

# 量子场论 I

## 第七课 旋量

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# 我们仅在平直时空内讨论旋量

历史渊源，想把方程 $(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta + m^2)\phi = 0$ 拆成一次算符的乘积：

$$(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

进而考虑满足一次方程 $(i\gamma^\mu - m)\psi = 0$ 的场 $\psi$

显然，要满足这样的条件必须有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

由此引发了一系列的故事.....

# 我们仅在平直时空内讨论旋量

因为对一般度规寻找  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$  变得非常困难，在讨论旋量时，我们仅在平直时空中取Minkowski度规：

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

## 数学准备: $\gamma$ 矩阵

约定矩阵 $A, B$ 的反对易符号 $\{A, B\} \equiv AB + BA$ 。已知存在四个 $n \times n$ 复数矩阵 $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I$ , 其中 $I$ 是 $n \times n$ 单位矩阵。另外, 我们定义 $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 。

- ▶ 证明  $(\gamma^5)^2 = I$  和  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )
- ▶ 若  $\mu \neq \nu$  (可取 $0, 1, 2, 3, 5$ 中任两个), 证明 $I$ 和 $\gamma^\mu\gamma^\nu$ 线性独立
- ▶ 若 $\mu, \nu, \lambda$ 互不相同 (可取 $0, 1, 2, 3, 5$ 中任三个), 证明 $I, \gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\nu\gamma^\lambda, \gamma^\lambda\gamma^\mu$ 这4个矩阵线性独立
- ▶ 证明 $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ),  $\gamma^5\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )这8个矩阵线性独立
- ▶ 证明 $I, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu$  ( $0 \leq \mu < \nu \leq 3$ )这8个矩阵线性独立
- ▶ 最后, 证明  $I, \gamma^5, \gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ),  $\gamma^5\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ),  $\gamma^\mu\gamma^\nu$  ( $0 \leq \mu < \nu \leq 3$ )这16个矩阵线性独立

## 数学准备: $\gamma$ 矩阵

因为已经找到了16个线性独立的 $n \times n$ 的矩阵,  $n$ 至少等于4。

Dirac找到了 $n = 4$ 的一组具体解:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\sigma^i$ 为 $2 \times 2$ 的Pauli矩阵,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

这样可以直接算出:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

对Dirac的 $\gamma$ 矩阵, 容易验证 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ ,  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  
 $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ .

# 数学准备: $\gamma$ 矩阵

今后默认  $n = 4$ ，并在不致引起混淆时不再写出  $I$ ，例如  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ,  $(\gamma^5)^2 = 1$  等。

为了进一步简化符号，对任意矢量  $A$ ，Feynman 定义了符号： $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$ 。

讨论：试证明  $(\not{A})^2 = A^\mu A_\mu$

## 数学准备: $\gamma$ 矩阵

从 $\gamma^5$ 和 $\gamma^0$ 可以定义  $P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5)$ ,  $P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5)$  证明:

$$P_L^2 = P_L; P_R^2 = P_R; P_L P_R = P_R P_L = 0$$

今后我们会看到 $P_L$ ,  $P_R$ 分别为左旋投影算符和右旋投影算符

假设四维动量 $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ 满足 $k^\mu k_\mu = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$ , 定义

$$P_+ = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\not{k}}{m} \right), P_- = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\not{k}}{m} \right)$$

证明

$$P_+^2 = P_+; P_-^2 = P_-; P_+ P_- = P_- P_+ = 0$$

今后我们会看到 $P_+$ 和 $P_-$ 分别为粒子与反粒子的投影算符。

## 数学准备: $\gamma$ 矩阵

矩阵 $\gamma^\mu$ 的洛伦兹变换和原矩阵相似，且相似变换矩阵不依赖于指标 $\mu$ 。也就是说：存在矩阵 $\Lambda$ ，使得对 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 均有

$$\Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda = a^\mu_\nu \gamma^\nu$$

其中 $a^\mu_\nu$ 为洛伦兹变换矩阵，满足 $a^\mu_\lambda a^\lambda_\nu = g^\mu_\nu$ 。我们称 $\Lambda$ 为该洛伦兹变换下的旋量变换矩阵。

非常重要的概念澄清： $\Lambda$ 为 $n \times n$ 矩阵，它作用于旋量的内部 $n$ 维空间，而 $a^\mu_\nu$ 作用于普通的坐标空间。只不过刚好在Dirac表示下取 $n = 4$ 使得 $\Lambda$ 看起来跟 $a^\mu_\nu$ 类似。

正规洛伦兹变换（ $\det(a) = 1$ ）可以看成很多无穷小的正规洛伦兹变换的乘积，试先对无穷小的正规洛伦兹变换求解旋量变换矩阵，并推广到任意的正规洛伦兹变换。



# 空间反射下的旋量变换矩阵

在空间反射下:

$$\gamma^0 \rightarrow \gamma^0, \gamma^i \rightarrow -\gamma^i (i = 1, 2, 3)$$

显然 $\Lambda = \gamma^0$ 满足

$$\Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda = a^\mu_\nu \gamma^\nu$$

因为任何非正规（行列式为-1）的洛伦兹变换可以看成空间反射和正规洛伦兹变换的乘积，我们就已经相当于求解出了对任意洛伦兹变换的旋量变换矩阵。

# 数学准备: $\gamma$ 矩阵

证明

- ▶ 正规洛伦兹变换下的旋量变换矩阵 $\Lambda$ 和 $\gamma^5$ 对易，非正规洛伦兹变换下的旋量变换矩阵和 $\gamma^5$ 反对易。
- ▶ 如果取 $\gamma$ 矩阵的Dirac表示，任意洛伦兹变换下的旋量变换矩阵 $\Lambda$ 满足 $\Lambda^\dagger = \gamma^0 \Lambda^{-1} \gamma^0$

提示：先证明对无穷小变换成立，再推广到任意变换。

# 数学准备: $\gamma$ 矩阵

总算把 $\gamma$ 矩阵的数学准备讲完了.....（退课还来得及吗？）

# 旋量的定义

设 $\Lambda$ 为洛伦兹变换下的旋量变换矩阵，旋量定义为满足下述坐标变换规则的有 $n$ 个复分量的变量：

$$\psi \rightarrow \Lambda\psi$$

注意：这里讲的旋量仅为描述自旋 $1/2$ 的粒子的旋量，或称Dirac旋量。一般性的自旋为 $3/2, 5/2, \dots$ 的旋量我们暂不讨论。

非常重要的概念澄清：因为在Dirac的 $\gamma$ 矩阵表示下 $n = 4$ ，所以旋量在Dirac表示下是有四个复分量的变量 $(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3)$ 。但旋量的分量描述的是旋量在内部 $n$ 维空间的投影，千万不要把旋量看成矢量，也不要普通空间的度规对旋量进行指标的升降。

# Dirac共轭

旋量的Dirac共轭在Dirac的 $\gamma$ 矩阵表示下定义为:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

在洛伦兹变换下证明:

- ▶  $\bar{\psi}\psi$ 是标量
- ▶  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 是矢量
- ▶  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ 是反对称张量
- ▶  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  是赝标量
- ▶  $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$  是赝矢量

有了标量就可以开始构造拉氏密度了，下节课我们开始讲旋量场的拉氏密度和场方程。（是的，悲伤才刚刚开始.....）