

# 量子场论 I

## 第十一课 旋量场和自由场总结

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

## 进一步讨论 $u_{\mathbf{k},s}$ 和 $v_{\mathbf{k},s}$ 的性质

我们来回忆下Dirac方程在傅立叶空间的正频解和负频解  $u_{\mathbf{k},s}e^{-i\omega t}$ ,  $v_{\mathbf{k},s}e^{i\omega t}$  (这里  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ , 自旋  $s = \pm 1/2$ )。

延续上两节课的记号, 沿  $\mathbf{k}$  方向的自旋本征态记为  $\zeta_{\mathbf{k},s}$ , 并定义  $\theta_{\mathbf{k},s} = 2s \tan^{-1} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega + m}$ 。我们已经解出了:

$$u_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta_{\mathbf{k},s} \\ \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta_{\mathbf{k},s} \\ -\zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

记四维动量  $k = (\omega, \mathbf{k})$ , 证明

- ▶  $\zeta_{-\mathbf{k},s} = \zeta_{\mathbf{k},-s}$ ,  $\theta_{-\mathbf{k},s} = \theta_{\mathbf{k},s}$ ,  $\theta_{\mathbf{k},-s} = -\theta_{\mathbf{k},s}$
- ▶ 利用  $u, v$  的显式表达式, 直接证明  $\bar{u}_{\mathbf{k},s} v_{-\mathbf{k},s'} = 0$ ,  $\bar{v}_{-\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = 0$

## 进一步讨论 $u_{\mathbf{k},s}$ 和 $v_{\mathbf{k},s}$ 的性质

事实上，对  $\bar{u}$  和  $v$  以及  $\bar{v}$  和  $u$  的正交性，存在更优美的证明方法：

- ▶ 证明  $\gamma^0 \not{k} = \not{k}^\dagger \gamma^0$
- ▶ 证明  $\not{k}$  的本征值为  $m$  的两个本征态为  $u_{\mathbf{k},s}$  ( $s = \pm 1/2$ )。
- ▶ 证明  $\not{k}$  的本征值为  $-m$  的两个本征态为  $v_{-\mathbf{k},s}$  ( $s = \pm 1/2$ )。
- ▶ 利用前三题结论证明：若  $m > 0$ ，则  $\bar{u}_{\mathbf{k},s} v_{-\mathbf{k},s'} = 0$ ,  
 $\bar{v}_{-\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = 0$

## 进一步讨论 $u_{\mathbf{k},s}$ 和 $v_{\mathbf{k},s}$ 的性质

前两节课里我们还得到过

$$\bar{u}_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = \frac{m}{\omega} \delta_{ss'}, \quad \bar{v}_{-\mathbf{k},s} v_{-\mathbf{k},s'} = -\frac{m}{\omega} \delta_{ss'}$$

(注意我们已经代入了  $\cos 2\theta_{\mathbf{k},s} = m/\omega$ )。

若  $m > 0$ , 证明  $u_{\mathbf{k},s}$ ,  $v_{-\mathbf{k},s}$  ( $s = \pm 1/2$ ) 这四个旋量线性独立, 并由此证明

$$\sum_s u_{\mathbf{k},s} \bar{u}_{\mathbf{k},s} = \frac{\not{k} + m}{2\omega}$$

$$\sum_s v_{-\mathbf{k},s} \bar{v}_{-\mathbf{k},s} = \frac{\not{k} - m}{2\omega}$$

## 一些题外话

事实上，我们前面已经提过的正反粒子投影算符：

$$P_+ \equiv \frac{\not{k} + m}{2m} = \frac{\omega}{m} \sum_s u_{\mathbf{k},s} \bar{u}_{\mathbf{k},s}$$

$$P_- \equiv \frac{-\not{k} + m}{2m} = -\frac{\omega}{m} \sum_s v_{-\mathbf{k},s} \bar{v}_{-\mathbf{k},s}$$

显然满足

$$P_+ u_{\mathbf{k},s} = u_{\mathbf{k},s}, \quad P_+ v_{-\mathbf{k},s} = 0$$

$$P_- u_{\mathbf{k},s} = 0, \quad P_- v_{-\mathbf{k},s} = v_{-\mathbf{k},s}$$

阅读教材时注意教材上的归一化不同，并且教材上的  $v(\mathbf{k}, \xi)$  对应这里的  $v_{-\mathbf{k},s}$

## 再总结下我之前在干嘛.....

前面的结果

$$\sum_s u_{\mathbf{k},s} \bar{u}_{\mathbf{k},s} = \frac{\not{k} + m}{2\omega}$$

$$\sum_s v_{-\mathbf{k},s} \bar{v}_{-\mathbf{k},s} = \frac{\not{k} - m}{2\omega}$$

