Réf. : **AF100 V1**

Analyse fonctionnelle - Partie 1

Date de publication :
10 avril 2003

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Gilles GODEFROY**

Analyse fonctionnelle

Partie 1

par **Gilles GODEFROY**
Directeur de recherches au Centre national de la recherche scientifique (CNRS)

Les notions présentées dans cet exposé, première partie d'un ensemble traitant de l'analyse fonctionnelle, concernent plus particulièrement :

— les ***espaces normés de dimension finie*** *; ce sont ceux pour lesquels un calcul effectif, utilisant les coordonnées (en nombre fini !) des vecteurs est possible. Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, ils sont caractérisés par le fait qu'ils contiennent des ensembles compacts d'intérieur non vide : dimension finie et compacité sont donc intimement liées ;*

— les ***espaces de Hilbert*** *; en particulier, l'espace de Hilbert séparable est le paradis des analystes. Il constitue un cadre naturel où se conjuguent des idées géométriques (orthogonalité, théorème de Pythagore...), algébriques (valeurs propres, théorie spectrale...) et analytiques (séries et transformation de Fourier) ;*

— les ***espaces de Banach non euclidiens*** *; par exemple, l'espace des fonctions continues ou celui des fonctions intégrables sur un segment ne sont pas des espaces de Hilbert. Il nous faut pourtant les considérer si nous voulons montrer l'existence de solutions d'équations différentielles, ou développer le calcul des probabilités.*

C'est donc dans la seconde partie ([AF 101]) que nous aborderons :

— les espaces fonctionnels non normables ;
— la transformation de Fourier ;
— le calcul des probabilités.

Les connaissances exigées pour aborder cette présentation de l'analyse fonctionnelle nécessitent d'être à l'aise avec les bases de la topologie. Ces bases sont présentées dans l'article [AF 99] « Topologie et mesure » de ce traité .

1. Espaces normés de dimension finie

Soit N_1 et N_2 deux normes sur le même espace vectoriel E. Nous disons que N_1 et N_2 sont **équivalentes** s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

pour tout $x \in$ E.

Il est facile de vérifier qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Le cas de la dimension finie donne lieu à un théorème d'unicité de la structure d'espace normé.

Théorème 1

Soit E $= \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve. ♦ On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On considère la norme $\|.\|_1$ sur E définie par :

$$\|(v_1, v_2, \ldots, v_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Il suffit de montrer qu'une norme arbitraire N est équivalente à la norme $\|.\|_1$. D'après l'inégalité triangulaire, on a, si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in$ E :

$$N(v) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N(v_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |v_i| N(e_i)$$

où $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne la base naturelle de E. On a donc :

$$N(v) \leqslant \left[\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} N(e_i)\right] \cdot \|v\|_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Pour l'inégalité inverse, on remarque que la norme $\|.\|_1$ définit la topologie produit naturelle sur $\mathbb{K}^n$. D'après (1), on a :

$$|N(u) - N(v)| \leqslant N(u - v) \leqslant \beta \|u - v\|_1$$

où $\beta > 0$ ne dépend pas de *u* et *v*.

Donc $N : \mathbb{K}^n \to [0, +\infty[$ est une fonction continue.

L'ensemble :

$$\mathrm{S} = \{v \in \mathbb{K}^n ; \|v\|_1 = 1\}$$

est fermé borné, donc compact, dans $\mathbb{K}^n$. D'après la propriété (i) de la définition 1 donnée au paragraphe 5 de l'article précédent [AF 99], on a $N(v) > 0$ pour tout $v \in \mathrm{S}$.

D'après le corollaire 1 (article [AF 99]), la restriction à S de la fonction continue N atteint ses bornes. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$N(v) \geqslant \alpha \text{ pour tout } v \in \mathrm{S}$$

et il s'ensuit par homogénéité que :

$$N(v) \geqslant \alpha \|v\|_1 \qquad \textbf{(2)}$$

pour tout $v \in \mathbb{K}^n$. La conjonction de (1) et (2) montre le résultat. ♦

Le théorème **1** établit que la théorie ***qualitative*** des normes est triviale en dimension finie. Mais la théorie ***quantitative*** est riche de résultats qui soulignent le rôle central des ellipsoïdes. Pour exprimer ces résultats, nous avons besoin de notations. Si T est une application linéaire d'un espace normé (E, N_1) vers un espace normé (F, N_2), on définit la norme $\|\mathrm{T}\|$ de T par :

$$\|\mathrm{T}\| = \sup\{N_2(\mathrm{T}(x)) ; N_1(x) \leqslant 1\}$$

Cette norme est aussi la plus petite constante pour laquelle on a pour tout $x \in$ E :

$$N_2(\mathrm{T}(x)) \leqslant \|\mathrm{T}\| \cdot N_1(x)$$

S'il existe une application linéaire continue inversible $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ dont l'inverse T^{-1} est également continue, on dit que E et F sont ***isomorphes***, et T est appelé un isomorphisme entre E et F.

Définition 1

Soient E et F deux espaces normés isomorphes. La **« distance » de Banach-Mazur** entre E et F est définie par :

$$d_{\mathrm{BM}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \inf\left\{\|\mathrm{T}\| \cdot \|\mathrm{T}^{-1}\| ; \mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F} \text{ isomorphisme}\right\}$$

Remarquons que d_{BM} n'est pas une distance au sens défini au paragraphe 1 de l'article [AF 99] puisque $d_{\mathrm{BM}}(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = 1$. Il faudrait considérer le logarithme de d_{BM} ; mais, dans la pratique, on travaille simplement avec d_{BM}. La valeur de d_{BM} est liée aux meilleures constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ possibles dans l'équivalence des normes, lorsqu'on s'autorise à « tourner » les boules unités.

Énonçons à présent deux résultats fondamentaux.

Théorème 2

Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne et N une norme arbitraire sur $\mathbb{R}^n$. On a :

$$d_{\mathrm{BM}}((\mathbb{R}^n, \|.\|_2) ; (\mathbb{R}^n, N)) \leqslant \sqrt{n}$$

Ce théorème, montré par F. John en 1948, s'établit en considérant la famille des ellipsoïdes contenus dans $\mathrm{B}_N = \{x \in \mathbb{R}^n ; N_{(x)} \leqslant 1\}$.

Parmi ces ellipsoïdes, il en existe un de volume maximal, noté $\mathcal{E}$, et on montre que :

$$\mathrm{B}_N \subseteq \sqrt{n} \cdot \mathcal{E}$$

Tout ellipsoïde est l'image de la sphère par une application linéaire, ce qui conclut la preuve. Notons que l'exemple des normes $\|.\|_1$ ou $\|.\|_\infty$ montre que le théorème de F. John est optimal.

Le très profond résultat suivant a été montré par A. Dvoretzky en 1961, avec des données quantitatives un peu moins précises et améliorées depuis lors.

Théorème 3

Il existe une constante universelle $\mathrm{C}_0 > 0$ telle que pour toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in]0,1/2[$, il existe un sous-espace F de $(\mathbb{R}^n, N)$ de dimension *k*, avec :

$$k \geqslant \mathrm{C}_0 \varepsilon^2 \ln(n) / |\ln(\varepsilon)|$$

et :

$$d_{\mathrm{BM}}(F, \ell_2^k) \leqslant 1 + \varepsilon$$

En d'autres termes, étant donné un entier $k \geqslant 1$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(k, \varepsilon)$ tel que si $n \geqslant N(k, \varepsilon)$ et $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ contient des sections de dimension *k* qui sont sphériques à ε près. Il s'ensuit en particulier que tout espace normé X de dimension infinie contient des sous-espaces de dimension finie arbitrairement grande qui sont arbitrairement proches d'un espace euclidien. Il est donc impossible de faire disparaître, en changeant la norme, toutes les sections (presque) sphériques !

La démonstration du théorème **3** utilise des variables gaussiennes et le phénomène de « concentration de la mesure ». La façon la plus simple de comprendre l'omniprésence des sections sphériques est sans doute d'évoquer le théorème central limite (cf. article [AF 101]) et le lien entre sphères de grande dimension et variables gaussiennes.

Nous revenons à des choses plus simples avec le théorème topologique suivant, montré par **F. Riesz**.

Théorème 4

Soit E un espace normé dont la boule unité fermée est compacte pour la topologie induite par la norme, alors E est de dimension finie.

Preuve. ♦ Soit $\overline{B}_E$ la boule unité fermée, et $B(x,1/2)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon 1/2. On a bien sûr :

$$\overline{B}_E \subseteq \bigcup_{x \in \overline{B}_E} B(x, 1/2) \tag{3}$$

donc, par compacité, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{B}_E$ tels que :

$$\overline{B}_E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1/2)$$

Soit $F = \mathrm{vect}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ le sous-espace de dimension finie engendré par la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. D'après le théorème **1**, il est complet pour la norme induite et donc fermé dans E.

