

基金项目论文

椭圆方程最优控制问题的数值算法研究

高 新, 袁健华

(北京邮电大学校理学院, 北京 100876)

摘要: 本论文引入原对偶方法 (P-D) 以及交替方向乘子法 (ADMM) 两种算法求解椭圆方程约束的最优控制问题, 要讨论的椭圆方程是一种对流扩散方程。论文解决了在无状态约束和盒子约束的情况下对流扩散方程控制的问题。本文首先分析了最优控制模型解的存在唯一性以及一阶最优性条件, 随后利用有限元方法将原始优化模型转换成优化离散系统。此后, 利用 P-D 以及 ADMM 分别求解离散优化系统。ADMM 是具有对偶上升法的可分解性以及乘子法的全局收敛性两大优势的一阶收敛算法, 另外 P-D 也是具有全局收敛的一阶收敛算法。本论文目的在于将 P-D 和 ADMM 两种算法在收敛速率维度上进行比较。最后从数值实验中得出 ADMM 的收敛速率快于 P-D, 证实了 ADMM 是一个高效的优化算法。

关键词: 最优控制; 椭圆方程约束; 交替方向乘子法; 原对偶方法; 有限元

中图分类号: O232 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1003-6970.2018.07.012

本文著录格式: 高新, 袁健华. 椭圆方程最优控制问题的数值算法研究[J]. 软件, 2018, 39 (7): 57–62

Numerical Research on Constrained Optimization Problems Governed By Elliptic Equations

GAO Xin, YUAN Jian-hua

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

【Abstract】: In this paper, the primal-dual (P-D) methods and the alternating direction method of multipliers (ADMM) for solving the state constrained optimization problems, which is governed by elliptic equations, are investigated. The governing equations discussed is a kind of diffusion-convection equations. The unconstrained as well as box-constrained cases of the diffusion-convection equation control problems are solved in this work. The existence and uniqueness of the solution of the optimal control model is given, and the first-order optimality conditions is also mentioned firstly. Then the original optimal control problem can be converted into an optimized discrete system by using finite element methods. We solve the discrete optimization system by using P-D method and ADMM. The ADMM is a first order algorithm that has both the decomposability of the dual rise method and the global convergence of the multiplier method, while the P-D method is a first order algorithm with global convergence also. The purpose of this paper is to compare the primal-dual method with ADMM about the convergence rate. The numerical experiments in this paper are shown that the convergence rate of the ADMM is faster than P-D method, which means ADMM is an efficient optimization algorithm for the elliptic PDE-constrained optimization problems.

【Key words】: Optimal control problems; Elliptic equation constrained; Alternating direction method of multipliers; Primal-dual algorithm; Finite element method

0 引言

偏微分方程 (PDE) 约束的最优控制问题, 起

初是在 80 年代的法国数学家 J.L.Lions 的著作《Optimal control of systems governed by partial differential equations》中提出的^[1], 现已成为非常受关注的交叉

基金项目: 国家自然科学基金项目(11671052, 11471052); 国家自然科学基金重大研究计划(91630202)

作者简介: 高新(1993-), 女, 研究生, PDE 最优控制。

通讯联系人: 袁健华(1979-), 教授, 主要研究方向: 有限元方法, 微分方程数值解, 最优化算法。

学科。偏微分方程约束的最优控制问题有十分广泛的应用，涵盖了物理、化学、甚至工程设计领域，比如水库管理、医疗器械的形状优化、天气预报、热现象、流体问题等。

为解决 PDE 最优控制问题，很多学者已经提出了多种有效的算法，其中牛顿型迭代解法较为常见^[2]。牛顿迭代解法具有局部二阶收敛的性质，但是很多种牛顿迭代求解的方法对迭代初始点的选取非常严格^[3]。所以如何选取具有全局收敛且收敛速度快的算法非常重要。

另外，无论用什么方法求解，约束条件中的偏微分方程需要借用适当的离散方法转换成离散系统，在已有的大部分数值算法中控制变量和状态变量是耦合在一起的，这样就会消耗大量的计算资源去完成求解。