两边乘以 $\gamma^0$ 还能得到

$$\sum_s u_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s}^\dagger = \frac{(\not{k} + m)\gamma^0}{2\omega}$$

$$\sum_s v_{-\mathbf{k},s} v_{-\mathbf{k},s}^\dagger = \frac{(\not{k} - m)\gamma^0}{2\omega}$$

这几个等式为我们计算旋量场的反对易算子做好了准备。

# 旋量场的实空间表达式

利用上节课得到的旋量场的傅立叶空间解:

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}} \sum_s \left( u_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} \hat{a}_{\mathbf{k},s}|_{t=0} + v_{\mathbf{k},s} e^{i\omega t} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger|_{t=0} \right)$$

若不致引起混淆一般省略不写 $|_{t=0}$ 标记。进行傅立叶反变换:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{d^3\mathbf{k}} \sum_s \left( u_{\mathbf{k},s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + v_{\mathbf{k},s} e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

把第二项中的 $\mathbf{k}$ 换成 $-\mathbf{k}$  (因为对所有 $\mathbf{k}$ 求和所以这样替换是允许的), 并写成四维形式:

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{d^3\mathbf{k}} \sum_s \left( u_{\mathbf{k},s} e^{-ik_\mu x^\mu} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + v_{-\mathbf{k},s} e^{ik_\mu x^\mu} \hat{b}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

这里我们按通常习惯规定了 $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ 。

# 旋量场的反对易

由于产生算符互相反对易，湮灭算符互相反对易。而不同自由度的产生或湮灭算符也互相反对易。显然有

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(x')\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x), \hat{\psi}_\beta^\dagger(x')\} = 0$$

时空任意两点的 $\psi$ 和 $\psi^\dagger$ 算符的反对易子为

$$\begin{aligned} & \{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta^\dagger(x')\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sum_s \left( (u_{\mathbf{k},s})_\alpha (u_{\mathbf{k},s}^\dagger)_\beta e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (v_{-\mathbf{k},s})_\alpha (v_{-\mathbf{k},s}^\dagger)_\beta e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left( (\not{k} + m)\gamma^0 e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (\not{k} - m)\gamma^0 e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$



# 旋量场的反对易

如果上式中取  $t' = t$ , 则

$$\begin{aligned} & \{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left( (\not{k} + m)\gamma^0 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + (\not{k} - m)\gamma^0 e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right)_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left( (\omega\gamma^0 - k^j\gamma^j + m)\gamma^0 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + (\omega\gamma^0 + k^j\gamma^j - m)\gamma^0 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

因为是对全空间积分, 在上面第二项中我们做了  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  的替换。再利用第三课末尾介绍的积分公式, 我们得到

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left( e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right)_{\alpha\beta} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\alpha\beta}$$

# 旋量场的反对易

现在我们考虑 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 的反对易:

$$\begin{aligned} & \{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\bar{\psi}}_\beta(x')\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sum_s \left( (u_{\mathbf{k},s})_\alpha (\bar{u}_{\mathbf{k},s})_\beta e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (v_{-\mathbf{k},s})_\alpha (\bar{v}_{-\mathbf{k},s})_\beta e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left( (\not{k} + m) e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (\not{k} - m) e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right)_{\alpha\beta} \\ &= (i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left( e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} - e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right) \end{aligned}$$

是不是有些眼熟？请和之前作业里推导过的标量场的两点对易函数比较。

# 一些容易混淆的符号的澄清

$|n\rangle$  符号的滥用:

- ▶ 上节课我们讲到对空穴数算符的本征态  $|n\rangle$ ,  $b^\dagger|n\rangle \propto |n-1\rangle$ ,  $b|n\rangle \propto |n+1\rangle$  或者为零。注意不要把空穴数算符的本征态  $|n\rangle$  和粒子数算符的本征态  $|n\rangle$  混淆。“空穴数本征态”只是我们逻辑演绎过程中的一个中间产物,今后我们只会讨论粒子数算符  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  的本征态。对粒子数算符的本征态  $|n\rangle$ ,  $b^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$  或者为零,  $b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ 。
- ▶ 同样,不要把不同自由度的粒子数算符的本征态  $|n\rangle$  混为一谈。