Si $F \neq E$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ pour tout $y \in F$ (cf. § 3). Mais cela contredit la relation (3). Donc F = E est de dimension finie. ♦

Le théorème de Riesz a diverses conséquences (cf. § 2.3 lemme **4**). Il montre en particulier que si X est un espace normé de dimension infinie, il n'existe pas de mesure m non nulle, σ–additive sur les sous-ensembles boréliens de X, et telle que :

$$m(x + A) = m(A) \tag{4}$$

pour tout $x \in E$ et tout borélien A.

En effet, si $m \neq 0$ est σ–additive, il existe un compact K de X tel que $m(K) \neq 0$. Il s'ensuit alors de la relation (4) que $K–K = \{x - y\ ;\ (x, y) \in K \times K\}$ est un voisinage de 0. Mais alors le théorème **4** montre que X est de dimension finie.

Cette observation peut être formulée comme suit : il n'y a pas de concept de volume naturel dans les espaces normés de dimension infinie.

Les méthodes de Baire, cependant, sont disponibles et efficaces comme nous le verrons au paragraphe 3.

2. Espaces de Hilbert

2.1 Les bases

Les espaces fonctionnels naturels sont de dimension infinie. Il est donc indispensable, dès qu'on veut appliquer des idées de géométrie ou d'algèbre linéaire à l'analyse, de considérer des espaces de dimension infinie. Parmi ceux-ci, les **espaces de Hilbert**, que nous allons maintenant définir, occupent une position centrale.

Soit E un espace vectoriel réel. Un ***produit scalaire*** sur E est une application notée $\langle\,.\,,\,.\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tous les vecteurs x, y, z et tout scalaire λ :

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
(iii) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
(iv) $\langle x, x\rangle \in [0, +\infty[$
(v) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarquons que l'on a :

$$0 \leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle$$

Un polynôme du deuxième degré de signe constant a un discriminant négatif, d'où l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

Lorsque E est un espace vectoriel complexe, un ***produit hermitien*** sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie de même les conditions (ii), (iii), (iv) et (v), cependant que la condition (i) est remplacée par :

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

Il s'ensuit qu'un produit hermitien est « sesquilinéaire », c'est-à-dire linéaire à droite (par (iii)) et antilinéaire à gauche :

$$\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$$

Sauf mention du contraire, les arguments qui suivent sont valables dans les deux cas (réel ou complexe). Nous utilisons alors le terme « produit scalaire », étant entendu que, dans le cas complexe, c'est d'un produit hermitien qu'il s'agit.

Un produit scalaire permet de définir une norme, qu'on appelle ***norme euclidienne***, comme suit :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Pour s'assurer que $\|.\|_2$ est bien une norme, il faut vérifier l'inégalité triangulaire, qui s'ensuit de celle de Cauchy-Schwarz. En effet :

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 - \|x + y\|_2^2 = 2\|x\|_2\|y\|_2 - 2\langle y, x\rangle \geqslant 0$$

Le cas complexe se traite de façon analogue.

L'exemple le plus simple de norme euclidienne est la norme $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

qui est bien sûr associée au produit scalaire naturel :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

En utilisant l'existence de bases orthonormées (ou la réduction des formes quadratiques), on vérifie que ***toutes les normes euclidiennes sur*** $\mathbb{R}^n$ ***sont isométriques***. En termes géométriques, cela signifie que tout ellipsoïde se déduit d'une sphère par des affinités parallèles aux grands axes. Nous allons voir que ce résultat d'unicité de la structure se généralise à la dimension infinie.

Énonçons à présent une définition cruciale.

Définition 2

Un espace vectoriel E muni d'une norme euclidienne $\|.\|_2$ est appelé ***espace de Hilbert*** s'il est complet pour cette norme.

Un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach au sens de la définition **2** donnée au paragraphe 5 de l'article [AF 99]. Tout espace euclidien de dimension finie est un espace de Hilbert. L'espace $\ell_2(\mathbb{N})$ est un exemple d'espace de Hilbert de dimension infinie (cf. article [AF 99], § 5).

Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E est dit ***convexe*** si pour tout $x \in C$, tout $y \in C$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a : $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. En d'autres termes, tout segment dont les extrémités appartiennent à C est contenu dans C.

Nous montrons maintenant le lemme suivant.

Lemme 1

Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert (H, $\|.\|$). Il existe un unique $z \in C$, tel que :

$$\|z\| = \inf\left\{\|x\|;\, x \in C\right\}$$

Preuve. ♦ Pour tous les vecteurs $x \in H$ et $y \in H$, on a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

Nous venons d'établir l'identité du parallélogramme, connue (avec d'autres démonstrations !) depuis plus de vingt siècles. En la divisant par 4, on obtient :

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \qquad \textbf{(5)}$$

Soit $m = \inf\left\{\|v\|;\, v \in C\right\}$. Si $x \in C$ et $y \in C$, on a $\left(\frac{x+y}{2}\right) \in C$ par convexité et donc d'après la relation (5), on a :

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - m^2 \qquad \textbf{(6)}$$

Il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de C tels que $\lim\|x_n\| = m$, et la relation (6) montre que :

$$\lim_{n \to +\infty}\left[\sup\left\{\|x_k - x_\ell\|;\, k, \ell \geqslant m\right\}\right] = 0$$

et donc la suite (x_n) est de Cauchy. Comme C est fermé dans l'espace complet H, il existe $z \in C$ tel que :

$$z = \lim_{n \to +\infty}(x_n)$$

et on a $\|z\| = m$ puisque la norme est une fonction continue. L'unicité du vecteur de norme minimale dans C s'ensuit directement de la relation (6). ♦

Par translation, le lemme **1** montre immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1

Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que :

$$\|x - p_C(x)\| = \inf\left\{\|x-y\|;\, y \in C\right\}$$

La fonction p_C ainsi définie est la ***projection métrique*** de H sur C ; il est clair que $p_C \circ p_C = p_C$. Elle est particulièrement simple (et utile) lorsque C est un sous-espace vectoriel fermé de H. On montre en effet simplement le théorème suivant, conforme à l'intuition géométrique :

Théorème 5

Soit E un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. La projection $p_E : H \to E$ est une application linéaire telle que $\|p_E\| = 1$, et on a :

$$\mathrm{Ker}(p_E) = p_E^{-1}(0) = E^{\perp}$$

où on note :

$$E^{\perp} = \{\, v \in H; \langle v, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in E\}$$

On obtient ainsi une décomposition :

$$H = E \oplus E^{\perp} \qquad \textbf{(7)}$$

en somme directe de deux sous-espaces fermés ; notons que $\left(E^{\perp}\right)^{\perp} = E$.

Une première application de la relation (7) est l'identification des formes linéaires continues sur H. Pour tout $x \in H$, l'application :

$$L_x(y) = \langle x, y\rangle$$

est linéaire de H dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et, d'après Cauchy-Schwarz, on a $\|L_x\| = \|x\|$. Inversement, si L est une application linéaire continue et $L \neq 0$, l'espace ker (L) est un sous-espace fermé distinct de H. On a donc :

$$H = \mathrm{Ker}(L) \oplus \mathrm{Ker}(L)^{\perp}$$

et il existe $z \in \mathrm{Ker}(L)^{\perp}$ tel que $\|z\| = 1$. Un calcul facile montre alors que $L = L_x$, avec $x = \overline{L(z)}z$.

Une ***famille orthonormée*** $(x_i)_{i \in I}$ est un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H tel que $\|x_i\| = 1$ pour tout *i* et $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

Toute famille orthonormée de H est contenue dans une famille orthonormée maximale (par une application du lemme de Zorn) et il s'ensuit de la relation (7) que si $\mathfrak{B}$ est orthonormée maximale, l'espace vectoriel vect $(\mathfrak{B})$ engendré par $\mathfrak{B}$ est ***dense*** dans H. Il s'ensuit alors que tout vecteur de H est une combinaison linéaire, ***éventuellement infinie***, de vecteurs de $\mathfrak{B}$. Plus précisément :

Théorème 6

Tout espace de Hilbert H contient une famille orthonormée maximale $\mathfrak{B} = \{e_i;\, i \in I\}$. Pour tout $x \in H$, on a :

$$x = \sum_{i \in I}\langle e_i, x\rangle e_i \qquad \textbf{(8)}$$

L'équation (8) signifie ceci : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie de F de I telle que, pour tout ensemble fini G tel que $F \subseteq G \subseteq I$, on a :

$$\left\|x - \sum_{i \in G}\langle e_i, x\rangle e_i\right\| < \varepsilon$$

Une telle famille $\mathfrak{B}$ est appelée une ***base hilbertienne*** de H. Notons cependant que si H est de dimension infinie, $\mathfrak{B}$ n'est pas une base de H au sens algébrique puisqu'un vecteur *x* peut avoir une infinité de coordonnées non nulles.

Le cas le plus important est celui des espaces de Hilbert de dimension infinie ***séparables***, c'est-à-dire qui contiennent une suite dense. Dans ce cas, toutes les bases hilbertiennes sont ***dénombrables***, donc peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. Si H_1et H_2 sont deux tels espaces, prenons des bases hilbertiennes $\{e_i\,;i \geqslant 0\}$ de H_1 et $\{f_i\,;i \geqslant 0\}$ de H_2. L'application $\mathrm{T} : H_1 \to H_2$définie par :

$$\mathrm{T}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle e_i, x \rangle f_i$$

est une bijection isométrique entre H_1 et H_2, que l'on peut donc identifier.

