

# 量子场论 I

## 脑洞大开作业参考解答

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# 第1题 二维空间的Casimir力

假设“脑洞大开世界”是2维空间加1维时间的平直时空，时空度量元为

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$$

在这个世界里的“脑洞大开人”发现真空中的相距为 $d$ 的很长的（长度 $\gg d$ ）两根平行金属线之间有大小为 $F$ 的相互作用力，他们认为这是两条金属线之间的真空能的改变引起的作用力，并把这种力称为Casimir力。现在问，当把金属线之间的距离变为 $d/2$ ，Casimir力变为多大？

解答：当 $L \rightarrow \infty$ 时，问题中唯一的有量纲量为 $d$ 。自然单位制下，单位长度受力的量纲为质量三次方，故正比于距离的-3次方。所以距离减半时，Casimir力变为8倍。

## 第2题 只有两个自由度的“量子场”



如图，在一个长度为 $\ell$ ，质量为 $m$ 的理想刚性单摆下再悬挂一个相同的单摆。节点处都认为可以无阻力自由在所示的平面内转动。本地重力常数为 $g$ 。试求该系统的量子零点能。

解答：仅考虑小幅振动。取两个质点的横向位移分别为 $x_1, x_2$ 。则垂直位移分别为 $\frac{x_1^2}{2\ell}$ 和 $\frac{x_1^2}{2\ell} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2\ell}$ ，系统的拉氏量为

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2\ell} [2x_1^2 + (x_2 - x_1)^2] = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} m \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x}$$

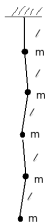
其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega^2 = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

假设 $\Omega^2$ 的本征值为 $\omega_1^2$ 和 $\omega_2^2$ ，则 $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{Tr}(\Omega^2) = 4\frac{g}{\ell}$ ， $\omega_1^2 \omega_2^2 = \det(\Omega^2) = 2\frac{g^2}{\ell^2}$ 。所

$$\text{以真空能 } E_{\text{vac}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\sqrt{\omega_1^2 \omega_2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{(4 + 2\sqrt{2}) \frac{g}{\ell}}$$

### 第3题 奇怪的一维量子场



把上题推广到  $N$  个长度为  $\ell$ ，质量为  $m$  的理想刚性单摆首位连接挂起来(如左图给出了一个  $N = 5$  的例子)，所有的单摆都可以无摩擦在所示的平面内转动。记系统的总量子零点能为  $E_N$ 。当  $N \rightarrow \infty$  时， $E_N/N^{3/2}$  趋向于一个常数，试计算这个常数（用  $\ell$ ,  $g$ ,  $m$  来表示）。

解答：如上题一样设  $N$  个质点的横向位移分别为  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 。把拉氏量写为

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} m \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \Omega^2 = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2N-1 & -(N-1) & & & \\ -(N-1) & 2N-3 & -(N-2) & & \\ & -(N-2) & 2N-5 & -(N-3) & \\ & & & \ddots & -2 & 3 & -1 \\ & & & & -1 & 1 & \end{pmatrix}.$$

## 第3题解答续

于是问题转化为求解 $\Omega^2$ 的本征值 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ 。

我们先忘掉原问题，考虑一个相对简单的矩阵的本征值问题，对 $n \in \mathbb{Z}$ ，定义一个 $n \times n$ 的矩阵

$$S_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

取变量 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$ ，则 $S_n$ 对应的二次型耦合谐振子系统的势能可以写为

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T S_n \mathbf{x} = \frac{1}{2} \left[ (x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_{n-2} - x_{n-1})^2 \right]$$

为了使上式有周期对称性，我们给上述势能加上一项 $\frac{1}{2}(x_0 - x_{n-1})^2$ ，并（不加证明地，厚颜无耻地）认为当 $n \rightarrow \infty$ 时这样加一项造成的影响可以忽略。

$$\mathbf{x}^T S_n \mathbf{x} \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2$$

其中我们约定符号 $x_n = x_0$ 。

## 第3题解答续

现在我们取离散傅立叶变换

$$y_i \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-\frac{2\pi i j}{n} i}$$

其逆变换为

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{\frac{2\pi i j}{n} i}$$

上式的证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{\frac{2\pi i j}{n} i} &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi(i-k)j}{n} i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi(i-k)j}{n} i} + \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} x_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi(i-k)j}{n} i} \\ &= \frac{1}{n} x_i \sum_{j=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} x_k \frac{1 - e^{\frac{2\pi(i-k)n}{n} i}}{1 - e^{\frac{2\pi(i-k)}{n} i}} \\ &= x_i + 0 \\ &= x_i \end{aligned}$$

