

# 量子场论 I

## 第十课 旋量场的量子化

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# Dirac方程的解的性质

我们上节课得到了Dirac方程的经典解，如果定义

$$\theta_{\mathbf{k},s} \equiv 2s \tan^{-1} \frac{\omega - m}{|\mathbf{k}|} = 2s \tan^{-1} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega + m}$$

$$u_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta_{\mathbf{k},s} \\ \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

$$v_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta_{\mathbf{k},s} \\ -\zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

容易验证  $u_{\mathbf{k},s}e^{-i\omega t}$  和  $v_{\mathbf{k},s}e^{i\omega t}$  就是我们上节课推导的Dirac方程的对应于  $k_0 = \pm\omega$  的解。

## Dirac方程的解的性质

利用自旋本征态的正交归一条件:  $\zeta_{\mathbf{k},s}^\dagger \zeta_{\mathbf{k},s'} = \delta_{ss'}$ , 可以证明:

$$\begin{aligned}u_{\mathbf{k},s}^\dagger u_{\mathbf{k},s'} &= v_{\mathbf{k},s}^\dagger v_{\mathbf{k},s'} = \delta_{ss'} \\u_{\mathbf{k},s}^\dagger v_{\mathbf{k},s'} &= v_{\mathbf{k},s}^\dagger u_{\mathbf{k},s'} = 0 \\\bar{u}_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} &= \delta_{ss'} \cos 2\theta_{\mathbf{k},s} \\\bar{v}_{\mathbf{k},s} v_{\mathbf{k},s'} &= -\delta_{ss'} \cos 2\theta_{\mathbf{k},s} \\\bar{u}_{\mathbf{k},s} v_{\mathbf{k},s'} &= \bar{v}_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = \delta_{ss'} \sin 2\theta_{\mathbf{k},s}\end{aligned}$$

注意根据 $\theta_{\mathbf{k},s}$ 的定义可以推出

$$\cos 2\theta_{\mathbf{k},s} = m/\omega, \quad \sin 2\theta_{\mathbf{k},s} = |\mathbf{k}|/\omega$$

# 广义动量和Hamilton密度

对应于 $\psi$ 的广义动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\psi})} = i\psi^\dagger$$

于是

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = -\bar{\psi}(i\gamma^j\partial_j - m)\psi = \pi\gamma^0(-\gamma^j\partial_j - im)\psi$$

显然，满足Dirac方程的解 $\psi$ 使得 $\mathcal{L} = 0$ 。从而

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} = i\psi^\dagger\dot{\psi}$$

## 其他守恒量

利用时空平移对称性，可以求出四维动量密度为

$$P^\mu = i\psi^\dagger \partial^\mu \psi$$

显然  $P^0 = \mathcal{H}$ .

再利用规范对称性 ( $\psi \rightarrow \psi e^{-iq\epsilon}$ ) 可以得到守恒流为

$$j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

守恒荷密度

$$j^0 = q\psi^\dagger\psi$$

# 旋量场的量子化

我们先把傅立叶空间的一般解写为:

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \sum_s \frac{u_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} \hat{a}_{\mathbf{k},s}|_{t=0} + v_{\mathbf{k},s} e^{i\omega t} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger|_{t=0}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

其中 $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ 和 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 为 $t=0$ 时刻的待定算符。我们也可以把时间演化因子吸收到算符里

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \sum_s \frac{u_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + v_{\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

任意时刻的 $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ 和 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 由下面的微分方程决定:

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},s}}{dt} = -i\omega \hat{a}_{\mathbf{k},s}, \quad \frac{d\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger}{dt} = i\omega \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$$

# 旋量场的量子化

从 $\hat{\psi}$ 的表达式可以直接得到

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^{\dagger} = \sum_s \frac{u_{\mathbf{k},s}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger} + v_{\mathbf{k},s}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

$$i\hat{\psi}_{\mathbf{k},s} = \omega \sum_s \frac{u_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} - v_{\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^{\dagger}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

迄今为止，我们对算符 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 只知道它们的时间演化规律。下面我们来尝试了解它们更多的性质。

# 课堂讨论

利用 $u, v$ 的正交归一关系，证明Hamilton量为

$$\hat{H}_{\mathbf{k},s} = \omega \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

三维动量为

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},s} = \mathbf{k} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$

守恒荷为

$$\hat{Q}_{\mathbf{k},s} = q \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \right)$$



# 课堂讨论

假设已知 $[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger] = [\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger] = 0$ , 证明

