量子场论 I
第一课：坐标系和张量场简介

授课：黄志琦

教材：《简明量子场论》，王正行，北京大学出版社
课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI
助教：暂无（实在有问题可在微信上问，微信号zhiqihuang)

评分 (Evaluation)

总分 = 作业30分 + 课堂表现20分 + 期末考试50分

- **平时作业20分**： 每次平时作业2.5分（不足半分取半分），共8次平时作业。
- **特殊作业10分**： 期末考试前交。允许搜索查阅任何文献，允许讨论，允许请教他人。共5题每题2分。
- **课堂表现20分**： 尽量积极发言。
- **期末考试50分**： 开卷（允许翻阅书和笔记），独立答题。

互相简单介绍

自我介绍:

- 名字
- 物理基础：高等数学，线性代数，理论力学，狭义相对论，量子力学这五门课的学习情况（没学过，学过大部分忘了，学过大部分还会，精通）

第一章要掌握的内容

- 自然单位制和量纲
- 坐标，度规和张量
- 作用量和拉氏密度的概念
- Euler-Lagrange方程的推导
- Noether定理的推导

自然单位制和量纲

自然单位制 $c = \hbar = 1$

长度量纲 = 时间量纲 = 质量量纲$^{-1}$ = 能量量纲$^{-1}$

力的量纲

= 质量量纲 $\times$ 长度量纲/时间量纲^2

= 质量量纲^2

课堂互动

讨论下面这些物理量的量纲:
速度v
角速度ω
角动量L
加速度a
能量密度ρ
压强p
牛顿引力常数G

时空坐标的标记以及一些约定

- 时空用坐标(x^0, x^1, x^2, x^3)来标记，其中x^0为时间坐标，有时也写作t；省略上标的坐标x是(x^0, x^1, x^2, x^3)的简写。
- 希腊字母指标$\mu, \nu, \rho, \sigma, \ldots$ 默认跑遍0，1，2，3
- 拉丁字母指标$i, j, k, l, \ldots$ 默认跑遍1，2，3
- 黑体表示三维空间矢量，例如 $\mathbf{dx} \equiv (dx^1, dx^2, dx^3)$
- 爱因斯坦求和规则：重复出现的指标默认求和。例如：$dx^\mu dx_\mu$若无特殊说明等价于$\sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu$
- 空间坐标的偏微分$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$经常简写成$\partial_\mu$. 省略下标的偏微分符号$\partial$是$(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$的简写。算符$\nabla$则仅是空间偏微分$(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$的简写。
- 克罗内克符号(Kronecker delta) δ^μ_ν当$\mu = \nu$时为1，否则为0.

度规 (metric)

时空间隔元:
$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
$g_{\mu\nu}$称为度规(metric)

量子场论与广义相对论的统一尚未完成。本课程仅讨论狭义相对论的平直时空，也叫闵氏空间(Minkowski spacetime).

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这样时空间隔元可以简写成 $ds^2 = dt^2 - \mathbf{dx}^2$

一般性张量(tensor)的定义

一般性张量在坐标变换$x \to \tilde{x}$下的变化：

$$\tilde{T}^{\mu\nu\ldots}{}_{\alpha\beta\ldots} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \cdots \right) T^{\rho\sigma\ldots}{}_{\gamma\lambda\ldots}$$

(上个学年很多同学看到这里就退课了🤭)

课堂互动

如果ϕ是一个标量（0阶张量，在坐标变换下不变），时空度规为$g_{\mu\nu}$，时空度规的逆矩阵为$g^{\mu\nu}$。试证明:

- 任何常数都是标量
- 时空微元dx^{μ}是张量（一阶张量，也称为矢量）
- $g_{\mu\nu}$本身是张量 （二阶张量）
- $\partial_{\mu}\phi$是张量（矢量）
- 克罗内克符号$\delta^{\mu}{}_{\nu}$是张量
- 度规的逆矩阵$g^{\mu\nu}$是张量
- 如果定义$dx_{\mu} \equiv g_{\mu\nu}dx^{\nu}$，则$dx_{\mu}$也是张量
- 如果定义$\partial^{\mu}\phi \equiv g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi$，则$\partial^{\mu}\phi$是张量
- 如果$T^{\mu\nu}$是二阶张量，则$T^{\mu}{}_{\mu}$是标量
- 如果A^{μ}和B^{μ}都是矢量，则$A^{\mu}B^{\nu}$是二阶张量

张量指标的升降

通过前面的讨论，我们发现张量的坐标可以通过度规$g_{\mu\nu}$和其逆矩阵$g^{\mu\nu}$来升降

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu\rho}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

张量指标的相乘

通过前面的讨论，我们发现一个m阶张量和一个n阶张量可以直接相乘生成m+n阶张量。

$dx^\mu dx^\nu$是二阶张量。
$g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$ 是四阶张量

张量指标的收缩

通过前面的讨论，我们发现张量的上下指标可以收缩，产生低两阶的张量。

$$dx^{\mu} dx_{\mu} = ds^2$$

$$g^{\mu}{}_{\mu} = 4$$

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

课堂互动

如果ϕ是标量，那么$\partial_\mu\partial_\nu\phi$是张量吗?