk 有重复指标时 $\epsilon_{ijk} = 0$)。
- ▶ $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$

空间转动对称性和角动量守恒

由于作用量是拉氏密度在全空间的积分，所以对固定的 \mathbf{n} ，整体空间的转动 $e^{i\epsilon\hat{J}_n}$ 保持作用量不变。对应的Noether定理中的守恒量就是角动量。

首先，我们形式上把三维转动矩阵 \hat{J}_n 拓写成四维张量 J_ν^μ ，规定 $J_\nu^0 = J_0^\mu = 0$ ，对 i, j 均不为零的情况 J_j^i 则是 \hat{J}_n 矩阵的第 i 行第 j 列元素。(显然，这样定义的 J_ν^μ 并不是任意坐标变换下的张量，我们这里仅仅讨论三维空间的转动则没有问题。)由转动带来的坐标变动为

$$\delta x^\mu = i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu$$

这样，对拉氏密度中的所有标量自由度 ϕ 而言， ϕ 在转动后的 x^μ 的位置的值，等于 ϕ 在转动之前的坐标 $x^\mu + i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu$ 处的值。所以

$$\delta\phi = (-i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu)\partial_\mu\phi$$

空间转动对称性和角动量守恒

于是我们得到

$$\frac{\delta\phi}{\delta\epsilon} = -iJ_{\nu}^{\mu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi$$

.

对矢量分量 A^{σ} ，则由于 A 本身也会发生旋转，所以多了额外一项。

$$\frac{\delta A^{\sigma}}{\delta\epsilon} = -iJ_{\nu}^{\mu}x^{\nu}\partial_{\mu}A^{\sigma} + iJ_{\nu}^{\sigma}A^{\nu}$$

.

空间转动对称性和角动量守恒

最后，拉氏密度作为一个标量，它的变化仅仅由坐标变动而引起：

$$\delta\mathcal{L} = (-i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu)\partial_\mu\mathcal{L}$$

另外，有

$$\partial_\mu(J_\nu^\mu x^\nu) = J_\nu^\mu \delta^\mu_\nu = J_\mu^\mu = 0$$

最后一个等号是因为 \hat{J}_n 的迹(Trace)是所有本征值的和($= 1 + (-1) + 0 = 0$)。

所以我们得到

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu(-iJ_\nu^\mu x^\nu\mathcal{L})$$

也就是Noether定理中的 $F^\mu = -iJ_\nu^\mu x^\nu\mathcal{L}$. 显然 $F^0 = 0$.

空间转动对称性和角动量守恒

综上所述，我们得到Noether定理守恒荷密度：

$$j^0 = \sum_q (iJ_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)} - iJ_\nu^\sigma A^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\sigma)}$$

其中 q 取遍标量自由度和矢量所有分量自由度。因为 $J_\nu^0 = J_0^\mu = 0$ ，上式也可写成仅对空间坐标求和

$$j^0 = -iJ_j^i x^j \sum_q (\partial_i q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)} - iJ_j^i A^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)}$$

空间转动对称性和角动量守恒

最后，利用上节课的结论 $\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)} = -F_i^0$ ，以及以前讨论过的空间平移带来的动量密度 $p_i = \sum_q (\partial_i q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)}$ ，有

$$j^0 = i J_i^j (x^j p_i - F_i^0 A^j)$$

注意到 F_i^0 即为“电场强度” \mathbf{E} ，第一项取共轭转置并注意到 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 是厄米矩阵，最终角动量密度可以写成

$$j^0 = -i(\mathbf{x}^\dagger \hat{J}_{\mathbf{n}} \mathbf{p} + \mathbf{E}^\dagger \hat{J}_{\mathbf{n}} \mathbf{A})$$

取 \mathbf{n} 沿 \mathbf{n}_3 轴方向，并根据 $\hat{J}_3 \mathbf{n}_1 = i \mathbf{n}_2$ ， $\hat{J}_3 \mathbf{n}_2 = -i \mathbf{n}_1$ ， $\hat{J}_3 \mathbf{n}_3 = 0$ ，上面的式子可以写成

$$j^0 = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}$$

第一项为轨道角动量（包含了所有自由度），第二项是由于空间转动时矢量随之变化而带来的“自旋”。