

量子场论 I

第十二课 第一个Feynman图

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

相互作用(Interaction)绘景

假设Hamilton算符可以拆成两部分: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$, 则在各种绘景下态和可观测量算符的演化方程为:

	Schrödinger	Heisenberg	Interaction
State	$\frac{d \psi\rangle}{dt} = -i\hat{H} \psi\rangle$	constant	$\frac{d \psi\rangle}{dt} = -i\hat{H}_I \psi\rangle$
Observable	const.	$\frac{d\hat{O}}{dt} = -i[\hat{O}, \hat{H}]$	$\frac{d\hat{O}}{dt} = -i[\hat{O}, \hat{H}_0]$

注意

- ▶ 某些特殊方法定义的不可观测量算符不一定遵循上述变化规律, 例如密度矩阵 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 需要按态的演化方程去计算, 而不遵循上表中的算符演化方程。
- ▶ Schrödinger绘景和Heisenberg绘景都是Interaction绘景的特例, 前者是取了 $\hat{H}_0 = 0$, 后者是取了 $\hat{H}_I = 0$

证明一切绘景等价

我们只要证明一切Interaction绘景和Schödinger绘景等价，Heisenberg绘景作为Interaction绘景的一种特殊情况则无须再额外证明。所谓两个绘景等价是指任何可观测量的矩阵元 $\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle$ 在两个绘景里都相同。

把Schödinger绘景下的可观测算符记为 $(\hat{O})_S$ ，态记为 $|\psi\rangle_S$ 。Interaction绘景下的可观测算符记为 $(\hat{O})_I$ ，态记为 $|\psi\rangle_I$ 。假设在 $t=0$ 时刻两个绘景下的可观测算符和态均相同，之后分别按各自绘景下的演化方程进行演化。

- ▶ 证明 $(\hat{H}_0)_I$ 不随时间变化，从而有 $(\hat{H}_0)_I = (\hat{H}_0)_S$ 。对 H_0 我们无须再注明是哪个绘景。
- ▶ 证明 $(\hat{O})_I = e^{i\hat{H}_0 t}(\hat{O})_S e^{-i\hat{H}_0 t}$ ，特别地 $(\hat{H}_I)_I = e^{i\hat{H}_0 t}(\hat{H}_I)_S e^{-i\hat{H}_0 t}$ 。
- ▶ 证明 $|\psi\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}|\psi\rangle_S$
- ▶ 证明对任何态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ ， $\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle$ 在两个绘景下相同。

相互作用绘景的形式解

证明相互作用绘景下

$$|\psi\rangle_{t_2} = e^{-i \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}_I(t') dt'} |\psi\rangle_{t_1}$$

有自相互作用的标量场

考虑拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

的实标量场。其中 $\lambda > 0$ 是耦合常数。我们仅考虑它很小($\lambda \ll 1$)的情况。

显然，跟自由场相比，Hamilton量多了一项正比于 λ 的相互作用项。我们取如下的相互作用表象：

$$H_0 = H_{\text{free}}, \quad H_I = \frac{\lambda}{4!} \int d^3\mathbf{x} \phi^4$$

其中 $H_{\text{free}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2)$ 是我们以前学过的自由场的Hamilton量。

热身问题

我们的热身问题是：

求两个动量为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 的粒子发生散射，变为两个动量为 $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 的粒子的概率幅。

$$\mathcal{M} T/V = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_I dt} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

空间总体积 $V \rightarrow \infty$ 和总时间长度 $T \rightarrow \infty$ 。我们在定义概率振幅时引入了 T/V 的因子来描述空间越大两个自由粒子越难碰到发生散射，以及时间越长越容易发生散射。在最后的表达式中两边会约去 T/V 。

为了讨论简单起见，我们假设这四个动量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 互不相同。

一阶微扰展开

我们做一阶微扰展开:

$$e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_I dt} \approx 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_I dt = 1 - i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}^4$$

若末态与初态不同则第一项1没有贡献。我们来计算最低阶的非零贡献:

$$\mathcal{M}T/V \approx -i \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}^4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

写成产生湮灭算符

由于该相互作用表象下 $\hat{\phi}$ 仍按 $d\hat{\phi}/dt = -i[\hat{\phi}, \hat{H}_{\text{free}}]$ 演化, $\hat{\phi}$ 的解就和自由场相同

$$\hat{\phi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right)$$

代入要求解的概率幅后得到

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{4!(2\pi)^6} \int d^4x \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \left[\int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right) \right]^4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

显然, 要使得矩阵元非零, 在四个括号里必须分别取出动量为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 的湮灭算符以及动量为 $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 的产生算符。这样一共有4!种取法, 刚好和外面分母里的4!抵消了, 于是得到:

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{(2\pi)^6} \int d^4x \frac{(d^3\mathbf{k})^2}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x}$$

化简

利用四维空间的积分公式:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x} = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

我们最终得到:

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{(2\pi)^2} \frac{(d^3\mathbf{k})^2}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

注意到 $d^3\mathbf{k} = (2\pi)^3/V$ (例如考虑一个边长为 L 的立方盒子), 以及 $d^4k = (2\pi/T)d^3\mathbf{k}$, 我们可以把上式写成

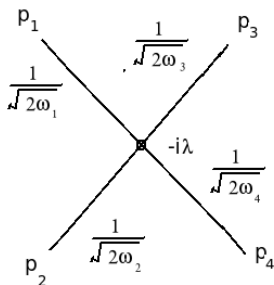
$$\mathcal{M} \approx -i\lambda \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4k$$

对结果的物理讨论

结果中的 $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)d^4k$ 在 $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$ 时为1，否则为零。这是散射问题能量动量守恒的自然结果。一般定义散射振幅时会把这个能量动量守恒因子排除在外，按这样的定义方法，最后结果就是：

$$\mathcal{M} \approx -i\lambda \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}$$

这个问题对应的Feynman图和Feynman规则



实标量场 $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 相互作用项的Feynman规则:

- ▶ 四线交叉顶角给出因子 $-i\lambda$
- ▶ 每条外线给出因子 $1/\sqrt{2\omega}$

选择题时间

我们算完了人生中第一个Feynman图，你的感想是：

- A 无敌是多么寂寞
- B 老师你故意找个最好算的图逗我们的吧！
- C 刚才发生了什么.....

答案是B

下节课我们要动真格的了。