量子场论 I

第十七课 量子电动力学(QED)计算技巧

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

矩阵的迹

先来回忆矩阵的迹的一些基本性质。

- 迹运算是线性的: $\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B)$
- 迹运算里的矩阵乘积可以轮转次序，例如$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$，$\mathrm{Tr}\,(ABCD) = \mathrm{Tr}\,(CDAB) = \mathrm{Tr}\,(BCDA)$等
- 相似变换保持迹不变: $\mathrm{Tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}\,(A)$
- 矩阵的迹是它所有本征值之和。
- 正定矩阵的行列式的对数等于该矩阵的对数的迹：$\ln(\det A) = \mathrm{Tr}\,(\ln A)$

QED的大量计算技巧就是围绕矩阵的迹展开的。例如，由于$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}\,(\gamma^\nu\gamma^\mu)$，所以

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}\,(I_{4\times 4}) = 4g^{\mu\nu}$$

γ矩阵零迹定理

如果在若干个γ矩阵(允许包括γ^5)的乘积里排除掉某个γ^ν (ν允许为$0,1,2,3,5$中任选定的一个）后还剩下奇数个γ矩阵因子，则原乘积的迹为零。

证明：设$\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}$中排除掉所有$\gamma^\nu$后还剩下奇数个$\gamma$矩阵，则因这些剩下的$\gamma$矩阵都与$\gamma^\nu$反对易，所以把$\gamma^\nu$从右边换到左边总共产生了奇数次$-1$因子。即

$$\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\gamma^\nu=-\gamma^\nu\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}$$

右边同乘以$(\gamma^\nu)^{-1}$ 得到

$$\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}=-\gamma^\nu\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}(\gamma^\nu)^{-1}$$

两边取迹，然后利用相似变换下矩阵的迹不变，有

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\right)=-\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\right)$$

即

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\right)=0$$

γ矩阵零迹定理

零迹定理的一些特例：

- 一个γ矩阵的迹为零
- 两个不同γ矩阵的乘积的迹为零
- 三个任意γ矩阵的乘积的迹为零
- 任意奇数个不含γ^5的γ矩阵的乘积的迹为零
- 任意奇数个Feynman符号的乘积的迹为零

Feynman符号的迹的展开定理

设有n个矢量u_1, u_2, . . ., u_n,

$$\mathrm{Tr}\left(\prod_{i=1}^{n}\not{u}_i\right)=\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(u_1u_k)\mathrm{Tr}\left(\prod_{j=2}^{k-1}\not{u}_j\prod_{j=k+1}^{n}\not{u}_j\right)$$

其中u_1u_k表示u_1和u_k的内积。

利用这个定理可以求解任意Feynman符号的乘积的迹:

$$\mathrm{Tr}\left(\not{u}_1\not{u}_2\right)=(u_1u_2)\mathrm{Tr}\left(I_{4\times 4}\right)=4u_1u_2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\not{u}_1\not{u}_2\not{u}_3\not{u}_4\right) &= (u_1u_2)\mathrm{Tr}\left(\not{u}_3\not{u}_4\right)-(u_1u_3)\mathrm{Tr}\left(\not{u}_2\not{u}_4\right)+(u_1u_4)\mathrm{Tr}\left(\not{u}_2\not{u}_3\right)\\ &= 4(u_1u_2)(u_3u_4)-4(u_1u_3)(u_2u_4)+4(u_1u_4)(u_2u_3)\end{aligned}$$

Feynman符号的迹的展开定理

证明：若n为奇数，则根据零迹定理，等式两边都是零，不证自明。下面考虑n为偶数的情况。 首先

$$\not{A}\not{B} = A_\mu B_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = A_\mu B_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2AB - \not{B}\not{A}$$

依次令$A = u_1$, $B = u_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$即可把$\not{u}_1$轮换到乘积的最后去。最后再利用迹的性质把$\not{u}_1$轮换回来。

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}\left(\not{u}_1 \not{u}_2 \ldots \not{u}_n\right) \\
= \quad & 2u_1 u_2 \mathrm{Tr}\left(\not{u}_3 \ldots \not{u}_n\right) - \mathrm{Tr}\left(\not{u}_2 \not{u}_1 \not{u}_3 \ldots \not{u}_n\right) \\
= \quad & 2u_1 u_2 \mathrm{Tr}\left(\not{u}_3 \ldots \not{u}_n\right) - 2(u_1 u_3)\mathrm{Tr}\left(\not{u}_2 \not{u}_4 \ldots \not{u}_n\right) + \mathrm{Tr}\left(\not{u}_2 \not{u}_3 \not{u}_1 \not{u}_4 \ldots \not{u}_n\right) \\
= \quad & \ldots \\
= \quad & 2\sum_{k=2}^{n} (-1)^k (u_1 u_k) \mathrm{Tr}\left(\prod_{j=2}^{k-1} \not{u}_j \prod_{j=k+1}^{n} \not{u}_j\right) - \mathrm{Tr}\left(\not{u}_2 \ldots \not{u}_n \not{u}_1\right) \\
= \quad & 2\sum_{k=2}^{n} (-1)^k (u_1 u_k) \mathrm{Tr}\left(\prod_{j=2}^{k-1} \not{u}_j \prod_{j=k+1}^{n} \not{u}_j\right) - \mathrm{Tr}\left(\not{u}_1 \not{u}_2 \ldots \not{u}_n\right)
\end{aligned}$$

