

量子场论 I

第十四课 散射截面

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

散射截面是粒子的有效面积

对散射问题，如果一开始就是取一个粒子为参照系，即 $\mathbf{p}_1 = 0$ 。
不妨取粒子2的运动方向为 z 轴，其动量为

$$\mathbf{p}_2 = \left(0, 0, \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

其中 v 是粒子2在这个参考系里的运动速度。

散射截面 σ 是粒子2的“有效面积”，粒子2在总时间 T 内扫过的体积为 $\sigma v T$ 。在总体积为 V 的情况下，粒子2“碰撞”到粒子1的概率为

$$\frac{\sigma v T}{V}$$

和散射振幅联系起来

另一方面，我们计算了发生散射的概率为

$$\sum_{\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} \left| \mathcal{M} \frac{T}{V} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4 k \right|^2 = \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} |\mathcal{M}|^2 \frac{T^2}{V^2} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4 k$$

因为是总概率，所以要对所有 $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 求和。但是，“产生一个动量为 \mathbf{p}_3 的粒子和另一个动量为 \mathbf{p}_4 的粒子”和“产生一个动量为 \mathbf{p}_4 的粒子和另一个动量为 \mathbf{p}_3 的粒子”描述的是同一件事情。所以有了外面的 $\frac{1}{2!}$ 因子。

要求能量动量守恒的因子 $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4 k$ ，因为它满足能量动量守恒时为1，否则为零。所以它的平方总是等于自己。

令两种方法算出来的概率相等，即有

$$\sigma = \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} |\mathcal{M}|^2 \frac{T}{V} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4 k$$

化为标准形式

再利用 $d^4k = \frac{(2\pi)^4}{VT}$, 以及 $d^3\mathbf{p}_3 = d^3\mathbf{p}_4 = \frac{(2\pi)^3}{V}$, 就得到散射截面公式的标准形式

$$\sigma = \frac{1}{2!(2\pi)^2} \int d^3\mathbf{p}_3 \int d^3\mathbf{p}_4 \frac{|\mathcal{M}|^2}{v} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

注意式中的 δ 函数是四维的。并且，如果产生的两个粒子是两种不同的粒子，则没有 $\frac{1}{2!}$ 因子。

问题是，只会小学数学的我们，真的能算出这个积分吗？

先算最简单的

先来看最简单的情况，假设只有四次耦合项 $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 。那么

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda^2}{16\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}$$

代入散射截面公式，

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\lambda^2}{128\pi^2 v \omega_1 \omega_2} \\ &\times \int d^3\mathbf{p}_3 \int d^3\mathbf{p}_4 \frac{1}{\omega_3 \omega_4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)\end{aligned}$$

这里

$$\omega_1 = m, \omega_2 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \omega_3 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_3^2}, \omega_4 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_4^2}$$

把 \mathbf{p}_4 积掉

可以先对 \mathbf{p}_4 积分，得到

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{128\pi^2 v \omega_1 \omega_2} \int d^3 \mathbf{p}_3 \frac{1}{\omega_3 \omega_4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$$

当然，上式中 ω_4 的含义发生了变化：

$$\omega_4 = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2}$$

事实上，在取定的参考系里， $\omega_4 \geq m$ ，又要能量守恒 $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ ，所以 $\omega_3 \leq \omega_2$ 。那么上面的积分仅在

$$|\mathbf{p}_3| \leq |\mathbf{p}_2|$$

时有非零贡献。

取球坐标系

设 \mathbf{p}_3 的球坐标系坐标为 $(|\mathbf{p}_3|, \theta, \varphi)$, 则

$$\int d^3\mathbf{p}_3 = \int_0^{|\mathbf{p}_2|} |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

因为 σ 的积分函数与 φ 无关, 可以先对 φ 积分得到 2π 。于是

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi v \omega_1 \omega_2} \int_0^{|\mathbf{p}_2|} |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{\omega_3 \omega_4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$$

这时 ω_3, ω_4 的含义为

$$\omega_3 = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_3|^2}, \quad \omega_4 = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 - 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|\cos\theta}$$

积掉 $\cos \theta$

先对 $\cos \theta$ 进行积分，为此我们要计算出

$$\left| \frac{d(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)}{d(\cos \theta)} \right| = \frac{|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|}{\omega_4}$$

再利用积分公式

$$\int \delta(f(x)) dx = \sum_{x^*: f(x^*)=0} \frac{1}{|f'(x^*)|}$$

就得到

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi v \omega_1 \omega_2 |\mathbf{p}_2|} \int_0^{|\mathbf{p}_2|} d|\mathbf{p}_3| \frac{|\mathbf{p}_3|}{\omega_3}$$

最后积掉 $|\mathbf{p}_3|$

最后利用 $|\mathbf{p}_3|d|\mathbf{p}_3| = \omega_3 d\omega_3$, 就得到

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\lambda^2}{64\pi v \omega_1 \omega_2 |\mathbf{p}_2|} \int_m^{\omega_2} d\omega_3 \\ &= \frac{\lambda^2(\omega_2 - m)}{64\pi v \omega_1 \omega_2 |\mathbf{p}_2|} \\ &= \frac{\lambda^2}{64\pi m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)}\end{aligned}$$

非相对论极限 $v \ll 1$ 下,

$$\sigma \approx \frac{\lambda^2}{128\pi m^2}$$

取质心参照系计算更方便

实际上，散射截面不一定要在一个粒子的静止参照系里计算。我们可以取质心参照系，设粒子1的速度为沿 z 轴向上 u ，粒子2的速度相反。在这个参照系里，若要能量动量都守恒则必须有

$$\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$$

且

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$$

因为粒子之间相对速度为 $2u$ ，上面开始几步步骤中需要把 v 替换为 $2u$ 。直到我们在球坐标系里写下：

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi(2u)\omega_1\omega_2} \int_0^\infty |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{\omega_3\omega_4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$$

注意现在 $\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m^2}$ ，所以积分函数就不依赖于 θ ，直接可以对 θ 积分得到

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi(2u)\omega_1\omega_2} \int_0^\infty |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \frac{1}{\omega_3\omega_4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$$

取质心参照系计算更方便

然后我们计算出

$$\left| \frac{d(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)}{d|\mathbf{p}_3|} \right| = \frac{2|\mathbf{p}_3|}{\omega_4} = \frac{2|\mathbf{p}_1|}{\omega_1}$$

利用 δ 函数积分公式即得

$$\sigma = \frac{\lambda^2 |\mathbf{p}_1|}{128\pi u \omega_1^3}$$

再利用 $u\omega_1 = |\mathbf{p}_1|$ ，上式就化简为

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{128\pi\omega_1^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{tot}}^2}$$

其中 $E_{\text{tot}} = 2\omega_1$ 是质心系总能量。

课堂讨论

在两个参照系里算出来的结果一样吗？