量子场论 I

第七课 $U(1)$规范场的量子化

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

$U(1)$规范场的量子化

上节课我们留了一个问题还没有解决：$U(1)$规范场的粒子是怎样完成量子化的，这种粒子和谐振子又有何不同?

这个问题的主要难点是每个时空点的A^μ场仅有两个物理自由度，一旦我们要对这两个自由度进行量子化，就要取特定的规范来固定这两个自由度。不难想象，这样的推导并不会十分“优美”。

第一种方案：库仑规范

先试试库仑规范$A^0 = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. 这样$F_{00} = 0$, $F_{0i} = \partial_0 A_i$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{A}}|^2 - \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

对固定时间的拉氏量进行傅立叶变换后得到：

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\mathbf{k}|^2 \right]$$

我们对一个固定的$\mathbf{k}$进行研究。

第一种方案：库仑规范

对固定的$\mathbf{k}$，我们可以取三个方向$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$构成右手正交系。库仑规范要求$\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}=0$, 所以$\mathbf{A}$可分解为$\mathbf{A}=u_{\mathbf{k},+1}\mathrm{e}_{\mathbf{k},+1}+u_{\mathbf{k},-1}\mathrm{e}_{\mathbf{k},-1}$。其中$\mathrm{e}_{\mathbf{k},\pm1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1\pm i\mathbf{n}_2)$是$\hat{J}_{\mathbf{n}_3}$的本征值为±1的归一化本征矢（参考上节课角动量的内容，添加了$1/\sqrt{2}$因子是为了归一化），$u_{\mathbf{k},\pm1}$是待定的复系数。

利用正交归一条件$\mathrm{e}^\dagger_{\mathbf{k},+1}\cdot\mathrm{e}_{\mathbf{k},+1}=\mathrm{e}^\dagger_{\mathbf{k},-1}\cdot\mathrm{e}_{\mathbf{k},-1}=1$, $\mathrm{e}^\dagger_{\mathbf{k},+1}\cdot\mathrm{e}_{\mathbf{k},-1}=\mathrm{e}^\dagger_{\mathbf{k},-1}\cdot\mathrm{e}_{\mathbf{k},+1}=0$，可以得到：

$$|\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2=\dot{\mathbf{A}}^\dagger_{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}=|\dot{u}_{\mathbf{k},+1}|^2+|\dot{u}_{\mathbf{k},-1}|^2$$

第一种方案：库仑规范

注意到$\mathbf{k}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1\pm i\mathbf{n}_2)=|\mathbf{k}|\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_2\mp i\mathbf{n}_1)$，而$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_2\mp i\mathbf{n}_1)$仍然是正交归一的两个矢量，于是得出

$$|\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\mathbf{k}|^2=|\mathbf{k}|^2(|u_{\mathbf{k},+1}|^2+|u_{\mathbf{k},-1}|^2)$$

最终得到$\mathbf{A}_\mathbf{k}$对拉氏量的贡献为:

$$L_\mathbf{k}=\frac{d^3\mathbf{k}}{2}\sum_{s=\pm1}|\dot{u}_{\mathbf{k},s}|^2-|\mathbf{k}|^2|u_{\mathbf{k},s}|^2$$

第一种方案：库仑规范

我们约定如果对$\mathbf{k}$取了右手正交系$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$，则对$-\mathbf{k}$就取$\mathbf{n}_1$，$-\mathbf{n}_2$，$-\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$为正交右手系。那么对$s=\pm 1$都有

$$\mathrm{e}_{-\mathbf{k},s} = \mathrm{e}^*_{\mathbf{k},s}$$

这样$\mathbf{A}$是实数场，也就是$\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}$的条件就转化为$u_{-\mathbf{k},s} = u^*_{\mathbf{k},s}$。也就是说$u_{\mathbf{k},s}$ 可以看成一个实数场$u_s(\mathbf{x})$的傅立叶变换。

第一种方案：库仑规范

这样，u_s的拉氏量就和质量为零的实标量场的拉氏量完全一样了。我们可以直接写出

$$u_{\mathbf{k},s} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}}$$

。

最终进行反傅立叶变换，得到$\hat{\mathbf{A}}$的解为:

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{s=\pm1} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

其中$\mathrm{e}_{\mathbf{k},\pm1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$是构成正交右手系的单位矢量，并如前所述有约定$\mathrm{e}_{-\mathbf{k},s} = \mathrm{e}^*_{\mathbf{k},s}$。

第一种方案：库仑规范

上述推导中，我们顺便证明了U(1)规范场的粒子（例如光子）的质量为零，自旋为1。

第二种方案：重矢量场 - 课堂互动

我们尝试在拉氏密度里加个质量项然后让质量趋向于0^+，看看会得到什么结果：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu$$

对$m > 0$，

- 证明A^μ场的Euler-Lagrange方程为：$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$
- 证明洛仑兹规范条件对重矢量场自动成立： $\partial_\nu A^\nu = 0$
- 证明A^ν满足Klein-Gordon方程：$(\partial^2 + m^2)A^\nu = 0$
- 证明$(-\nabla^2 + m^2)A^0 = \nabla \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$

课堂互动

1. 证明可以把重矢量场的拉氏密度写成:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(|\nabla A^0|^2 + |\dot{\mathbf{A}}|^2 + 2\nabla A^0 \cdot \dot{\mathbf{A}}\right) - \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \frac{1}{2}m^2\left[(A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2\right]$$

2. 仍然按照我们之前的方法，在固定时间把A^0和$\mathbf{A}$都进行傅立叶变换，利用$A^0 = \frac{i\mathbf{k}\cdot\dot{\mathbf{A}}}{\omega^2}$(其中$\omega^2 \equiv m^2 + \mathbf{k}^2$)，证明可以把$\mathbf{A}_\mathbf{k}$对拉氏量的贡献写成:

$$\frac{L_k}{d^3\mathbf{k}} = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 - \frac{1}{2}m^2|\mathbf{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{k} \times \mathbf{A}|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{A}}|^2}{2\omega^2}$$

课堂互动

证明重矢量场**A**的解为：

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \sum_{s=-1,0,1} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

其中$\mathrm{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$; $\mathrm{e}_{\mathbf{k},0} = \frac{\omega}{m}\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$。这里的$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$是构成正交右手系的单位矢量，并约定$\mathrm{e}_{-\mathbf{k},s} = \mathrm{e}^*_{\mathbf{k},s}$。

讨论：在重矢量场的解中令$m \to 0$是否给出$U(1)$规范场的解?