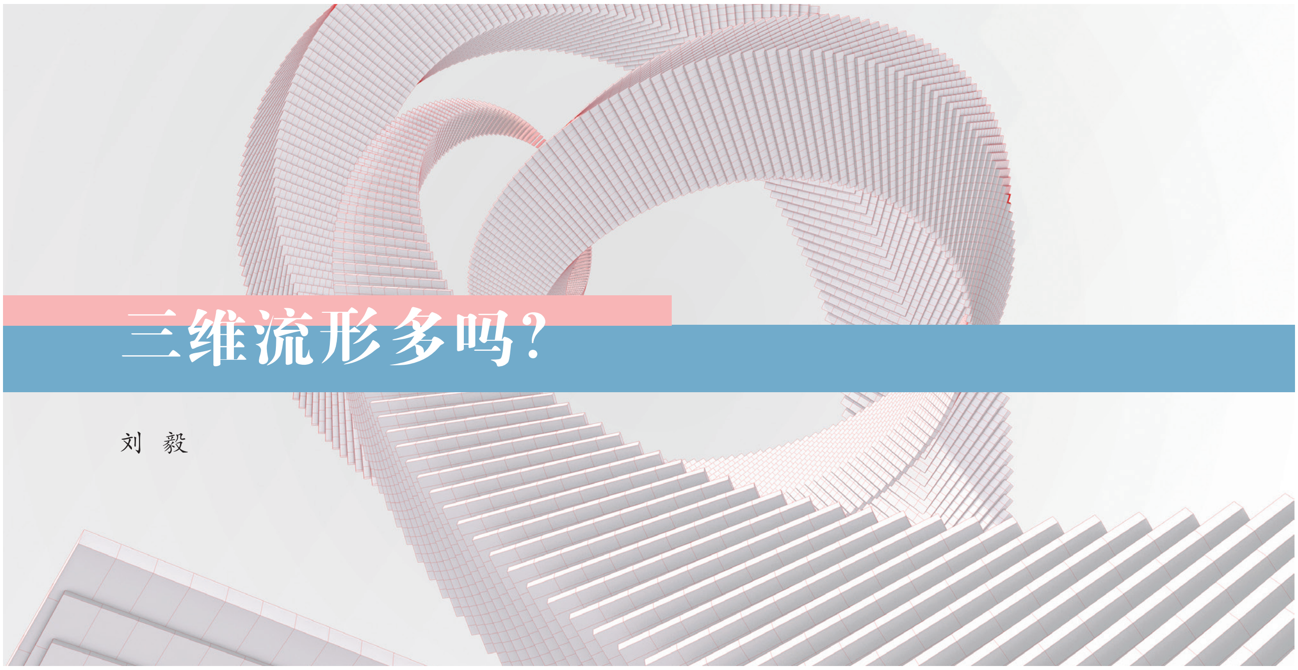


三维流形多吗?

刘 毅

人们认识流形，先于知道它的名字。放大镜下的蚕丝不会被当成蛛网，因为它处处都像线段。在玻璃球、玉镯表面，蚂蚁看着附近都像小的圆盘。我们所观瞻过的太空，无处不像立方体的内部，三维张布，尽管不能由此推断宇宙的形状。数学上，流形（manifold）正是指一类广泛的拓扑空间，它的局部总与某维数的欧氏空间相互同胚。

从庞加莱（Henri Poincaré）为之奠基的时代起，拓扑学就致力于流形的分类。维数从此造成关键的影响。百余年过去，今天的我们知道有一道认识的分水岭，横亘三维、四维之间。低维这侧是大体清晰的理论可计算图景，高维之外是原则上不可能解决的、更辽阔的未知。

本文打算以分类课题为叙事，介绍三维流形的几何化纲领，并且提及它所影响的低维拓扑在后来的重要发展。

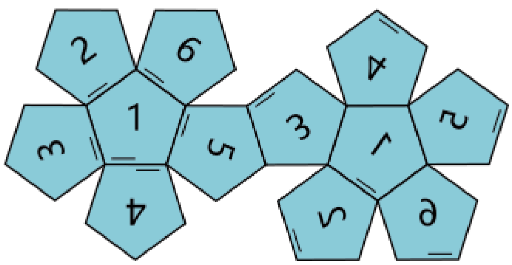
球

让我们从最普通的球讲起。

任意维欧氏空间里都有低一维的、浑圆的球（sphere），它们是到定点距离等于定长的那些点集。二维的球平时就叫球面，一维不过是圆圈。惯常所说的“球体（ball）”，或者说实心球，实际上只是半个真正的三维球，就如同北半球面之于整个地球表面一样。三维往上的球固然超乎直观，我们还是可以依靠数学，类比它们的性质。早在古希腊，欧几里得已经在《现象》一书中利用球面几何的技巧。托勒

