

量子场论 I

第九课 旋量场

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

旋量场的拉氏密度

上节课我们介绍了旋量的定义。这节课我们考虑一个以时空坐标来标记的旋量场 $\psi(x)$ 。如果取 N 个时空格点的话，则这个场有 $4N$ 个物理自由度张成了场空间。

我们定义 γ 矩阵和旋量的初衷是为了凑出方程 $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$ ，结合我们上节课末尾得到的一些标量和矢量的表达式，我们构造出如下的拉氏密度：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

在作业题中我们会证明该拉氏密度是洛伦兹变换下的标量。

旋量场方程

拉氏密度中的 $\bar{\psi}$ 和 ψ 可以看成独立变量，对 $\bar{\psi}$ 写出Euler-Lagrange方程：

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

这就是历史上非常有名的Dirac方程，我们下面会看到，它直接预言了正电子的存在。

对 ψ 写出Euler-Lagrange方程：

$$-i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} - m\bar{\psi} = 0$$

讨论：证明这两个方程互相等价，且在洛伦兹变换下不变。

Dirac方程的经典场解

对 ψ 进行四维傅立叶变换。注意按照习惯我们取三维傅立叶变换的 $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ ，而四维 $k_\mu = (k_0, -\mathbf{k})$ ，所以四维情况下 $\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$ 。于是我们得到Dirac方程的傅立叶空间形式：

$$(\not{k} - m)\psi = 0$$

把上式写为

$$\not{k}\psi = m\psi$$

也就是说 ψ 是矩阵 \not{k} （它是 γ 矩阵的线性组合）的本征值为 m 的本征态。

Dirac方程的经典场解

在上述方程两边乘上 \not{k} ，并利用 $\not{k}^2 = k^\mu k_\mu$ （见上节课内容），我们得到

$$(k^\mu k_\mu - m^2)\psi = 0$$

如果非零解 ψ 存在，则必须有 $k^\mu k_\mu = m^2$ （否则两边除以 $k^\mu k_\mu - m^2$ 即矛盾）。

在满足 $k^\mu k_\mu = m^2$ 的前提下，我们下面来求Dirac表示下的 \not{k} 的本征态。

Dirac方程的经典解

在求解Dirac方程之前，我们先来推测下解的物理意义。

对固定的三维动量 \mathbf{k} ，我们可以选取 $k_0 = \pm\omega \equiv \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ 。我们之后会证明，这两种符号选取分别对应了粒子与反粒子。

在Dirac表示下，所有 γ 矩阵都是无迹的，所以 $\text{Tr}(\not{k}) = 0$ 。

因为 $\not{k}^2 = m^2$ ， \not{k} 只能有本征值 $\pm m$ 。为了满足 \not{k} 无迹，只能是两个本征值（简并）为 m ，另两个为 $-m$ 。也就是说，对固定满足 $k^\mu k_\mu = m^2$ 的四维动量 k ， \not{k} 的本征值为 m 的线性无关的本征态有且仅有2个。这两个本征态分别对应了两个自旋为 $s = \pm 1/2$ 的本征态。

于是，对固定的三维动量 \mathbf{k} ，我们期待四个解：分别对应电子的两个自旋本征态和正电子的两个自旋本征态。

Dirac方程的经典解

在Dirac表示下

$$\not{k} - m = \begin{pmatrix} k_0 - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -k_0 - m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \equiv k^1 \sigma^1 + k^2 \sigma^2 + k^3 \sigma^3$ 。

我们在量子力学里面学过： $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$ 的本征值为 $\pm|\mathbf{k}|$ ，对应的本征态是 \mathbf{k} 方向自旋为 $\pm 1/2$ 的态 $\zeta_{\mathbf{k},s}$ ($s = \pm 1/2$)。也就是

说 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})\zeta_{\mathbf{k},s} = (2s)|\mathbf{k}|\zeta_{\mathbf{k},s}$ 。

为了得到自旋为 s 的旋量解，我们大胆假设 ψ 可以写成上下两个 ζ_s 的组合：

$$\psi_s = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta \\ \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta \end{pmatrix}$$

其中 θ 待定。上式代入 $(\not{k} - m)\psi_s = 0$ ，得到：

Dirac方程的经典解

$$(k_0 - m) \cos \theta - 2s|\mathbf{k}| \sin \theta = 0$$

和

$$2s|\mathbf{k}| \cos \theta - (k_0 + m) \sin \theta = 0$$

要存在 θ 使上面两式同时成立的充分必要条件是 $(2s)^2|\mathbf{k}|^2 + m^2 = k_0^2$ 。显然这个条件是满足的。

我们解出

$$\theta = (2s) \tan^{-1} \frac{k_0 - m}{|\mathbf{k}|} = (2s) \tan^{-1} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0 + m}$$

质量为零的旋量场

如果 $m = 0$, 则 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$, $\theta = (2s)\text{sgn}(k_0)\frac{\pi}{4}$
先来考虑正粒子也就是 $\text{sgn}(k_0) = 1$ 的情况。

$$\psi_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{\mathbf{k},s} \\ \frac{2s}{\sqrt{2}}\zeta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

回忆上节课所说的左旋投影算符 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ 和右旋投影算符 $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

容易验证 $P_R\psi_{1/2} = \psi_{1/2}$, $P_L\psi_{-1/2} = \psi_{-1/2}$, 以及 $P_R\psi_{-1/2} = P_L\psi_{1/2} = 0$ 。也就是说, P_R 和 P_L 分别是自旋 $\pm 1/2$ 的投影算符。

反粒子

在讨论反粒子解之前，我们必须先理解 $k_0 = -\omega$ (负能量)是什么意思。

之后我们会看到，可以把产生一个 $k_0 = -\omega$ 的动量为 \mathbf{k} 自旋为 s 的粒子等效于湮灭一个 $k_0 = \omega$,动量为 $-\mathbf{k}$ 自旋为 $-s$ 的粒子。显然，对于谐振子这样做是不行的，因为把产生和湮灭算符的物理意义进行交换立刻就破坏了对易关系 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ 。那么是否旋量场的粒子遵从不同的对易关系呢？

我们下节课要讨论这些问题。