

量子场论 I

第四课 标量场的量子化(II)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

实标量场的量子化

傅立叶变换后的 $\phi(\mathbf{k})$ 的拉氏量:

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2} |\dot{\phi}(\mathbf{k})|^2 - \frac{\omega^2}{2} |\phi(\mathbf{k})|^2 \right]$$

考虑到 $\phi(\mathbf{k})$ 是实数场的傅立叶变换, 必须满足 $\phi^\dagger(\mathbf{k}) = \phi(-\mathbf{k})$, 上述积分可以只对半个 \mathbf{k} 空间(例如限定 $k_1 \geq 0$)进行。在半空间内把 $\phi(\mathbf{k})$ 分解为实部和虚部 $\phi(\mathbf{k}) = \frac{u(\mathbf{k}) + iv(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}$, u 和 v 就是独立变量了:

$$L = \int_{k_1 \geq 0} d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - \frac{\omega^2}{2} (u^2 + v^2) \right]$$

实标量场的量子化

于是每个 $u(\mathbf{k})\sqrt{d^3\mathbf{k}}$ 和 $v(\mathbf{k})\sqrt{d^3\mathbf{k}}$ 均为单位质量谐振子, 我们可以写出

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_u(\mathbf{k}) + \hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega d^3\mathbf{k}}}$$

$$\hat{v}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_v(\mathbf{k}) + \hat{a}_v^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega d^3\mathbf{k}}}$$

于是

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\omega d^3\mathbf{k}}} \left(\frac{\hat{a}_u(\mathbf{k}) + i\hat{a}_v(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k}) + i\hat{a}_v^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right), & \text{if } k_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega d^3\mathbf{k}}} \left(\frac{\hat{a}_u(-\mathbf{k}) - i\hat{a}_v(-\mathbf{k})}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_u^\dagger(-\mathbf{k}) - i\hat{a}_v^\dagger(-\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right), & \text{if } k_1 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

实标量场的量子化

为了简化符号，我们定义

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_u(\mathbf{k}) + i\hat{a}_v(\mathbf{k})), & \text{if } k_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_u(-\mathbf{k}) - i\hat{a}_v(-\mathbf{k})), & \text{if } k_1 < 0 \end{cases}$$

并求共轭转置得到

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k}) - i\hat{a}_v^\dagger(\mathbf{k})), & \text{if } k_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_u^\dagger(-\mathbf{k}) + i\hat{a}_v^\dagger(-\mathbf{k})), & \text{if } k_1 < 0 \end{cases}$$

容易验证

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

对任意 \mathbf{k} 成立。

实标量场的量子化

注意 u 和 v ，以及半空间内的 \mathbf{k} 均标记不相关的自由度，不同自由度的产生或湮灭算符都对易。利用这个来证明：

- ▶ $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0$
- ▶ $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ (即当且仅当 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ 时为1，否则为零)

事实上， $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ 和 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ 分别是三维动量为 \mathbf{k} 的粒子的产生算符和湮灭算符。

课堂互动

在海森堡绘景下，态 $|0\rangle, |1\rangle, \dots$ 均不随时间变化，而算符均按海森堡方程随时间变化：

$$i\frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}]$$

取 \hat{O} 为单位质量谐振子的产生算符和湮灭算符， $\hat{H} = (\hat{N} + 1/2)\omega$ ，试证明

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega\hat{a}, \quad \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\omega\hat{a}^\dagger$$

根据上面的方程我们可以解出

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_{t=0}e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_{t=0}^\dagger e^{i\omega t}$$

实标量场的量子化

上述产生算符和湮灭算符的随时间变化规律对 $\hat{a}_u(\mathbf{k})$, $\hat{a}_v(\mathbf{k})$ 等均成立, 所以对它们的线性组合 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ 和 $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ 也成立。于是我们可以写出海森堡绘景下 $\hat{\phi}(\mathbf{k})$ 在任意时刻的表达式:

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}; t) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

其中右边 \hat{a} 和 \hat{a}^\dagger 为 $t = 0$ 时刻的湮灭和产生算符, 为了书写方便我们省略了 $t = 0$ 的标注。

实标量场的量子化

最后，我们把 $\hat{\phi}(\mathbf{k}, t)$ 进行三维空间的反傅立叶变换得到：

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega t} \right)$$

利用四维内积 $k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ 我们可以进一步把上面的式子简化写成

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

在作业中我们会证明：四维时空中两点的 $\hat{\phi}$ 的对易 $\langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \rangle$ 是洛伦兹变换下的不变量。

