量子场论 I

第二次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题：题目和思路

题目：对质量为m的自由实标量场ϕ，四维动量k满足$k^0 = \omega \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$，其中$\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2, k^3)$为三维动量。对任意洛仑兹变换下不变的函数$f(k)$，证明积分$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} f(k)$ 也是洛仑兹变换下的不变量。

思路：对任意标量函数$h(k)$，积分$\int d^4k\, h(k)$也是洛仑兹变换下的标量，所以问题就简化为：能不能找到洛仑兹变换下的标量函数$h(k)$，使得 $\int h(k) dk^0 = \frac{f(k)}{2\omega}$。

第1题解答

取$h(k)=\frac{1}{2}\delta(k^2-m^2)f(k)$,
首先，因为$k^2\equiv k^\mu k_\mu$是洛仑兹不变量，所以它的函数$\delta(k^2-m^2)$也是洛仑兹不变量，乘上另一个洛仑兹不变量$f(k)$之后得到$h(k)$也是洛仑兹不变量。
其次, 利用δ函数性质(每个零点附近作变量替换$y=f(x)$可证)

$$\int \delta\left(f(x)\right)dx=\sum_{x*:\,f(x*)=0}\frac{1}{|f'(x*)|}$$

可以得到

$$\int h(k)dk^0=\frac{1}{4\omega}(f(\omega,\mathbf{k})+f(-\omega,\mathbf{k}))$$

因为$f(k)$是任意洛仑兹变换下的不变量，故在时间反演下也是不变量：$f(-\omega,\mathbf{k})=f(\omega,\mathbf{k})$，从而有$\int h(k)dk^0=\frac{1}{2\omega}f(\omega,\mathbf{k})$
综上我们证明了$\int\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}f(k)=\int h(k)d^4k$ 是洛仑兹不变量

第2题: 题目和思路

题目：对质量为m的自由实标量场ϕ，证明四维时空下的任意两点场算符的对易$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]$是洛仑兹变换下的不变量。(提示：利用$\hat{\phi}$的算符表达式和第1题结论。)

思路：利用课上得到的$\hat{\phi}$表达式硬算就行。

第2题解答

利用课上得到的

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

得到

$$\begin{aligned}
& \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x') \right] \\
= \; & \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{\sqrt{d^3\mathbf{k}\, d^3\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \left([\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] e^{-i(k_\mu x^\mu - k'_\mu x'^\mu)} + [\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] e^{i(k_\mu x^\mu - k'_\mu x'^\mu)} \right) \\
= \; & \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left(e^{-ik_\mu (x^\mu - x'^\mu)} - e^{ik_\mu (x^\mu - x'^\mu)} \right)
\end{aligned}$$

把求和号换成积分号，再根据上题结论即得证。

第3题题目和思路

题目： 质量为m的自由复标量场，

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

把ϕ和$\phi^\dagger$分别看作独立自由度，它们对应的正则动量分别为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \ \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}$$

于是Hamilton密度为

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^\dagger \pi^\dagger + \dot{\phi}\pi - \mathcal{L} = \pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi$$

我们在课堂上推到了量子化后的ϕ为

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

试求量子化后的总Hamilton量$\hat{H}$.

思路：题目提示的思路是直接代入并利用产生湮灭算符的对易性质，这样计算实际上比较繁复。也可以考虑把H写成傅立叶空间的积分来简化计算。

第3题第一种解答

我们先考虑固定时间$t = 0$的$\hat{H}$，把$\hat{H}$写成傅立叶空间的积分

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{k}\,\frac{1}{2}\left(\hat{\pi}^\dagger\hat{\pi} + \omega^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}\right)$$

在傅立叶空间

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

$$\hat{\phi}^\dagger = \frac{\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger = \dot{\hat{\phi}} = -i\omega\frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

$$\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}^\dagger = i\omega\frac{\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

第3题第一种解答（续）

直接代入得到

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right)$$

利用产生湮灭算符对易关系上式也可写成

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} + 1)$$

第3题第二种解答

先求出

$$\hat{\pi}^\dagger = \dot{\hat{\phi}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\omega \left(-\hat{a}_\mathbf{k} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_\mathbf{k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

$$\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\omega \left(\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} - \hat{b}_\mathbf{k} e^{-ik_\mu x^\mu} \right)$$

$$\nabla\hat{\phi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\mathbf{k} \left(\hat{a}_\mathbf{k} e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{b}_\mathbf{k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

$$\nabla\hat{\phi}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} i\mathbf{k} \left(-\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_\mathbf{k} e^{-ik_\mu x^\mu} \right)$$

第3题第二种解答（续）

把上述表达式代入

$$\hat{H}(t) = \int d^3\mathbf{x}\, \hat{\mathcal{H}}(t, \mathbf{x})$$

并利用

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

化简得到

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + 1)$$

第4题题目和思路

题目：考虑和规范场耦合的复标量场的拉氏密度：

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

利用Euler-Lagrange方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

证明j_μ是守恒流.

思路：太简单不需要思路。

第4题解答

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu}$$

两式相加并利用F反对称即得证$\partial_\mu j^\mu = 0$。

第5题题目和思路

题目： 关于三维空间转动算符

- 证明相反方向的角动量算符相差一个负号$\hat{J}_{-\mathbf{n}} = -\hat{J}_{\mathbf{n}}$
- 因为绕固定轴转动2π的没有任何效果，所以转动算符$e^{-2\pi i \hat{J}_{\mathbf{n}}} = 1$，由此证明$\hat{J}_{\mathbf{n}}$的本征值一定是整数。
- 三个形成右手正交系的方向$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$,对应的转动算符分别为$\hat{J}_1$，$\hat{J}_2$，$\hat{J}_3$，证明$\hat{J}_1^{\ 2} + \hat{J}_2^{\ 2} + \hat{J}_3^{\ 2} = 2$。.

思路：直接利用课上介绍的$\hat{J}_{\mathbf{n}}$性质。

第5题解答

- 显然沿$\mathbf{n}$转θ和沿$-\mathbf{n}$转$-\theta$等效，所以 $e^{i\theta\hat{J}_{-\mathbf{n}}} = e^{-i\theta\hat{J}_{\mathbf{n}}}$。两边对$\theta$求导并令$\theta = 0$即得$\hat{J}_{-\mathbf{n}} = -\hat{J}_{\mathbf{n}}$
- 根据算符的解析函数的本征值等于算符的本征值取该解析函数，若$\hat{J}_{\mathbf{n}}$有本征值λ，则$e^{-2\pi i\hat{J}_{\mathbf{n}}}$有本征值$e^{-2\pi i\lambda}$。又单位矩阵只有本征值1，所以$e^{-2\pi i\lambda} = 1$。即$\lambda$必须是整数。
- 利用$\hat{J}_i\mathbf{n}_j = i\epsilon_{ijk}\mathbf{n}_k$可以得到 $(\sum_i \hat{J}_i^2)\mathbf{n}_j = i\sum_{ik}\epsilon_{ijk}\hat{J}_i\mathbf{n}_k = -\sum_{ikl}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ikl}\mathbf{n}_l = \sum_{ikl}\epsilon_{ikj}\epsilon_{ikl}\mathbf{n}_l = \sum_{ik}\epsilon_{ikj}\epsilon_{ikj}\mathbf{n}_j = 2\mathbf{n}_j$。因为任何三维矢量均可写成$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$的线性组合，所以对任何三维矢量$\mathbf{v}$均有$(\sum_i \hat{J}_i^2)\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$。从而证明了算符等式：$\sum_i \hat{J}_i^2 = 2$。

第5题解答(续)