

# 量子场论 I

第三次课后作业（共八次，每次2.5分）  
交作业时间：10月24日，星期一，13: 30pm

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

## 第1题(0.5分)

证明自由 $U(1)$ 规范场 $A^\mu$ 在库仑规范 $A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 下的Hamilton密度为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

并证明在傅立叶空间Hamilton量可以写成

$$H = \int d^3\mathbf{k} \left[ \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{k} \times \mathbf{A}|^2 \right]$$

## 第2题(0.5分)

利用上题的Hamilton量的表达式以及我们在课上得到的 $\hat{\mathbf{A}}$ 在傅立叶空间的解:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

证明Hamilton量的算符表达式为

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} (\hat{N}_{\mathbf{k},s} + 1/2) |\mathbf{k}|$$

其中  $\hat{N}_{\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$  是动量为 $\mathbf{k}$ , 自旋为 $s$ 的粒子数算符。

### 第3题(0.5分)

证明自由 $U(1)$ 规范场 $A^\mu$ 在库仑规范 $A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 下的动量

$$P^i = \int d^3\mathbf{x} (\partial^0 \mathbf{A} \cdot \partial^i \mathbf{A})$$

是守恒量。并把它写成傅立叶空间的积分。

提示：用Nother定理和三个方向的空间平移不变性。

## 第4题(0.5分)

利用上题的动量  $P^i$  的表达式以及我们在课上得到的  $\hat{\mathbf{A}}$  在傅立叶空间的解:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

证明动量  $\mathbf{P} \equiv (P^1, P^2, P^3)$  的算符表达式为

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k},s}$$

其中  $\hat{N}_{\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$  是动量为  $\mathbf{k}$ , 自旋为  $s$  的粒子数算符。

## 第5题(0.5分)

对旋量 $\psi$ ，证明 $\bar{\psi}\psi$ 是洛伦兹变换下的标量。