量子场论 I

第十四课 散射截面

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

散射截面是粒子的有效面积

对散射问题，如果一开始就是取一个粒子为参照系，即$\mathbf{p}_1 = 0$。不妨取粒子2的运动方向为z轴，其动量为

$$\mathbf{p}_2 = \left(0, 0, \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

其中v是粒子2在这个参考系里的运动速度。

散射截面σ是粒子2的"有效面积"，粒子2在总时间T内扫过的体积为$\sigma v T$。在总体积为V的情况下，粒子2"碰撞"到粒子1的概率为

$$\frac{\sigma v T}{V}$$

和散射振幅联系起来

另一方面，我们计算了发生散射的概率为

$$\sum_{\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4}\left|\mathcal{M}\frac{T}{V}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k\right|^2=\frac{1}{2!}\sum_{\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4}|\mathcal{M}|^2\frac{T^2}{V^2}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$$

因为是总概率，所以要对所有$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$求和。但是，“产生一个动量为$\mathbf{p}_3$的粒子和另一个动量为$\mathbf{p}_4$的粒子”和“产生一个动量为$\mathbf{p}_4$的粒子和另一个动量为$\mathbf{p}_3$的粒子”描述的是同一件事情。所以有了外面的$\frac{1}{2!}$因子。

要求能量动量守恒的因子$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$，因为它满足能量动量守恒时为1，否则为零。所以它的平方总是等于自己。

令两种方法算出来的概率相等，即有

$$\sigma=\frac{1}{2!}\sum_{\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4}|\mathcal{M}|^2\frac{T}{Vv}\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$$

化为标准形式

再利用$d^4k = \frac{(2\pi)^4}{VT}$，以及$d^3\mathbf{p}_3 = d^3\mathbf{p}_4 = \frac{(2\pi)^3}{V}$，就得到散射截面公式的标准形式

$$\sigma = \frac{1}{2!(2\pi)^2}\int d^3\mathbf{p}_3 \int d^3\mathbf{p}_4 \frac{|\mathcal{M}|^2}{v}\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

注意式中的δ函数是四维的。并且，如果产生的两个粒子是两种不同的粒子，则没有$\frac{1}{2!}$因子。

问题是，只会小学数学的我们，真的能算出这个积分吗?

先算最简单的

先来看最简单的情况，假设只有四次耦合项$\frac{\lambda}{4!}\phi^4$。那么

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda^2}{16\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}$$

代入散射截面公式，

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\lambda^2}{128\pi^2 v\omega_1\omega_2} \\ &\quad \times \int d^3\mathbf{p}_3 \int d^3\mathbf{p}_4 \frac{1}{\omega_3\omega_4}\delta\left(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4\right)\delta\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4\right)\end{aligned}$$

这里

$$\omega_1 = m,\ \omega_2 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}},\ \omega_3 = \sqrt{m^2+\mathbf{p}_3^2},\ \omega_4 = \sqrt{m^2+\mathbf{p}_4^2}$$

把$\mathbf{p}_4$积掉

可以先对$\mathbf{p}_4$积分，得到

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{128\pi^2 v\omega_1\omega_2}\int d^3\mathbf{p}_3\,\frac{1}{\omega_3\omega_4}\delta\left(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4\right)$$

当然，上式中ω_4的含义发生了变化:

$$\omega_4 = \sqrt{m^2+(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)^2}$$

事实上，在取定的参考系里，$\omega_4 \geq m$，又要能量守恒$\omega_1+\omega_2=\omega_3+\omega_4$，所以$\omega_3 \leq \omega_2$。那么上面的积分仅在

$$|\mathbf{p}_3| \leq |\mathbf{p}_2|$$

时有非零贡献。

取球坐标系

设$\mathbf{p}_3$的球座标系坐标为$(|\mathbf{p}_3|, \theta, \varphi)$, 则

$$\int d^3\mathbf{p}_3 = \int_0^{|\mathbf{p}_2|} |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

因为σ的积分函数与φ无关，可以先对φ积分得到2π。 于是

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi v\omega_1\omega_2} \int_0^{|\mathbf{p}_2|} |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{1}{\omega_3\omega_4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$$

这时ω_3, ω_4的含义为

$$\omega_3 = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_3|^2},\ \omega_4 = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 - 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|\cos\theta}$$

积掉$\cos\theta$

先对$\cos\theta$进行积分，为此我们要计算出

$$\left|\frac{d(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)}{d(\cos\theta)}\right| = \frac{|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|}{\omega_4}$$

再利用积分公式

$$\int \delta\left(f(x)\right) dx = \sum_{x*:\ f(x*)=0} \frac{1}{|f'(x*)|}$$

就得到

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi v\omega_1\omega_2|\mathbf{p}_2|}\int_0^{|\mathbf{p}_2|} d|\mathbf{p}_3|\frac{|\mathbf{p}_3|}{\omega_3}$$

注意：θ有解的充分必要条件是$|\mathbf{p}_3| \leq |\mathbf{p}_2|$（也就是$m \leq \omega_3 \leq \omega_2$），把$\theta$积掉后$|\mathbf{p}_3|$的积分上下限就必须确定了。

最后积掉$|\mathbf{p}_3|$

最后利用$|\mathbf{p}_3|d|\mathbf{p}_3| = \omega_3 d\omega_3$，就得到

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\lambda^2}{64\pi\upsilon\omega_1\omega_2|\mathbf{p}_2|}\int_m^{\omega_2} d\omega_3 \\
&= \frac{\lambda^2(\omega_2 - m)}{64\pi\upsilon\omega_1\omega_2|\mathbf{p}_2|} \\
&= \frac{\lambda^2}{64\pi m^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}}\right)}
\end{aligned}$$

非相对论极限$\upsilon \ll 1$下，

$$\sigma \approx \frac{\lambda^2}{128\pi m^2}$$

取质心参照系计算更方便

实际上，散射截面不一定要在一个粒子的静止参照系里计算。我们可以取质心参照系，设粒子1的速度为沿z轴向上u，粒子2的速度相反。在这个参照系里，若要能量动量都守恒则必须有

$$\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$$

且

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$$

因为粒子之间相对速度为$2u$，上面开始几步步骤中需要把υ替换为$2u$。直到我们在球坐标系里写下：

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi(2u)\omega_1\omega_2}\int_0^{\infty}|\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3|\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\frac{1}{\omega_3\omega_4}\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)$$

注意现在$\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m^2}$，所以积分函数就不依赖于$\theta$，直接可以对$\theta$积分得到

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi(2u)\omega_1\omega_2}\int_0^{\infty}|\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3|\frac{1}{\omega_3\omega_4}\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)$$

取质心参照系计算更方便

然后我们计算出

$$\left|\frac{d(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)}{d|\mathbf{p}_3|}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_3|}{\omega_4} = \frac{2|\mathbf{p}_1|}{\omega_1}$$

利用δ函数积分公式即得

$$\sigma = \frac{\lambda^2|\mathbf{p}_1|}{128\pi u\omega_1^3}$$

再利用$u\omega_1 = |\mathbf{p}_1|$，上式就化简为

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{128\pi\omega_1^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\mathrm{tot}}^2}$$

其中$E_{\mathrm{tot}} = 2\omega_1$是质心系总能量。

课堂讨论

在两个参照系里算出来的结果一样吗?