Théorème 7

Il existe, à isométrie près, un unique espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Ce théorème a bien sûr une version réelle et une version complexe. L'espace en question peut être vu comme l 'espace des séries de nombres réels (resp. complexes) de carré sommable. En effet, la relation (8) permet de montrer simplement que :

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle e_i, x \rangle|^2 \qquad \textbf{(9)}$$

et

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \qquad \textbf{(10)}$$

Lorsque l'on parlera ci-dessous de l'***espace de Hilbert*** **H**, cela signifiera « l'espace de Hilbert séparable de dimension infinie » qui est donc unique à isométrie près.

L'espace $L^2([0, 2\pi])$ des fonctions de carré Lebesgue-intégrable sur $[0, 2\pi]$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

issue du produit hermitien :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t) \mathrm{d}t$$

Il est donc isométrique à $\ell_2(\mathbb{Z})$; dans ce cas, l'isométrie est donnée par la transformation de Fourier. On montre en effet que si :

$$j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad e_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}$$

la famille $\mathfrak{B} = \{e_j\,; j \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

Pour toute $f \in L^2([0, 2\pi])$, on a donc :

$$f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j)\, e_j \qquad \textbf{(11)}$$

au sens défini après (8), où :

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} \mathrm{d}t$$

est le coefficient de Fourier d'indice *j* de *f*.

De même, les relations (9) et (10) montrent que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(j)|^2$$

et :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t) \mathrm{d}t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(j)}\, \hat{g}(j)$$

Un théorème profond montré par L. Carleson en 1962 énonce que si $f \in L^2([0, 2\pi])$ on a :

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} \qquad \textbf{(12)}$$

pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$; donc la relation (11) est vraie non seulement « en moyenne quadratique » mais aussi en (presque) tout point. Lorsque la fonction *f* est régulière (par exemple, si elle est continûment dérivable), on montre par des méthodes élémentaires que la relation (12) est satisfaite pour toute valeur de *t*.

Nous verrons au paragraphe 3 le cas plus délicat de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$.

2.2 Les opérateurs sur l'espace de Hilbert

Le cadre naturel de ce paragraphe est l'espace de Hilbert complexe que l'on peut identifier à :

$$H = \left\{(u_n)_{n \geqslant 0}\,; u_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < \infty\right\}$$

et que nous notons simplement H.

Une application linéaire continue $\mathrm{T} : H \to H$ sera appelée un ***opérateur***. On note L(H) l'algèbre des opérateurs sur H. Étant donné un opérateur T, on définit son ***adjoint*** $\mathrm{T}^* \in L(H)$ par la formule :

$$\langle y, \mathrm{T}(x) \rangle = \langle \mathrm{T}^*(y), x \rangle \qquad \textbf{(13)}$$

Lorsque l'on équipe l'espace H d'une base hilbertienne et que l'on représente T par une « matrice » (infinie !) $\{m_{ij}\,; i, j \geqslant 0\}$, la « matrice » $\{m^*_{ij}\,; i, j \geqslant 0\}$ qui représente T^* vérifie $m^*_{ji} = m_{ij}$. C'est ce que l'on appelle la « **transconjuguée** » en algèbre linéaire.

Nous poursuivons l'analogie avec la dimension finie en cherchant l'analogue des valeurs propres. Soit $\mathrm{I} \in L(H)$ tel que $\mathrm{I}(x) = x$ pour tout $x \in H$.

Définition 3

Le spectre $\sigma(\mathrm{T})$ d'un opérateur $\mathrm{T} \in L(H)$ est défini par :

$$\sigma(\mathrm{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; (\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) \text{ n'est pas inversible}\}$$

Rappelons qu'un opérateur S est inversible, si et seulement si, il existe une application linéaire V de H dans H telle que SV = VS = I, et remarquons que la continuité de $V = S^{-1}$ est automatique (par le corollaire **4** du paragraphe 3.2). Donc si on note GL(H) le groupe des éléments inversibles de l'algèbre L(H), on a :

$$\lambda \in \sigma(\mathrm{T}) \Leftrightarrow (\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) \notin GL(H) \qquad \textbf{(14)}$$

Il est important de remarquer que $\sigma(\mathrm{T})$ ***ne coïncide pas*** en général avec l'ensemble des valeurs propres de T, où $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T s'il existe $x \in \mathrm{H} \backslash \{0\}$ tel que $\mathrm{T}(x) = \lambda x$. Par exemple, le « décalage à droite » S défini sur $\ell_2(\mathbb{N})$ par :

$$\mathrm{S}((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

vérifie $\sigma(\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leqslant 1\}$, mais S n'a aucune valeur propre.

La norme de $\mathrm{T} \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$ est :

$$|||\mathrm{T}||| = \sup\left\{\|\mathrm{T}(x)\|; \|x\| \leqslant 1\right\}$$

et l'espace $(\mathrm{L}(\mathrm{H}), |||.|||)$ est un espace de Banach dont GL(H) est un sous-ensemble ouvert.

Lemme 2

Le groupe GL(H) des opérateurs inversibles est un sous-ensemble ouvert de L(H).

Preuve. ♦ Si $\mathrm{T} = \mathrm{I} - \mathrm{E}$ avec $|||\mathrm{E}||| < 1$, on pose :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}^k$$

Comme on a :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}^k\right)(\mathrm{I} - \mathrm{E}) = (\mathrm{I} - \mathrm{E})\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}^k\right) = \mathrm{I} - \mathrm{E}^{n+1}$$

et que $|||\mathrm{E}^{n+1}||| \leqslant |||\mathrm{E}|||^{n+1} \to 0$, on déduit par passage à la limite que TS = ST = I, donc $\mathrm{T} \in \mathrm{GL}(\mathrm{H})$. On a montré que si $|||\mathrm{I} - \mathrm{T}||| < 1$ alors $\mathrm{T} \in \mathrm{GL}(\mathrm{H})$.

Plus généralement, si $\mathrm{T} \in \mathrm{GL}(\mathrm{H})$, on écrit :

$$\mathrm{T} + \mathrm{E} = \mathrm{T} + \mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\mathrm{E} = \mathrm{T}(\mathrm{I} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{E})$$

et comme $|||\mathrm{T}^{-1}\mathrm{E}||| \leqslant |||\mathrm{T}^{-1}||| \cdot |||\mathrm{E}|||$, on a $(\mathrm{T} + \mathrm{E}) \in \mathrm{GL}(\mathrm{H})$ si $|||\mathrm{E}||| < \left(|||\mathrm{T}^{-1}|||\right)^{-1}$ et par conséquent GL(H) contient une boule ouverte centrée en T. ♦

Lemme 3

Pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$, le spectre $\sigma(\mathrm{T})$ de T est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$, et $\sigma(\mathrm{T}) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leqslant |||\mathrm{T}|||\right\}$.

Preuve. ♦L'application $\lambda \to (\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})$ est clairement continue, donc la relation (14) et le lemme **2** montrent que $\sigma(\mathrm{T})$ est fermé. Si $|\lambda| > |||\mathrm{T}|||$, on a :

$$(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) = \lambda^{-1}\left(\frac{\mathrm{T}}{\lambda} - \mathrm{I}\right) = \lambda^{-1}(\mathrm{E} - \mathrm{I})$$

avec $|||\mathrm{E}||| < 1$, donc $(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) \in \mathrm{GL}(\mathrm{H})$ d'après la démonstration du lemme **2**. ♦

On note ***rayon spectral*** le réel $r(\mathrm{T}) = \sup\left\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(\mathrm{T})\right\}$.

D'après le lemme **3**, $r(\mathrm{T}) \leqslant |||\mathrm{T}|||$. En fait, la ***formule du rayon spectral***, que nous ne démontrons pas ici, énonce que :

$$r(\mathrm{T}) = \lim_{n \to +\infty} |||\mathrm{T}^n|||^{1/n} \qquad \textbf{(15)}$$

Le théorème de d'Alembert-Gauss implique classiquement que toutes application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ a au moins une valeur propre. La formule (15) contient implicitement l'extension non triviale suivante : ***pour tout*** $\mathrm{T} \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$, ***le spectre*** $\sigma(\mathrm{T})$ ***est non vide***.

Il est souvent utile de calculer des expessions du type $f(\mathrm{T})$, où f est une fonction « régulière ». Si $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est un polynôme, on a bien sûr :

$$f(\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{T}^k$$

et cette définition s'étend simplement aux fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$, dont la plus importante est l'exponentielle. On pose donc :

$$\exp(\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{T}^k}{k!} \qquad \textbf{(16)}$$

et cette série converge dans L(H). On peut encore étendre ce ***calcul fonctionnel*** aux fonctions $f: \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont analytiques sur un ouvert Ω contenant $\sigma(\mathrm{T})$, et définir un opérateur $f(\mathrm{T})$ qui vérifie en particulier :

$$\sigma(f(\mathrm{T})) = f(\sigma(\mathrm{T}))$$

Le calcul fonctionnel a de nombreuses applications (cf, par exemple, la relation (20) et la proposition **2**). Pour un opérateur général, il n'est défini que pour des fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$. Pour l'étendre à des fonctions plus générales, nous avons besoin de l'importante définition suivante.

