

# 量子场论 I

## 第六课 角动量理论和矢量场的自旋

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# 矩阵的函数简要回顾

上节课末尾讲到，对任意的解析函数 $f(x)$ 总能定义矩阵的函数 $f(A)$ 。它有如下性质。

- ▶ 若 $A$ 的本征值和本征矢为 $(\lambda_1, \mathbf{v}_1); (\lambda_2, \mathbf{v}_2); \dots$  则 $f(A)$ 有相同的本征矢，相应的本征值则变为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots$
- ▶ 矩阵的函数满足复合函数规则，即：若解析函数 $f, g, h$ 满足 $h(x) = f(g(x))$ ，则对任意矩阵 $A$ 有 $h(A) = f(g(A))$ 。特别地， $(e^A)^n = e^{nA}$ 。
- ▶ 共轭转置和函数可以交换位置。即 $(f(A))^\dagger = f(A^\dagger)$ 。由此得出若 $A$ 是厄米矩阵( $A = A^\dagger$ )，则 $f(A)$ 也是厄米矩阵。注意厄米矩阵的本征值都是实数。
- ▶ 若两个矩阵 $A, B$ 对易，则它们的任意函数 $f(A)$ 与 $g(B)$ 也对易。特别地， $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$ 。

## 三维空间转动算符

任意三维矢量 $\mathbf{v}$ 绕方向 $\mathbf{n}$ （我们约定方向矢总是归一化的，即 $\mathbf{n}^2 = 1$ ）旋转无穷小角度 $\epsilon$ 总是可以写成：

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - i\epsilon \hat{J}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = e^{-i\epsilon \hat{J}_{\mathbf{n}}} \mathbf{v}.$$

其中 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 是 $3 \times 3$ 的转动矩阵，它只跟 $\mathbf{n}$ 有关。为了防止同三维空间指标 $i$ 混淆，以后我们用符号 $i$ 来表示虚数单位。

对于有限大小的转动角 $\theta$ ，因为总是可以把转动划分成很多份的小转动，所以取足够大的 $N$ 即有

$$\mathbf{v} \rightarrow (e^{-i(\theta/N) \hat{J}_{\mathbf{n}}})^N \mathbf{v} = e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}} \mathbf{v}$$

也就是说绕 $\mathbf{n}$ 旋转 $\theta$ 的操作仍然可以写成 $e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}}$ 。算符 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 是对应于 $\mathbf{n}$ 方向的转动算符，它不依赖于坐标系而存在。仅当我们需要写出 $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ 的具体矩阵表达式时，才需要选定一个坐标系。

## 课堂互动

对三个形成右手正交系的方向 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ , 对应的转动算符分别为 $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ 。试证明

- ▶ 对任意角度 $\theta$ , 有 $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cos \theta + \mathbf{n}_2 \sin \theta$ ,  
 $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cos \theta - \mathbf{n}_1 \sin \theta$ ,  $e^{-i\theta\hat{J}_3}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3$ .
- ▶ 对任意角度 $\theta$ , 算符 $e^{-i\theta\hat{J}_3}$ 的三组本征矢量和本征值分别为 $(\mathbf{n}_3, 1)$ ,  $(\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2, e^{-i\theta})$ ,  $(\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2, e^{i\theta})$ 。
- ▶ 根据上题结论, 证明 $\hat{J}_3$ 的三组本征矢量和本征值分别 $(\mathbf{n}_3, 0)$ ,  $(\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2, 1)$ ,  $(\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2, -1)$ 。
- ▶ 根据上题结论, 证明 $\hat{J}_3\mathbf{n}_1 = i\mathbf{n}_2$ ,  $\hat{J}_3\mathbf{n}_2 = -i\mathbf{n}_1$ 。通过置换1, 2, 3可以得到 $\hat{J}_i\mathbf{n}_j = i\epsilon_{ijk}\mathbf{n}_k$ 。其中 $\epsilon_{ijk}$ 为完全反对称张量 (当 $ijk$ 为123的偶置换时为 $\epsilon_{ijk} = 1$ , 当 $ijk$ 为123的奇置换时 $\epsilon_{ijk} = -1$ ,  $ijk$ 有重复指标时 $\epsilon_{ijk} = 0$ )。
- ▶  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$

## 空间转动对称性和角动量守恒

由于作用量是拉氏密度在全空间的积分，所以对固定的 $\mathbf{n}$ ，整体空间的转动 $e^{i\epsilon\hat{J}_n}$ 保持作用量不变。对应的Noether定理中的守恒量就是角动量。

首先，我们形式上把三维转动矩阵 $\hat{J}_n$ 拓写成四维张量 $J_\nu^\mu$ ，规定 $J_\nu^0 = J_0^\mu = 0$ ，对 $i, j$ 均不为零的情况 $J_j^i$ 则是 $\hat{J}_n$ 矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列元素。(显然，这样定义的 $J_\nu^\mu$ 并不是任意坐标变换下的张量，我们这里仅仅讨论三维空间的转动则没有问题。)由转动带来的坐标变动为

$$\delta x^\mu = i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu$$

这样，对拉氏密度中的所有标量自由度 $\phi$ 而言， $\phi$ 在转动后的 $x^\mu$ 的位置的值，等于 $\phi$ 在转动之前的坐标 $x^\mu - i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu$ 处的值。所以

$$\delta\phi = (-i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu)\partial_\mu\phi$$

# 空间转动对称性和角动量守恒

于是我们得到

$$\frac{\delta\phi}{\delta\epsilon} = -iJ_{\nu}^{\mu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi$$

.

