量子场论 I

第四次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题：题目和思路

题目：对两个矢量A^μ，B^μ，证明

$$\mathrm{Tr}(\not{A}\not{B}) = 4A^\mu B_\mu$$

其中Tr表示矩阵求迹。

思路：利用矩阵乘积的迹在轮换乘法次序时不变的性质

第1题解答

$$\mathrm{Tr}(\not{A}\not{B}) = A_\mu B_\nu \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \gamma^\nu\right)$$

因$\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$，所以

$$\mathrm{Tr}(\not{A}\not{B}) = A_\mu B_\nu \mathrm{Tr}\left(\gamma^\nu \gamma^\mu\right)$$

两式相加除以2，并利用$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_{4\times 4}$，

$$\mathrm{Tr}(\not{A}\not{B}) = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} \mathrm{Tr}(I_{4\times 4}) = 4A^\mu B_\mu$$

第2题：题目和思路

题目：对旋量ψ证明$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi$为洛仑兹变换下的三阶张量。

思路：这类题目总是要用$\Lambda^\dagger = \gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^0$和$\Lambda$矩阵的定义

第2题解答

设洛仑兹变换$x^\mu \to a^\mu{}_\nu x^\nu$对应的旋量变换矩阵为$\Lambda$。利用课上证明了的$\Lambda^\dagger = \gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^0$以及$\Lambda$矩阵的定义，

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi &\to \psi^\dagger\Lambda^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\Lambda\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma^0\Lambda^{-1}(\gamma^0)^2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\Lambda\psi \\
&= \bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\Lambda\psi \\
&= \bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda\Lambda^{-1}\gamma^\nu\Lambda\Lambda^{-1}\gamma^\rho\Lambda\psi \\
&= \bar{\psi}a^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha a^\nu{}_\beta\gamma^\beta a^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma\psi \\
&= (a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta a^\rho{}_\sigma)\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\sigma\psi
\end{aligned}
$$

上式表明$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi$满足三阶张量的定义。

第3题：题目和思路

题目：如果一个实标量场ϕ和一个旋量场ψ有相互作用，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{2}\phi^2\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

其中g为耦合常数。
试推导ϕ和ψ的运动方程。

思路：对ϕ和$\bar{\psi}$写出Euler-Lagrange方程即可

第3题解答

直接利用Euler-Lagrange方程得到ϕ的运动方程

$$(\partial^2 + m^2 + g\bar{\psi}\psi)\phi = 0$$

ψ的运动方程(通过取$\bar{\psi}$的Euler-Lagrange方程得到)

$$(-\frac{g}{2}\phi^2 + i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

第4题：题目和思路

题目：设有三维动量$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$。请在以$z$方向自旋向上的态$|\uparrow\rangle$和自旋向下的态$|\downarrow\rangle$为基的表象里，写出沿$\mathbf{k}$方向的电子自旋算符的矩阵表达式，并求它的所有本征值s和本征矢$\zeta_{\mathbf{k},s}$。

思路：同一表象下的算符的和的矩阵表示等于算符的矩阵表示的和。

第4题解答

沿$\mathbf{k}$方向的自旋算符为

$$\frac{1}{2}\sigma\cdot\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}=\frac{k_x}{2|\mathbf{k}|}\sigma^1+\frac{k_y}{2|\mathbf{k}|}\sigma^2+\frac{k_z}{2|\mathbf{k}|}\sigma^3=\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\begin{pmatrix} k_z & k_x-ik_y \\ k_x+ik_y & -k_z \end{pmatrix}$$

本征值s满足:

$$(k_z-2|\mathbf{k}|s)(-k_z-2|\mathbf{k}|s)-(k_x+ik_y)(k_x-ik_y)=0$$

化简即得$s=\pm1/2$ 对应$s=\pm1/2$的本征矢量分别为:

$$\zeta_{\mathbf{k},1/2}=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|+k_z)}}\begin{pmatrix} k_z+|\mathbf{k}| \\ k_x+ik_y \end{pmatrix},\ \zeta_{\mathbf{k},-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|+k_z)}}\begin{pmatrix} k_x-ik_y \\ -k_z-|\mathbf{k}| \end{pmatrix}$$

第5题：题目和思路

题目：对$m=0$的旋量和非零的三维动量$\mathbf{k}$，记相应的四维动量为k，证明$\not{k}$只有两个线性独立的本征态。

思路：由于矩阵的本征态个数不依赖于表象，我们可以简单取z轴沿$\mathbf{k}$方向写出$\not{k}$。

第5题解答

取$\mathbf{k}$方向为z轴，则$k_\mu = (|\mathbf{k}|, 0, 0, -|\mathbf{k}|)$

$$\not{k} = \gamma^0 k_0 + \gamma^3 k_3 = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

设$\not{k}$有本征值λ和非零本征矢ψ,则利用课上的结论$\not{k}^2 = m^2 = 0$有

$$\lambda^2 \psi = \lambda \not{k} \psi = \not{k}^2 \psi = 0$$

故$\lambda = 0$。所以$\not{k}$的本征矢ψ满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0$$

显然它只有两个线性独立的解分别对应于$\psi_1 = \psi_3$和$\psi_2 = -\psi_4$。

第5题解答

或者更清晰的说法是，上面的方程等价于$\psi_1 = \psi_3$，$\psi_2 = -\psi_4$， 即解可以写成

$$\psi = \psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

也就是说只有两个线性独立的本征矢。