# 一些容易混淆的符号的澄清

$k$ 符号的滥用:

- ▶ 在推导 Dirac 方程的一般解时我们允许了  $k_0 = \pm\omega$  的数学解，这只是数学推导过程，不代表我们物理上允许  $k_0 = -\omega$  的四维动量存在。在其他不作特殊说明的情况下，我们写四维动量  $k$  时总默认  $k_0 = \omega$ 。

# 自由场总结:综述

迄今为止，我们把实标量场，复标量场，矢量场，和旋量场进行了量子化（写成了一堆产生算符和湮灭算符的和）。最核心的内容是

- ▶ 场的量子化的最后结果
- ▶ 谐振子的产生湮灭算符的性质
- ▶ 自旋为 $1/2$ 的费米子的产生湮灭算符的性质。

这些将成为我们将来计算散射振幅的核心工具。

# 自由场总结:实标量场的量子化结果

傅立叶空间:

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

实空间:

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right)$$

注意: 傅立叶空间表达式中算符  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^{\dagger}$  均为任意  $t$  时刻算符 (自带了  $e^{\mp i\omega t}$  的因子)。实空间表达式中算符  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^{\dagger}$  为  $t = 0$  时刻算符, 因子  $e^{\mp i\omega t}$  则放到了  $e^{\mp ik_{\mu}x^{\mu}}$  中。

## 自由场总结: 复标量场的量子化结果

傅立叶空间:

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}}{\sqrt{2\omega} d^3\mathbf{k}}$$

实空间:

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right)$$

# 自由场总结: $U(1)$ 规范场 (零质量矢量场) 量子化最后结果

傅立叶空间:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=\pm 1} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left( \frac{\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s}^\dagger}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \right)$$

。

实空间:

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{s=\pm 1} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^* e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$



# 自由场总结:旋量场量子化最后结果

傅立叶空间:

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{s=\pm 1/2} \frac{u_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + v_{\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger}{\sqrt{d^3 \mathbf{k}}}$$

实空间:

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{d^3 \mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1/2} \left( u_{\mathbf{k},s} e^{-ik_\mu x^\mu} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + v_{-\mathbf{k},s} e^{ik_\mu x^\mu} \hat{b}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

## 自由场总结:玻色子产生湮灭算符的性质

自旋为整数的玻色子: 产生算符和产生算符总是对易。湮灭算符和湮灭算符总是对易。不同自由度 (例如对应不同 $\mathbf{k}$ 或者不同自旋 $s$ )的任何两个产生或者湮灭算符对易。

同一自由度

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

粒子数算符 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 存在且仅存在本征值为任意非负整数 $n$ 的本征态 $|n\rangle$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

## 自由场总结:费米子产生湮灭算符的性质

自旋为半整数的费米子: 产生算符和产生算符总是反对易。湮灭算符和湮灭算符总是反对易。不同自由度 (例如对应不同 $\mathbf{k}$ 或者不同自旋 $\mathbf{s}$ )的任何两个产生或者湮灭算符反对易。  
同一自由度

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1$$

粒子数算符 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 存在且仅存在本征值 $n = 0, 1$ 的本征态 $|n\rangle$

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \hat{a}|1\rangle = |0\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \hat{a}^\dagger|1\rangle = 0$$

# 自由场总结:其他零星知识

其它比较重要的知识有:

- ▶ 张量的写法和运用, 度规和指标升降。
- ▶ 自然单位制, 量纲分析。
- ▶ 经典作用量原理和Euler-Lagrange方程
- ▶ Noether定理的推导和运用。
- ▶ 实空间的二次项的积分等于傅立叶空间的同样二次项的积分  
(这是自由场理论的数学根基) 以及数学公式
$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k})$$
- ▶  $\gamma$ 矩阵的基本性质。旋量变换矩阵 $\Lambda$ 的定义和性质。
- ▶ Dirac方程经典解 $u$ 和 $v$ 的性质

## 讨论：关于11月10号换课的安排

11月10号那节课我会在昆明开会，请选择

- A 一节破课而已，别上了。
- B 一节破课而已，别上了。
- C 一节破课而已，别上了。

## 讨论：关于11月10号换课的安排

噢弄错了，请重新选择

A 一节破课而已，别上了。

B 换课到周六白天

C 布置一个脑洞大开的作业，你们自己讨论。该作业共5题计10分（其他8次正常作业仍计20分），不限讨论不限搜索不限抄书不限请教他人，写下你认为最好的解，期末考试前一周交。