量子场论 I

作用量原理和Noether定理

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

课堂互动：函数与稳定点

稳定点：所有一阶导数全为零的点 （极值点一定是稳定点，反之则未必）

- $f(\phi)=\phi$存在稳定点吗
- 求$f(\phi)=\phi^2$的稳定点
- 求$f(\phi)=\frac{1}{3}\phi^3-\phi$的稳定点
- 求$f(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{3}\phi_1^3-\phi_1+(\phi_2-\phi_1)^2$的稳定点
- 求$f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)=\frac{1}{3}\phi_1^3-\phi_1+\sum_{j=2}^{n}(\phi_j-\phi_1)^2$的稳定点
- 求$f(\phi_1,\phi_2,\ldots)=\frac{1}{3}\phi_1^3-\phi_1+\sum_{j=2}^{\infty}(\phi_j-\phi_1)^2$的满足"边界条件" $\phi_1>0$的稳定点。

我们看到函数如存在多个稳定点，则可以添加适当的"边界条件"使得稳定点唯一。

场的函数

以自然数标记自由度的变量$(\phi_1, \phi_2, \ldots)$的进一步推广就是用坐标来标记自由度的“场” ϕ_t $(t \in (-\infty, \infty))$。当然，我们更习惯把它记成$\phi(t)$。在学习场论的过程中，我们通常不把场看成坐标的函数，而是把坐标t看成自由度的标记，把场看成有无穷多自由度的变量。

场既然只是一个（自由度有点多）的变量，当然就可以定义它的函数，数学上叫“泛函” (functional)：

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt$$

把$\phi(t)$映射为一个数。这里ω是具有角速度量纲的常量，m是具有质量量纲的常量。

四维时空里的场的泛函

四维时空里的场（也同样可以看成一个无穷多自由度的变量，其自由度用四维时空坐标来标记）也可以有它的泛函，例如。

$$S = \int \sqrt{-g}\, d^4x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$$

把场$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$映射为一个数S。其中g是度规$g_{\mu\nu}$的行列式的简写。d^4x是$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$的简写。m是质量量纲的常量。积分范围是整个四维时空。这里我们假设了度规是已知确定的。（允许度规变化的理论参考广义相对论。）

作用量

泛函

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m}{2}\left[(\frac{d\phi}{dt})^2-\omega^2\phi^2\right]dt$$

定义了一个物理系统(谐振子）。反过来的等价说法是这个物理系统的“作用量”（Action）是上述泛函。

作用量的满足边界条件的稳定点给出了物理系统的经典解。原则上所有经典物理问题都可以归结为求解作用量的稳定点。