量子场论 I

第六次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

第1题 题目和思路

证明下述矩阵的迹为零：

- $\not{a}\not{b}\gamma^0$
- $\not{a}\not{b}\gamma^5$
- $\not{a}\not{b}\not{c}$
- $\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^5$
- $\not{a}\not{b}\not{c}\not{d} - \not{d}\not{c}\not{b}\not{a}$

思路：用γ矩阵的零迹定理和Feynman符号迹的倒排定理

第1题解答

- $\not{a}\not{b}\gamma^0$展开式的每一项都是$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0$的形式$(0\leq\mu,\nu\leq3)$。根据零迹定理（排除$\gamma^5$），$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0$的迹为零。
- $\not{a}\not{b}\gamma^5$的展开式每一项都是$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5$的形式$(0\leq\mu,\nu\leq3)$。 根据零迹定理（取某个$\alpha\neq\mu,\nu,5$，排除$\gamma^\alpha$） $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5$的迹为零
- $\not{a}\not{b}\not{c}$的展开式每一项都是$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda$的形式$(0\leq\mu,\nu,\lambda\leq3)$。根据零迹定理（排除$\gamma^5$），$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda$的迹为零。
- $\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^5$展开式的每一项是$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^5$的形式$(0\leq\mu,\nu,\lambda\leq3)$。根据零迹定理（排除$\gamma^5$），$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^5$的迹为零。
- 根据Feynman符号的迹的倒排定理，$\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}-\not{d}\not{c}\not{b}\not{a}$的迹为零。

第2题 题目和思路

证明下述恒等式:

- $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2ab$
- $\mathrm{Tr}\left(\not{a}\gamma^\mu\right) = 4a^\mu$

思路:利用Feynman符号和γ矩阵的定义的定义即可证明

第2题解答

- $\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a}=a_\mu b_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)=2g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=2ab$
- 利用迹可以轮换乘积次序的性质，$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu\right)=\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\right)=g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}\left(I_{4\times4}\right)=4g^{\mu\nu}$
  所以 $\mathrm{Tr}\left(\not{a}\gamma^\mu\right)=a_\nu\mathrm{Tr}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu\right)=4a_\nu g^{\mu\nu}=4a^\mu$

第3题 题目和思路

把

$$\mathrm{Tr}\left(\not{a}\gamma^{\mu}\not{b}\not{c}\not{d}\gamma_{\mu}\right)$$

化简为只含矢量内积的最简形式。

思路：利用γ矩阵形式下标矩阵的性质和Feynman符号迹的展开定理

第3题 第一种解答

利用$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma_\mu = -2\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha$即可得
到$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \not{b}\not{c}\not{d}\gamma_\mu\right) = -2\not{d}\not{c}\not{b}$，所以

$$\mathrm{Tr}\left(\not{a}\gamma^\mu \not{b}\not{c}\not{d}\gamma_\mu\right) = -2\mathrm{Tr}\left(\not{a}\not{d}\not{c}\not{b}\right) = -8(ad)(bc)+8(ac)(bd)-8(ab)(cd)$$

第3题 第二种解答

利用$\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -2\gamma^\alpha$即可得到$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \not{a}\gamma_\mu\right) = -2\not{a}$，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\not{a}\gamma^\mu \not{b}\not{c}\not{d}\gamma_\mu\right) &= \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu \not{b}\not{c}\not{d}\right) \\
&= -2\mathrm{Tr}\left(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right) \\
&= -8(ab)(cd) + 8(ac)(bd) - 8(ad)(bc)
\end{aligned}$$

第4题 题目和思路

设p为电子的四维动量，k为光子的四维动量，化简

$$\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^{\mu}\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\gamma_{\mu}\right)$$

思路：利用第19课所讲的技巧

第4题 第一种解答

$$\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^\mu \frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\gamma_\mu\right) = \mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^\mu \frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m}\gamma_\mu\right)$$
$$= \frac{1}{2pk}\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma_\mu\right)$$

利用$\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^\mu(\not{p}+m)\right) = 2p^\mu(\not{p}+m)$,上式等于

$$\frac{1}{2pk}\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)(2p^\mu\gamma_\mu+\gamma^\mu\not{k}\gamma_\mu)\right)$$
$$= \frac{1}{2pk}\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)(2\not{p}-2\not{k})\right)$$
$$= \frac{1}{pk}\mathrm{Tr}\left(\not{p}(\not{p}-\not{k})\right)$$
$$= \frac{4m^2}{pk}-4$$