故n为偶数情况也得证。

Feynman符号的迹的倒排定理

任意n个矢量u_1，u_2，...，u_n的Feynman符号的乘积的迹满足倒排定理：

$$\mathrm{Tr}\left(\not{u}_1\not{u}_2\not{u}_3\ldots\not{u}_n\right)=\mathrm{Tr}\left(\not{u}_n\not{u}_{n-1}\ldots\not{u}_2\not{u}_1\right)$$

证明：当n为奇数时两边都是零，故不证自明。
当n为偶数时，用归纳法证明。$n=2$时显然成立。假设命题对$n-2$成立。把左边按展开定理展开；右边先利用迹的性质把$\not{u}_1$移到左边，然后按展开定理展开，再利用归纳假设即得到和左边展开一样的结果。

γ矩阵和Feynman符号混合的一些常见情况

- $\mathrm{Tr}\left(\not{A}\gamma^{\mu}\right) = 4A^{\mu}$

  证明:

  $\mathrm{Tr}\left(\not{A}\gamma^{\mu}\right) = A_{\nu}\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) = 4A_{\nu}g^{\mu\nu} = 4A^{\mu}$

- $\mathrm{Tr}\left(\not{A}\not{B}\not{C}\gamma^{\mu}\right) = 4(AB)C^{\mu} - 4(AC)B^{\mu} + 4(BC)A^{\mu}$

  证明:

  设$\mathrm{Tr}\left(\not{A}\not{B}\not{C}\gamma^{\mu}\right) = X^{\mu}$，则对任意矢量$D$有

$$\begin{aligned} X^{\mu}D_{\mu} &= \mathrm{Tr}\left(\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}\right) \\ &= 4(AB)(CD) - 4(AC)(BD) + 4(AD)(BC) \\ &= \left[4(AB)C^{\mu} - 4(AC)B^{\mu} + 4(BC)A^{\mu}\right] D_{\mu} \end{aligned}$$

  由D_{μ}的任意性即得 $X^{\mu} = 4(AB)C^{\mu} - 4(AC)B^{\mu} + 4(BC)A^{\mu}$

γ矩阵的形式下标

虽然γ^μ并不是矢量，但我们可以形式地把它的指标降下去，定义：

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

仍规定重复指标默认求和，试证明：

- $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$
- $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$
- $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}$
- $\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\rho\gamma_\mu = -2\gamma^\rho\gamma^\beta\gamma^\alpha$

学完这些，感觉我们小学数学又变强了。之后我们要拿这些武器来对付Dirac场。

下面转入对付$U(1)$规范场的武器。

光子外线的替换规则

QED相互作用为$A_\mu j^\mu$，其中j^μ为守恒电荷流。有光子外线的Feynman图的散射振幅写成$\mathcal{M}_\mu=\left(\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}\right)^*_\mu J^\mu$或者$\mathcal{M}_\mu=\left(\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}\right)_\mu J^\mu$的形式，则$J^\mu$可以看成$k$空间的守恒流，它满足 $k_\mu J^\mu=0$。在以$\mathbf{k}$方向为z轴的坐标系里，$k_\mu=(|\mathbf{k}|,0,0,-|\mathbf{k}|)$，从而有$J^0=J^3$。

注：上述结论的理论严格证明留到以后有时间再说。今天我们以掌握计算技术为首要目标。

现在考虑初态或者末态自旋未知，需要把散射概率（散射振幅的平方）对所有自旋求和的情况。

$$|\mathcal{M}|^2=\sum_{s=\pm1}\left(\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}\right)^*_\mu\left(\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}\right)_\nu\left(J^\nu\right)^*J^\mu$$

利用$\mathrm{e}_{\mathbf{k},\pm1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1\pm i\mathbf{n}_2)$，即有

$$|\mathcal{M}|^2=|J^1|^2+|J^2|^2=|J^1|^2+|J^2|^2+|J^3|^2-|J_0|^2=-g_{\mu\nu}J^\mu J^\nu$$

由此我们得出：**可以把外线的$\sum_s\left(\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}\right)^*_\mu\left(\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}\right)_\nu$替换为$-g_{\mu\nu}$**

