

# 量子场论 I

## 第十七课 量子电动力学(QED)计算技巧

课件下载 [https://github.com/zqhuang/SYSU\\_QFTI](https://github.com/zqhuang/SYSU_QFTI)

# 矩阵的迹

先来回忆矩阵的迹的一些基本性质。

- ▶ 迹运算是线性的:  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$
- ▶ 迹运算里的矩阵乘积可以轮转次序, 例  
如  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ,  $\text{Tr}(ABCD) = \text{Tr}(CDAB) = \text{Tr}(BCDA)$  等
- ▶ 相似变换保持迹不变:  $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$
- ▶ 矩阵的迹是它所有本征值之和。
- ▶ 正定矩阵的行列式的对数等于该矩阵的对数的迹:  $\ln(\det A) = \text{Tr}(\ln A)$

QED的大量计算技巧就是围绕矩阵的迹展开的。例如, 由于  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu)$ , 所以

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu} \text{Tr}(I_{4 \times 4}) = 4g^{\mu\nu}$$

## $\gamma$ 矩阵零迹定理

如果在若干个 $\gamma$ 矩阵(允许包括 $\gamma^5$ )的乘积里排除掉某个 $\gamma^\nu$  ( $\nu$ 允许为0, 1, 2, 3, 5中任选定的一个) 后还剩下奇数个 $\gamma$ 矩阵因子, 则原乘积的迹为零。

证明: 设 $\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}$ 中排除掉所有 $\gamma^\nu$ 后还剩下奇数个 $\gamma$ 矩阵, 则因这些剩下的 $\gamma$ 矩阵都与 $\gamma^\nu$ 反对易, 所以把 $\gamma^\nu$ 从右边换到左边总共产生了奇数次 $-1$ 因子。即

$$\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}$$

右边同乘以 $(\gamma^\nu)^{-1}$  得到

$$\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n} = -\gamma^\nu\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}(\gamma^\nu)^{-1}$$

两边取迹, 然后利用相似变换下矩阵的迹不变, 有

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}) = -\text{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n})$$

即

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}) = 0$$

# $\gamma$ 矩阵零迹定理

零迹定理的一些特例:

- ▶ 一个 $\gamma$ 矩阵的迹为零
- ▶ 两个不同 $\gamma$ 矩阵的乘积的迹为零
- ▶ 三个任意 $\gamma$ 矩阵的乘积的迹为零
- ▶ 任意奇数个不含 $\gamma^5$ 的 $\gamma$ 矩阵的乘积的迹为零
- ▶ 任意奇数个Feynman符号的乘积的迹为零

# Feynman符号的迹的展开定理

设有  $n$  个矢量  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,

$$\text{Tr} \left( \prod_{i=1}^n \not{u}_i \right) = \sum_{k=2}^n (-1)^k (u_1 u_k) \text{Tr} \left( \prod_{j=2}^{k-1} \not{u}_j \prod_{j=k+1}^n \not{u}_j \right)$$

其中  $u_1 u_k$  表示  $u_1$  和  $u_k$  的内积。

利用这个定理可以求解任意Feynman符号的乘积的迹:

$$\text{Tr} (\not{u}_1 \not{u}_2) = (u_1 u_2) \text{Tr} (I_{4 \times 4}) = 4 u_1 u_2$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\not{u}_1 \not{u}_2 \not{u}_3 \not{u}_4) &= (u_1 u_2) \text{Tr} (\not{u}_3 \not{u}_4) - (u_1 u_3) \text{Tr} (\not{u}_2 \not{u}_4) + (u_1 u_4) \text{Tr} (\not{u}_2 \not{u}_3) \\ &= 4(u_1 u_2)(u_3 u_4) - 4(u_1 u_3)(u_2 u_4) + 4(u_1 u_4)(u_2 u_3) \end{aligned}$$

## Feynman符号的迹的展开定理

证明：若 $n$ 为奇数，则根据零迹定理，等式两边都是零，不证自明。下面考虑 $n$ 为偶数的情况。首先

$$A\cancel{B} = A_\mu B_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = A_\mu B_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2AB - \cancel{B}A$$

依次令 $A = u_1$ ,  $B = u_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ )即可把 $\psi_1$ 轮换到乘积的最后去。最后再利用迹的性质把 $\psi_1$ 轮换回来。