对矢量分量 $A^{\sigma}$ ，则由于 $A$ 本身也会发生旋转，所以多了额外一项。

$$\frac{\delta A^{\sigma}}{\delta\epsilon} = -iJ_{\nu}^{\mu}x^{\nu}\partial_{\mu}A^{\sigma} + iJ_{\nu}^{\sigma}A^{\nu}$$

.

# 空间转动对称性和角动量守恒

最后，拉氏密度作为一个标量，它的变化仅仅由坐标变动而引起：

$$\delta\mathcal{L} = (-i\epsilon J_\nu^\mu x^\nu)\partial_\mu\mathcal{L}$$

另外，有

$$\partial_\mu(J_\nu^\mu x^\nu) = J_\nu^\mu \delta_\mu^\nu = J_\mu^\mu = 0$$

最后一个等号是因为 $\hat{J}_n$ 的迹(Trace)是所有本征值的和( $= 1 + (-1) + 0 = 0$ )。

所以我们得到

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu(-iJ_\nu^\mu x^\nu\mathcal{L})$$

也就是Noether定理中的 $F^\mu = -iJ_\nu^\mu x^\nu\mathcal{L}$ 。显然 $F^0 = 0$ 。

# 空间转动对称性和角动量守恒

综上所述，我们得到Noether定理守恒荷密度：

$$j^0 = \sum_q (iJ_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)} - iJ_\nu^\sigma A^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\sigma)}$$

其中  $q$  取遍标量自由度和矢量所有分量自由度。因为  $J_\nu^0 = J_0^\mu = 0$ ，上式也可写成仅对空间坐标求和

$$j^0 = iJ_j^i x^j \sum_q (\partial_i q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)} - iJ_j^i A^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)}$$



## 空间转动对称性和角动量守恒

最后，利用上节课的结论  $\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)} = -F_i^0$ ，以及以前讨论过的空间平移带来的动量密度  $p_i = \sum_q (\partial_i q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q)}$ ，有

$$j^0 = i J_j^i (x^j p_i + A^j F_i^0)$$

注意到  $F_i^0$  即为“电场强度” $\mathbf{E}$ ，可以不失一般性地取右手正交坐标系，并设  $\mathbf{n}$  沿  $\mathbf{n}_3$  轴方向，根据  $\hat{J}_3 \mathbf{n}_1 = i \mathbf{n}_2$ ， $\hat{J}_3 \mathbf{n}_2 = -i \mathbf{n}_1$ ， $\hat{J}_3 \mathbf{n}_3 = 0$ ，上面的式子可以写成

$$j^0 \mathbf{n}_3 = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}$$

注意因为取了  $+- -$  的度规， $p_i$  和  $p^i$  相差一个负号。上式第一项为轨道角动量（包含了所有自由度），第二项是由于空间转动时矢量会随之变化而带来的“自旋”。

# $U(1)$ 规范场的量子化

现在考虑一个自由 $U(1)$ 规范场

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

怎样把它量子化？

显然，由于矢量场存在自旋，它不能看成许多不相关的谐振子的叠加。我们首先需要建立自旋为1的粒子的量子理论。

大致思路是，仍然把时间维特殊化，取库仑规范排除冗余自由度，然后把 $A^\mu$ 场进行傅立叶变换。由于拉氏密度仍然是二次的，所以傅立叶变换后每一个傅立叶波矢 $\mathbf{k}$ 对拉氏量的贡献都是独立的。我们就只要对固定 $\mathbf{k}$ 的拉氏量研究其量子化。

## $U(1)$ 规范场的量子化

我们先猜测一个形式解，由于 $A^\mu$ 是实数场，它必须是互为共轭的两组算符的和。跟标量场不同的是，现在对每一个 $\mathbf{k}$ ，粒子均可能有自旋 $s$ ：

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

对每个 $\mathbf{k}$ ，自旋均按 $\hat{J}_{\mathbf{k}}$ 的本征矢进行分解。我们前面讨论过，本征值为零的本征矢 $\mathbf{e}_0$ 就是 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量，取了库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 之后 $\mathbf{A}$ 不能有这个方向的分量，因此上面求和只要对自旋为 $s = \pm 1$ 求和。

## 第二次作业已经可以下载

第二次作业10月10日交。

下节课发第一次作业并简要解答。如果有时间我们详细讨论 $U(1)$ 规范场的量子化。