

# 量子场论 I

脑洞大开作业（10分，共5题每题2分，每题如有特别精彩巧妙的解法额外加1分bonus分，但bonus分仅在期末总分不超过100分的情况下有效）

允许搜索查阅讨论请教。允许使用任何文献（包括讲义）中的结论，但请指出出处。

交作业时间：期末考试前任何时间

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

## 第1题 二维空间的Casimir力(2分)

假设“脑洞大开世界”是2维空间加1维时间的平直时空，时空度量元为

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$$

在这个世界里的“脑洞大开人”发现真空中的相距为 $d$ 的很长的（长度 $\gg d$ ）两根平行金属线之间有大小为 $F$ 的相互作用力，他们认为这是两条金属线之间的真空能的改变引起的作用力，并把这种力称为Casimir力。现在问，当把金属线之间的距离变为 $d/2$ ，Casimir力变为多大？

## 第2题 只有两个自由度的“量子场”(2分)



如图，在一个长度为 $l$ ，质量为 $m$ 的理想刚性单摆下再悬挂一个相同的单摆。节点处都认为可以无阻力自由转动。本地重力常数为 $g$ 。试求该系统的量子零点能。

### 第3题 奇怪的一维量子场。(2分)



把上题推广到 $N$ 个长度为 $\ell$ ，质量为 $m$ 的理想刚性单摆首位连接挂起来(如左图给出了一个 $N = 5$ 的例子)。记系统的量子零点能为 $E_N$ 。当 $N \rightarrow \infty$ 时，所有自由度的平均零点能 $E_N/N$ 趋向于一个常数，试计算这个常数（用 $\ell$ ,  $g$ ,  $m$ 来表示）。

注：精确解的求解需要比较巧妙的手段。如果你找不到求解精确解的办法，请尽你所能地估算一个范围。

## 第4题 环上的量子场(2分)

假设“脑洞大开世界”为一个一维圆环加上一维时间，时空度量元为

$$ds^2 = dt^2 - R^2 d\theta^2$$

其中 $R > 0$ 为固定常数， $(t, \theta)$ 为时空坐标。在这个时空里的质量为 $m$ 的实标量场 $\phi(t, \theta)$ 满足周期性边界条件

$$\phi(t, \theta + 2\pi) = \phi(t, \theta)$$

其自由场拉氏量为

$$L_{\text{free}} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right]$$

试把 $\phi$ 场量子化。

## 第5题 环上的量子场的散射(2分)

给上题中的场 $\phi$ 加一个自相互作用的拉氏量,

$$L = L_{\text{free}} - \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

其中 $\lambda \ll 1$ 为耦合常数。

试证明, 这个场的两个粒子不会发生散射变成两个不同动量的粒子。