为了解决上述两个问题，本文引入了交替方向乘子法(ADMM)。ADMM 具有全局收敛性且在迭代求解过程中控制变量和状态变量为交替迭代，从而大大减少了计算复杂度。在浏览文献过程中，发现很少学者将 ADMM 算法用到解决 PDE 约束的最优控制问题上。同时本文也引入了原对偶方法(P-D)，它也是具有全局收敛性的有效算法，并且受到不少学者的青睐^[4]。

本论文讨论的偏微分方程是一种对流扩散方程^[5]，对流扩散方程在环境科学、电子科学和流体力学等方面有着广泛的应用。关于对流扩散方程的求解，目前已经取得了一系列的成果^[6]。本文首次尝试用上述两种算法通过有限元离散求解由对流扩散方程约束的最优控制问题。对两种算法进行收敛速率的比较，经数值实验证实了 ADMM 的高效性。

1 模型问题

1.1 模型问题

本文研究以下形式的最优控制问题：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{y,u} J(y,u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_0|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx \\ \text{subject to} \quad \begin{cases} -\Delta y + y = u, & \text{in } \Omega \\ y = 0, & \text{on } \Gamma \end{cases} \\ \quad \quad \quad u \in U_{ab}, \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 $J(y,u)$ 为目标函数， $\Omega \subset R^n$ ， $n=1,2,3$ 。
 $y \in Y = H_0^1(\Omega)$ ， $u \in U = H^1(\Omega)$ 分别是状态变量和控

制变量， $\alpha > 0$ 为已知的正则化参数，对于正则化参数的合理取法可以参考^[7]。设 $e(y,u) := \begin{cases} -\Delta y + y = u, & \text{in } \Omega \\ y = 0, & \text{on } \Gamma \end{cases}$ ，称 $e: Y \times U \rightarrow R$ 为状态约束条件，并且 e 是连续和 Frechet 可微的，此椭圆方程为一种对流扩散方程。 $u \in U_{ab}$ 称为控制约束条件， $U_{ab} \subset U$ 为有界凸集。若 (1.1) 在无状态约束条件下， $U_{ab} = U$ ，若 (1.1) 在有状态约束条件下， $U_{ab} := \{u(x) \in U \mid u_a \leq u(x) \leq u_b\}$ ，此时又称为盒子约束条件。此外， y_0, u_0 是已知的函数。

1.2 模型解的存在及唯一性

因为 y, u 满足 $\begin{cases} -\Delta y + y = u, & \text{in } \Omega \\ y = 0, & \text{on } \Gamma \end{cases}$ ，故对于任何一个 $u \in U_{ab}$ ，都存在唯一的状态变量 $y = y(u)$ 与之相对应^[8]。设算子 $S: U_{ab} \rightarrow Y$ ， $S(u) := y(u)$ ， S 称为解算子。故会得到一个简易的二次优化问题：

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} f(u) := J(S(u), u) = \frac{1}{2} \|S(u) - y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2)$$

f 称为从 U_{ab} 到 R 的简易泛函。

接下来讨论问题 (1.2) 解的存在及唯一性。首先给出 f 的三个假设：1. f 是有下界的；2. f 是弱下半连续的；3. f 是径向无界的。

引理 1.1 1. 在无状态约束条件下，若 f 满足以上三个假设条件，则问题 (1.2) 有全局最优解；2. 在盒子约束条件下，若 f 满足前两条假设条件，则问题 (1.2) 有全局最优解^[9]。

引理 1.1 的证明在文献[9]中已经提到，这里就不予证明。

定理 1.2 问题 (1.2) 在有、无控制约束条件下均存在全局最优解。

证明 首先上面已经讨论得到对于任意 $u \in U_{ab}$ ，存在唯一一个 $y(u)$ 与之对应。通过原始优化模型 (1.1) 以及简易优化模型 (1.2) 可以得出 f 是有下界且径向无界的。所以只需证明 f 是弱下半连续的即可，即证明 f 连续且是凸泛函。因为 $y(u)$ 是连续的， J 关于 u, y 连续，所以 f 关于 u 也是连续的。故仅需证明 f 是凸泛函即可。

