量子场论 I

第十六课 量子电动力学(QED)初步介绍

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

Background

自然界有四种基本作用力——引力，电磁力，强相互作用力和弱相互作用力。我们以前学过的电动力学是对电磁力的经典描述。量子电动力学(QED)则是对电磁力的量子描述，它是物理学里最严谨最精密的一个分支。

QED研究的是自旋为1/2的Dirac场和自旋为1的$U(1)$规范场的相互作用。拉氏密度为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

其中$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, q为Dirac场粒子的电荷。

定域规范不变性

证明QED在定域规范变换

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \gamma$$

$$\psi \to \psi e^{i\gamma}$$

下作用量不变。

场方程

试推导QED的场方程：

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

和

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

电荷守恒

显然

$$j^\nu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

是守恒流(可以直接用上面的场方程证明或者用全局规范对称性和Noether定理来证明),

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\, j^0 = q\int d^3\mathbf{x}\, \bar{\psi}\gamma^0\psi$$

是守恒电荷。

QED的相互作用绘景

在$A_0 = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$的规范下，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(|\dot{\mathbf{A}}|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2\right) + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - q\bar{\psi}A\!\!\!/\psi$$

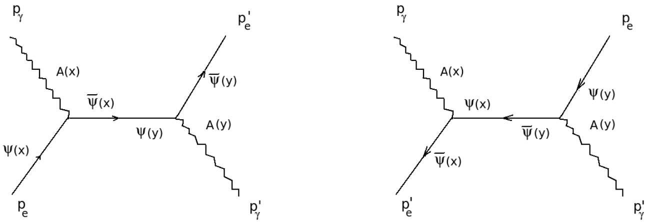
我们仍然把自由场的Hamilton量作为$\hat{H}_0$，相互作用Hamilton量为

$$\hat{H}_I = \int d^3\mathbf{x}\, A_\mu j^\mu = q\int d^3\mathbf{x}\, \bar{\psi}A\!\!\!/\psi$$

热身问题：Compton散射

QED里最简单的问题是Compton散射问题：一个电子和一个光子发生碰撞，变成不同动量的电子和光子。

设电子和光子的动量初态为p_e和p_γ，末态为p'_e和p'_γ。因为现在相互作用为两个ψ和一个**A**，最简单的Feynman图就长这样：



再加上x，y互换，每个图要乘以2，恰好和泰勒展开中的1/(2!)抵消。注意对固定的电子(正粒子)，$\hat{\psi}$只包含湮灭算符，$\hat{\bar{\psi}}$只包含产生算符。所以图中的$\bar{\psi}$和ψ不能随意交换次序。

Feynman传播子

为了计算QED的Feynman图，我们先计算Feynman传播子

$$\overbracket{\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}}(y)$$

同样它也可以看成自由ψ场的关联矩阵的矩阵元。自由ψ场的关联矩阵为

$$i\left(i\not{\partial}-m+i\epsilon\right)^{-1}\rightarrow\frac{i}{\not{k}-m+i\epsilon}$$

在傅立叶空间计算矩阵元：

$$\overbracket{\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}}(y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{ie^{-ik(x-y)}}{\not{k}-m+i\epsilon}$$

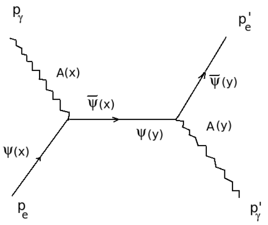
当然，我们希望能绕开这些积分过程直接用Feynman规则进行计算。

其他几条Feynman规则

- 顶点给出因子$-iq$
- 电子内线给出Feynman传播子$\frac{i}{\not{k}-m}$
- 对于一个初态的动量为$\mathbf{p}$, 自旋为s的电子外线，我们需要从$\hat{\psi}$中提取一个湮灭算符$\hat{a}_{\mathbf{p},s}$，对应的系数为$u_{\mathbf{p},s}$。
- 对于一个末态的电子外线，则需要提取产生算符$\hat{\bar{\psi}}$里的$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p},s}$，随之带来的因子为$\bar{u}_{\mathbf{p},s}$。
- 初态的光子对应的因子为$\not{\epsilon}_{\mathbf{p},s}/\sqrt{2\omega}$。
- 末态的光子对应的因子为$\not{\epsilon}^{\dagger}_{\mathbf{p},s}/\sqrt{2\omega}$。

注：体积元$d^3\mathbf{p}$和e^{-ipx}等的组合最后都会给出正确的$T/V\delta(p_\gamma + p_e - p'_\gamma - p'_e)d^4k$因子，所以我们在推导Feynman规则时不再关注它们。

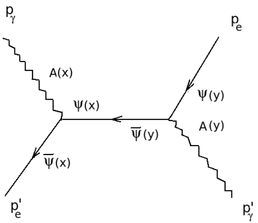
第一个图



$+ \, (x, \, y \text{ 互换})$

$$= \frac{(-iq)^2}{2\sqrt{\omega_\gamma \omega'_\gamma}} \sum_{s_e, s_\gamma, s'_e, s'_\gamma} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} u_{p_e, s_e}$$

第二个图



$+ (x,\ y$ 互换$)$

$$
= \frac{(-iq)^2}{2\sqrt{\omega_\gamma \omega'_\gamma}} \sum_{s_e, s_\gamma, s'_e, s'_\gamma} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} u_{p_e, s_e}
$$

最后表达式

最后我们需要计算总散射截面的绝对值的平方：

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{q^4}{4\omega_\gamma \omega'_\gamma} \\
&\times \left| \sum_{s_e, s_\gamma, s'_e, s'_\gamma} \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} u_{p_e, s_e} \right. \\
&\left. + \bar{u}_{p'_e, s'_e} \not{\epsilon}_{p'_\gamma, s'_\gamma} \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \not{\epsilon}_{p_\gamma, s_\gamma} u_{p_e, s_e} \right|^2
\end{aligned}
$$

下节课我们来讨论计算它的技巧。