量子场论 I

第三次课后作业参考答案

如发现参考答案有错误请不吝告知（微信zhiqihuang或邮箱huangzhq25@sysu.edu.cn)

课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI

先乱入一下傅立叶变换的一些符号（据说你们经常搞错...）

傅立叶变换

$$\partial_\mu \to -ik_\mu$$

$$\partial^\mu \to -ik^\mu$$

$$\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2, k^3) = (-k_1, -k_2, -k_3)$$

所有加粗的三维矢量字母都是上标，例如**A**, **x**等。而梯度符号则是

$$\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

因为默认上标的**x**跑到了分母，所以∇是默认下标，所以有：

$$\nabla \to -i(k_1, k_2, k_3) = i(k^1, k^2, k^3) = i\mathbf{k}$$

第1题：题目和思路

题目：证明自由$U(1)$规范场A^μ在库仑规范$A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$下的Hamilton密度为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

并证明在傅立叶空间Hamilton量可以写成

$$H = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{k} \times \mathbf{A}|^2\right]$$

思路：老套路不需要思考了......

第1题解答

在库仑规范下，

$$F_0^{\ i} = \partial_0 A^i,\ \ F_i^{\ 0} = \partial^0 A_i = -\partial_0 A^i$$

$$F_{21} = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 = -\partial_2 A^1 + \partial_1 A^2 = (\nabla \times \mathbf{A})_3$$

同理有$F_{13} = (\nabla \times \mathbf{A})_2$, $F_{32} = (\nabla \times \mathbf{A})_1$，都代入$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$就得到

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{A}}|^2 - \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

于是A^i对应的广义动量密度$\pi_i = \dot{A}^i$，然后就有

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{A}}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

第1题解答（续）

H等于$\mathcal{H}$的全空间积分：

$$H = \int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{2}\left[|\dot{\mathbf{A}}|^2 + |\nabla\times\mathbf{A}|^2\right]$$

然后利用实空间二次项的积分等于傅立叶空间的同样二次项的积分，即得到

$$H = \int d^3\mathbf{k}\left[\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{A}}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{k}\times\mathbf{A}|^2\right]$$

第2题: 题目和思路

题目：利用上题的Hamilton量的表达式以及我们在课上得到的$\hat{\mathbf{A}}$在傅立叶空间的解：

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

证明Hamilton量的算符表达式为

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} (\hat{N}_{\mathbf{k},s} + 1/2)|\mathbf{k}|$$

其中 $\hat{N}_{\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}$是动量为$\mathbf{k}$，自旋为$s$的粒子数算符。

思路：直接代入计算，利用产生湮灭算符的对易关系。

第2题解答

由

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

(抱歉一开始出题时这个式子打错了，由此引起的问题均不扣分） 可得到

$$\hat{\mathbf{A}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

再利用$d\hat{a}/dt = -i|\mathbf{k}|\hat{a}$, $d\hat{a}^{\dagger}/dt = i|\mathbf{k}|\hat{a}^{\dagger}$，有

$$\frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{-i\sqrt{|\mathbf{k}|}}{\sqrt{2d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{A}}^{\dagger}}{dt} = \frac{i\sqrt{|\mathbf{k}|}}{\sqrt{2d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

第2题解答(续)

利用$\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}$ $(s=\pm 1)$的正交归一性，得到

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{2}\left|\frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt}\right|^2=\frac{d^3\mathbf{k}}{2}\frac{d\hat{\mathbf{A}}^\dagger}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt}=\frac{|\mathbf{k}|}{4}\sum_s\left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}-\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\right)\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}-\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\right)$$

再利用$\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\times\mathrm{e}_{\mathbf{k},s}$ $(s=\pm 1)$的正交归一性，得到

$$\begin{aligned}\frac{d^3\mathbf{k}}{2}|\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{A}}|^2 &= \frac{|k|^2d^3\mathbf{k}}{2}\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\times\hat{\mathbf{A}}^\dagger\right)\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\times\hat{\mathbf{A}}\right)\\ &= \frac{|\mathbf{k}|}{4}\sum_s\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}+\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\right)\left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}+\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\right)\end{aligned}$$