由凸泛函定义可知，设 $u_1, u_2 \in U_{ab}$ ， $\lambda \in [0,1]$ ，即证 $f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq \lambda f(u_1) + (1-\lambda)f(u_2)$ ，(3) 成立。

同时易得出 $S(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = \lambda Su_1 + (1-\lambda)Su_2$ 成立。那么有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2\right) &= \frac{1}{2} \|S(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)\|^2 \\ &= y_0^2 + \frac{\alpha}{2} \|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 - u_0\|^2 = \frac{1}{2} \|\lambda Su_1 + \\ &\quad (1-\lambda)Su_2 - y_0\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 - u_0\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|\lambda Su_1 + (1-\lambda)Su_2 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0\|^2 + \\ &\quad \frac{\alpha}{2} \|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 - \lambda u_0 - (1-\lambda)u_0\|^2 \leqslant \\ &\quad \frac{\lambda}{2} \|Su_1 - y_0\|^2 + \frac{\alpha\lambda}{2} \|u_1 - u_0\|^2 + \frac{1-\lambda}{2} \|Su_2 - \\ &\quad y_0\|^2 + \frac{\alpha(1-\lambda)}{2} \|u_2 - u_0\|^2 = \\ &= \lambda f(u_1) + (1-\lambda)f(u_2). \end{aligned} \quad (4)$$

由不等式 (4.4) 可知, f 是凸泛函, 则定理得证。

定理 1.3 当 $\alpha > 0$ 时, 在上述问题 (1.2) 在有、无约束条件下都存在唯一的全局最优解^[9]。

1.3 一阶最优性条件

为了推导出最优性条件, 构造问题 (1.1) 的 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned} L(y, u, p) &= J(y, u) - \langle -\Delta y + y - u, p \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_0|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx - \\ &\quad \int_{\Omega} (-\Delta y + y - u) pdx. \end{aligned}$$

p 为 Ω 上的函数, 称为 Lagrange 乘子。

一阶最优性条件满足下列方程组:

$$\begin{cases} L_y(y, u, p) = 0, \\ L_p(y, u, p) = 0, \\ L_u(y, u, p)(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U_{ab}, \end{cases}$$

故得到问题(1.1)的一阶最优性条件:

原方程:

$$\begin{cases} -\Delta y + y = u, & \text{in } \Omega \\ y = 0, & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

伴随方程 (对偶方程):

$$\begin{cases} -\Delta p + p = y - y_0, & \text{in } \Omega, \\ p = 0, & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

变分不等式:

$$(\alpha(u - u_0) + p)(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U_{ab}.$$

2 变分和有限元离散

为了进行有限元离散, 我们先要给出问题 (1.1) 的变分形式, 再利用有限元离散, 最终获得离散优化系统。

2.1 变分问题

通过变分原理, 问题 (1.1) 中 $e(y, u)$ 变分后的具体形式如下:

找到 $(y, u) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} y v dx = \int_{\Omega} u v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (5)$$

2.2 有限元离散

接下来利用有限元离散, 有限元离散的具体步骤如下^[10]:

1. 三角剖分。将区域 $\bar{\Omega}$ 剖分成有限个三角形子区域, 用 T 表示任一个子区域, 称为单元。令 T_h 表示全体单元, 满足有限元区域剖分的规则。对 $T \in T_h$, 设 h_T 为 T 中三条边中最长的边, $h = \max h_T$ 。

2. 分片多项式。对于每一个 $T \in T_h$, 令

$$P_1(T) = \{\text{定义在 } T \text{ 上的某种多项式全体}\}.$$

3. 有限元空间。令:

$$Y_h = \{v \in H^1(\Omega); v|_T \in P_1, \forall T \in T_h\},$$

$$Y_{0h} = \{v \in H_0^1(\Omega); v|_T \in P_1, \forall T \in T_h\},$$

$$\Gamma_h = \{v \in L^2(\Gamma); v|_T \in P_1, \forall T \in T_h\},$$

$$U_h = Y_h, V_h = Y_h, V_{0h} = Y_{0h}.$$

4. 有限元离散形式。

有 $(y_h, u_h) \in Y_{0h} \times U_h$, 将上述变分形式离散:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla y_h \cdot \nabla v_h dx + \int_{\Omega} y_h v_h dx = \\ \int_{\Omega} u_h v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{0h}. \end{aligned} \quad (6)$$

