量子场论 I

第二课 作用量原理和Noether定理

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

课堂互动：函数与稳定点

稳定点：所有一阶导数全为零的点 （极值点一定是稳定点，反之则未必）

- $f(\phi)=\phi$存在稳定点吗
- 求$f(\phi)=\phi^2$的稳定点
- 求$f(\phi)=\frac{1}{3}\phi^3-\phi$的稳定点
- 求$f(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{3}\phi_1^3-\phi_1+(\phi_2-\phi_1)^2$的稳定点
- 求$f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)=\frac{1}{3}\phi_1^3-\phi_1+\sum_{j=2}^{n}(\phi_j-\phi_1)^2$的稳定点
- 求$f(\phi_1,\phi_2,\ldots)=\frac{1}{3}\phi_1^3-\phi_1+\sum_{j=2}^{\infty}(\phi_j-\phi_1)^2$的满足"边界条件"$\phi_1>0$的稳定点。

我们看到函数如存在多个稳定点，则可以添加适当的"边界条件"使得稳定点唯一。

场的函数

以自然数标记自由度的变量($\phi_1, \phi_2, \ldots$)的进一步推广就是用坐标来标记自由度的“场”ϕ_t ($t \in (-\infty, \infty)$)。当然，我们更习惯把它记成$\phi(t)$。在学习场论的过程中，我们通常不把场看成坐标的函数，而是把坐标t看成自由度的标记，把场看成有无穷多自由度的变量。

场既然只是一个无穷多元变量，当然就可以定义它的函数，数学上叫“泛函”(functional)：

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

把$\phi(t)$映射为一个数。这里ω是具有角速度量纲的常量，m是具有质量量纲的常量。

四维时空里的场的泛函

四维时空里的场（也同样可以看成一个无穷多自由度的变量，其自由度用四维时空坐标来标记）也可以有它的泛函，例如。

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$$

把场$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$映射为一个数S. 其中g是度规$g_{\mu\nu}$的行列式的简写。d^4x是$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$的简写。m是质量量纲的常量。积分范围是整个四维时空。

作用量

泛函

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m}{2}\left[(\frac{d\phi}{dt})^2-\omega^2\phi^2\right]dt$$

定义了一个物理系统(谐振子）。反过来的等价说法是这个物理系统的“作用量”（Action）是上述泛函。

作用量的满足边界条件的稳定点给出了物理系统的经典解。原则上所有经典物理问题都可以归结为求解作用量的稳定点。

课堂互动

求谐振子

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[(\frac{d\phi}{dt})^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

的运动方程。在边界条件$\phi|_{t=0} = 1, \left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=0} = 0$下写出它的经典解$\phi(t)$.

课堂互动

考虑一维空间x和一维时间t构成的时空里的标量场$\phi(x,t)$，若其作用量为

$$S = \int dxdt\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - m^2\phi^2\right],$$

求$\phi(x,t)$的运动方程。

Euler-Lagrange方程

一般性地，作用量为

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

的运动方程（即Euler-Lagrange方程）为

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

其中$\mathcal{L}$称为拉氏密度(Lagrangian density).注意拉氏密度在形式上必须写成场和场的时空偏导的函数。

注意：推导Euler-Lagrange方程并不像很多教科书上那样需要对边界条件进行一些假设。

时间维特殊化

如果想回到我们习惯的“时间”的概念，可以把把时间维特殊化。把场ϕ看成用三维坐标标记的无穷多元变量$\phi(\mathbf{x})$随时间的演化。把作用量写成拉氏量（Lagrangian, 定义为拉氏密度的空间积分$L \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}$）的时间积分。

$$S = \int L(\phi, \dot{\phi}) dt$$

这里$\dot{\phi}$是ϕ的时间偏导数（即固定$\mathbf{x}$处的ϕ的时间导数）。注意：一旦我们采用这种把时间维特殊化的描述方法, ϕ的空间微分在形式上就只是看成不同空间点的ϕ联合得到的函数，而不看成L所依赖的变量了。

在这种描述方法下，Euler-Lagrange方程简化为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial L}{\partial \phi(\mathbf{x})}.$$

Hamilton量

把时间维度t特殊化后，$\phi(\mathbf{x})$共轭的正则动量定义为：

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right|_{\mathbf{x}} .$$

显然$\pi(\mathbf{x})$也随时间变化。
场的Hamilton密度定义为

$$\mathcal{H} \equiv \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$$

注意Hamilton密度形式上必须写成正则变量ϕ（包括空间偏导都必须离散化后写成ϕ的函数)和正则动量π的函数,时间导数$\dot{\phi}$不允许出现在$\mathcal{H}$的最终表达式里。
场的Hamilton函数H则是$\mathcal{H}$的空间积分。

$$H(t) = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{H}\left(\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x})\right) .$$

Hamilton方程

理论力学里的Hamilton方程对有无穷多自由度的场依然成立，在任意时间t:

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi(\mathbf{x})}, \ \dot{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi(\mathbf{x})}$$

.

Noether定理

仍回到四维时空的作用量。

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \, .$$

考虑场的一个无穷小变化：

$$\delta\phi = \epsilon \frac{\delta\phi}{\delta\epsilon}$$

若这个映射使得作用量的变化严格为零，则$\mathcal{L}$的变化必然可以写成$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu F^\mu$的形势。
Noether定理:

$$j^\mu = F^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{\delta\phi}{\delta\epsilon}$$

是一个守恒流（即$\partial_\mu j^\mu = 0$）。

课堂互动

试证明Noether定理。