Compton散射

下面我们继续Compton散射的散射振幅的计算：

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma}\sum_{s_e,s_\gamma,s'_e,s'_\gamma}\left|\bar{u}_{p'_e,s'_e}\left(\not{\epsilon}^*_{p'_\gamma,s'_\gamma}\frac{i}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\not{\epsilon}_{p_\gamma,s_\gamma}+\not{\epsilon}_{p_\gamma,s_\gamma}\frac{i}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\not{\epsilon}^*_{p'_\gamma,s'_\gamma}\right)u_{p_e,s_e}\right|^2 \\
&= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma}\sum_{\text{spins}}(\mathrm{e}_{p'_\gamma})_\mu(\mathrm{e}^*_{p_\gamma})_\nu(\mathrm{e}^*_{p'_\gamma})_\alpha(\mathrm{e}_{p_\gamma})_\beta \\
&\quad\times\left(\bar{u}_{p'_e}\left(\gamma^\mu\frac{i}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\nu+\gamma^\nu\frac{i}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\mu\right)u_{p_e}\right)^\dagger \\
&\quad\times\left(\bar{u}_{p'_e}\left(\gamma^\alpha\frac{i}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\beta+\gamma^\beta\frac{i}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\alpha\right)u_{p_e}\right) \\
&= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma}\sum_{\text{spins}}(-g_{\alpha\mu})(-g_{\nu\beta})\left(\bar{u}_{p'_e}\left(\gamma^\mu\frac{i}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\nu+\gamma^\nu\frac{i}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\mu\right)u_{p_e}\right)^\dagger \\
&\quad\times\left(\bar{u}_{p'_e}\left(\gamma^\alpha\frac{i}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\beta+\gamma^\beta\frac{i}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\alpha\right)u_{p_e}\right)
\end{aligned}
$$

Compton散射

利用$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$，以及$1\times 1$矩阵的迹等于自身，上式可写成

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma}\sum_{\text{spins}} \bar{u}_{p_e}\left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\nu\right) u_{p'_e} \\
&\quad \times \bar{u}_{p'_e}\left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma_\mu\right) u_{p_e} \\
&= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma}\sum_{\text{spins}} \mathrm{Tr}\left[\bar{u}_{p_e}\left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\nu\right) u_{p'_e}\right. \\
&\quad \left.\times\ \bar{u}_{p'_e}\left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma_\mu\right) u_{p_e}\right] \\
&= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma}\sum_{\text{spins}} \mathrm{Tr}\left[u_{p_e}\bar{u}_{p_e}\left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma^\nu\right) u_{p'_e}\bar{u}_{p'_e}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_e+\not{p}_\gamma-m}\gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_e-\not{p}'_\gamma-m}\gamma_\mu\right)\right]
\end{aligned}
$$

Compton散射

利用$u\bar{u}$的自旋求和性质（见第11课前半部分），得到

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{64\omega_\gamma \omega'_\gamma \omega_e \omega'_e} K$$

其中

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Tr}\left[(\not{p}_e + m)\left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m}\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m}\gamma^\nu\right)(\not{p}'_e + m)\right. \\ &\quad \left. \times \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m}\gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m}\gamma_\mu\right)\right] \end{aligned}$$

Compton散射

利用$\not{A}^2 = A^2$, 以及$p_e^2 = p_e'^2 = m^2$, $p_\gamma^2 = p_\gamma'^2 = 0$, Feynman符号在分母的项可以化简为

$$\frac{1}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} = \frac{\not{p}_e + \not{p}_\gamma + m}{(p_e + p_\gamma)^2 - m^2} = \frac{\not{p}_e + \not{p}_\gamma + m}{2p_e p_\gamma}$$

$$\frac{1}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} = \frac{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma + m}{(p_e - p'_\gamma)^2 - m^2} = -\frac{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma + m}{2p_e p'_\gamma}$$

所以

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Tr}\left[(\not{p}_e + m)\left(\gamma^\nu \frac{\not{p}_e + \not{p}_\gamma + m}{2p_e p_\gamma}\gamma^\mu - \gamma^\mu \frac{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma + m}{2p_e p'_\gamma}\gamma^\nu\right)(\not{p}'_e + m)\right. \\ &\quad \left.\times \left(\gamma_\mu \frac{\not{p}_e + \not{p}_\gamma + m}{2p_e p_\gamma}\gamma_\nu - \gamma_\nu \frac{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma + m}{2p_e p'_\gamma}\gamma_\mu\right)\right] \end{aligned}$$

Compton散射

我们把问题转化为了求一系列Feynman矩阵的乘积的迹的问题，原则上解决了问题。以后再讲进一步化简的技巧。