Définition 4

Un opérateur $\mathrm{T} \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$ est dit ***normal*** si $\mathrm{T}^*\,\mathrm{T} = \mathrm{T}\,\mathrm{T}^*$.

Un résultat classique d'algèbre linéaire affirme qu'un opérateur normal sur $\mathbb{C}^n$ diagonalise dans un base orthonormée. Nous allons voir que ce résultat s'étend, sous diverses formes, à la dimension infinie.

Définissons d'abord deux sous-classes fondamentales de l'espaces des opérateurs normaux.

Définition 5

Un opérateur $\mathrm{S} \in \mathrm{L}(\mathrm{H})$ est dit autoadjoint si $\mathrm{S}^* = \mathrm{S}$. Un opérateur inversible $\mathrm{U} \in \mathrm{GL}(\mathrm{H})$ est dit unitaire si $\mathrm{U}^* = \mathrm{U}^{-1}$.

On vérifie facilement qu'une projection P (= P^2) est autoadjointe, si, et seulement si, elle est orthogonale (au sens du théorème **5**), et que les opérateurs unitaires sont les isométries inversibles (les « rotations ») de H.

Nous avons besoin d'une notion de mesure, au sens du théorème 1 de l'article [AF 99], à valeurs dans les projections orthogonales.

Définition 6

Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$. Une mesure spectrale est une application :

$$E = \mathcal{M}(K) \to L(H)$$

où $\mathcal{M}(K)$ désigne l'ensemble des parties mesurables de K, qui vérifie :

(a) $E(\varnothing) = 0, E(K) = I$.
(b) pour tout $A \in \mathcal{M}(K)$, E (A) est une projection orthogonale.
(c) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pour tous A et B.
(d) Si $A \cap B = \varnothing$, $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$.
(e) pour tous x et $y \in H$, l'application $E_{x,y} = \mathcal{M}(K) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$E_{x,y}(A) = \langle x, E(A)y\rangle$$

vérifie pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ de parties mesurables disjointes :

$$E_{x,y}(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{x,y}(A_n)$$

Remarquons qu'un opérateur $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est diagonalisable s'il existe une suite $(p_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de projections sur des sous-espaces de dimension 1 telle que :

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \tag{17}$$

L'application $\lambda_k \to p_k$ va du spectre $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ de T vers les projections sur $\mathbb{C}^n$. Les opérateurs normaux sur $\mathbb{C}^n$ sont diagonalisables et, dans ce cas, les (p_k) sont orthogonales.

Lorsque l'on passe à la dimension infinie, la somme de la relation (17) est naturellement remplacée par une intégrale. Énonçons à présent le ***théorème spectral***.

Théorème 8

Soit $T \in L(H)$ un opérateur normal. Il existe une mesure spectrale :

$$E = \mathcal{M}(\sigma(T)) \to L(H)$$

telle que pour tous x et $y \in H$, on ait :

$$\langle x, T(y)\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \mathrm{d}E_{x,y}(\lambda) \tag{18}$$

L'intégrale ci-dessus utilise la mesure $E_{x,y}$, comme définie plus loin au paragraphe 3. L'équation (18) justifie l'égalité suivante, analogue à la relation (17) : si $TT^* = T^*T$, on a :

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \mathrm{d}E(\lambda) \tag{19}$$

Dans le cas autoadjoint $T = T^*$, on a $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$; dans le cas unitaire $T^* = T^{-1}$, on a $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et la relation (19) fait apparaître T comme la « transformée de Fourier » de sa mesure spectrale E.

Le théorème spectral permet de définir un calcul fonctionnel beaucoup plus étendu que celui que l'on définit simplement à l'aide des séries telle que (16). En effet, si $f \in L^{\infty}(\sigma(K))$ est une fonction mesurable bornée sur $\sigma(K)$, on peut définir un opérateur $f(T) \in L(H)$ par la formule :

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \mathrm{d}E(\lambda) \tag{20}$$

et l'intégrale (20) est linéaire en f et ***multiplicative*** : $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

Le calcul fonctionnel permet d'analyser en détail la structure des opérateurs normaux. On a, par exemple :

Proposition 2

Soit $T \in L(H)$ un opérateur normal. Il existe un sous-espace fermé J de H tel que $\{0\} \neq J \neq H$, et $T(J) \subseteq J$.

Preuve. ♦ Si $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$ est réduit à un point, on montre que $T = \lambda_0 I$ et tout sous-espace J satisfait $T(J) \subseteq J$. Sinon, on écrit $\sigma(T) = A \cup B$, avec $A \cap B = \varnothing$ et $E(A) \neq 0$, $E(B) \neq 0$. D'après la définition **6**, on a $E(A) + E(B) = I$ et $E(A)E(B) = 0$, d'où il vient que $H = \mathrm{Im}(E(A)) \oplus \mathrm{Im}(E(B))$ en somme orthogonale.

Remarquons à présent que d'après la relation (20), on a $E(A) = \mathbb{1}_A(T)$, d'où il s'ensuit que $E(A)T = T\,E(A)$. Nous avons donc trouvé une projection non triviale E (A) qui commute avec T, et alors l'espace $J = \mathrm{Im}(E(A))$ vérifie $T(J) \subseteq J$. ♦

La proposition **2** affirme que tout opérateur normal T a un sous-espace fermé invariant non trivial. Malgré d'importants travaux récents, on ne sait pas si cette conclusion s'étend à tout opérateur $T \in L(H)$.

Le calcul fonctionnel fait apparaître un élément de L(H) comme l'analogue non commutatif d'une variable ***complexe***, cependant qu'un opérateur autoadjoint est l'analogue d'une variable ***réelle***. Ce point de vue, développé par A. Connes dans sa théorie de la « géométrie non commutative », est d'une grande importance en physique fondamentale.

2.3 Opérateurs normaux compacts. Applications aux séries de Fourier

Il s'ensuit du théorème **4** que la boule unité fermée d'un sous-espace de dimension infinie de H n'est pas compacte. Si l'on pose :

$$B_H = \{x \in H; \|x\| \leqslant 1\}$$

et que $T \in L(H)$, l'ensemble $T(B_H)$ n'est donc en général pas compact. Il l'est cependant lorsque $T(H)$ est de dimension finie (d'après le théorème **1**) et plus généralement lorsqu'il existe des opérateurs (R_n) de rang fini tels que $|||T - R_n||| \to 0$. Nous allons voir une réciproque précise de ce dernier fait pour les opérateurs normaux.

Commençons par rappeler une définition générale.

Définition 7

Un opérateur $T \in L(H)$ est dit opérateur compact si $T(B_H)$ est une partie compacte de H.

On a alors le lemme suivant.

Lemme 4

Soit $T \in L(H)$ un opérateur compact. Alors :

1) Pour tout $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = E_\lambda$ est de dimension finie.
2) Le spectre $\sigma(T)$ est un ensemble fini, ou est de la forme :

$$\sigma(T) = \{\lambda_n ; n \geqslant 0\} \cup \{0\}$$

où λ_n est une suite tendant vers 0.

Preuve. ♦ Pour montrer 1), on remarque que :

$$B_{E_\lambda} = \{x \in E_\lambda; \|x\| \leqslant 1\} = \lambda^{-1} T(B_H) \cap E_\lambda$$

Comme T est compact, B_{E_λ} est compacte et le thorème **4** montre 1).

Comme $\sigma(T)$ est compact, il suffit pour montrer 2) d'établir que, si $r > 0$, $\{\lambda \in \sigma(T); |\lambda| > r\}$ est un ensemble fini. Nous admettons le fait suivant :

Fait 1

Si T est compact et $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ alors λ est une valeur propre de T : il existe $x \neq 0$ tel que $T(x) = \lambda x$.

Supposons alors qu'il existe une suite $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T)$ avec $\|\lambda_n\| \geqslant r$ pour tout *n*. Soit $e_n \in H$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ et posons :

$$M_n = \operatorname{vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

Comme les (λ_k) sont distincts, les vecteurs (e_i) sont linéairement indépendants et donc $M_n \neq M_{n-1}$. On prend $y_n \in M_n$ tel que $\|y_n\| = 1$ et $\langle y_n, x\rangle = 0$ pour tout $x \in M_{n-1}$. On a clairement :

$$T(M_k) \subseteq M_k \ ; \ (T - \lambda_n I)(M_n) \subseteq M_{n-1}$$

Donc si $1 \leqslant m < n$ et :

$$z = T(y_m) - (T - \lambda_n I)(y_n)$$

on a $z \in M_{n-1}$. Comme $\|y_n - x\| \geqslant 1$ pour tout $x \in M_{n-1}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\|T(y_n) - T(y_m)\| &= \|\lambda_n y_n - z\| \\ &= |\lambda_n| \left\|y_n - \lambda_n^{-1} z\right\| \geqslant |\lambda_n| > r\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(T(y_n))$ n'a pas de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de $T(B_H)$. ♦

Il s'ensuit du lemme **4** que, dans le cas compact, le théorème spectral et l'équation (19) prennent une forme similaire à l'équation (17) du cas de la dimension finie.

