量子场论 I

第十一课 旋量场和自由场总结

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

进一步讨论$u_{\mathbf{k},s}$和$\upsilon_{\mathbf{k},s}$的性质

我们来回忆下Dirac方程在傅立叶空间的正频解和负频解$u_{\mathbf{k},s}e^{-i\omega t}$, $\upsilon_{\mathbf{k},s}e^{i\omega t}$ (这里$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, 自旋$s = \pm 1/2$)。

延续上两节课的记号，沿$\mathbf{k}$方向的自旋本征态记为$\zeta_{\mathbf{k},s}$，并定义$\theta_{\mathbf{k},s} = 2s \tan^{-1} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega+m}$。我们已经解出了：

$$u_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \cos\theta_{\mathbf{k},s} \\ \zeta_{\mathbf{k},s} \sin\theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}, \quad \upsilon_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \sin\theta_{\mathbf{k},s} \\ -\zeta_{\mathbf{k},s} \cos\theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

记四维动量$k = (\omega, \mathbf{k})$，证明

- $\zeta_{-\mathbf{k},s} = \zeta_{\mathbf{k},-s}$, $\theta_{-\mathbf{k},s} = \theta_{\mathbf{k},s}$, $\theta_{\mathbf{k},-s} = -\theta_{\mathbf{k},s}$
- 利用u, υ的显式表达式，直接证明$\bar{u}_{\mathbf{k},s}\upsilon_{-\mathbf{k},s'} = 0$, $\bar{\upsilon}_{-\mathbf{k},s}u_{\mathbf{k},s'} = 0$

进一步讨论$u_{\mathbf{k},s}$和$v_{\mathbf{k},s}$的性质

事实上，对$\bar{u}$和v以及$\bar{v}$和u的正交性，存在更优美的证明方法：

- 证明$\gamma^0 \not{k} = \not{k}^\dagger \gamma^0$
- 证明$\not{k}$的本征值为m的两个本征态为$u_{\mathbf{k},s}$ $(s = \pm 1/2)$。
- 证明$\not{k}$的本征值为$-m$的两个本征态为$v_{-\mathbf{k},s}$ $(s = \pm 1/2)$。
- 利用前三题结论证明:若$m > 0$,则$\bar{u}_{\mathbf{k},s} v_{-\mathbf{k},s'} = 0$, $\bar{v}_{-\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = 0$

进一步讨论$u_{\mathbf{k},s}$和$\upsilon_{\mathbf{k},s}$的性质

前两节课里我们还得到过

$$\bar{u}_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = \frac{m}{\omega}\delta_{ss'}, \quad \bar{\upsilon}_{-\mathbf{k},s}\upsilon_{-\mathbf{k},s'} = -\frac{m}{\omega}\delta_{ss'}$$

(注意我们已经代入了$\cos 2\theta_{\mathbf{k},s} = m/\omega$)。

若$m > 0$，证明$u_{\mathbf{k},s}$，$\upsilon_{-\mathbf{k},s}$ ($s = \pm 1/2$)这四个旋量线性独立，并由此证明

$$\sum_s u_{\mathbf{k},s}\bar{u}_{\mathbf{k},s} = \frac{\not{k} + m}{2\omega}$$

$$\sum_s \upsilon_{-\mathbf{k},s}\bar{\upsilon}_{-\mathbf{k},s} = \frac{\not{k} - m}{2\omega}$$

一些题外话

事实上，我们前面已经提过的正反粒子投影算符：

$$P_+ \equiv \frac{\not{k} + m}{2m} = \frac{\omega}{m} \sum_s u_{\mathbf{k},s} \bar{u}_{\mathbf{k},s}$$

$$P_- \equiv \frac{-\not{k} + m}{2m} = -\frac{\omega}{m} \sum_s \upsilon_{-\mathbf{k},s} \bar{\upsilon}_{-\mathbf{k},s}$$

显然满足

$$P_+ \, u_{\mathbf{k},s} = u_{\mathbf{k},s}, \quad P_+ \, \upsilon_{-\mathbf{k},s} = 0$$

$$P_- \, u_{\mathbf{k},s} = 0, \quad P_- \, \upsilon_{-\mathbf{k},s} = \upsilon_{-\mathbf{k},s}$$