复标量场

复标量场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi.$$

跟实标量场相比少了个1/2因子，我们之后会看到这样定义的原因。

同样对固定时刻的 ϕ 作傅立叶变换之后可得到拉氏量

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[|\dot{\phi}(\mathbf{k})|^2 - \omega^2 |\phi(\mathbf{k})|^2 \right].$$

复标量场的量子化

对复标量场，我们可以在全 \mathbf{k} 空间分解 $\phi(\mathbf{k}) = \frac{u(\mathbf{k}) + iv(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}$ 而无须担心自由度重复的问题。

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - \frac{\omega^2}{2} (u^2 + v^2) \right]$$

复标量场没有两个半 \mathbf{k} 空间的重复求和带来的因子2，而开始的 \mathcal{L} 的定义少了1/2因子，所以两者抵消后 $u\sqrt{d^3\mathbf{k}}$, $v\sqrt{d^3\mathbf{k}}$ 仍为单位质量谐振子。

于是

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_u(\mathbf{k}) + \hat{a}_u^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega d^3\mathbf{k}}}, \quad \hat{v}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_v(\mathbf{k}) + \hat{a}_v^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega d^3\mathbf{k}}}$$

复标量场的量子化

通过重新定义

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_u(\mathbf{k}) + i\hat{a}_v(\mathbf{k})], \quad \hat{b}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_u(-\mathbf{k}) - i\hat{a}_v(-\mathbf{k})]$$

就得到

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

课堂互动

- ▶ 证明：除了 $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ ，其余 \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{b} , \hat{b}^\dagger 之间均两两对易。也就是说： \hat{a} 和 \hat{b} 代表三维动量为 \mathbf{k} 的两种不同粒子的湮灭算符。
- ▶ 对上述复标量场 $\hat{\phi}$ 证明

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

复标量场的规范变换和守恒荷

复标量场的作用量显然在变换 $\phi \rightarrow \phi e^{iq\epsilon}$ 下是严格的不变量(q 为任意实常数, $\epsilon \rightarrow 0^+$)，所以必然有一个守恒量与之对应。在这个变换下： $\frac{\delta\phi}{\delta\epsilon} = iq\phi$, $\frac{\delta\phi^\dagger}{\delta\epsilon} = -iq\phi^\dagger$, $\delta\mathcal{L} = 0$ (即Noether定理中的 $F^\mu = 0$)。按照Noether定理：

$$j^\mu = iq \left(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger \right)$$

是个守恒流。对三维空间积分我们得到复标量场的守恒电荷：

$$Q = iq \int d^3\mathbf{x} \left(\phi^\dagger \dot{\phi} - \phi \dot{\phi}^\dagger \right) .$$

变换 $\phi \rightarrow \phi e^{i\epsilon}$ 又称为规范变换，下面我们从量子场的观点来讨论复标量场的守恒荷。

复标量场的守恒荷

根据实空间的内积等价于傅立叶空间的内积的数学定理（请回顾上节课内容），守恒荷的表达式可以写成

$$Q = iq \int d^3\mathbf{k} \left(\phi^\dagger(\mathbf{k}) \dot{\phi}(\mathbf{k}) - \phi(\mathbf{k}) \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}) \right).$$

把 $\hat{\phi} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$ 代入上式，并利用前面得到的 $d\hat{a}_{\mathbf{k}}/dt = -i\omega\hat{a}_{\mathbf{k}}$, $d\hat{b}_{\mathbf{k}}/dt = -i\omega\hat{b}_{\mathbf{k}}$, $d\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger/dt = i\omega\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, $d\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger/dt = i\omega\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ 就得到

$$Q = q \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \right)$$

我们看到 a 和 b 实际上是荷相反的两种粒子(互为反粒子)，故有荷的守恒律。而实数标量场的粒子是中性的，所以没有守恒荷。

定域规范变换

思考：如果把上述规范变换的 q 替换为一个依赖时空坐标的函数 $\gamma(x)$ （这样的规范变换称为定域规范变换），拉氏密度和作用量就都不是不变的了。怎样修改拉氏密度可以使作用量不变？