On a donc :

Théorème 9

Soit $T \in L(H)$ un opérateur normal compact. Il existe une suite (E_n) d'espaces de dimension finie tels que $\langle x_n, x_k\rangle = 0$ pour tous $x_n \in E_n$, $x_k \in E_k$ et $n \neq k$, et une suite (λ_n) dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$, et :

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n p_{E_n}$$

où p_{E_n} désigne la projection orthogonale sur l'espace E_n.

Grâce au lemme **4**, ce théorème est un cas particulier de la relation (19). On a bien sûr :

$$E_n = \operatorname{Ker}(T - \lambda_n I)$$

et la propriété (c) de la définition **6** des mesures spectrales montre que $p_{E_n} p_{E_k} = 0$, donc les espaces (E_n) sont orthogonaux.

Développons maintenant une application importante du théorème **9**. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, nous considérons l'espace $L^p = L^p([0, 2\pi]; dx)$ des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrale sur [0,2π] (cf. § 5 de l'article [AF 99]). Nous identifions $f \in L^p$ à une fonction 2π –périodique sur $\mathbb{R}$; on peut en effet supposer que $f(0) = f(2\pi)$ puisque $f \in L^p$ peut être modifiée sur un ensemble de mesure nulle.

Pour $f \in L^1$ et $g \in L^1$, on pose :

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt \qquad \textbf{(21)}$$

Il s'ensuit du théorème **3** de l'article [AF 99] de Fubini que la relation (21) définit $f * g \in L^1$ et de plus :

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \qquad \textbf{(22)}$$

L'opération $*$ est appelée la ***convolution***. Remarquons que $(f * g)$ est une moyenne, pondérée par *g*, de translatées de la fonction *f*. Il est fondamental de comprendre que ***prendre une moyenne régularise***. On comprend donc aisément que la convolée $(f * g)$ de deux fonctions est au moins aussi régulière que chacune d'entre elles. On montre par exemple que si *f* et *g* sont dans L^1, alors $(f * g)$ est une fonction continue.

Cette idée de moyenne permet de comprendre que si $f \in L^1$ et $g \in L^2$, on a :

$$\|f * g\|_2 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_2$$

donc le ***convoluteur*** C_f défini par :

$$C_f(g) = f * g$$

est un opérateur sur L^2. En utilisant toujours le théorème **3** de l'article [AF 99], on montre que, si l'on pose $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, on a $(C_f)^* = C_{f^*}$, et que C_f est un opérateur normal. De plus, pour tout $f \in L^1$, l'opérateur C_f est compact, comme on le montre par exemple en approximant la fonction *f* par des polynômes trigonométriques.

On peut donc appliquer le théorème **9** à C_f. Il faut pour cela identifier les vecteurs propres. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_n(t) = e^{int}$ appartient à L^2 et, par changement de variable, on a :

$$\begin{aligned}C_f(e_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{in(x-u)}\,du \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du\right)e^{inx} \\ &= \hat{f}(n)e_n\end{aligned}$$

On peut alors en déduire que :

$$\sigma(C_f) = \{\hat{f}(n); n \in \mathbb{Z}\} \qquad \textbf{(23)}$$

et d'après le théorème **9** que, pour tout $g \in L^2$:

$$f * g = C_f(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)e_n \qquad \textbf{(24)}$$

La formule (24) permet de retrouver la relation (11), en l'appliquant à une suite de fonctions (g_k) qui approximent la masse unité en 0. Elle apparaît également comme un cas particulier d'un phénomène important (cf. article [AF 101]) : la ***transformation de Fourier échange la convolution et le produit***.

La réduction des opérateurs normaux compacts apparaît ainsi comme un lien profond entre la réduction des formes quadratiques et la théorie des séries de Fourier. L'intérêt que présente le théorème **9** dans ce contexte est que son application s'étend au cas des ***groupes compacts non commutatifs*** G, où il permet de décomposer une fonction sur G en une série indexée par les « représentations irréductibles » de G. Cette approche, qui permet d'analyser la structure des groupes compacts, a été exposée dès 1940 par A. Weil dans son livre « *L'intégration dans les groupes topologiques* ».

Remarquons enfin que la relation (24) fait apparaître de nombreux opérateurs naturels comme des convoluteurs : ainsi, si *g* est un signal périodique dont on ne souhaite conserver que les fréquences qui appartiennent à un sous-ensemble fini A de $\mathbb{Z}$, on utilise :

$$C_f(g) = \sum_{n \in A} \hat{g}(n)e_n$$

où $f = \sum_{n \in A} e_n$.

On voit donc qu'une opération de « filtrage » acoustique ou optique est modélisée par un convoluteur.

3. Espaces de Banach non euclidiens

3.1 L'espace dual

Nous avons vu au paragraphe 2 que l'espace de Hilbert fournissait un cadre où une grande partie de l'analyse trouvait naturellement sa place. Il est cependant nécessaire, pour de nombreuses applications, de sortir de ce cadre confortable et de considérer des espaces de Banach différents des espaces de Hilbert.

Nous avons vu, en application du théorème **5**, que l'espace de Hilbert H s'identifiait naturellement à l'espace H* des formes linéaires continues sur H. Nous allons voir des exemples où les formes linéaires sont des objets de nature très différente des vecteurs de l'espace.

Définition 8

Soit X un espace de Banach. On note X* le dual de X, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes continues sur X.

Nous rappelons qu'une ***forme linéaire*** sur un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Le dual d'un espace de Banach X est lui-même un espace de Banach lorsqu'on l'équipe de la norme :

$$\|f\|^* = \sup\{|f(x)|\,;\|x\| \leqslant 1\}$$

Donnons à présent quelques exemples.

Exemple 1 :

Soit $1 < p < +\infty$. Toute forme linéaire F sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à un élément $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, où q est donné par $q^{-1} + p^{-1} = 1$, à l'aide de la formule :

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t) f(t)\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

Dans le cas où $p = 2$, on a $q = 2$ et la formule **(25)** se réduit au produit scalaire étudié dans le paragraphe **2**.

On a donc $L^p(\mathbb{R}^n)^* = L^q(\mathbb{R}^n)$.

Notons qu'on a également : $q \in]1, +\infty[$ et donc $L^q(\mathbb{R}^n)^* = L^p(\mathbb{R}^n)$.

De tels espaces, qui s'identifient à leur bidual, sont qualifiés de ***reflexifs***.

Le cas $p = 1$ de l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions intégrables donne lieu à une situation différente : dans ce cas, toujours par **(25)**, le dual s'identifie à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions mesurables bornées. Mais $L^\infty(\mathbb{R}^n)^*$ contient strictement $L^1(\mathbb{R}^n)$, qui n'est donc pas reflexif. Cela induit de subtiles différences lorsqu'on veut appliquer des arguments de dualité.

Si $p \neq 2$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ n'est pas isomorphe à l'espace de Hilbert. C'est très simple à voir dans le cas $p = 1$: en effet le dual $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable, c'est-à-dire ne contient pas de suite dense. Il est donc beaucoup trop gros pour être isomorphe à H !

Exemple 2 :

Une partie B d'un compact métrique K est ***borélienne*** si elle appartient à la plus petite famille de parties de K qui contient les ouverts et est stable par réunion dénombrable et intersection dénombrable. Tous les sous-ensembles « concrets » de K sont boréliens. Soit $\mathfrak{B}(K)$ la famille des sous-ensembles boréliens de K. Une ***mesure de Radon*** sur K est une application $\mu : \mathfrak{B}(K) \to \mathbb{R}$ telle que pour toute suite $(B_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments disjoints de $\mathfrak{B}(K)$, on ait :

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \tag{26}$$

Nous avons déjà rencontré un exemple de mesure de Radon : c'est la mesure de Lebesgue m_n, étudiée au paragraphe 4 de l'article [AF 99] où l'on explique comment définir l'intégrale à partir des fonctions étagées. En remplaçant m_n par μ, on définit exactement de la même façon l'intégrale ***par rapport*** à μ d'une fonction Borel-mesurable et, en particulier, d'une fonction continue. L'expression :

$$\langle \mu, f\rangle = \int_K f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \tag{27}$$

a donc un sens pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(K)$, et la relation **(27)** définit une forme linéaire continue. Le théorème de représentation de Riesz énonce réciproquement que tout élément de $\mathscr{C}(K)^*$ est donné par la relation **(27)**. On a donc $\mathscr{C}(K)^* = \mathscr{M}(K)$ où $\mathscr{M}(K)$ désigne l'espace des mesures de Radon sur K.

On voit sur cet exemple que les éléments de X et de X* peuvent être d'une nature très différente, puisque la relation **(27)** met en dualité les mesures et les fonctions.

Le résultat fondamental ci-dessous est le **théorème de Hahn-Banach**.

Théorème 10

Soit X un espace de Banach réel, C une partie convexe fermée de X, et $x \notin C$. Il existe $f \in X^*$ telle que $f(x) > \sup_C(f)$.