阅读教材时注意教材上的归一化不同，并且教材上的$\upsilon(\mathbf{k}, \xi)$对应这里的$\upsilon_{-\mathbf{k},s}$

再总结下我之前在干嘛……

前面的结果

$$\sum_s u_{\mathbf{k},s}\bar{u}_{\mathbf{k},s} = \frac{\not{k}+m}{2\omega}$$

$$\sum_s v_{-\mathbf{k},s}\bar{v}_{-\mathbf{k},s} = \frac{\not{k}-m}{2\omega}$$

两边乘以γ^0还能得到

$$\sum_s u_{\mathbf{k},s}u^\dagger_{\mathbf{k},s} = \frac{(\not{k}+m)\gamma^0}{2\omega}$$

$$\sum_s v_{-\mathbf{k},s}v^\dagger_{-\mathbf{k},s} = \frac{(\not{k}-m)\gamma^0}{2\omega}$$

这几个等式为我们计算旋量场的反对易算子做好了准备。

旋量场的实空间表达式

利用上节课得到的旋量场的傅立叶空间解：

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}\sum_s\left(u_{\mathbf{k},s}e^{-i\omega t}\hat{a}_{\mathbf{k},s}|_{t=0}+v_{\mathbf{k},s}e^{i\omega t}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}|_{t=0}\right)$$

若不致引起混淆一般省略不写$|_{t=0}$标记。进行傅立叶反变换：

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{d^3\mathbf{k}}\sum_s\left(u_{\mathbf{k},s}e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\hat{a}_{\mathbf{k},s}+v_{\mathbf{k},s}e^{i(\omega t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\right)$$

把第二项中的$\mathbf{k}$换成$-\mathbf{k}$（因为对所有$\mathbf{k}$求和所以这样替换是允许的），并写成四维形式：

$$\hat{\psi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{d^3\mathbf{k}}\sum_s\left(u_{\mathbf{k},s}e^{-ik_\mu x^\mu}\hat{a}_{\mathbf{k},s}+v_{-\mathbf{k},s}e^{ik_\mu x^\mu}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k},s}\right)$$

这里我们按通常习惯规定了$k^\mu=(\omega,\mathbf{k})$。

旋量场的反对易

由于产生算符互相反对易，湮灭算符互相反对易。而不同自由度的产生或湮灭算符也互相反对易。显然有

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(x')\} = \{\hat{\psi}^\dagger_\alpha(x), \hat{\psi}^\dagger_\beta(x')\} = 0$$

时空任意两点的ψ和$\psi^\dagger$算符的反对易子为

$$\begin{aligned}
& \{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}^\dagger_\beta(x')\} \\
= \quad & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sum_s \left((u_{\mathbf{k},s})_\alpha (u^\dagger_{\mathbf{k},s})_\beta e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (\upsilon_{-\mathbf{k},s})_\alpha (\upsilon^\dagger_{-\mathbf{k},s})_\beta e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right) \\
= \quad & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left((\not{k} + m)\gamma^0 e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (\not{k} - m)\gamma^0 e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right)_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

旋量场的的反对易

如果上式中取$t' = t$，则

$$
\begin{aligned}
& \{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(\mathbf{x}', t)\} \\
= & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left((\not{k} + m)\gamma^0 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + (\not{k} - m)\gamma^0 e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right)_{\alpha\beta} \\
= & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left((\omega\gamma^0 - k^j\gamma^j + m)\gamma^0 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + (\omega\gamma^0 + k^j\gamma^j - m)\gamma^0 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right)_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

因为是对全空间积分，在上面第二项中我们做了$\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$的替换。再利用第三课末尾介绍的积分公式，我们得到

$$
\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right)_{\alpha\beta} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\alpha\beta}
$$

旋量场的反对易

现在我们考虑ψ和$\bar{\psi}$的反对易：

$$
\begin{aligned}
& \{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\bar{\psi}}_\beta(x')\} \\
= \quad & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sum_s \left((u_{\mathbf{k},s})_\alpha (\bar{u}_{\mathbf{k},s})_\beta e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (v_{-\mathbf{k},s})_\alpha (\bar{v}_{-\mathbf{k},s})_\beta e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right) \\
= \quad & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left((\not{k} + m) e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + (\not{k} - m) e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right)_{\alpha\beta} \\
= \quad & (i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega} \left(e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} - e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right)
\end{aligned}
$$