上面两个结果相加并对$\mathbf{k}$求和即得:

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{k},s}\frac{|\mathbf{k}|}{4}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}+\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}+\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}+\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\right)$$

第2题解答(续)

因为是对所有$\mathbf{k}$求和，可以把后面两项的$-\mathbf{k}$换成$\mathbf{k}$。这样后两项和前两项贡献相同, 就得到

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} \right)$$

再利用对易关系$\hat{a}_{\mathbf{k},s} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} = \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + 1$，即得到

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} |\mathbf{k}| \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right)$$

第3题题目和思路

题目：证明自由$U(1)$规范场A^μ在库仑规范$A^0=0, \nabla\cdot\mathbf{A}=0$下的动量

$$P^i=\int d^3\mathbf{x}\,(\partial^0\mathbf{A}\cdot\partial^i\mathbf{A})$$

是守恒量。并把它写成傅立叶空间的积分。

思路：默默祭出必杀技Noether定理

第3题解答

考虑沿第一个空间方向的空间整体（包括空间里的场）平移$x^\mu \to x^\mu + \epsilon\delta_1^\mu$， 平移后坐标为$x^\mu$的点在平移前的坐标则为$x^\mu - \epsilon\delta_1^\mu$。

$$\frac{\delta A^i}{\delta\epsilon} = -\partial_1 A^i$$

拉氏密度改变量$\delta\mathcal{L} = -\epsilon\partial_1\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu(-\delta_1^\mu\mathcal{L})$。 所以Noether定理里可以取$F^\mu = -\delta_1^\mu\mathcal{L}$。
守恒流为：

$$j^\mu = F^\mu - \frac{\delta A^i}{\delta\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^i)} = -\delta_1^\mu\mathcal{L} - \partial_1 A^i F^\mu{}_i$$

这里我们用到了课上推导过的结论$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = -F^{\mu\nu}$。 最后，$j^0$的全空间积分即为守恒量（沿第一个空间方向的动量）：

$$P_1 = \int d^3\mathbf{x}\ \left(\partial_1 A^i\partial^0 A_i\right) = \int d^3\mathbf{x}\ \left(\partial^0\mathbf{A}\cdot\partial_1\mathbf{A}\right)$$

第3题解答（续）

上式我们用到了$F^0_{\ i} = \partial^0 A_i$。 重复同样的步骤，并把$P$的指标升上去，，我们可以得到对$i = 1, 2, 3$均有

$$P^i = \int d^3\mathbf{x}\ \left(\partial^0 \mathbf{A} \cdot \partial^i \mathbf{A}\right)$$

因为这里的二次项不是对称的，在傅立叶空间有两种等价的方式来写这个积分：

$$P^i = \int d^3\mathbf{k}\,(-ik^i)\left(\partial^0\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}\right) = \int d^3\mathbf{k}\,(ik^i)\left(\mathbf{A}^\dagger \cdot \partial^0\mathbf{A}\right)$$

或更简洁地写成对称的形式：

$$\mathbf{P} = \int d^3\mathbf{k}\,\frac{i\mathbf{k}}{2}\left(\mathbf{A}^\dagger \cdot \partial^0\mathbf{A} - \partial^0\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}\right)$$

第4题题目和思路

题目：利用上题的动量P^i的表达式以及我们在课上得到的$\hat{\mathbf{A}}$在傅立叶空间的解：

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s} \right)$$

证明动量$\mathbf{P} \equiv (P^1, P^2, P^3)$的算符表达式为

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k},s}$$

其中 $\hat{N}_{\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s}$是动量为$\mathbf{k}$，自旋为$s$的粒子数算符。

