量子场论 I

第十课 旋量场的量子化

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

Dirac方程的解的性质

我们上节课得到了Dirac方程的经典解，如果定义

$$\theta_{\mathbf{k},s} \equiv 2s \tan^{-1} \frac{\omega - m}{|\mathbf{k}|} = 2s \tan^{-1} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega + m}$$

$$u_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta_{\mathbf{k},s} \\ \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

$$v_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathbf{k},s} \sin \theta_{\mathbf{k},s} \\ -\zeta_{\mathbf{k},s} \cos \theta_{\mathbf{k},s} \end{pmatrix}$$

容易验证$u_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t}$和$v_{\mathbf{k},s} e^{i\omega t}$就是我们上节课推导的Dirac方程的对应于$k_0 = \pm\omega$的解。

Dirac方程的解的性质

利用自旋本征态的正交归一条件:$\zeta^\dagger_{\mathbf{k},s}\zeta_{\mathbf{k},s'} = \delta_{ss'}$，可以证明:

$$
\begin{aligned}
u^\dagger_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} &= v^\dagger_{\mathbf{k},s} v_{\mathbf{k},s'} = \delta_{ss'} \\
u^\dagger_{\mathbf{k},s} v_{\mathbf{k},s'} &= v^\dagger_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = 0 \\
\bar{u}_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} &= \delta_{ss'} \cos 2\theta_{\mathbf{k},s} \\
\bar{v}_{\mathbf{k},s} v_{\mathbf{k},s'} &= -\delta_{ss'} \cos 2\theta_{\mathbf{k},s} \\
\bar{u}_{\mathbf{k},s} v_{\mathbf{k},s'} &= \bar{v}_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s'} = \delta_{ss'} \sin 2\theta_{\mathbf{k},s}
\end{aligned}
$$

注意根据$\theta_{\mathbf{k},s}$的定义可以推出

$$\cos 2\theta_{\mathbf{k},s} = m/\omega, \;\; \sin 2\theta_{\mathbf{k},s} = |\mathbf{k}|/\omega$$

广义动量和Hamilton密度

对应于ψ的广义动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\psi})} = i\psi^\dagger$$

于是

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = -\bar{\psi}(i\gamma^j\partial_j - m)\psi = \pi\gamma^0(-\gamma^j\partial_j - im)\psi$$

显然，满足Dirac方程的解ψ使得$\mathcal{L} = 0$。从而

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} = i\psi^\dagger\dot{\psi}$$

其他守恒量

利用时空平移对称性，可以求出四维动量密度为

$$P^\mu = i\psi^\dagger \partial^\mu \psi$$

显然$P^0 = \mathcal{H}$.
再利用规范对称性($\psi \to \psi e^{-iq\epsilon}$)可以得到守恒流为

$$j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

守恒荷密度

$$j^0 = q\psi^\dagger\psi$$

旋量场的量子化

我们先把傅立叶空间的一般解写为:

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \sum_s \frac{u_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} \hat{a}_{\mathbf{k},s}|_{t=0} + \upsilon_{\mathbf{k},s} e^{i\omega t} \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}|_{t=0}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

其中$\hat{a}_{\mathbf{k},s}$和$\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}$为$t=0$时刻的待定算符。 我们也可以把时间演化因子吸收到算符里

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \sum_s \frac{u_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \upsilon_{\mathbf{k},s} \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

任意时刻的$\hat{a}_{\mathbf{k},s}$和$\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}$由下面的微分方程决定:

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},s}}{dt} = -i\omega \hat{a}_{\mathbf{k},s}, \quad \frac{d\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}}{dt} = i\omega \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}$$

旋量场的量子化

从$\hat{\psi}$的表达式可以直接得到

$$\hat{\psi}^{\dagger}_{\mathbf{k}} = \sum_{s} \frac{u^{\dagger}_{\mathbf{k},s}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} + v^{\dagger}_{\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

$$i\dot{\hat{\psi}}_{\mathbf{k}} = \sum_{s} \omega \frac{u_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s} - v_{\mathbf{k},s}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}}{\sqrt{d^3\mathbf{k}}}$$

迄今为止，我们对算符$\hat{a}$和$\hat{b}$只知道它们的时间演化规律。下面我们来尝试了解它们更多的性质。

课堂讨论

利用u,v的正交归一关系，证明Hamilton量为

$$\hat{H}_{\mathbf{k},s} = \omega \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

