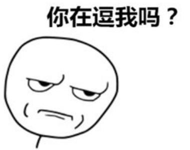
量子场论 I

第十三课 第二个Feynman图

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

关于形式解的小bug

$$|\psi\rangle_{t_2} \stackrel{?}{=} e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}_I(t)dt}|\psi\rangle_{t_1}$$



上节课我们讲到的Interaction绘景的态的形式解其实有bug。
当你把$e^{-i\int H_I dt}$展开到二阶以上时这个bug就可能被触发。

出bug的原因：在不同时刻的$\hat{H}_I$如果不对易，
则$\frac{de^{-i\int^t \hat{H}_I dt'}}{dt} \neq -i\hat{H}_I(t)e^{-i\int^t \hat{H}_I dt'}$

神奇的编时算符

我们引入编时算符$\mathcal{T}$，它作用于一串算符的乘积时把算符乘积顺序按时间从晚到早排序，而等时的算符保持乘积次序不变。例如，若$t_1 > t_2 = t_3 > t_4$，则

$$\mathcal{T}\left(\hat{A}(t_3)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_4)\hat{D}(t_1)\right) = \hat{D}(t_1)\hat{A}(t_3)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_4)$$

试证明：对任意算符$\hat{O}$均有

$$\frac{d\left(\mathcal{T}\left(e^{\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'}\right)\right)}{dt} = \hat{O}(t)\left(\mathcal{T}\left(e^{\int_{t_0}^{t}\hat{O}(t')dt'}\right)\right)$$

神奇的编时超算符

在相互作用表象，

$$|\psi\rangle_{t_2} = \mathcal{T}\left(e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}_I(t)dt}\right)|\psi\rangle_{t_1}$$

（这次真的没bug了）

三次项的相互作用

考虑拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

的实标量场。其中$\lambda > 0$和g都是耦合常数。我们仅考虑它们很小($\lambda \ll 1,\ g \ll m$)的情况。
我们取如下的相互作用表象：

$$H_0 = H_{\mathrm{free}},\ \ H_I = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{g}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)$$

其中$H_{\mathrm{free}} = \int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2)$是自由场的Hamilton量。

继续上节课的热身问题

上节课的热身问题是:

求两个动量为$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$的粒子发生散射，变为两个动量为$\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$的粒子的概率幅。

$$\mathcal{M}T/V\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

如上节课末尾所讲，我们已经把$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)d^4k$引入了左边的定义式。

我们仍假设这四个动量$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$互不相同，即初态和末态粒子都是可以区分的。

一阶微扰展开

我们做微扰展开，对带λ的项我们仍展开到一次，对带g的项我们要展开到二次。这是因为单个$g\phi^3$最多只能提供三个产生湮灭算符的乘积，无法湮灭两个粒子并产生两个新粒子。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I dt}\right) &\approx 1 - i\int d^4x\,\frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3 - i\int d^4x\,\frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}(x)^4\\ &\quad -\frac{1}{2}\mathcal{T}\left(\left(\int d^4x\,\frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3\right)\left(\int d^4y\,\frac{g}{3!}\hat{\phi}(y)^3\right)\right)\end{aligned}$$

第一项和第二项均没有贡献，第三项的贡献我们上节课算了。我们这节课来计算第四项的贡献:

$$-\frac{g^2}{2(3!)^2}\int d^4x\int d^4y\,\langle \mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4|\hat{\phi}(x)^3\hat{\phi}(y)^3|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle$$