5. 基函数的选取。

设区域 $\bar{\Omega}$ 离散之后得到的节点集合记为 $\{x_i\}, i=1, \dots, N$ 。每个节点对应的基函数设为 $\varphi_i(x), i=1, \dots, N$ 。其中 $\varphi_i(x)$ 为分片一次函数且在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 则:

$$y_h = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i(x), u_h = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x), \quad i=1, \dots, N. \quad (7)$$

令 $\mathbf{y}_h = (y_1, \dots, y_N)^T$, $\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_N)^T$, 则上述表达式可简单表示成:

$$A\mathbf{y}_h = B\mathbf{u}_h, \quad \mathbf{y}_h \in R^N, \mathbf{u}_h \in R^N.$$

$$\text{其中 } A = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad B = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx.$$

设 $\mathbf{R} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x))$, 则 $y_h = \mathbf{R}\mathbf{y}_h$, $u_h = \mathbf{R}\mathbf{u}_h$, 那么 (1.1) 的离散系统为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{y}_h, \mathbf{u}_h} J_h(\mathbf{y}_h, \mathbf{u}_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{R}\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_0|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{R}\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0|^2 dx \\ \text{subject to} \quad A\mathbf{y}_h - B\mathbf{u}_h = 0, \\ \mathbf{u}_h \in U_{ab}. \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{其中: } \mathbf{U}_{ab} = \begin{cases} R^N, & \text{无状态约束条件,} \\ \{\mathbf{u}_h \in R^N : u_a \leq u_i \leq u_b, i=1, \dots, N\}, & \text{盒子约束.} \end{cases}$$

同理一阶最优性条件的离散形式如下:

原约束条件的离散形式:

$$Ay_h = Bu_h, \quad y_h \in R^N, \quad u_h \in R^N,$$

伴随方程(对偶方程)的离散形式:

$$Ap_h = By_h - b, \quad p_h \in R^N,$$

$$\text{其中 } b = \int_{\Omega} y_0 \varphi_i dx, \quad i=1, \dots, N.$$

变分不等式的离散形式:

$$(\alpha(u_h - u_0) + p_h)(v_h - u_h) \geq 0, \quad v_h \in R^N.$$

3 原对偶方法和交替方向乘子法

3.1 原对偶方法

原对偶算法(P-D)是先优化后离散的算法,用起来简单易操作,故收到很多学者青睐。原对偶方法的实质是梯度下降法,故需要求 $f'(u)$ 。在一阶最优性条件中第三个变分不等式右侧的 $\alpha(u_h - u_0) + p_h$ 就是目标函数的全导数^[11]。故基于一阶最优性条件的离散系统,分别构造出问题(1.1)在有、无状态约束条件下的P-D算法。

算法一: 无状态约束条件的 P-D 算法

(1) 给定初值 u_h^0 ;

(2) 由 $Ay_h^1 = Bu_h^0$, 求得 y_h^1 ;

(3) 由 $Ap_h^1 = By_h^1 - b$, 求得 p_h^1 ;

(4) 由 $u_h^1 = u_h^0 - \alpha(u_h^0 - u_0) - p_h^1$, 得出来 u_h^1 ;

(5) 若 $\|u_h^1 - u_h^0\| \leq 10^{-4}$, 则令 $u_h^1 = u_h^*$; 否则,

令 $u_h^1 = u_h^0$, 返回(2)。

算法二: 盒子约束条件的 P-D 算法

(1) 给定初值 u_h^0 ;

(2) 由 $Ay_h^1 = Bu_h^0$, 求得 y_h^1 ;

(3) 由 $Ap_h^1 = By_h^1 - b$, 求得 p_h^1 ;

