### 量子场论 |

第二次课后作业 (共八次,每次2.5分) 交作业时间: 10月10日,星期一,13:30pm

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU\_QFTI

### 第1题(0.5分)

对质量为m的自由实标量场 $\phi$ ,四维动量k满 足 $k^0 = \omega \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ,其中 $\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2, k^3)$ 为三维动量。对任 意洛仑兹变换下不变的函数f(k),证明积分 $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} f(k)$  也是洛仑兹变换下的不变量。

# 第2题(0.5分)

对质量为m的自由实标量场 $\phi$ ,证明四维时空下的任意两点场算符的对易[ $\hat{\phi}(x)$ , $\hat{\phi}(x')$ ]是洛仑兹变换下的不变量。(提示:利用 $\hat{\phi}$ 的算符表达式和第1题结论。)

### 第3题(0.5分)

质量为m的自由复标量场,

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\phi^{\dagger}\partial^{\mu}\phi - m^{2}\phi^{\dagger}\phi$$

把 $\phi$ 和 $\phi$ <sup>†</sup>分别看作独立自由度,它们对应的正则动量分别为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^{\dagger}, \ \pi^{\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^{\dagger}} = \dot{\phi}$$

于是Hamilton密度为

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^{\dagger} \pi^{\dagger} + \dot{\phi} \pi - \mathcal{L} = \pi^{\dagger} \pi + \nabla \phi^{\dagger} \cdot \nabla \phi + m^{2} \phi^{\dagger} \phi$$

我们在课堂上推到了量子化后的φ为

$$\hat{\phi}(x) = rac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{rac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} 
ight)$$

试求量子化后的总Hamilton量 $\hat{H}$ .



### 第4题(0.5分)

考虑和规范场耦合的复标量场的拉氏密度:

$$\mathcal{L} = (D^{\mu}\phi)^{\dagger}D_{\mu}\phi - m^2\phi^{\dagger}\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

利用Euler-Lagrange方程

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=j^{\nu}$$

证明 $j_{\mu}$ 是守恒流.



# 第5题(0.5分)

#### 关于三维空间转动算符

- ▶ 证明相反方向的角动量算符相差一个负号 $\hat{J}_{-n} = -\hat{J}_{n}$
- ▶ 因为绕固定轴转动 $2\pi$ 的没有任何效果,所以转动算符 $e^{-2\pi i \hat{J}_n} = 1$ ,由此证明 $\hat{J}_n$ 的本征值一定是整数。
- ▶ 三个形成右手正交系的方向 $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_3$ ,对应的转动算符分别 为 $\hat{J}_1$ ,  $\hat{J}_2$ ,  $\hat{J}_3$ , 证明 $\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = 2$  .