密模型将天空分作同心九重的球套。1500 年前后的航海家们凭借四分仪和罗盘，穿过好望角、火地岛险恶的波涛。人们与球打交道的日子是那样长，对它的了解却未必有想象的那样透彻。翻开一部拓扑学史，球的故事甚至连成一串脚印，一直要延伸到还没有开垦的前沿。

你可能尝试过把橡筋圈绷在打足气的篮球上，一松手或者一碰，它就会沿表面收缩到一处。数学的巨人庞加莱也了解这点，并且他注意到较低维的球放在高维球里，也都能连续地形变为一点。他敏锐地猜想：这种现象在拓扑学上完全刻画了球。运用今天的术语，拓扑庞加莱猜想是指对于任意给定的维数，与球同伦等价的流形也一定与球同胚。起初，庞加莱表述得并不准确，但他很快意识到反例，后世称为庞加莱同调球。这是将正十二面体的每组对面彼此粘合得到的三维流形：站在正十二面体外，沿着每根穿过一组对面中心的轴看，前方正朝我们那个面都将逆时针转 36°，接着平行粘贴到后方背对的面(图 1)。庞加莱同调球和三维球并不同胚，但它也伪装得相当巧妙。在今天，庞加莱的例子已经算是拓扑学主要课程的练习，用来展示同调群与同伦群这两种代数型不变量的基本差别。



左图展现了正十二面体一组对面的粘合方式，其余五组对面粘合的规则类似。右图是正十二面体的外表面展开图，完整标记了各组对面的粘合方式。

图 1. 庞加莱同调球

米尔诺（John Milnor）则在 1956 年发现了一个真正神奇的怪球。它和标准的七维球同胚而不光滑同胚，指彼此间存在双向连续的双射，却不存在双向光滑的双射。这也就意味着，怪球与真球上的微积分必定包藏某种整体的差别。从那个时候起，“微分拓扑”正式宣告独立，而不再仅仅是“从微分观点看拓扑”。拓扑庞加莱猜想也由此分裂出一个新的版本，叫做光滑庞加莱猜想，它在原先断言中添上了光滑的要求。虽然结论变得更强，但是米尔诺的例子表明它不能对所有维数成立。

拓扑庞加莱猜想从 1904 年提出到 2003 年变成定理，几乎走过百年。它的完成联系着一串菲尔兹奖的名字：斯梅尔（Stephen Smale）在 1961 年首先证明了七维往上的情形，他的方法很快又推广处理了六维、五维。四维情形在 1982 年由弗里德曼（Michael Freedman）证明。三维的情形是百万美金悬赏的七道千禧问题（Millennium Problems）之一，直到本世纪初才被佩雷尔曼

(Grigori Y. Perelman)猎获。其余维数的成立则是早就清楚的事实。

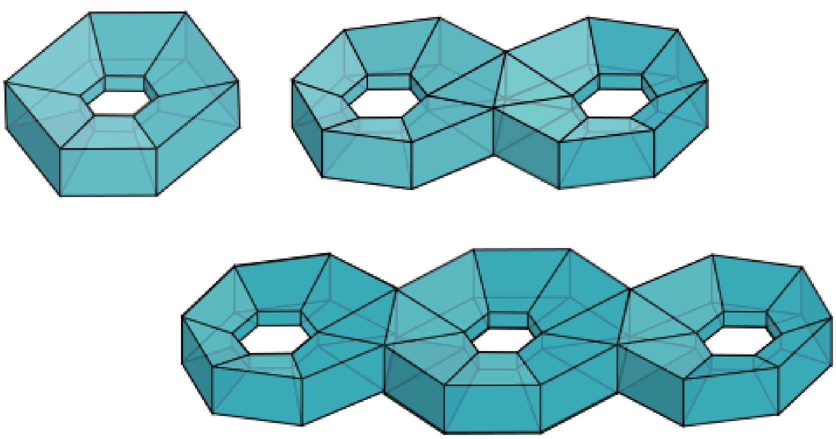
至于光滑版本，人们不久就弄清了米尔诺的怪球其实是总共 28 种的光滑的七维球之一。其它高维球的光滑结构经常也不只一种。2017 年，年轻的中国数学家王国桢、徐宙利证明 61 维球上只有唯一的光滑结构[1]。这是时间较近的前沿结果，涉及稳定同伦群的计算。从而，抛开四维球，光滑庞加莱猜想在不超过 61 维成立的维数已确定为 1，2，3，5，6，12，56 和 61。