(4) $u_h^1 = P_{[u_a, u_b]}(u_h^0 - \alpha(u_h^0 - u_0) - p_h^1)$, 得到 u_h^1 。

其中 $P_{[u_a, u_b]}$ 成为投影算子, $P_{[u_a, u_b]}(v(x)) = \max\{u_a, \min(u_b, v(x))\}$;

(5) 若 $\|u_h^1 - u_h^0\| \leq 10^{-4}$, 则令 $u_h^1 = u_h^*$; 否则,

令 $u_h^1 = u_h^0$, 返回(2)。

3.2 交替方向乘子法

交替方向乘子法(ADMM)算法是先离散后优

化的算法,它是基于很多优化算法不断优化得来的,包括对偶上升法,对偶分解以及增广拉格朗日乘子法,且ADMM具有全局收敛性^[12]。

在第二节已经给出了问题(1.1)的离散优化系统(2.4)。为了书写方便,设 $\Phi_1(y_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Ry_h - y_0)^2 dx$,

$$\Phi_2(u_h) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (Ru_h - u_0)^2 dx。则增广拉格朗日函数为:$$

$$L_{\gamma}(y_h, u_h, \lambda) = \Phi_1(y_h) + \Phi_2(u_h) -$$

$$(Ay_h - Bu_h, \lambda) + \frac{\gamma}{2} \|Ay_h - Bu_h\|^2.$$

接下来解决下列的鞍点问题:

$$\min_{y_h, u_h} \max_{\gamma} L_{\gamma}(y_h, u_h, \lambda).$$

由鞍点定理可知:鞍点值 (y_h^*, u_h^*) 与最优的数值解是相等的^[13]。在问题(1.1)无约束条件下,基于ADMM的经典算法^[14],构造出ADMM算法。

算法三: 无状态约束条件的 ADMM 算法

(1) 给定初值 u_h^0, λ^0 ;

(2) 交替迭代计算:

$$y_h^1 = (B^T + \gamma A^T A)^{-1}(c + \gamma A^T Bu_h^0 + A^T \lambda^k);$$

$$u_h^1 = (B^T + \gamma B^T B)^{-1}(\gamma d + \gamma B^T Ay_h^1 - B^T \lambda^k);$$

$$\lambda^1 = \lambda^0 - \gamma(Ay_h^1 - Bu_h^1);$$

(3) 若 $\|u_h^1 - u_h^0\| \leq 10^{-4}$, 则令 $u_h^* = u_h^1, y_h^* = y_h^1$;

否则,令 $u_h^1 = u_h^0, \lambda^1 = \lambda^0$ 回到(2)。

若问题(1.1)在盒子约束条件下,我们需要采取引入辅助函数的方法来计算^[15]。引入辅助函数 z_h ,以及示性函数 $\Pi(z_h)$,设全局变量为 $\omega = (y_h, z_h)$ 。那么把离散后的最优系统写成:

$$\min_{\omega, u_h} \bar{J}(\omega, u_h) = \Psi(y_h, z_h) + \Phi_2(u_h),$$

$$\text{s.t.} \quad Ay_h - Bu_h = 0,$$

$$z_h - u_h = 0,$$

$$\text{其中 } \Pi(z_h) = \begin{cases} 0, & z_h \in U_{ad}^h \\ +\infty, & \text{其他} \end{cases}, \quad \Psi(y_h, z_h) = \Phi_1(y_h) +$$

$\Pi(z_h)$ 。

可知看出上述优化系统与问题(2.4)是等价的。故对这个优化系统进行ADMM求解。同样,写出增广拉格朗日函数:

$$L_{\gamma}(y_h, z_h, u_h, \lambda_1, \lambda_2) = \Phi_1(y_h) + \Pi(z_h) + \Phi_2(u_h) - (Ay_h - Bu_h, \lambda_1) - (z_h - u_h, \lambda_2) + \frac{\gamma}{2} (\|Ay_h - Bu_h\|^2 + \|z_h - u_h\|^2).$$