- ▶ “粒子数算符”  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$  的本征值是非负实数
- ▶ 若把  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$  本征值为  $n$  的本征态记作  $|n\rangle$ ,  
则  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- ▶  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$  的本征值谱是连续的正整数  $0, 1, 2, \dots$ 。
- ▶ 若存在  $|n+1\rangle$ , 则  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ 。若不存在  $|n+1\rangle$ , 则  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger|n\rangle = 0$

提示：利用  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$  的时间演化性质和海森堡方程。

# 课堂讨论

假设已知 $[\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger] = [\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}] = 0$ , 证明

- ▶ “空穴数算符” $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 的本征值是非负实数
- ▶ 若把 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 本征值为 $n$ 的本征态记作 $|n\rangle$ ,  
则 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- ▶  $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 的本征值谱是连续的正整数 $0, 1, 2, \dots$ 。
- ▶ 若存在 $|n+1\rangle$ , 则 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ 。若不存在 $|n+1\rangle$ , 则 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}|n\rangle = 0$

提示: 利用 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 的时间演化性质和海森堡方程。

# 旋量场的量子化

下一步怎么办？

# 旋量场的量子化

当你束手无策时，就路径积分吧。

# 旋量场的量子化

固定 $\mathbf{k}$ 的单个Fourier mode的拉氏量为

$$L_{\mathbf{k}} = d^3\mathbf{k} \left[ i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^j \partial_j \psi - m\psi^\dagger \gamma^0 \psi \right]$$

设概率幅为 $w(\psi; t)$ ，取足够小的时间 $\Delta t$ 使得 $\psi$ 的变化为均匀变化 $\dot{\psi} = \mathbf{v}$ 。则按照量子作用量原理， $t + \Delta t$ 时刻的概率振幅可写成

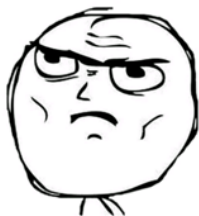
$$w(\psi, t + \Delta t) = \int \sqrt{|g_{\mathbf{v}}|} d\mathbf{v} w(\psi - \mathbf{v}\Delta t, t) e^{i d^3\mathbf{k} [i\psi^\dagger \mathbf{v} + \dots]}$$

我们意识到两个问题，一是我们并不知道旋量空间的度规是否是平凡的，从而也不知道怎么写它的行列式 $|g_{\mathbf{v}}|$ ；二是现在指数里是积分变量 $\mathbf{v}$ 的一次式，这样的积分在全复平面都是发散的，解析延拓的办法似乎要失灵了。

# 旋量场的量子化

要使指数上为线性函数的积分收敛域为不可数集，积分变量必须是封闭代数域的数。旋量场的路径积分由Grassmann代数描述。

说人话！



# 旋量场的量子化

人话版本：对固定 $\mathbf{k}$ 的 $a$ 粒子和 $b$ 粒子均只存在有限个态 $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n_{\max}\rangle$ 。

这不但是路径积分存在收敛域的必要条件，还顺便使得Hamilton算符的本征值有了下限。

## 空穴解释

对Hamilton的形式进行物理解释：把 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger$ 看成能量为 $\omega$ 的粒子的“空穴数”。即最多有 $n_{\max}$ 个空穴，空穴都空为真空（能量最低）。如果进一步要求 $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger\hat{b}_{-\mathbf{k},s}$ 是普通的粒子数算符。则有

$$\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger + \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger\hat{b}_{-\mathbf{k},s} = n_{\max}$$

由此请证明 $n_{\max} = 1$ 。并进一步证明下列反对易关系：

$$\{\hat{b}_{-\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger\} = 1$$

$$\{\hat{b}_{-\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}\} = \{\hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger\} = 0$$

假设理论对于正反粒子是对称的，则对a粒子而言同样有同样的反对易关系。



# 守恒量

利用反对易关系，我们重新写出守恒量的算符表达式：  
Hamilton量为

$$\hat{H}_{\mathbf{k},s} = \omega \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k},s} - 1 \right)$$

三维动量为

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},s} = \mathbf{k} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k},s} + 1 \right)$$

守恒荷为

$$\hat{Q}_{\mathbf{k},s} = q \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{b}_{-\mathbf{k},s}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k},s} + 1 \right)$$

# 不同自由度的产生湮灭算符到底该对易还是反对易？

因为可观测量都是产生湮灭算符的偶数次，所以这个问题不重要。我们在旋量理论里人为地规定它们反对易。当然，这样可观测量的算符还是对易的。