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n) \\ &= 2u_1 u_2 \text{Tr}(\psi_3 \dots \psi_n) - \text{Tr}(\psi_2 \psi_1 \psi_3 \dots \psi_n) \\ &= 2u_1 u_2 \text{Tr}(\psi_3 \dots \psi_n) - 2(u_1 u_3) \text{Tr}(\psi_2 \psi_4 \dots \psi_n) + \text{Tr}(\psi_2 \psi_3 \psi_1 \psi_4 \dots \psi_n) \\ &= \dots \\ &= 2 \sum_{k=2}^n (-1)^k (u_1 u_k) \text{Tr} \left( \prod_{j=2}^{k-1} \psi_j \prod_{j=k+1}^n \psi_j \right) - \text{Tr}(\psi_2 \dots \psi_n \psi_1) \\ &= 2 \sum_{k=2}^n (-1)^k (u_1 u_k) \text{Tr} \left( \prod_{j=2}^{k-1} \psi_j \prod_{j=k+1}^n \psi_j \right) - \text{Tr}(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n) \end{aligned}$$

故 $n$ 为偶数情况也得证。

# Feynman符号的迹的倒排定理

任意 $n$ 个矢量 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 的Feynman符号的乘积的迹满足倒排定理:

$$\text{Tr}(\psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_n) = \text{Tr}(\psi_n \psi_{n-1} \dots \psi_2 \psi_1)$$

证明: 当 $n$ 为奇数时两边都是零, 故不证自明。

当 $n$ 为偶数时, 用归纳法证明。 $n = 2$ 时显然成立。假设命题对 $n - 2$ 成立。把左边按展开定理展开; 右边先利用迹的性质把 $\psi_1$ 移到左边, 然后按展开定理展开, 再利用归纳假设即得到和左边展开一样的结果。

## $\gamma$ 矩阵和Feynman符号混合的一些常见情况

►  $\text{Tr}(\not{A}\gamma^\mu) = 4A^\mu$

证明:

$$\text{Tr}(\not{A}\gamma^\mu) = A_\nu \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 4A_\nu g^{\mu\nu} = 4A^\mu$$

►  $\text{Tr}(\not{A}\not{B}\not{C}\gamma^\mu) = 4(AB)C^\mu - 4(AC)B^\mu + 4(BC)A^\mu$

证明:

设  $\text{Tr}(\not{A}\not{B}\not{C}\gamma^\mu) = X^\mu$ , 则对任意矢量  $D$  有

$$\begin{aligned} X^\mu D_\mu &= \text{Tr}(\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}) \\ &= 4(AB)(CD) - 4(AC)(BD) + 4(AD)(BC) \\ &= [4(AB)C^\mu - 4(AC)B^\mu + 4(BC)A^\mu] D_\mu \end{aligned}$$

由  $D_\mu$  的任意性即得  $X^\mu = 4(AB)C^\mu - 4(AC)B^\mu + 4(BC)A^\mu$



## $\gamma$ 矩阵的形式下标

虽然 $\gamma^\mu$ 并不是矢量，但我们可以形式得把它的指标降下去，定义：

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\nu$$

试证明：

- ▶  $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$
- ▶  $\gamma^\mu \not{A} \gamma_\mu = -2\not{A}$

学完这些，感觉我们小学数学又变强了。之后我们要拿这些武器来对付Dirac场。

下面转入对付 $U(1)$ 规范场的武器。

# 光子外线的替换规则

QED相互作用为 $qA_\mu j^\mu$ ，其中 $j^\mu$ 为守恒电荷流。有光子外线的Feynman图的散射振幅写成 $\mathcal{M}_\mu = (e_{\mathbf{k},s})_\mu^* J^\mu$ 或者 $\mathcal{M}_\mu = (e_{\mathbf{k},s})_\mu J^\mu$ 的形式，则 $J^\mu$ 可以看成 $k$ 空间的守恒流，它满足 $k_\mu J^\mu = 0$ 。在以 $\mathbf{k}$ 方向为 $z$ 轴的坐标系里， $k_\mu = (|\mathbf{k}|, 0, 0, -|\mathbf{k}|)$ ，从而有 $J^0 = J^3$ 。

注：上述结论的理论严格证明留到以后有时间再说。今天我们以掌握计算技术为首要目标。

现在考虑初态或者末态自旋未知，需要把散射概率（散射振幅的平方）对所有自旋求和的情况。

$$|\mathcal{M}^2| = \sum_{s=\pm 1} (e_{\mathbf{k},s})_\mu^* (e_{\mathbf{k},s})_\nu (J^\nu)^* J^\mu$$