Ce résultat s'étend aux espaces de Banach complexes, mais il faut considérer la partie réelle Re[*f*] de *f* pour donner un sens à l'inégalité.

Le théorème **10**, publié par S. Banach en 1932, paraît très simple si l'on fait une figure puisqu'il consiste à séparer un point d'un convexe par un plan. Cependant sa validité pour tous les espaces de Banach nécessite l'axiome du choix, dont elle constitue historiquement la première application centrale.

L'importance du théorème **10** (et donc de l'identification des éléments de X*) réside dans le fait qu'il éclaire les problèmes d'approximation, comme nous allons le voir.

Si A est une partie d'un espace vectoriel E, on note conv (A) le plus petit convexe contenant A. L'associativité des barycentres montre que :

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,;\,\lambda_i > 0\,,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,,\ x_i \in A\,,\ n \geqslant 1\right\}$$

On a, avec cette notation, le corollaire suivant :

Corollaire 1

Soit $(x_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'un espace de Banach X, et $x \in X$ tel que $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(x_k)$ pour tout $f \in X^*$. Alors il existe une suite $c_n \in \mathrm{conv}\{x_k\,; k \geqslant 0\}$ telle que pour $\lim_{n \to +\infty} \|x - c_n\| = 0$.

En effet, si $C = \overline{\mathrm{conv}(A)}$, on a $f(x) \leqslant \sup_C(f)$ pour tout $f \in X^*$ et donc $x \in C$ par le théorème 10.

Par le théorème de représentation de Riesz (cf. exemple **2**), l'extension aux mesures du théorème de convergence dominée (théorème **2** de l'article [AF 99]) et le corollaire **1**, on montre :

soit (f_k) une suite uniformément bornée de fonctions continues sur [0,1] telle que $\lim_{k \to \infty} f_k(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, il existe alors une suite (c_n) de $\mathrm{conv}\{f_k \,;\, k \geqslant 0\}$ telle que $\lim_{k \to +\infty} \|c_n\|_\infty = 0$.

Nota : le lecteur qui souhaite s'assurer de la puissance du théorème **10** est invité à chercher une démonstration directe de ce dernier résultat.

Si Y est un sous-espace vectoriel de X et $f \in X^*$, on a $\sup_Y(f) = +\infty$ ou $f(y) = 0$ pour tout $y \in Y$.

On note :

$$Y^\perp = \{f \in X^* \,;\, f(y) = 0 \text{ pour tout } y \in Y\}$$

Cette notation prolonge l'orthogonalité dans H étudiée au paragraphe 2 ; mais notons ici que $Y \subseteq X$ et $Y^\perp \subseteq X^*$. Le théorème **10** implique alors :

Corollaire 2

Soit X un espace de Banach et Y un sous-espace vectoriel fermé de X. Si $x \in X$ et $x \notin Y$, il existe $f \in Y^\perp$ tel que $f(x) \neq 0$.

On emploie le plus souvent la contraposée du corollaire **2** : si E est un sous-espace vectoriel de X, et si $x \in X$ est tel que $f(x) = 0$ pour tout $f \in E^\perp$, on a $x \in \bar{E}$, c'est-à-dire que *x* peut être approximé arbitrairement bien par des éléments de E. Par exemple, le théorème de Weierstrass selon lequel toute fonction continue sur [0,1] est limite uniforme d'une suite de polynômes est équivalent au fait qu'une mesure de Radon μ sur [0,1] est uniquement déterminée par ses moments :

$$M_n(\mu) = \int_0^1 t^n \mathrm{d}\mu(t) \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Les arguments de dualité fournissent des preuves simples et élégantes de résultats importants. Donnons un exemple : une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est dite ***harmonique*** si elle vérifie la propriété de valeur moyenne suivante : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \textbf{(28)}$$

Une fonction harmonique est $\mathscr{C}^\infty$ et la relation (28) équivaut à la nullité du Laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(29)}$$

Les fonctions harmoniques (sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ou sur un sous-ensemble ouvert) se rencontrent dans bien des problèmes de physique : ainsi, le potentiel électrique est une fonction harmonique. Plus généralement, ces fonctions interviennent comme solutions de problèmes de minimisation : bulles de savon, membranes élastiques, etc.

Montrons comment établir la classique ***formule de Poisson*** pour le disque :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leqslant 1\}$$

où l'on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Si *f* est harmonique, il s'ensuit de la relation (28) que :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \,;\, |z| = 1\} = \sup\{|f(z)| \,;\, |z| \leqslant 1\} \qquad \textbf{(30)}$$

pour toute fonction harmonique *f*. Si $|z| < 1$, on pose $F_z(f) = f(z)$. D'après (30), on a pour *f* harmonique :

$$|F_z(f)| \leqslant \|f\|_\infty$$

La forme linéaire F_z se prolonge en forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}$. On a en effet le fait suivant.

Fait 2

Soit X un espace de Banach, E un sous-ensemble vectoriel de X. Pour tout $f \in E^*$, il existe $\tilde{f} \in X^*$ tel que $\tilde{f}(e) = f(e)$ pour tout $e \in E$.

Il existe donc une mesure positive μ_z telle que :

$$f_z = F_z(f) = \int_\pi f(u)\,\mathrm{d}\mu_z(u)$$

pour toute fonction harmonique *f*. On vérifie facilement que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ est harmonique, donc si l'on pose $u_n(w) = w^n$ et $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a :

$$r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \int_\mathbb{T} u_n(u)\,\mathrm{d}\mu_z(u)$$

pour n = 0,1,2,... d'où par conjugaison :

$$r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \int_\mathbb{T} u_n(u)\,\mathrm{d}\mu_z(u) \qquad \textbf{(31)}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On pose alors :

$$P_r(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nu} \qquad \textbf{(32)}$$

et un calcul direct montre que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \qquad \textbf{(33)}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En comparant (31) et (33) et en utilisant la densité de $\mathrm{vect}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} ; n \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, on en déduit que :

$$\int_\mathbb{T} f(u)\,\mathrm{d}\mu_z(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(34)}$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$. En remarquant que la série (32) est essentiellement la partie réelle d'une série géométrique ; on peut sommer cette série et montrer :

$$P_r(u) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u) + r^2}$$

En restreignant (34) aux fonctions harmoniques, on a donc la ***formule de Poisson*** suivante :

si $r < 1$ et *f* est harmonique, on a :

$$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(35)}$$

L'équation (35), et d'autres plus générales qui s'en déduisent, permet d'étudier le « comportement au bord » des fonctions harmoniques. Pensons à l'exemple du potentiel électrique pour motiver cette étude.

3.2 Applications du lemme de Baire

L'une des applications les plus frappantes du lemme de Baire est qu'il établit l'existence de constantes de contrôle, comme dans l'énoncé suivant du **théorème de Banach-Steinhaus**.

Théorème 11

Soit X un espace de Banach, et A une partie du dual X* telle que, pour tout $x \in X$:

$$\sup\left\{|f(x)|,\, f \in A\right\} = M_x < +\infty$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\|f\|^* \leqslant \lambda$.

En d'autres termes, on a $M_x \leqslant \lambda\|x\|$ pour tout $x \in X$.

Preuve. ♦ On considère l'ensemble :

$$C = \{x \in X\,;\, |f(x)| \leqslant 1 \text{ pour tout } f \in A\}$$

Il est clair que C est fermé, convexe et satisfait (– C) = C. De plus, notre hypothèse implique que :

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} nC \tag{36}$$

D'après (36), l'espace métrique complet X est réunion dénombrable des fermés $F_n = nC$. On applique le lemme de Baire (cf. paragraphe 3 de l'article [AF 99]) aux ouverts $V_n = X \backslash F_n$. Comme $\bigcap_{n \geqslant 0} V_n = \varnothing$, ils ne sont pas tous denses et, donc, il existe n_0 tel que $F_{n_0} = n_0 C$ soit d'intérieur non vide. Par homothétie, on en déduit que C est d'intérieur non vide.

Si $B(x_0, \varepsilon) \subseteq C$, on utilise l'homothétie du centre $(-x_0)$ et de rapport $\frac{1}{2}$ pour montrer que $B\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq C$. On a donc :

$$\|x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } f \in A$$

et donc :

$$\|x\| \leqslant 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{pour tout } f \in A$$

et on peut prendre $\lambda = \frac{2}{\varepsilon}$. ♦

Le théorème **11** peut s'utiliser ainsi : si $\sup\left\{\|f\|^*\,;\, f \in A\right\} = +\infty$, il existe x tel que $\sup\left\{|f(x)|\,;\, f \in A\right\} = +\infty$.

