量子场论 I

第十二课 第一个Feynman图

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

相互作用(Interaction)绘景

假设Hamilton算符可以拆成两部分: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$, 则在各种绘景下态和可观测量算符的演化方程为:

	Schrödinger	Heisenberg	Interaction
State	$\frac{d\|\psi\rangle}{dt} = -i\hat{H}\|\psi\rangle$	constant	$\frac{d\|\psi\rangle}{dt} = -i\hat{H}_I\|\psi\rangle$
Observable	const.	$\frac{d\hat{O}}{dt} = -i[\hat{O}, \hat{H}]$	$\frac{d\hat{O}}{dt} = -i[\hat{O}, \hat{H}_0]$

注意

- 某些特殊方法定义的不可观测量算符不一定遵循上述变化规律，例如密度矩阵$|\psi\rangle\langle\psi|$需要按态的演化方程去计算，而不遵循上表中的算符演化方程。
- Schrödinger绘景和Heisenberg绘景都是Interaction绘景的特例，前者是取了$\hat{H}_0 = 0$，后者是取了$\hat{H}_I = 0$

证明一切绘景等价

我们只要证明一切Interaction绘景和Schödinger绘景等价，Heisenberg绘景作为Interaction绘景的一种特殊情况则无须再额外证明。所谓两个绘景等价是指任何可观测量的矩阵元$\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle$在两个绘景里都相同。

把Schödinger绘景下的可观测算符记为$(\hat{O})_S$，态记为$|\psi\rangle_S$。Interaction绘景下的可观测算符记为$(\hat{O})_I$, 态记为$|\psi\rangle_I$。假设在$t=0$时刻两个绘景下的可观测算符和态均相同，之后分别按各自绘景下的演化方程进行演化。

- 证明$(\hat{H}_0)_I$不随时间变化，从而有$(\hat{H}_0)_I=(\hat{H}_0)_S$。对$H_0$我们无须再注明是哪个绘景。
- 证明$(\hat{O})_I=e^{i\hat{H}_0t}(\hat{O})_Se^{-i\hat{H}_0t}$, 特别地$(\hat{H}_I)_I=e^{i\hat{H}_0t}(\hat{H}_I)_Se^{-i\hat{H}_0t}$.
- 证明$|\psi\rangle_I=e^{i\hat{H}_0t}|\psi\rangle_S$
- 证明对任何态$|\psi_1\rangle$和$|\psi_2\rangle$，$\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle$在两个绘景下相同。

相互作用绘景的形式解

相互作用绘景下，如果我们对$|\psi\rangle$的微分方程作形式积分，就得到：

$$|\psi\rangle_{t_2} = e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}_I(t')dt'}|\psi\rangle_{t_1}$$

这个式子如果仔细追究起来是有些小问题的，在下节课我们将会详细探讨。这节课我们先暂且认为它是对的（实际上它的一阶近似展开没有任何问题，不影响我们这节课的计算）。

有自相互作用的标量场

考虑拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

的实标量场。其中$\lambda > 0$是耦合常数。我们仅考虑它很小($\lambda \ll 1$)的情况。

显然，跟自由场相比，Hamilton量多了一项正比于λ的相互作用项。我们取如下的相互作用表象：

$$H_0 = H_{\mathrm{free}}, \quad H_I = \frac{\lambda}{4!}\int d^3\mathbf{x}\, \phi^4$$

其中$H_{\mathrm{free}} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2)$是我们以前学过的自由场的Hamilton量。

热身问题

我们的热身问题是：
求两个动量为$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$的粒子发生散射，变为两个动量为$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$的粒子的概率幅。

$$\mathcal{M}T/V = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_I dt} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

空间总体积$V \to \infty$和总时间长度$T \to \infty$。我们在定义概率振幅时引入了T/V的因子来描述空间越大两个自由粒子越难碰到发生散射，以及时间越长越越容易发生散射。在最后的表达式中两边会约去T/V。
为了讨论简单起见，我们假设这四个动量$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$互不相同。

一阶微扰展开

我们做一阶微扰展开：

$$e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt} \approx 1 - i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt = 1 - i\int d^4x\,\frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4$$

若末态与初态不同则第一项1没有贡献。我们来计算最低阶的非零贡献：

$$\mathcal{M}T/V \approx -i\langle\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4|\int d^4x\,\frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle$$

写成产生湮灭算符

由于该相互作用表象下$\hat{\phi}$仍按$d\hat{\phi}/dt = -i[\hat{\phi}, \hat{H}_{\mathrm{free}}]$演化，$\hat{\phi}$的解就和自由场相同

$$\hat{\phi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ikx} \right)$$

代入要求解的概率幅后得到

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{4!(2\pi)^6} \int d^4x \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \left[\int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ikx} \right) \right]^4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

显然，要使得矩阵元非零，在四个括号里必须分别取出动量为$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$的湮灭算符以及动量为$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$的产生算符。这样一共有4!种取法，刚好和外面分母里的4!抵消了，于是得到：

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{(2\pi)^6} \int d^4x \frac{(d^3\mathbf{k})^2}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x}$$

化简

利用四维空间的积分公式:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x} = \delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

我们最终得到:

$$\mathcal{M}T/V \approx \frac{-i\lambda}{(2\pi)^2}\frac{(d^3\mathbf{k})^2}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

注意到$d^3\mathbf{k} = (2\pi)^3/V$(例如考虑一个边长为$L$的立方盒子),以及$d^4k = (2\pi/T)d^3\mathbf{k}$,我们可以把上式写成

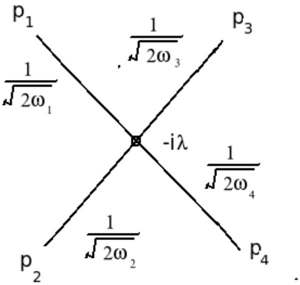
$$\mathcal{M} \approx -i\lambda\frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$$

对结果的物理讨论

结果中的$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$在$p_1+p_2-p_3-p_4=0$时为1，否则为零。这是散射问题能量动量守恒的自然结果。一般定义散射振幅时会把这个能量动量守恒因子排除在外，按这样的定义方法，最后结果就是：

$$\mathcal{M} \approx -i\lambda \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}$$

这个问题对应的Feynman图和Feynman规则



实标量场$\frac{\lambda}{4!}\phi^4$相互作用项的Feynman规则：

- 四线交叉顶角给出因子$-i\lambda$
- 每条外线给出因子$1/\sqrt{2\omega}$

选择题时间

我们算完了人生中第一个Feynman图，你的感想是：

A 无敌是多么寂寞

B 老师你故意找个最好算的图逗我们的吧！

C 刚才发生了什么……

答案是B

下节课我们要动真格的了。