量子场论 |

第八课 旋量

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

我们仅在平直时空内讨论旋量

历史渊源,想把方程 $(g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}+m^2)\phi=0$ 拆成一次算符的乘积:

$$(-i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}-m)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0$$

进而考虑满足一次方程 $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0$ 的场 ψ

显然,要满足这样的条件必须有

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$$

由此引发了一系列的故事.....

我们仅在平直时空内讨论旋量

因为对一般度规寻找 $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}$ 变得非常困难,在讨论旋量时,我们仅在平直时空中取Minkowski度规:

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$



数学准备: γ矩阵

约定矩阵A, B的反对易符号 $\{A, B\} \equiv AB + BA$ 。已知存在四个 $n \times n$ 复数矩阵 γ^{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$)满足 $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}I$,其中I是 $n \times n$ 单位矩阵。另外,我们定义 $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 。

- ▶ 证明 $(\gamma^5)^2 = I \pi \{ \gamma^5, \gamma^\mu \} = 0 \ (\mu = 0, 1, 2, 3)$
- ▶ 若 $\mu \neq \nu$ (可取0,1,2,3,5中任两个), 证明I和 $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$ 线性独立
- ト 若 μ , ν , λ 互不相同(可取0,1,2,3,5中任三个),证明I, $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$, $\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}$, $\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}$ 这4个矩阵线性独立
- ▶ 证明 $\gamma^{\mu}(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\gamma^{5}\gamma^{\mu}(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 这8个矩阵线性独立
- ▶ 证明 $I, \gamma^5, \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$ (0 ≤ $\mu < \nu \le 3$)这8个矩阵线性独立
- ▶ 最后,证明 $I, \gamma^5, \gamma^{\mu}(\mu = 0, 1, 2, 3), \gamma^5 \gamma^{\mu}(\mu = 0, 1, 2, 3), \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}(0 \le \mu < \nu \le 3)$ 这16个矩阵线性独立



数学准备: γ矩阵

因为已经找到了16个线性独立的 $n \times n$ 的矩阵,n至少等于4。Dirac找到了n = 4的一组具体解:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

其中 σ^i 为2 × 2的Pauli矩阵,

$$\sigma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 (1)

这样可以直接算出:

$$\gamma^5 = \left(\begin{array}{cc} 0 & l_{2\times 2} \\ l_{2\times 2} & 0 \end{array}\right)$$

对Dirac的 γ 矩阵,容易验证 $(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0$, $(\gamma^i)^{\dagger} = -\gamma^i$ (i = 1, 2, 3), $(\gamma^5)^{\dagger} = \gamma^5$.

数学准备: γ矩阵

今后默认n = 4,并在不致引起混淆时不再写出I,例 如 $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}, (\gamma^{5})^{2} = 1$ 等。

为了进一步简化符号,对任意矢量A, Feynman定义了符号: $A \equiv \gamma^{\mu}A_{\mu}$ 。

讨论: 试证明 $(A)^2 = A^\mu A_\mu$



数学准备: γ 矩阵

 \mathcal{M}_{γ}^{5} 和 γ^{0} 可以定义 $P_{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma^{5} \right), P_{R} = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma^{5} \right)$ 证明:

$$P_L^2 = P_L; P_R^2 = P_R; P_L P_R = P_R P_L = 0$$

今后我们会看到 P_L , P_R 分别为左旋投影算符和右旋投影算符假设四维动量 $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ 满足 $k^\mu k_\mu = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$, 定义

$$P_{+} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cancel{k}}{m} \right), \ P_{-} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cancel{k}}{m} \right)$$

证明

$$P_{+}^{2} = P+; P_{-}^{2} = P_{-}; P_{+}P_{-} = P_{-}P_{+} = 0$$

今后我们会看到 P_+ 和 P_- 分别为粒子与反粒子的投影算符。



数学准备:γ矩阵

对洛仑兹变换 $x^{\mu}=a^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ (变换矩阵 a^{μ}_{ν} 满足 $a^{\mu}_{\lambda}a^{\lambda}_{\nu}=g^{\mu}_{\nu}$),存在一个矩阵 Λ ,使得对 $\mu=0,1,2,3$ 均有

$$\Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda = {\it a}^\mu_{\ \nu} \gamma^\nu \, . \label{eq:lambda}$$

我们称A为该洛仑兹变换下的旋量变换矩阵。

重要的概念澄清:

- ト Λ为 $n \times n$ 矩阵,它作用于旋量的内部n维空间,而 a^{μ}_{ν} 作用于普通的坐标空间。只不过刚好在Dirac表示下取n = 4使得 Λ 看起来跟 a^{μ}_{ν} 类似。
- 不要把a^μγ^ν看成γ矩阵的坐标变换规则。事实上,γ矩阵在 洛仑兹变换下是不变的。

正规洛仑兹变换(det(a) = 1)可以看成很多无穷小的正规洛仑兹变换的乘积,试先对无穷小的正规洛仑兹变换求解旋量变换矩阵,并推广到任意的正规洛仑兹变换。

空间反射下的旋量变换矩阵

在空间反射下:

$$a^{0}_{\ \nu}\gamma^{\nu} = \gamma^{0}, \ a^{i}_{\ \nu}\gamma^{\nu} = -\gamma^{i}(i=1,2,3)$$

显然 $\Lambda = \gamma^0$ 满足

$$\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda = a^{\mu}_{\ \nu}\gamma^{\nu}$$

因为任何非正规(行列式为-1)的洛仑兹变换可以看成空间反射和正规洛仑兹变换的乘积,我们就已经相当于求解出了对任意洛仑兹变换的旋量变换矩阵。

数学准备:γ矩阵

证明

- 正规洛仑兹变换下的旋量变换矩阵Λ和γ⁵对易,非正规洛仑 兹变换下的旋量变换矩阵和γ⁵反对易。
- ▶ 如果取 γ 矩阵的Dirac表示,任意洛仑兹变换下的旋量变换矩阵 Λ 满足 Λ [†] = γ ⁰ Λ ⁻¹ γ ⁰

提示: 先证明对无穷小变换成立, 再推广到任意变换。

数学准备:γ矩阵

总算把 γ 矩阵的数学准备讲完了......(退课还来得及吗?)

旋量的定义

设 Λ 为洛仑兹变换下的旋量变换矩阵,旋量定义为满足下述坐标变换规则的有n个复分量的变量:

$$\psi \to \Lambda \psi$$

注意:这里讲的旋量仅为描述自旋1/2的粒子的旋量,或称Dirac旋量。一般性的自旋为3/2,5/2,...的旋量我们暂不讨论。

非常重要的概念澄清:因为在Dirac的 γ 矩阵表示下n=4,所以 旋量在Dirac表示下是有四个复分量的变量($\psi^0,\psi^1,\psi^2,\psi^3$)。但旋量的分量描述的是旋量在内部n维空间的投影,千万不要把旋量看成矢量,也不要用普通空间的度规对旋量进行指标的升降。



Dirac共轭

旋量的Dirac共轭在Dirac的γ矩阵表示下定义为:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

在洛仑兹变换下证明:

- √ψ是标量
- ▶ $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ 是矢量
- $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi$ 是反对称张量
- ▶ $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 是赝标量
- ▶ $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ 是赝矢量

有了标量就可以开始构造拉氏密度了,下节课我们开始讲旋量场的拉氏密度和场方程。(是的,悲伤才刚刚开始.....)