四维的光滑庞加莱猜想至今尚无突破。

不可能的分类表

数学家爱好分类，因为分了类的东西可以迭代表来研究。但对不加限制的流形进行分类有点过于困难。当谈论流形时，我们经常把那些写照局部的欧氏空间比喻为地图，所以把它们合起来叫做图汇（atlas），分别叫做图卡（chart）。有的流形，无论怎样的图汇总包含有限张足以覆盖的图卡，同时它又没有哪块区域与别的地带全无邻接。这样的流形就像一个小规模的自治王国，局促但并不支离。数学上管它叫连通紧流形，也时常叫做闭流形。拓扑学首先关心闭流形在同胚等价关系下的分类。

一维的闭流形分类特别简单：它们都与圆圈同胚。二维闭流形又叫闭曲面，分类也不复杂。这时候出现两族：可定向族包括球面，余下的成员都是若干轮



上方左图是(中空的)轮胎面,右图是两个轮胎面的连通和,下方是三个轮胎面的连通和。依此类推，这个序列恰好给出除球面外的全部可定向闭曲面。图中的多边形剖分不是必须的，因为拓扑学关心同胚意义上的分类。

图 2. 轮胎面的连通和

[1] G. Wang and Z. Xu: The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. Ann. Math. 186 (2017), no. 2, 501–580.

胎面的连通和（图 2）；不可定向的另一族，成员们都是若干实射影平面的连通和。闭曲面分类定理的内容今天已进入各种拓扑学基本教材。有时候，人们也用全体整数编号，将二维闭流形（按同胚）取巧罗列，让非负数对应可定向的，让负数对应不可定向的。这样，比如球面的号码就是 0，轮胎面 +1，实射影平面 −1。又比如著名的克莱因瓶，它相当于两条莫比乌斯带将边界彼此粘合，所以号码其实是 −2。不管怎样，对于不超过二维的闭流形，我们总能够愉快地分类。

维数继续往上，挑战变得严峻。这不仅仅是因为流形超出平时的直观。从四维起，还必须把同胚分类与光滑同胚分类区分开来。其实，不论考虑进光滑性也好，暂不理会也好，数学家早就收集了太多的闭流形。它们遍布各个维度，特征相差明显。即使闭流形当真有一张一切维一览表，那也绝对不会还是三两行能够解决的事情。

1958 年，马尔可夫（Aleksandr A. Markov）从根本上否定了四维往上完全分类的可能性。较确切地讲，人们总可设法将闭流形信息输入计算机，比如将它的某个有限图汇存储为数据。但是，对于四维或更高维度，马尔可夫发现不可能编写一个可靠的程序，保证在运行有限步后结束，并算出任意输入的两个闭流形是否同胚。于是，照样也不可能为那些维数的闭流形建立同胚分类表，因为任何数学证明手段都无法排除所有潜在的重复项。

在人类毕竟贫乏的理解力面前，四维往上的闭流形实在多得不可思议。关心那些维数的拓扑学家有必要收缩他们的目标，或者更张议题。一维、二维的流形论下一步则走向自映照、模空间、拓扑量子场论等精细化、关联化的方面。仅剩的三维情形来到上世纪六七十年代，满载丰富的例子、不变量和结构理论。可惜它们还不足以解决先驱们当初为之登程的问题：三维闭流形到底能分类不？

八种几何的零件

洞察的瑟斯顿（William P. Thurston）想到了好主意。

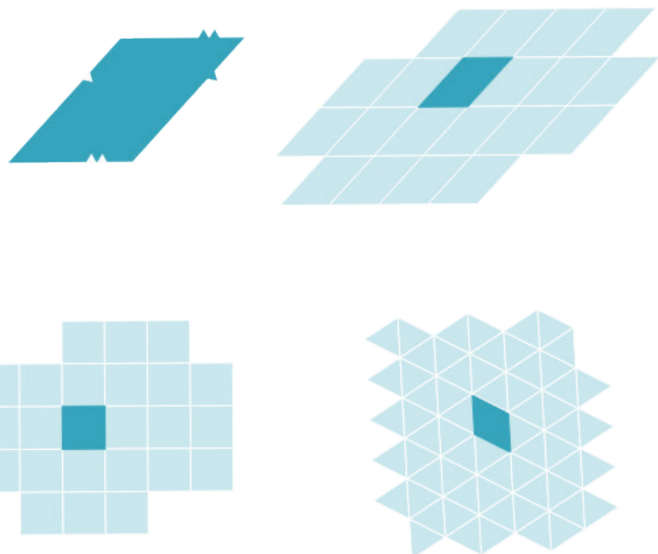
拓扑学家很早就知道一种简单的构造操作：拿两个三维闭流形，分别挖去实心小球，再把裸露出的球面彼此粘贴。这样得到的三维闭流形称为原来两个的连通和。我们也可反过来，尽力把给定的三维闭流形分解成越来越简单的成员的连通和，直到不能继续，除了剥离出越来越多的三维球。无法再分的成员就被称为素流形（prime manifold），犹如自然数里的素数。本质上，三维闭流形的分类归结为素流形的分类。

