

量子场论 I

第七课 光子

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

$U(1)$ 规范场的量子化

上节课我们留了一个问题还没有解决：自由 $U(1)$ 规范场的粒子是怎样完成量子化的，这种粒子和谐振子又有何不同？

这个问题的主要难点是每个时空点的 A^μ 场仅有两个物理自由度，一旦我们要对这两个自由度进行量子化，就要取特定的规范来固定这两个自由度。不难想象，这样的推导并不会十分“优美”。

第一种方案：库仑规范

先试试库仑规范 $A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. 这样 $F_{00} = 0, F_{0i} = \partial_0 A_i$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 - \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

对固定时间的拉氏量进行傅立叶变换后得到：

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 \right]$$

我们对一个固定的 \mathbf{k} 进行研究。

第一种方案：库仑规范

对固定的 \mathbf{k} ，我们可以取三个方向 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 构成右手正交系。库仑规范要求 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$ ，所以 \mathbf{A} 可分解为 $\mathbf{A} = u_{\mathbf{k},+1}\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} + u_{\mathbf{k},-1}\mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}$ 。其中 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$ 是 $\hat{J}_{\mathbf{n}_3}$ 的本征值为 ± 1 的归一化本征矢（参考上节课角动量的内容，添加了 $1/\sqrt{2}$ 因子是为了归一化）。

利用正交归一条件 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1} = 1$ ，
 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} = 0$ ，可以得到：

$$|\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 = \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = |\dot{u}_{\mathbf{k},+1}|^2 + |\dot{u}_{\mathbf{k},-1}|^2$$

第一种方案：库仑规范

注意到 $\mathbf{k} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2) = |\mathbf{k}| \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_2 \mp i\mathbf{n}_1)$, 而 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_2 \mp i\mathbf{n}_1)$ 仍然是正交归一的两个矢量, 于是得出

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 = |\mathbf{k}|^2(|u_{\mathbf{k},+1}|^2 + |u_{\mathbf{k},-1}|^2)$$

最终得到 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ 对拉氏量的贡献为:

$$L_{\mathbf{k}} = \frac{d^3\mathbf{k}}{2} \sum_{s=\pm 1} |\dot{u}_{\mathbf{k},s}|^2 - |\mathbf{k}|^2 |u_{\mathbf{k},s}|^2$$

第一种方案：库仑规范

我们约定如果对 \mathbf{k} 取了右手正交系 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ，则对 $-\mathbf{k}$ 就取 $\mathbf{n}_1, -\mathbf{n}_2, -\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 为正交右手系。那么对 $s = \pm 1$ 都有

$$e_{-\mathbf{k},s} = e_{\mathbf{k},s}^*$$

这样 \mathbf{A} 是实数场，也就是 $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$ 的条件就转化为 $u_{-\mathbf{k},s} = u_{\mathbf{k},s}^*$ 。也就是说 $u_{\mathbf{k},s}$ 可以看成是一个实数场 $u_s(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换。

第一种方案：库仑规范

这样， u_s 的拉氏量就和质量为零的实标量场的拉氏量完全一样了。我们可以直接写出

$$u_{\mathbf{k},s} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s}^\dagger}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}}$$

。

最终进行反傅立叶变换，得到 $\hat{\mathbf{A}}$ 的解为：

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

其中 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 是构成正交右手系的单位矢量，并如前所述有约定 $\mathbf{e}_{-\mathbf{k},s} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}^*$ 。

第一种方案：库仑规范

上述推导中，我们顺便证明了U(1)规范场的粒子（例如光子）的质量为零，自旋为1。