On a, par exemple :

Corollaire 3

Il existe une fonction continue 2π – périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

Preuve. ♦ La série de Fourier de $f \in L^2([0, 2\pi])$ est définie par la relation (11) dans le paragraphe 2.1. Les sommes partielles de cette série sont :

$$S_n(f)(x) = \sum_{j=-n}^{j=n} \hat{f}(j) e^{ijx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)} \mathrm{d}t$$

et un calcul direct montre que :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

où $D_n(u) = \dfrac{\sin\left[(n+1)\frac{u}{2}\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$ est le « noyau de Dirichlet ». On a donc en particulier :

$$S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{37}$$

L'équation (37) fait apparaître la fonctionnelle :

$$f \to S_n(f)(0) = L_n(f)$$

comme un élément du dual de l'espace $\mathcal{P}$ des fonctions continues 2π – périodiques, de norme :

$$\|L_n\|_{\mathcal{P}^*} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t = \|D_n\|_1 \tag{38}$$

On vérifie alors que $\lim_{n \to +\infty} \|D_n\|_1 = +\infty$, et le théorème **11** permet de conclure. ♦

Ce corollaire **3** montre qu'il est difficile de reconstituer une fonction continue (non dérivable) à partir de la série de Fourier. En analysant sa preuve, on s'aperçoit que, pour « la plupart » des fonctions continues f, $(S_n(f)(x))_n$ diverge en « la plupart » des points x (sur une intersection dénombrable d'ouverts denses) bien qu'elle converge presque partout d'après le théorème de Carleson !

Le « presque partout » prend donc un sens très différent suivant que l'on se réfère à la topologie ou à la mesure (cf. article [AF 99]).

Le corollaire **3**, et bien d'autres résultats analogues, contribue, à l'impression que les « vraies » fonctions que nous fournit la physique sont très irrégulières et que nous calculons sur des approximations lisses de ces fonctions, avec plus ou moins de précision.

Le lemme de Baire fournit encore une constante dans l'énoncé suivant, le « théorème de l'application ouverte » :

Théorème 12

Soit T une application linéaire continue surjective d'un espace de Banach X sur un espace de Banach Y. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = T(x)$ et $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

Un premier corollaire est le théorème du graphe fermé.

Corollaire 4

Une application linéaire T entre deux espaces de Banach X et Y est continue si, et seulement si, son graphe G est une partie fermée de $X \times Y$.

Preuve. ♦ On munit $X \times Y$ de la norme $\|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$. L'espace G est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$, donc G est un espace de Banach. Soit $\pi : G \to X$ défini par $\pi(x, T(x)) = x$. L'application π est une bijection linéaire continue de G sur X. D'après le théorème **12**, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\|T(x)\| \leqslant \|(x, T(x))\| \leqslant M\|x\|$$

et donc T est continue. ♦

Considérer le graphe de T fait jouer un rôle symétrique à X et Y. Il s'ensuit donc que si $T : X \to Y$ espaces de Banach est une bijection linéaire continue, son inverse T^{-1} est continu.

Si $f \in L^1([0,2\pi])$, la suite $\{\hat{f}(j); j \in \mathbb{Z}\}$ de ses coefficients de Fourier appartient à l'espace de Banach $C_0(\mathbb{Z})$ des suites qui tendent vers 0 à l'infini, normé par $\|(u_n)\|_\infty = \sup|u_n|$. On peut se demander inversement si toute suite tendant vers 0 est une suite de coefficients de Fourier. Mais :

Corollaire 5
La transformation de Fourier $\mathfrak{F} = L^1([0,2\pi]) \to C_0(\mathbb{Z})$ est une injection non surjective.

En effet, on a $\hat{D}_n(j) = 1$ si $|j| \leqslant n$ et $= 0$ sinon, d'où $\|\mathfrak{F}(D_n)\|_\infty = 1$, cependant que $\lim\|D_n\|_1 = +\infty$ (cf relation (38)). D'après le théorème **12** on n'a donc pas surjectivité.

Le corollaire **5** invite à considérer des « fonctions généralisées » (hyperfonctions, distributions...) dont la transformée de Fourier serait un élément arbitraire de $C_0(\mathbb{Z})$. Notons que $\mathfrak{F}$ est une isométrie entre $L^2([0,2\pi])$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ (cf. théorème **7**).

3.3 Théorèmes de point fixe

Soit E un ensemble, et $f : E \to E$ une fonction. Il est souvent utile de trouver un ***point fixe*** de f, c'est-à-dire $x \in E$ tel que $f(x) = x$. Cela peut être fait sous diverses hypothèses : par exemple, le **théorème de Brouwer** énonce que si E est un convexe fermé borné d'un espace de dimension finie et f est continue, alors f a un point fixe. Nous énonçons ici un principe beaucoup plus simple.

Proposition 3
Soit X un espace de Banach. Soit $f : X \to X$ une application telle qu'il existe $\alpha < 1$ avec $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha\|x - y\|$ pour tous x et y. Alors il existe un unique $p \in X$ tel que $f(p) = p$.

Preuve. ♦ Soit $x_0 \in X$ arbitraire. On définit $x_1 = f(x_0)$ puis $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n \geqslant 1$. D'après l'hypothèse, on a :

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \alpha\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \tag{39}$$

et par (39) et l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \geqslant 0$ et tout $p \geqslant 0$:

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \left(\sum_{j=n}^{n+p-1} \alpha^j\right)\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \tag{40}$$

D'après la relation (40), la suite (x_n) est de Cauchy donc converge vers p qui satisfait $p = f(p)$ en passant à la limite (f est continue !) dans l'équation $x_n = f(x_{n-1})$.

Si p et q sont deux points fixes, on a $\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\| \leqslant \alpha\|p - q\|$, d'où $\|p - q\| = 0$ et $p = q$. ♦

Remarquons que la démonstration de la proposition **3** fournit une méthode d'approximation itérative, puisque la relation (40) implique que :

$$\|p - x_n\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|$$

Nous donnons à présent une application de la proposition **3** aux équations différentielles. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On veut résoudre l'équation différentielle :

$$y'(t) = F(t, y(t)) \tag{41}$$

où l'inconnue y est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Dans le cas « autonome » où F ne dépend que de y, et où la relation (41) s'écrit $y'(t) = F(y(t))$, résoudre l'équation revient à trouver une trajectoire tangente en tout point au champ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ défini par F.

Énonçons à présent un cas simple du « **théorème de Cauchy-Lipschitz** » :

Théorème 13
Soit $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tous y_1 et $y_2 \in \mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $M > 0$ tel que $Mk < 1$. Alors il existe une fonction dérivable $y : [-M,M] \to \mathbb{R}^n$ telle que $y(0) = x_0$ et :

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

pour tout $t \in [-M,M]$.

Preuve. ♦ Soit $y_0(t) = x_0$ pour tout $t \in [-M,M]$. Soit X l'espace de Banach des fonctions continues de $[-M,M]$ dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{\|f(t)\|, |t| \leqslant M\right\}$$

On définit une fonction $\mathscr{L} : X \to X$ par :

$$\mathscr{L}(y)(t) = \int_0^t F(u, y(u))\,\mathrm{d}u + x_0$$

Pour tout $t \in [-M,M]$, on a :

$$\|\mathscr{L}(y)(t) - \mathscr{L}(z)(t)\| \leqslant Mk\|y - z\|_\infty$$

et donc $$\|\mathscr{L}(y) - \mathscr{L}(z)\|_\infty \leqslant Mk \cdot \|y - z\|_\infty$$

où $Mk < 1$. On peut donc appliquer la proposition **3** et conclure que la suite définie par $y_n = \mathscr{L}(y_{n-1})$ converge vers $y \in X$ tel que $y(0) = x_0$ et pour $|t| \leqslant M$:

$$y(t) = \int_0^t F(u, y(u))\,\mathrm{d}u + x_0 \tag{42}$$

En dérivant (42), on obtient :

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

pour tout $t \in [-M,M]$.

Le théorème **13** tel que nous l'avons énoncé, laisse de côté la question importante de l'intervalle maximal sur lequel l'équation (41) admet une solution. Notons que l'équation (41) est de degré 1, mais qu'une méthode classique [consistant à considérer le vecteur $\left(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$] permet de ramener les équations de degré n sur $\mathbb{R}^k$ aux équations de degré 1 sur $\mathbb{R}^{nk}$.

Dans le cas « lipschitzien » du théorème **13**, on a unicité de la solution passant par la « donnée initiale » x_0. Si F est simplement continue, un argument de compacité permet de montrer l'existence d'une solution mais, dans ce cas, on perd en général l'unicité.

3.4 Algèbres de Banach

L'ensemble des fonctions définies sur un ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou dans $\mathbb{R}$) est naturellement muni d'une structure d'***algèbre***, c'est-à-dire d'espace vectoriel sur lequel existe un produit : on définit naturellement $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Remarquons que ce produit est ***commutatif***, c'est-à-dire que $fg = gf$.

Nous allons voir dans ce paragraphe que ce simple fait admet une réciproque : dans de nombreux cas, ***une algèbre commutative se représente comme une algèbre de fonctions sur un ensemble qu'on appelle son spectre***.

Définition 9

Une algèbre de Banach A est un espace de Banach complexe équipé d'un produit $(x, y) \to xy$ qui vérifie :

(i) $x(yz) = (xy)z$

(ii) $(x+y)z = xz+yz$, $x(y+z) = xy+xz$

(iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

(iv) il existe $e \in \mathrm{A}$ tel que $ex = xe = x$ et $\|e\| = 1$

(v) $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$

pour tous x, y, $z \in \mathrm{A}$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Si de plus $xy = yx$ pour tous x et y, A est dite commutative.