不难验证, 上述逆变换公式对  $i = n$  的情况也会正确地给出  $x_n = x_0$ , 或更一般地可以拓宽下标的范

围:  $x_{n+i} = x_i$ ,  $y_{n+i} = y_i$ 。

## 第3题解答续

此外，我们还可以验证离散傅立叶变换是保持矢量模不变的幺正变换，即

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y_i|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2$$

上式证明如下:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i^* x_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j^* e^{-\frac{2\pi i j}{n} i} \sum_{k=0}^{n-1} y_k e^{\frac{2\pi i k}{n} i} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} y_j^* y_k \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i (k-j)}{n} i} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} y_j^* y_k \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} |y_j|^2 \end{aligned}$$

## 第3题解答续

利用

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{\frac{2\pi i j}{n} i}$$

即得到

$$x_i - x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(1 - e^{\frac{2\pi i j}{n} i}\right) e^{\frac{2\pi i j}{n} i}$$

定义  $z_j \equiv y_j \left(1 - e^{\frac{2\pi i j}{n} i}\right)$ , 则由上式可以看出  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  是  $x_0 - x_1, x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n$  的离散傅立叶变换。根据离散傅立叶变换保持模不变的性质, 即有

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |z_i|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} 4 \sin^2 \frac{\pi i}{n} |y_i|^2$$

也就是说, 原先势能为  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{S}_n \mathbf{x}$  的耦合谐振子, 经过离散傅立叶变换可以对角化为频率分别为  $2 \sin \frac{\pi i}{n}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) 的独立谐振子 (模仿课上对实量场进行对角化的最后一步, 把  $y$  进行实, 虚步分离, 可以化为标准的谐振子形式)。所以我们得到  $S_n$  的频谱为  $\omega_i = 2 \sin \frac{\pi i}{n}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ )。其每个自由度的平均频率在  $n \rightarrow \infty$  的极限下为

$$\bar{\omega} = \frac{\int_0^\pi 2 \sin x \, dx}{\int_0^\pi dx} = \frac{4}{\pi}$$



## 第3题解答续

最后我们回到原问题，当  $N$  很大时，我们取  $N = np$  并令  $p \gg n \gg 1$ 。  
我们再次（不加证明地，厚颜无耻地）把  $\frac{\ell}{g}\Omega^2$  “近似”为

$$\frac{\ell}{g}\Omega^2 \approx \begin{pmatrix} pnS_n & & & & \\ & (p-1)nS_n & & & \\ & & (p-2)nS_n & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 2nS_n & \\ & & & & & nS_n \end{pmatrix}.$$

根据前面对  $S_n$  的讨论可知， $knS_n$  的平均本征频率为  $\frac{4}{\pi}\sqrt{kn}$ ，即本征频率之和为  $\frac{4n^{3/2}}{\pi}\sqrt{k}$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ )。所以  $\frac{\ell}{g}\Omega^2$  的本征频率之和为  $\frac{4n^{3/2}}{\pi} \sum_{k=1}^p \sqrt{k} \approx \frac{4n^{3/2}}{\pi} \int_0^p \sqrt{k} dk = \frac{8n^{3/2}}{3\pi} p^{3/2} = \frac{8}{3\pi} N^{3/2}$   
即  $N \rightarrow \infty$  时，

$$E_N/N^{3/2} \rightarrow \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

## 第4题 环上的量子场

假设“脑洞大开世界”为一个一维圆环加上一维时间，时空度量元为

$$ds^2 = dt^2 - R^2 d\theta^2$$

其中 $R > 0$ 为固定常数， $(t, \theta)$ 为时空坐标。在这个时空里的质量为 $m$ 的实标量场 $\phi(t, \theta)$ 满足周期性边界条件

$$\phi(t, \theta + 2\pi) = \phi(t, \theta)$$

其自由场拉氏量为

$$L_{\text{free}} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right]$$

试把 $\phi$ 场量子化。

## 第4题解答

解答：由周期性边界条件可以把 $\phi$ 展开为

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{ik\theta}$$

且由 $\phi$ 为实数可以得到 $\phi_{-k} = \phi_k^*$ 。可以仿照课上对实标量场的量子化方法把 $\phi$ 量子化(过程略)，唯一的区别是动量 $k$ 为离散的整数值。

## 第5题 环上的量子场的散射

给上题中的场 $\phi$ 加一个自相互作用的拉氏量，

$$L = L_{\text{free}} - \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

其中 $\lambda \ll 1$ 为耦合常数。

试证明，这个场的两个粒子不可能发生散射变成和初态不同的两个粒子。

解答：设散射初态动量为 $p_1, p_2$ ，末态动量为 $p_3, p_4$ 。因为是一维的情况，由能量动量守恒即知道 $p_3, p_4$ 必须和 $p_1, p_2$ 相同。