

# 量子场论 I

## 第二次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn）

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

## 第1题：题目和思路

题目：对质量为 $m$ 的自由实标量场 $\phi$ ，四维动量 $k$ 满足 $k^0 = \omega \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ，其中 $\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2, k^3)$ 为三维动量。对任意洛伦兹变换下不变的函数 $f(k)$ ，证明积分 $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} f(k)$ 也是洛伦兹变换下的不变量。

思路：对任意标量函数 $h(k)$ ，积分 $\int d^4k h(k)$ 也是洛伦兹变换下的标量，所以问题就简化为：能不能找到洛伦兹变换下的标量函数 $h(k)$ ，使得 $\int h(k) dk^0 = \frac{f(k)}{2\omega}$ 。

## 第1题解答

取  $h(k) = \frac{1}{2}\delta(k^2 - m^2)f(k)$ ,

首先, 因为  $k^2 \equiv k^\mu k_\mu$  是洛伦兹不变量, 所以它的函数  $\delta(k^2 - m^2)$  也是洛伦兹不变量, 乘上另一个洛伦兹不变量  $f(k)$  之后得到  $h(k)$  也是洛伦兹不变量。

其次, 利用  $\delta$  函数性质 (每个零点附近作变量替换  $y = f(x)$  可证)

$$\int \delta(f(x)) dx = \sum_{x^*: f(x^*)=0} \frac{1}{|f'(x^*)|}$$

可以得到

$$\int h(k) dk^0 = \frac{1}{4\omega} (f(\omega, \mathbf{k}) + f(-\omega, \mathbf{k}))$$

因为  $f(k)$  是任意洛伦兹变换下的不变量, 故在时间反演下也是不变量, 两项贡献相等。从而有  $\int h(k) dk^0 = \frac{1}{2\omega} f(\omega, \mathbf{k})$

综上所述我们证明了  $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} f(k) = \int h(k) d^4k$  是洛伦兹不变量

## 第2题: 题目和思路

题目: 对质量为 $m$ 的自由实标量场 $\phi$ , 证明四维时空下的任意两点场算符的对易 $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]$ 是洛伦兹变换下的不变量。(提示: 利用 $\hat{\phi}$ 的算符表达式和第1题结论。)

思路: 利用课上得到的 $\hat{\phi}$ 表达式硬算就行。

## 第2题解答

利用课上得到的

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right)$$

得到

$$\begin{aligned} & [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{\sqrt{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \left( [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] e^{-i(k_{\mu}x^{\mu} - k'_{\mu}x'^{\mu})} + [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] e^{i(k_{\mu}x^{\mu} - k'_{\mu}x'^{\mu})} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left( e^{-ik_{\mu}(x^{\mu} - x'^{\mu})} - e^{ik_{\mu}(x^{\mu} - x'^{\mu})} \right) \end{aligned}$$

把求和号换成积分号，再根据上题结论即得证。

### 第3题题目和思路

题目： 质量为 $m$ 的自由复标量场，

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

把 $\phi$ 和 $\phi^\dagger$ 分别看作独立自由度，它们对应的正则动量分别为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}$$

于是Hamilton密度为

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^\dagger \pi^\dagger + \dot{\phi} \pi - \mathcal{L} = \pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi$$

我们在课堂上推到了量子化后的 $\phi$ 为

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

试求量子化后的总Hamilton量 $\hat{H}$ 。

思路： 题目提示的思路是直接代入并利用产生湮灭算符的对易性质，这样计算实际上比较繁复。也可以考虑把 $H$ 写成傅立叶空间的积分来简化计算。

### 第3题第一种解答

我们先考虑固定时间  $t = 0$  的  $\hat{H}$ , 把  $\hat{H}$  写成傅立叶空间的积分

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} \left( \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} + \omega^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \right)$$

在傅立叶空间

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

$$\hat{\phi}^\dagger = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger = \dot{\hat{\phi}} = -i\omega \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

$$\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}^\dagger = i\omega \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \hat{b}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

### 第3题第一种解答 (续)

直接代入得到

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega}{2} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right)$$

利用产生湮灭算符对易关系上式也可写成

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} + 1)$$



## 第3题第二种解答

先求出

$$\hat{\pi}^\dagger = \dot{\hat{\phi}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\omega \left( -\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

$$\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\omega \left( \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} - \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} \right)$$

$$\nabla \hat{\phi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\mathbf{k} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

$$\nabla \hat{\phi}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\mathbf{k} \left( -\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} \right)$$

## 第3题第二种解答 (续)

把上述表达式代入

$$\hat{H}(t) = \int d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}(t, \mathbf{x})$$

并利用

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

化简得到

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + 1)$$

## 第4题题目和思路

题目：考虑和规范场耦合的复标量场的拉氏密度：

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

利用Euler-Lagrange方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

证明 $j_\mu$ 是守恒流。

思路：太简单不需要思路。

## 第4题解答

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu}$$

两式相加并利用  $F$  反对称即得证  $\partial_\mu j^\mu = 0$ 。

## 第5题题目和思路

题目： 关于三维空间转动算符

- ▶ 证明相反方向的角动量算符相差一个负号  $\hat{J}_{-\mathbf{n}} = -\hat{J}_{\mathbf{n}}$
- ▶ 因为绕固定轴转动  $2\pi$  的没有任何效果，所以转动算符  $e^{-2\pi i \hat{J}_{\mathbf{n}}} = 1$ ，由此证明  $\hat{J}_{\mathbf{n}}$  的本征值一定是整数。
- ▶ 三个形成右手正交系的方向  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ ，对应的转动算符分别为  $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ ，证明  $\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = 2$ 。

思路： 直接利用课上介绍的  $\hat{J}_{\mathbf{n}}$  性质。

## 第5题解答

- ▶ 显然沿 $\mathbf{n}$ 转 $\theta$ 和沿 $-\mathbf{n}$ 转 $-\theta$ 等效, 所以  $e^{i\theta\hat{J}_{-\mathbf{n}}} = e^{-i\theta\hat{J}_{\mathbf{n}}}$ 。两边对 $\theta$ 求导并令 $\theta = 0$ 即得  $\hat{J}_{-\mathbf{n}} = -\hat{J}_{\mathbf{n}}$
- ▶ 根据算符的解析函数的本征值等于算符的本征值取该解析函数, 若 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 有本征值 $\lambda$ , 则 $e^{-2\pi i\hat{J}_{\mathbf{n}}}$ 有本征值 $e^{-2\pi i\lambda}$ 。又单位矩阵只有本征值1, 所以 $e^{-2\pi i\lambda} = 1$ 。即 $\lambda$ 必须是整数。
- ▶ 利用 $\hat{J}_i \mathbf{n}_j = i\epsilon_{ijk} \mathbf{n}_k$ 可以得到  $(\sum_i \hat{J}_i^2) \mathbf{n}_j = i \sum_{ik} \epsilon_{ijk} \hat{J}_i \mathbf{n}_k = -\sum_{ikl} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikl} \mathbf{n}_l = \sum_{ikl} \epsilon_{ikj} \epsilon_{ikl} \mathbf{n}_l = \sum_{ik} \epsilon_{ikj} \epsilon_{ikj} \mathbf{n}_j = 2\mathbf{n}_j$ 。因为任何三维矢量均可写成 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 的线性组合, 所以对任何三维矢量 $\mathbf{v}$ 均有 $(\sum_i \hat{J}_i^2) \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ 。从而证明了算符等式:  $\sum_i \hat{J}_i^2 = 2$ 。