Cette longue liste d'axiomes est vérifiée dans de nombreux cas naturels, dont le plus simple est $\mathrm{A} = \mathscr{C}(\mathrm{K}, \mathbb{C})$ muni de $\|f\| = \|f\|_\infty$, où K est un espace compact. Un exemple non commutatif fondamental est l'algèbre L(H) des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert, considérée au paragraphe 2.

Un élément $x \in \mathrm{A}$ est dit inversible s'il existe $x' \in \mathrm{A}$ tel que $xx' = x'x = e$. L'ensemble G(A) des éléments inversibles forme un sous-ensemble ouvert de A, avec la même démonstration que le lemme **2**. De plus, le spectre de $x \in \mathrm{A}$ est défini par :

$$\sigma_{\mathrm{A}}(x) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; (x - \lambda e) \notin \mathrm{G(A)}\right\}$$

et la formule (15) du rayon spectral :

$$\sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_{\mathrm{A}}(x)\} = \lim_{n \to +\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

reste vraie dans ce cadre. En fait, le paragraphe 2.2 consiste essentiellement d'applications au cas $\mathrm{A} = \mathrm{L(H)}$ de résultats généraux sur les algèbres de Banach.

Nous considérons maintenant le cas commutatif.

Définition 10

Un caractère de l'algèbre de Banach commutative A est une forme linéaire $\varphi \in \mathrm{A}^*$ telle que $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous x et y dans A.

En d'autres termes, φ est une forme linéaire multiplicative non nulle. L'ensemble Δ_{A} des caractères est compact lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence simple sur A : $\varphi_i \to \varphi$ si pour tout $\varphi_i(x) \to \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$.

L'ensemble Δ_{A} est appelé le **spectre** de A ; en effet on a pour tout $x \in \mathrm{A}$:

$$\sigma_{\mathrm{A}}(x) = \{\varphi(x); \varphi \in \Delta_{\mathrm{A}}\} \quad \textbf{(43)}$$

L'équation (43) permet de représenter A comme un sous-espace de $\mathscr{C}(\Delta_{\mathrm{A}})$, par la « transformation de Gelfand » $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. Nous nous limitons ici à l'une des conséquences les plus importantes de la relation (43) :

Théorème 14

Soit A une algèbre de Banach commutative, et soit $x \in \mathrm{A}$ tel que $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $\varphi \in \Delta_{\mathrm{A}}$. Alors x est inversible dans A .

Si $x \in \mathrm{G(A)}$ et $xx' = e$, on a $\varphi(x)\varphi(x') = \varphi(e) = 1$ d'où $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $\varphi \in \Delta_{\mathrm{A}}$. Le théorème **14** énonce la réciproque de cette implication facile.

Exemple 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π – périodique, telle que la série de Fourier de f :

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$$

satisfait :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(m)| < +\infty \quad \textbf{(44)}$$

On suppose de plus que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le théorème **14** permet alors de montrer le **lemme de Wiener** : si $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est l'inverse de f, on a :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(m)| < +\infty$$

En effet, l'algèbre A est dans ce cas l'espace $\ell^1(\mathbb{Z})$ des séries absolument convergentes de nombres complexes, normé par :

$$\|(u(m))\|_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |u(m)|$$

et muni du produit de convolution $*$, défini par :

$$(u * v)(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(k)v(m-k) \quad \textbf{(45)}$$

On remarquera l'analogie entre les relations (21) et (45), et entre la relation (24) et l'équation :

$$\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}$$

si f et g sont deux fonctions 2π – périodiques à séries de Fourier absolument convergentes. Le spectre Δ de $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ s'identifie à $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ au moyen de l'équation :

$$\langle z, (u(m))\rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)z^m$$

et il est alors clair que le théorème **14** établit le « lemme de Wiener ».

Exemple 4 :

Cet exemple correspond au précédent, où l'on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{R}$. Soit $A = L^1(\mathbb{R})$ muni de la convolution $*$ définie par :

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \quad \textbf{(46)}$$

On a alors $f*g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ (par Fubini). Notons que $(L^1(\mathbb{R}), *)$ n'est pas une algèbre de Banach au sens de la définition 1 puisqu'elle n'a pas d'unité *e* (donc (iv) n'est pas vérifiée) ; on peut y remédier en considérant $L^1 + \mathbb{C}\delta_0$, δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

Les caractères de $(L^1(\mathbb{R}), *)$ s'identifient à $\mathbb{R}$, au moyen de l'équation :

$$\langle t, f \rangle = \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(x)\mathrm{d}x \quad \textbf{(47)}$$

Dans (47) la notation $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier mais aussi la transformée de Gelfand, qui est donc une généralisation.

Soit $K \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{K}(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On ne peut pas directement appliquer le théorème **14** puisque $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité. Cependant, la même approche montre que l'***idéal fermé engendré*** par *K* dans $(L^1(\mathbb{R}), *)$ est tout entier.

Une application de ce résultat est le « **théorème tauberien** » de N. Wiener. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément continue bornée. On peut encore définir $(K*\phi)$ par (46). Supposons que $\hat{K}(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et :

$$\lim_{|x| \to +\infty} (K*\phi)(x) = a\hat{K}(0) \quad \textbf{(48)}$$

alors on a :

$$\lim_{|x| \to +\infty} (\phi)(x) = a$$

L'intérêt de ce résultat est que l'équation (48) signifie qu'***une certaine*** moyenne de translatées de la fonction ϕ converge vers *a* à l'infini : en effet :

$$K*\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\phi(x-y)\mathrm{d}y$$

et bien sûr :

$$\hat{K}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\mathrm{d}y$$

De la convergence à l'infini de ces moyennes, ***a priori plus régulières*** que ϕ, on déduit en fait la convergence de ϕ à l'infini.

L'idée de la démonstration est que si $f = g*K$ avec $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$f*\phi = (g*K)*\phi = g*(K*\phi)$$

et (48) permet de montrer que :

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f*\phi)(x) = a\hat{K}(0)\hat{g}(0) = a\hat{f}(0) \quad \textbf{(49)}$$

et comme $I = \{g*K ; g \in L^1(\mathbb{R})\}$ est l'idéal engendré par *K*, I est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ et la relation (49) est vraie pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$. Cette condition est alors assez forte pour établir la conclusion.

Le « théorème tauberien » de Wiener est utile lorsque l'on étudie le comportement asymptotique de données irrégulières. Il figure par exemple dans l'une des démonstrations du « théorème des nombres premiers » : si $\pi(x)$ est le nombre d'entiers premiers inférieurs à *x*, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1$$

Exemple 5 : parmi les algèbres de Banach, certaines sont « intrinsèquement complexes » : ainsi, si A(D) désigne l'espace des fonctions *f* de $D = \{z \in \mathbb{C} ; (|z| \leqslant 1)\}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues sur D et holomorphes sur $\mathring{D}$, les seules $f \in A(D)$ à valeurs réelles sont les fonctions constantes.

À l'opposé, certaines algèbres admettent un « opérateur de conjugaison » similaire à $z \to \bar{z}$ sur $\mathbb{C}$, ce qui permet d'utiliser des **arguments de positivité** spécifiques. Plus précisément, une **involution** d'une algèbre de Banach A est une application $x \to x^*$ de A dans A telle que :

(i) $(x+y)^* = x^* + y^*$
(ii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
(iii) $(xy)^* = y^* x^*$
(iv) $x^{**} = x$

L'algèbre $(L^1(\mathbb{R}), *)$ de l'exemple **4** est une algèbre à involution si l'on pose $f^*(t) = \overline{f(-t)}$. L'exemple le plus important est l'algèbre L(H) des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H, où T* est l'adjoint de T défini par $\langle x, \mathrm{T}y \rangle = \langle \mathrm{T}^* x, y \rangle$.

Une algèbre à involution est une $\mathbb{C}^*$-algèbre si on a pour tout *x* :

$$\|x\|^2 = \|xx^*\|$$

Il est clair que si K est un espace compact, l'algèbre $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K)$ munie de l'involution $f^*(k) = \overline{f(k)}$ est une $\mathbb{C}^*$-algèbre commutative. Le théorème de Gelfand-Naimark énonce que toute $\mathbb{C}^*$-algèbre commutative est de cette forme. Les $\mathbb{C}^*$-algèbres sont donc les algèbres pour lesquelles la transformation de Gelfand $x \to \hat{x}$ de A dans $\mathscr{C}(\Delta_A)$ définie après (43) est un isomorphisme.

L'algèbre L(H) est une $\mathbb{C}^*$-algèbre, non commutative, et on montre que toute $\mathbb{C}^*$-algèbre est isomorphe à une sous-algèbre de L(H) stable par l'involution $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$. Les $\mathbb{C}^*$-algèbres sont donc exactement les sous-algèbres autoadjointes de L(H).

Les $\mathbb{C}^*$-algèbres fournissent le cadre naturel de la théorie spectrale, esquissée dans le paragraphe 2.2. Leur classification est liée à d'importants problèmes de physique théorique.