是不是有些眼熟？请和之前作业里推导过的标量场的两点对易函数比较。

一些容易混淆的符号的澄清

$|n\rangle$符号的滥用：

- 上节课我们讲到对空穴数算符的本征态$|n\rangle$，$b^\dagger|n\rangle \propto |n-1\rangle$，$b|n\rangle \propto |n+1\rangle$或者为零。注意不要把空穴数算符的本征态$|n\rangle$和粒子数算符的本征态$|n\rangle$混淆。"空穴数本征态"只是我们逻辑演绎过程中的一个中间产物，今后我们只会讨论粒子数算符$\hat{b}^\dagger\hat{b}$的本征态。对粒子数算符的本征态$|n\rangle$，$b^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$或者为零，$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$。
- 同样，不要把不同自由度的粒子数算符的本征态$|n\rangle$混为一谈。

一些容易混淆的符号的澄清

k符号的滥用：

- 在推导 Dirac方程的一般解时我们允许了$k_0 = \pm\omega$的数学解，这只是数学推导过程，不代表我们物理上允许$k_0 = -\omega$的四维动量存在。在其他不作特殊说明的情况下，我们写四维动量k时总默认$k_0 = \omega$。

自由场总结:综述

迄今为止，我们把实标量场，复标量场，矢量场，和旋量场进行了量子化（写成了一堆产生算符和湮灭算符的和）。最核心的内容是

- 场的量子化的最后结果
- 谐振子的产生湮灭算符的性质
- 自旋为1/2的费米子的产生湮灭算符的性质。

这些将成为我们将来计算散射振幅的核心工具。

自由场总结:实标量场的量子化结果

傅立叶空间：

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

实空间：

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

注意：傅立叶空间表达式中算符 $\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger}$均为任意t时刻算符（自带了$e^{\mp i\omega t}$的因子）。实空间表达式中算符$\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger}$为$t=0$时刻算符，因子$e^{\mp i\omega t}$则放到了$e^{\mp ik_\mu x^\mu}$中。

自由场总结: 复标量场的量子化结果

傅立叶空间:

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega\, d^3\mathbf{k}}}$$

实空间:

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

自由场总结:$U(1)$规范场（零质量矢量场）量子化最后结果

傅立叶空间:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=\pm1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \right)$$

。

实空间:

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{s=\pm1} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}s} e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

自由场总结:旋量场量子化最后结果

傅立叶空间:

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{s=\pm 1/2} \frac{u_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \upsilon_{\mathbf{k},s}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

实空间:

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{d^3\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1/2} \left(u_{\mathbf{k},s} e^{-ik_\mu x^\mu} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \upsilon_{-\mathbf{k},s} e^{ik_\mu x^\mu} \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \right)$$

自由场总结:玻色子产生湮灭算符的性质

自旋为整数的玻色子：产生算符和产生算符总是对易。湮灭算符和湮灭算符总是对易。不同自由度（例如对应不同**k**或者不同自旋s)的任何两个产生或者湮灭算符对易。
同一自由度

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

粒子数算符$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$存在且仅存在本征值为任意非负整数$n$的本征态$|n\rangle$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

自由场总结:费米子产生湮灭算符的性质

自旋为半整数的费米子：产生算符和产生算符总是反对易。湮灭算符和湮灭算符总是反对易。不同自由度（例如对应不同$\mathbf{k}$或者不同自旋s)的任何两个产生或者湮灭算符反对易。
同一自由度

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1$$

粒子数算符$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$存在且仅存在本征值$n = 0, 1$的本征态$|n\rangle$

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \ \hat{a}|1\rangle = |0\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \ \hat{a}^\dagger|1\rangle = 0$$

自由场总结:其他零星知识

其它比较重要的知识有：

- 张量的写法和运用，度规和指标升降。
- 自然单位制，量纲分析。
- 经典作用量原理和Euler-Lagrange方程
- Noether定理的推导和运用。
- 实空间的二次项的积分等于傅立叶空间的同样二次项的积分（这是自由场理论的数学根基）以及数学公式$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k})$
- γ矩阵的基本性质。旋量变换矩阵Λ的定义和性质。
- Dirac方程经典解u和v的性质