

# 量子场论 I

## 第七课 $U(1)$ 规范场的量子化

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# $U(1)$ 规范场的量子化

上节课我们留了一个问题还没有解决： $U(1)$ 规范场的粒子是怎样完成量子化的，这种粒子和谐振子又有何不同？

这个问题的主要难点是每个时空点的 $A^\mu$ 场仅有两个物理自由度，一旦我们要对这两个自由度进行量子化，就要取特定的规范来固定这两个自由度。不难想象，这样的推导并不会十分“优美”。

## 第一种方案：库仑规范

先试试库仑规范  $A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . 这样  $F_{00} = 0, F_{0i} = \partial_0 A_i$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 - \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

对固定时间的拉氏量进行傅立叶变换后得到：

$$L = \int d^3\mathbf{k} \left[ \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 \right]$$

我们对一个固定的 $\mathbf{k}$ 进行研究。

## 第一种方案：库仑规范

对固定的 $\mathbf{k}$ ，我们可以取三个方向 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 构成右手正交系。库仑规范要求 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$ ，所以 $\mathbf{A}$ 可分解

为 $\mathbf{A} = u_{\mathbf{k},+1} \mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} + u_{\mathbf{k},-1} \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}$ 。其中 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$ 是 $\hat{J}_{\mathbf{n}_3}$ 的本征值为 $\pm 1$ 的归一化本征矢（参考上节课角动量的内容，添加了 $1/\sqrt{2}$ 因子是为了归一化）， $u_{\mathbf{k},\pm 1}$ 是待定的复系数。

利用正交归一条件 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1} = 1$ ，  
 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} = 0$ ，可以得到：

$$|\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 = \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = |\dot{u}_{\mathbf{k},+1}|^2 + |\dot{u}_{\mathbf{k},-1}|^2$$

## 第一种方案：库仑规范

注意到  $\mathbf{k} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2) = |\mathbf{k}| \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_2 \mp i\mathbf{n}_1)$ , 而  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_2 \mp i\mathbf{n}_1)$  仍然是正交归一的两个矢量, 于是得出

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 = |\mathbf{k}|^2(|u_{\mathbf{k},+1}|^2 + |u_{\mathbf{k},-1}|^2)$$

最终得到  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  对拉氏量的贡献为:

$$L_{\mathbf{k}} = \frac{d^3\mathbf{k}}{2} \sum_{s=\pm 1} |\dot{u}_{\mathbf{k},s}|^2 - |\mathbf{k}|^2 |u_{\mathbf{k},s}|^2$$

# 第一种方案：库仑规范

我们约定如果对 $\mathbf{k}$ 取了右手正交系 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ，则对 $-\mathbf{k}$ 就取 $\mathbf{n}_1, -\mathbf{n}_2, -\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 为正交右手系。那么对 $s = \pm 1$ 都有

$$e_{-\mathbf{k},s} = e_{\mathbf{k},s}^*$$

这样 $\mathbf{A}$ 是实数场，也就是 $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$ 的条件就转化为 $u_{-\mathbf{k},s} = u_{\mathbf{k},s}^*$ 。也就是说 $u_{\mathbf{k},s}$  可以看成是一个实数场 $u_s(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换。

## 第一种方案：库仑规范

这样， $u_s$ 的拉氏量就和质量为零的实标量场的拉氏量完全一样了。我们可以直接写出

$$u_{\mathbf{k},s} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s}^\dagger}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}}$$

。

最终进行反傅立叶变换，得到 $\hat{\mathbf{A}}$ 的解为：

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

其中 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$ ， $\mathbf{n}_1$ ， $\mathbf{n}_2$ ， $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 是构成正交右手系的单位矢量，并如前所述有约定 $\mathbf{e}_{-\mathbf{k},s} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}^*$ 。

# 第一种方案：库仑规范

上述推导中，我们顺便证明了U(1)规范场的粒子（例如光子）的质量为零，自旋为1。



## 第二种方案：重矢量场 - 课堂互动

我们尝试在拉氏密度里加个质量项然后让质量趋向于 $0^+$ ，看看会得到什么结果：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu$$

对 $m > 0$ ,

- ▶ 证明 $A^\mu$ 场的Euler-Lagrange方程为： $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$
- ▶ 证明洛伦兹规范条件对重矢量场自动成立： $\partial_\nu A^\nu = 0$
- ▶ 证明 $A^\nu$ 满足Klein-Gordon方程： $(\partial^2 + m^2)A^\nu = 0$
- ▶ 证明 $(-\nabla^2 + m^2)A^0 = \nabla \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$

## 课堂互动

1. 证明可以把重矢量场的拉氏密度写成:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( |\nabla A^0|^2 + |\dot{\mathbf{A}}|^2 + 2\nabla A^0 \cdot \dot{\mathbf{A}} \right) - \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \frac{1}{2} m^2 [(A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2]$$

2. 仍然按照我们之前的方法, 在固定时间把 $A^0$ 和 $\mathbf{A}$ 都进行傅立叶变换, 利用 $A^0 = \frac{i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{A}}}{\omega^2}$  (其中 $\omega^2 \equiv m^2 + \mathbf{k}^2$ ), 证明可以把 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ 对拉氏量的贡献写成:

$$\frac{L_{\mathbf{k}}}{d^3\mathbf{k}} = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{A}}|^2 - \frac{1}{2} m^2 |\mathbf{A}|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{k} \times \mathbf{A}|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{A}}|^2}{2\omega^2}$$

## 课堂互动

证明重矢量场 $\mathbf{A}$ 的解为:

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{s=-1,0,1} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

其中 $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$ ;  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},0} = \frac{\omega}{m}\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 。这里的 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 是构成正交右手系的单位矢量, 并约定 $\mathbf{e}_{-\mathbf{k},s} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}^*$ 。

讨论: 在重矢量场的解中令 $m \rightarrow 0$ 是否给出 $U(1)$ 规范场的解?