利用 $e_{\mathbf{k},\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm i\mathbf{n}_2)$ ，即有

$$|\mathcal{M}^2| = |J^1|^2 + |J^2|^2 = |J^1|^2 + |J^2|^2 + |J^3|^2 - |J_0|^2 = -g_{\mu\nu} J^\mu J^\nu$$

由此我们得出：可以把外线的 $\sum_s (e_{\mathbf{k},s})_\mu^* (e_{\mathbf{k},s})_\nu$ 替换为 $-g_{\mu\nu}$

# Compton散射

下面我们尝试来完成Compton散射的散射振幅的计算：

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma} \sum_{\text{spins}} \left| \bar{u}_{p'_e} \not{\epsilon}_{p'_\gamma}^* \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \not{\epsilon}_{p_\gamma} u_{p_e} \right|^2 \\
 &= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma} \sum_{\text{spins}} (e_{p'_\gamma})_\mu (e_{p_\gamma}^*)_\nu (e_{p'_\gamma})_\alpha (e_{p_\gamma})_\beta \left( \bar{u}_{p'_e} \gamma^\mu \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\nu u_{p_e} \right)^\dagger \\
 &\quad \times \left( \bar{u}_{p'_e} \gamma^\alpha \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\beta u_{p_e} \right) \\
 &= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma} \sum_{\text{spins}} (-g_{\mu\alpha})(-g_{\nu\beta}) \left( \bar{u}_{p'_e} \gamma^\mu \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\nu u_{p_e} \right)^\dagger \\
 &\quad \times \left( \bar{u}_{p'_e} \gamma^\alpha \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\beta u_{p_e} \right) \\
 &= \frac{q^4}{16\omega_\gamma\omega'_\gamma} \sum_{\text{spins}} \left( \bar{u}_{p_e} \gamma^\nu \left( \frac{-i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{-i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\mu u_{p'_e} \right) \\
 &\quad \times \left( \bar{u}_{p'_e} \gamma_\mu \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma_\nu u_{p_e} \right)
 \end{aligned}$$

## Compton散射

上面的自旋求和项可以写成求迹的形式 ( $1 \times 1$ 矩阵的迹等于自身)

$$\sum_{\text{spins}} \text{Tr} \left( \bar{u}_{p_e} \gamma^\nu \left( \frac{-i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{-i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\mu u_{p'_e} \bar{u}_{p'_e} \gamma_\mu \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma_\nu u_{p_e} \right)$$

利用迹可以轮换乘积的性质，把最右边的 $\gamma^\nu u_{p_e}$ 移到左边，并利用 $u\bar{u}$ 的自旋求和性质（见第11课前半部分），得到这个和为

$$\text{Tr} \left( \gamma_\nu \frac{\not{p}_e + m}{2\omega_e} \gamma^\nu \left( \frac{-i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{-i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \gamma^\mu \frac{\not{p}'_e + m}{2\omega'_e} \gamma_\mu \left( \frac{i}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{i}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \right)$$

这样我们顺利得到了电子的 $1/\omega$ 因子，把它们都提取到外面，定义

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{16\omega\gamma\omega'\omega_e\omega'_e} K$$

再利用 $\gamma$ 矩阵形式下标的性质，得到

$$K = \text{Tr} \left( (-\not{p}_e + 2m) \left( \frac{1}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{1}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) (-\not{p}'_e + 2m) \left( \frac{1}{\not{p}_e + \not{p}_\gamma - m} + \frac{1}{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma - m} \right) \right)$$

# Compton散射

$$K = \text{Tr} \left[ (\not{p}_e - 2m) \left( \frac{\not{p}_e + \not{p}_\gamma + m}{2p_e p_\gamma} - \frac{\not{p}_e - \not{p}'_\gamma + m}{2p_e p'_\gamma} \right) (\not{p}'_e - 2m) \left( \frac{\not{p}'_e + \not{p}'_\gamma + m}{2p_e p_\gamma} - \frac{\not{p}'_e - \not{p}_\gamma + m}{2p'_e p_\gamma} \right) \right]$$

然后再利用Feynman符号乘积的迹的展开公式把上式展开成几十项的和...

# 无力吐槽

下节课我们继续...