Mock Final Exam

(一) 设$\phi(x)$为实标量场，如何理解泛函积分元$\mathcal{D}\phi$?（20分）

(二) Feynman规则的外线因子是通过直接读取自由场量子化表达式中的产生/湮灭算符前的系数得到的。但是为什么$e^{\pm ikx}$这些因子被忽略掉了？（20分）

(三) 实标量场ϕ的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{\phi^2}{2m^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{8}\phi^4$$

其中m为常量。
(1)写出ϕ的运动方程。(6分)
(2)做变量替换$\psi = \phi^2$，写出ψ的拉氏密度。(5分)
(3)写出ψ的运动方程(3分），它和ϕ的运动方程等价吗？(2分)
(4)ψ是自由场吗？(2分) ϕ是自由场吗？(2分)

(四) p和p'分别是两个电子的四维动量，k和k'分别是两个光子的四维动量，m是电子质量。求下列矩阵的迹:

(1) $\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\right)$ (4分)

(2) $\mathrm{Tr}\left(\gamma^5\not{p}\not{k}\right)$ (4分)

(3) $\mathrm{Tr}\left(\not{p}\gamma_\mu\not{k}\gamma^\mu\right)$ (4分)

(4) $\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\frac{1}{\not{p}'+\not{k}-m}(\not{p}-\not{k}'+m)\not{k}\not{p}\right)$ (4分)

(5) $\mathrm{Tr}\left((2\not{p}+m)\gamma^\mu(\not{p}'+\not{k}+m)\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m}(\not{p}+\not{k}'+m)(\not{p}-\not{p}')(\not{p}+m)\gamma_\mu\right)$ (4分）

(五) 我们在课上学习了自由实标量场的量子化:

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{ik_\mu x^\mu}\right)$$

现已知相互作用的两个实标量场ϕ和χ，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{1}{2}m^2\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^2\chi^2$$

其中M和m为常量，$\lambda \ll 1$是耦合常数。
考虑散射问题：四维动量为p_1, p_2的两个ϕ粒子发生散射，变成四维动量为p_3和p_4的两个χ粒子。
(1) 用实线表示ϕ粒子，用波浪线表示χ粒子，画出该散射过程的Feynman图 （10分）。
(2) 写出外线和顶点的Feynman规则 (6分)，并计算散射振幅$\mathcal{M}$ (4分)。