三维动量为

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},s} = \mathbf{k} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

守恒荷为

$$\hat{Q}_{\mathbf{k},s} = q \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{b}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

课堂讨论

假设已知$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}] = [\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}] = 0$，证明

- “粒子数算符” $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}$的本征值是非负实数
- 若把$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}$本征值为$n$的本征态记作$|n\rangle$，则$\hat{a}_{\mathbf{k},s}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}$的本征值谱是连续的正整数0, 1, 2, . . .。
- 若存在$|n+1\rangle$，则$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$。若不存在$|n+1\rangle$，则$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}|n\rangle = 0$

提示：利用$\hat{a}_{\mathbf{k},s}$的时间演化性质和海森堡方程。

课堂讨论

假设已知$[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}] = [\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}] = 0$，证明

- “空穴数算符” $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}$的本征值是非负实数
- 若把$\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}$本征值为$n$的本征态记作$|n\rangle$，则$\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- $\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}$的本征值谱是连续的正整数$0, 1, 2, \ldots$。
- 若存在$|n+1\rangle$，则$\hat{b}_{-\mathbf{k},s}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$。若不存在$|n+1\rangle$，则$\hat{b}_{-\mathbf{k},s}|n\rangle = 0$

提示：利用$\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k},s}$的时间演化性质和海森堡方程。

旋量场的量子化

下一步怎么办?

旋量场的量子化

当你束手无策时，就路径积分吧。

旋量场的量子化

固定**k**的单个Fourier mode的拉氏量为

$$L_{\mathbf{k}} = d^3\mathbf{k}\left[i\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi\right]$$

设概率幅为$w(\psi;t)$，取足够小的时间Δt使得ψ的变化为均匀变化$\dot{\psi}=v$。则按照量子作用量原理，$t+\Delta t$时刻的概率振幅可写成

$$w(\psi, t+\Delta t) = \int \sqrt{|g_v|}dv\, w(\psi - v\Delta t, t)e^{id^3\mathbf{k}\,[i\psi^\dagger v+\ldots]\Delta t}$$

我们意识到两个问题，一是我们并不知道旋量空间的度规是否是平凡的，从而也不知道怎么写它的行列式$|g_v|$；二是现在指数里是积分变量v的一次式，这样的积分在全复平面都是发散的，解析延拓的办法似乎要失灵了。

旋量场的量子化

要使指数上为线性函数的积分收敛域为不可数集，积分变量必须是封闭代数域的数。旋量场的路径积分由Grassmann代数描述。

旋量场的量子化

人话版本： 对固定$\mathbf{k}$的a粒子和b粒子均只存在有限个态$|0\rangle$, $|1\rangle$, …, $|n_{\text{max}}\rangle$。

这不但是路径积分存在收敛域的必要条件，还顺便使得Hamilton算符的本征值有了下限。

空穴解释

对Hamilton的形式进行物理解释：把$\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}$看成能量为$\omega$的粒子的"空穴数"。即最多有$n_{\max}$个空穴，空穴都空为真空（能量最低）。如果进一步要求$\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s}$是普通的粒子数算符。则有

$$\hat{b}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} + \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}\hat{b}_{-\mathbf{k},s} = n_{\max}$$

由此请证明$n_{\max} = 1$。并进一步证明下列反对易关系：

$$\{\hat{b}_{-\mathbf{k},s}, \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}\} = 1$$

$$\{\hat{b}_{-\mathbf{k},s}, \hat{b}_{-\mathbf{k},s}\} = \{\hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}, \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s}\} = 0$$

假设理论对于正反粒子是对称的，则对a粒子而言同样有同样的反对易关系。

守恒量

利用反对易关系，我们重新写出守恒量的算符表达式：
Hamilton量为

$$\hat{H}_{\mathbf{k},s} = \omega \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s} - 1 \right)$$

三维动量为

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k},s} = \mathbf{k} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s} + 1 \right)$$

守恒荷为

$$\hat{Q}_{\mathbf{k},s} = q \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{b}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \hat{b}_{-\mathbf{k},s} + 1 \right)$$

不同自由度的产生湮灭算符到底该对易还是反对易?

因为可观测量都是产生湮灭算符的偶数次，所以这个问题不重要。我们在旋量理论里人为地规定它们反对易。当然，这样可观测量的算符还是对易的。