那么问题(1.1)在盒子约束条件下的ADMM

算法步骤如下:

算法四: 盒子约束条件的 ADMM 算法

(1) 给定初值 $\mathbf{u}_h^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0$;

(2) 交替迭代计算:

$$\mathbf{y}_h^1 = \arg \min_{\mathbf{y}_h} \left(\Phi_1(\mathbf{y}_h) + \frac{\gamma}{2} \| A\mathbf{y}_h - B\mathbf{u}_h^0 - \frac{\lambda_1^0}{\gamma} \|^2 \right);$$

$$\mathbf{z}_h^1 = \arg \min_{\mathbf{z}_h} \left(\Pi(\mathbf{z}_h) + \frac{\gamma}{2} \| A\mathbf{y}_h^1 - B\mathbf{u}_h^0 - \frac{\lambda_2^0}{\gamma} \|^2 \right) =$$

$$\mathbf{P}_{[\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h]} \left(\mathbf{u}_h^0 + \frac{\lambda_2^0}{\gamma} \right);$$

$$\mathbf{u}_h^1 = \arg \min_{\mathbf{y}_h} \left(\Phi_2(\mathbf{u}_h) + \frac{\gamma}{2} \| A\mathbf{y}_h^1 - B\mathbf{u}_h^0 - \frac{\lambda_1^0}{\gamma} \|^2 + \| \mathbf{z}_h^1 - \mathbf{u}_h - \frac{\lambda_2^0}{\gamma} \|^2 \right);$$

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^0 - \gamma(A\mathbf{y}_h^1 - B\mathbf{u}_h^1);$$

$$\lambda_2^1 = \lambda_2^0 - \gamma(z_h^1 - u_h^1);$$

(3) 若 $\|\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0\| \leq 10^{-4}$, 则令 $\mathbf{u}_h^* = \mathbf{u}_h^1, \mathbf{y}_h^* = \mathbf{y}_h^1$;

否则, 令 $\mathbf{u}_h^1 = \mathbf{u}_h^0, \lambda^1 = \lambda^0$ 回到 (2)。

4 数值实验

数值实验分为两种情况, 一种是问题 (1.1) 在无状态约束条件下的情况, 另一种是盒子约束的情况, 每种情况又包括两部分, 分别是:

第一部分为 P-D 以及 ADMM 算法在相同的迭代容许误差下得到的数值误差图像, 设 $h = \frac{1}{32}$, 此部分分别用算法一和算法二来实现。

第二部分为 P-D 以及 ADMM 两种算法的收敛速率的情况, 用 $\|\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}_h^k\|_G$ 来计算, $G = B^T B$ 。为了得到更精确的收敛速率, 这里将 h 足够小, 取 $h = \frac{1}{128}$ 。

算例一: 无状态约束情况

取 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, 设 $\alpha = 1, \gamma = 1, y_0 = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, $u_0 = (2\pi^2 + 1) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, 同时设容许误差为 10^{-4} 。可知真实解 $y^* = y_0, u^* = u_0$ 。

