

量子场论 I

第一课：坐标系和张量场简介

授课：黄志琦

教材：《简明量子场论》，王正行，北京大学出版社

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

助教：暂无（实在有问题可在微信上问，微信号zhiqihuang）

评分 (Evaluation)

总分 = 作业30分 + 课堂表现20分 + 期末考试50分

- ▶ **平时作业20分**: 每次平时作业2.5分（不足半分取半分），共8次平时作业。
- ▶ **特殊作业10分**: 期末考试前交。允许搜索查阅任何文献，允许讨论，允许请教他人。拱5题每题2分。
- ▶ **课堂表现20分**: 尽量积极发言。
- ▶ **期末考试50分**: 开卷（允许翻阅书和笔记），独立答题。

互相简单介绍

自我介绍:

- ▶ 名字
- ▶ 物理基础: 高等数学, 线性代数, 理论力学, 狭义相对论, 量子力学这五门课的学习情况 (没学过, 学过大部分忘了, 学过大部分还会, 精通)
- ▶ 对评分方法的意见和建议

第一章需掌握内容

- ▶ 自然单位制和量纲
- ▶ 坐标，度规和张量
- ▶ 作用量和拉氏密度的概念
- ▶ Euler-Lagrange方程的推导
- ▶ Noether定理的推导

自然单位制和量纲

自然单位制 $c = \hbar = 1$

长度量纲 = 时间量纲 = 质量量纲⁻¹ = 能量量纲⁻¹



力的量纲

= 质量量纲 \times 长度量纲/时间量纲²

= 质量量纲²

课堂互动

讨论下面这些物理量的量纲:

速度 v

角速度 ω

角动量 L

加速度 a

能量密度 ρ

压强 p

牛顿引力常数 G

时空坐标的标记以及一些约定

- ▶ 时空用坐标 (x^0, x^1, x^2, x^3) 来标记, 其中 x^0 为时间坐标, 有时也写作 t ; 省略上标的坐标 x 是 (x^0, x^1, x^2, x^3) 的简写。
- ▶ 希腊字母指标 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ 默认跑遍 $0, 1, 2, 3$
- ▶ 拉丁字母指标 i, j, k, l, \dots 默认跑遍 $1, 2, 3$
- ▶ 黑体表示三维空间矢量, 例如 $\mathbf{dx} \equiv (dx^1, dx^2, dx^3)$
- ▶ 爱因斯坦求和规则: 重复出现的指标默认求和。例如: $dx^\mu dx_\mu$ 若无特殊说明等价于 $\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu$
- ▶ 空间坐标的偏微分 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 经常简写成 ∂_μ . 省略下标的偏微分符号 ∂ 是 $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ 的简写。算符 ∇ 则仅是空间偏微分 $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ 的简写。
- ▶ 克罗内克符号(Kronecker delta) δ_ν^μ 当 $\mu = \nu$ 时为1, 否则为0.

度规 (metric)

时空间隔元:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$g_{\mu\nu}$ 称为度规(metric)

量子场论与广义相对论的统一尚未完成。本课程仅讨论狭义相对论的平直时空，也叫闵氏空间(Minkowski spacetime).

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这样时空间隔元可以简写成 $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2$

一般性张量(tensor)的定义

一般性张量在坐标变换 $x \rightarrow \tilde{x}$ 下的变化:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \dots \right) T_{\gamma\lambda\dots}^{\rho\sigma\dots}$$

课堂互动

如果 ϕ 是一个标量（0阶张量，在坐标变换下不变），时空度规为 $g_{\mu\nu}$ ，时空度规的逆矩阵为 $g^{\mu\nu}$ 。试证明：

- ▶ 任何常数都是标量
- ▶ 时空微元 dx^μ 是张量（一阶张量，也称为矢量）
- ▶ $g_{\mu\nu}$ 本身是张量（二阶张量）
- ▶ $\partial_\mu \phi$ 是张量（矢量）
- ▶ 克罗内克符号 δ^μ_ν 是张量
- ▶ 度规的逆矩阵 $g^{\mu\nu}$ 是张量
- ▶ 如果定义 $dx_\mu \equiv g_{\mu\nu} dx^\nu$ ，则 dx_μ 也是张量
- ▶ 如果定义 $\partial^\mu \phi \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ ，则 $\partial^\mu \phi$ 是张量
- ▶ 如果 $T^{\mu\nu}$ 是二阶张量，则 T^μ_μ 是标量
- ▶ 如果 A^μ 和 B^μ 都是矢量，则 $A^\mu B^\nu$ 是二阶张量

张量指标的升降

通过前面的讨论，我们发现张量的坐标可以通过度规 $g_{\mu\nu}$ 和其逆矩阵 $g^{\mu\nu}$ 来升降



$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$T^{\mu}_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu\rho}$$

$$g^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

张量指标的相乘

通过前面的讨论，我们发现一个 m 阶张量和一个 n 阶张量可以直接相乘生成 $m+n$ 阶张量。



$dx^\mu dx^\nu$ 是二阶张量。
 $g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}$ 是四阶张量

张量指标的收缩

通过前面的讨论，我们发现张量的上下指标可以收缩，产生低两阶的张量。



$$dx^\mu dx_\mu = ds^2$$

$$g_\mu^\mu = 4$$

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g_\nu^\mu$$

课堂互动

如果 ϕ 是标量，那么 $\partial_\mu \partial_\nu \phi$ 是张量吗？