思路：直接代入计算。

第4题解答

由

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s} \right)$$

(抱歉一开始出题时这个式子也打错了，由此引起的问题均不扣分） 可得到

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}^\dagger_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s} + \hat{a}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

再利用$d\hat{a}/dt = -i|\mathbf{k}|\hat{a}$, $d\hat{a}^\dagger/dt = i|\mathbf{k}|\hat{a}^\dagger$，有

$$\partial^0 \hat{\mathbf{A}} = \frac{-i\sqrt{|\mathbf{k}|}}{\sqrt{2d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s} \right)$$

$$\partial^0 \hat{\mathbf{A}}^\dagger = \frac{i\sqrt{|\mathbf{k}|}}{\sqrt{2d^3\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm 1} \mathrm{e}^\dagger_{\mathbf{k},s} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{-\mathbf{k},s} \right)$$

第4题解答(续)

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}} &= \int d^3\mathbf{k}\,\frac{i\mathbf{k}}{2}\left(\hat{\mathbf{A}}^\dagger\cdot\partial^0\hat{\mathbf{A}}-\partial^0\hat{\mathbf{A}}^\dagger\cdot\hat{\mathbf{A}}\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\left[\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}+\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\right)\left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}-\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\right)+\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}-\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\right)\left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}+\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k},s}-\hat{a}_{-\mathbf{k},s}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},s}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\hat{N}_{\mathbf{k},s}+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},s}(-\mathbf{k})\left(\hat{N}_{-\mathbf{k},s}+1\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\hat{N}_{\mathbf{k},s}+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\left(\hat{N}_{\mathbf{k},s}+1\right)\\
&= \sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\hat{N}_{\mathbf{k},s}+\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\\
&= \sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}\hat{N}_{\mathbf{k},s}
\end{aligned}
$$

注：“真空动量”$\sum_{\mathbf{k},s}\mathbf{k}$两两反向的动量抵消，总和为零。

第5题题目和思路

题目：对旋量ψ，证明$\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi$是洛仑兹变换下的标量。

思路：利用Λ矩阵的性质$\Lambda^{\dagger}=\gamma^{0}\Lambda^{-1}\gamma^{0}$。

第5题解答

设有洛仑兹变换$x^\mu \to a^\mu{}_\nu x^\nu$，对应的旋量变换矩阵为$\Lambda$矩阵。课上我们已经证明了$\Lambda^\dagger = \gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^0$(或者两边右乘$\gamma^0$得到$\Lambda^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\Lambda^{-1}$)，再者根据定义有$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\lambda\gamma^\lambda$。我们利用这两条性质以及洛仑兹变换矩阵的正交性质$a^\mu{}_\lambda a_\mu{}^\nu = \delta^\nu_\lambda$来完成证明：
$\bar\psi\partial\!\!\!/\psi$在洛仑兹变换下成为（注意洛仑兹变换的变换矩阵不依赖于坐标，偏导符号只作用到ψ上）：

$$
\begin{aligned}
& (\psi^\dagger\Lambda^\dagger\gamma^0)(\gamma^\mu\partial_\mu)(\Lambda\psi) \\
= \quad & (\psi^\dagger\gamma^0\Lambda^{-1})(\gamma^\mu a_\mu{}^\nu\partial_\nu)(\Lambda\psi) \\
= \quad & (\bar\psi\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda\Lambda^{-1}a_\mu{}^\nu\partial_\nu)(\Lambda\psi) \\
= \quad & \bar\psi a^\mu{}_\lambda\gamma^\lambda\Lambda^{-1}a_\mu{}^\nu\Lambda\partial_\nu\psi \\
= \quad & \bar\psi a^\mu{}_\lambda a_\mu{}^\nu\gamma^\lambda\partial_\nu\psi \\
= \quad & \bar\psi\delta^\nu_\lambda\gamma^\lambda\partial_\nu\psi \\
= \quad & \bar\psi\gamma^\nu\partial_\nu\psi \\
= \quad & \bar\psi\partial\!\!\!/\psi
\end{aligned}
$$