首先取 $h = \frac{1}{32}$, 图 1 表示算法一求解出来的 \mathbf{u}_h^k

的数值解图像, 图 2 表示通过算法一得到的 \mathbf{u}_h^k 的误差图像。

从图 3 易知算法三的收敛速率快于算法一的收敛速率, 即 ADMM 的收敛速率快于 P-D 算法的收敛速率。

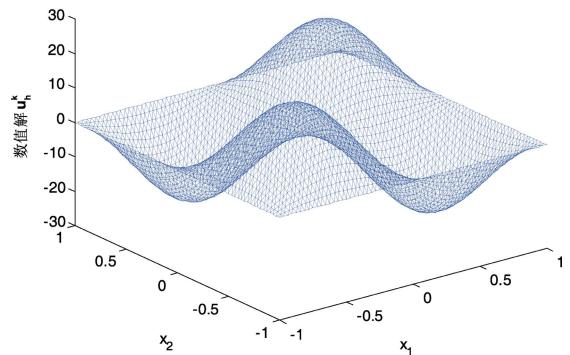


图 1 算法一的 \mathbf{u}_h^k 的数值解图像

Fig.1 The numerical solution of \mathbf{u}_h^k with algorithm1

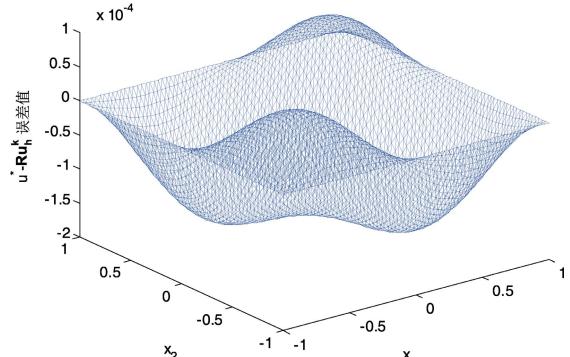


图 2 算法一的 \mathbf{u}_h^k 的误差图像

Fig.2 The error of \mathbf{u}_h^k with algorithm1

然后取 $h = \frac{1}{128}$, 图 3 表示算法一和算法三在

$h = \frac{1}{128}$ 时的收敛速率。

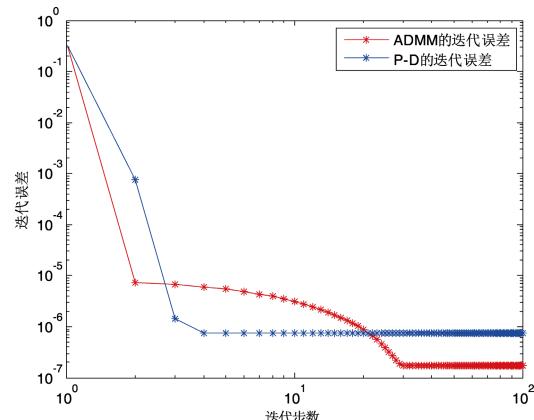


图 3 算法一和算法三的收敛速率对数图像

Fig.3 k-th iteration in log scale with algorithm1 and algorithm3

算例二: 有状态约束条件 (盒子约束) 的情况

$$u \in U_{ab},$$

$$U_{ab} = \{u \mid u_a \leq u \leq u_b\}$$

$$\text{设 } \alpha = 1, u_a = 0, u_b = 5, y_0 = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1), u_0 =$$

$-2(x_1^2 + x_2^2 - 2) + (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$, 可知 $u_0 \in U_{ab}$, 故真解为 $y^* = y_0, u^* = u_0$ 。

首先取 $h = \frac{1}{32}$ 的情况下, 图 4 表示由算法二得出来的 u_h^k 的数值解图像, 图 5 表示通过算法二得出的 u_h^k 的误差图像。