在最后一步我们利用了$\mathrm{Tr}\left(\not{p}^2\right) = 4p^2 = 4m^2$和$\mathrm{Tr}\left(\not{p}\not{k}\right) = 4pk$

第4题 第二种解答

$$\mathrm{Tr}\left((\not{p}+m)\gamma^{\mu}\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\gamma_{\mu}\right)=\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\mu}(\not{p}+m)\gamma^{\mu}\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\right)$$

利用$\gamma_{\mu}\not{p}\gamma^{\mu}=-2\not{p}$和$\gamma_{\mu}\gamma^{\mu}=4$，上式等于

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left((-2\not{p}+4m)\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\right) &= \mathrm{Tr}\left((-2\not{p}+4m)\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m}\right)\\ &= \frac{1}{pk}\mathrm{Tr}\left((-\not{p}+2m)(\not{p}+\not{k}+m)\right)\end{aligned}$$

展开上式，因为奇数个feynman符号的乘积的迹为零，只要保留偶次项。上式等于

$$\frac{1}{pk}\mathrm{Tr}\left(-\not{p}(\not{p}+\not{k})+2m^2\right)=\frac{1}{pk}\mathrm{Tr}\left(m^2-\not{p}\not{k})\right)=\frac{4m^2}{pk}-4$$

第5题 题目和思路

在Compton散射过程中，取电子初始状态为静止，入射光子沿z轴方向的参照系。限定入射光子四维动量为$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$；出射光子能量为$\omega'$，方向限定在某固定方向$\mathbf{n}$附近的立体角$d\Omega$内；$\mathbf{n}$与$z$轴的夹角为$\theta$。当$d\Omega$很小时，散射截面与$d\Omega$成正比，它们之间的比称为微分散射截面：$\frac{d\sigma}{d\Omega}$。试根据课上所求的散射概率计算该微分散射截面(写成ω, ω',和θ的函数)。

思路：在限定范围内对末态进行积分

第5题 解答

在课上的结果

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{8\omega_p\omega_p'\omega_k\omega_k'}\left[\frac{pk'}{pk} + \frac{pk}{pk'} + 2m^2\left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'}\right) + m^4\left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'}\right)^2\right]$$

中代入$pk = m\omega$，$pk' = m\omega'$，得到

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{8m(m+\omega-\omega')\omega\omega'}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) + m^2\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)^2\right]$$

由能量动量守恒可以得到

$$m\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) = \cos\theta - 1$$

所以

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{8m(m+\omega-\omega')\omega\omega'}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right]$$

第5题 解答（续）

同第14课的推导方法，但不对末态$d\Omega$积分：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \omega'^2 d\omega' \int d^3\mathbf{p}'|\mathcal{M}|^2\delta(p+k-p'-k')$$

注意因末态粒子不同，不需要除以2!因子。入射速度$v=1$所以也可以略去。
对$\mathbf{p}'$积分，得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \omega'^2 d\omega'|\mathcal{M}|^2\delta(m+\omega-\omega'-\sqrt{m^2+(\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta}))$$

对ω'进行积分，利用复合δ函数的积分公式：

$$\int g(x)\delta(f(x))dx = \sum_{x^*:f(x^*)=0} g(x^*)\frac{1}{|f'(x^*)|}$$

和

$$\left|\frac{d\left(m+\omega-\omega'-\sqrt{m^2+(\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta)}\right)}{d\omega'}\right| = 1+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{\sqrt{m^2+(\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta)}}$$

第5题 解答（续）

以及能量守恒 $\sqrt{m^2 + (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta)} = m + \omega - \omega'$，我们得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\omega'^2|\mathcal{M}|^2 \frac{1}{1 + \frac{\omega' - \omega\cos\theta}{m+\omega-\omega'}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\omega'^2|\mathcal{M}|^2 \frac{m + \omega - \omega'}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\omega'^2|\mathcal{M}|^2 \frac{m + \omega - \omega'}{m + \omega m(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega})} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\omega'^2|\mathcal{M}|^2 \frac{\omega'(m + \omega - \omega')}{m\omega} \\
&= \frac{q^4}{32\pi^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2 m^2}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right]
\end{aligned}
$$