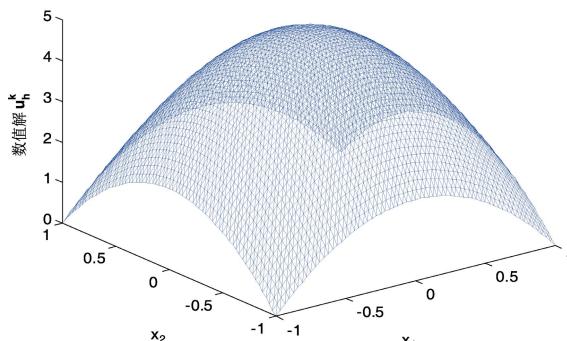


图 4 算法二的 u_h^k 的数值解图像

Fig.4 The numerical solution of u_h^k with algorithm2

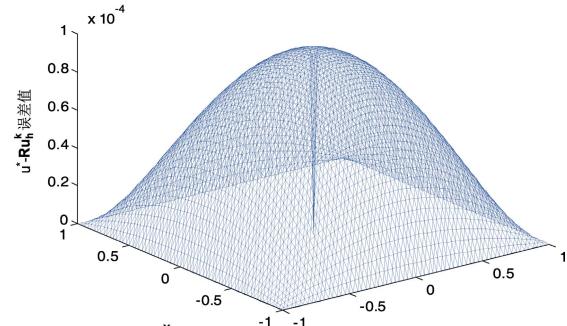


图 5 算法二的 u_h^k 的误差图像

Fig.5 The error of u_h^k with algorithm2

从图 4 可以看出, u_h 数值解是在 U_{ab} 中的, 与盒子约束一致。

最后取 $h = \frac{1}{128}$ 的情况下, 图 6 表示算法二和算法四的收敛速率。

从图 6 易看出算法四的收敛速率快于算法二的收敛速率, 即 ADMM 的收敛速率要比 P-D 的收敛速率快。

5 结论

本论文首次尝试用 P-D 以及 ADMM 两种算法解决了由一种对流扩散方程约束的在有、无状态约束条件情况下的最优控制问题。虽然 P-D 和 ADMM 都是具有全局收敛的一阶收敛算法, 但是通过数值实验可得出 ADMM 要比 P-D 算法的收敛速率快, 因而证实了 ADMM 是一个高效的算法。

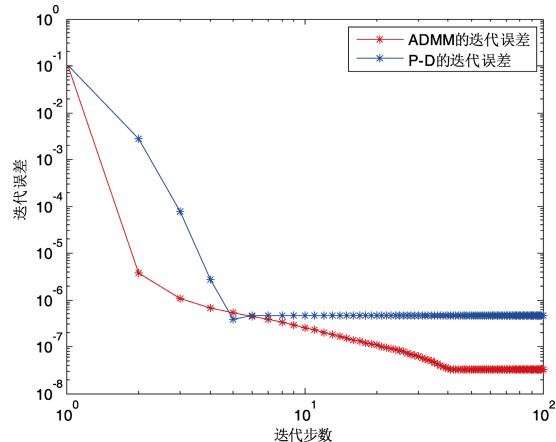


图 6 算法二和算法四的收敛速率对数图像

Fig.6 k-th iteration in log scale with algorithm2 and algorithm4

参考文献

- [1] Lions J L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations[M]. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971, 79.
- [2] GUNZBURGER M D. Perspectives in Flow Control and Optimization[J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(6): B82-B83.
- [3] KUNISCH K, WACHSMUTH D. Sufficient optimality conditions and semi-smooth Newton methods for optimal control of stationary variational inequalities[J]. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2012, 18(02): 520-547.
- [4] BERGOUNIOUX M. Optimal Control of Problems Governed by Abstract Elliptic Variational Inequalities with State Constraints[J]. Siam Journal on Control & Optimization, 1998, 36(1): 273-289.
- [5] 陈小翠, 张小峰. 求解一维对流扩散方程的一种新方法[J]. 武汉大学学报, 2014, 43(1): 10-13.
- [6] IVANON M. Exact solutions of diffusion-convection equations[J]. Dynamics of PDE, 2008, 5(2): 139-171.
- [7] REES T, DOLLAR H S, WATHEN A J. Optimal solvers for PDE-Constrained Optimization[J]. Siam Journal on Scientific Computing, 2010, 32(1): 271-298.
- [8] EVANS L C. Partial Differential Equations[M]. Providence: Amer Math Soc, 2008.
- [9] REYES J C D L. Numerical PDE-Constrained Optimization[M]. Springer International Publishing, 2001, 19(7): 121-163.
- [10] 王烈衡, 许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 科学出版社, 2007, 60-65.
- [11] HEINKENSCHLOSS M. Numerical solution of implicitly constrained optimization problems[R]. Technical Report TR08-08, USA: Rice University, 1892, 1-22.
- [12] ZHANG K, LI J S, SONG Y C, et al. An alternating direction method of multipliers for elliptic equation constrained optimization problem[J]. Science China Mathematics, 2017, 60(2): 1-18.
- [13] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 清华大学出版社, 2005, 33-40.
- [14] HE B S, YUAN X M. On non-ergodic convergence rate of Douglas-Rachford alternating direction method of multipliers[J]. Numerische Mathematik, 2015, 130(3): 567-577.
- [15] BOYD S, PARikh N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends in Machine Learning.