纯粹拓扑分解的想法或许还能推得更远。比方说，将流形沿着内部的轮胎面切割，甚至沿着更复杂的曲面切割。然而，种种类似的尝试都难免步入相同的困境：既不能进一步分解简化目标，又不能有效刻画当下分解已极的对象。子情形的论证像树一样分叉，却总有一枝指向神秘的“其它”。

瑟斯顿革命性的计划照亮了迷宫的出口。计划的中心思想在于为拓扑装配

上几何。它后来被称为三维拓扑学的几何化纲领（Geometrization Program）。为了领会它的想法，值得重新审视二维的情形，让我们先来看看可定向闭曲面都支持何种形式的几何结构。

球面具有天生的几何，当然就是经典的球面几何。轮胎面可看作由平行四边形的对边平行粘合而成。我们也可以像铺瓷砖一样，用平行四边形镶嵌整个欧氏平面，再将它们彼此平移地等同（图 3）。这样描述与粘合具有同样的效果。在几何学家看来，保持镶嵌不变的所有平移变换组成一个离散群，它作用在欧氏平面上，使轮胎面实现为群作用的轨道空间。由此我们就说轮胎面支持平面欧氏几何的结构。形状不同的平行四边形粘出的轮胎面，有的显得比较细长，有的画不出正交的经纬圈网，不过这类几何学性质暂时不是拓扑学关注的事项。



上方左图里，平行四边形按标记粘合对边，就变成了轮胎面。上方右图用这个平行四边形的拷贝镶嵌了整个平面，从而，轮胎面可视为这些平行四边形以平移方式互相等同起来的结果。下方两图里，平行四边形分别是正方形和由两个正三角形拼成的菱形。它们产生的轮胎面几何结构有所不同。在镶嵌形态上，区别体现为左边具有 90° 旋转对称，而右边具有 120° 旋转对称。

图 3. 平面镶嵌

除了球面和轮胎面，其它的可定向闭曲面（术语说亏格至少为 2 的）既不支持球面几何，也不支持平面欧氏几何。但它们都支持平面双曲几何的结构，也就是说，都能实现为双曲平面在某个离散群保距作用下的轨道空间。

圆球面、欧氏平面和双曲平面分别是所谓的正曲率、零曲率和负曲率二维空间形式。它们也正好是全部的二维瑟斯顿几何。对一般维数，瑟斯顿首先为“几何”（geometry）一词重新赋予了适当的技术含义，使之既不过于狭窄，又能具体处理。他的几何概念基本延续了克莱因（Felix C. Klein）以来的变换群几何学精神。数学上，瑟斯顿几何都是单连通齐性空间，同时又要求空间的变

换群满足几项相当合理的条件。

三维的瑟斯顿几何总共有八种：除了三种常曲率空间形式以外，还有两种是低维几何的乘积，剩下三种则是可缩、非交换的三维实李群。描述的细节并不影响我们的谈论。以八种三维几何为模型，我们又能利用离散群和轨道空间的办法构造大量支持几何结构的三维流形。不同于曲面情形的是，这次它们还没有给出三维闭流形的全部。

几何化纲领断言，可定向素流形总可以沿着内部一组位置良好的、互不相交的轮胎面和克莱因瓶切割，使得余下的每块区域都支持三维几何的八种之一。

七十年代后期，瑟斯顿自己证明了纲领的一类重要情形，即所谓哈肯流形（Haken manifold）的情形。瑟斯顿在 1982 年被授予菲尔兹奖，同年发表的综述包含了他的证明梗概。2003 年，佩雷尔曼的工作运用微分几何学方法，在给出庞加莱猜想证明的同时，也给出了几何化纲领的完全证明。

今天的几何拓扑学家也许会把三维流形想象成组装的玩具积木，总共有八个系列的积木片。其实有七个系列都是过去比较了解的，几何结构多少像新潮的装饰。唯独极其有趣的系列是三维双曲几何。那里的积木片花样如此繁多，以至于在涉及流形结构、性质、关系的研究中，它们常常成为技术上的难点。

把流形认出来

有了几何化，我们终于可以试着回答三维流形的分类问题了。但答案还不是一张有穷的表，而是一串不停被生成的序列。我们能按照确定的计算指令，不重复也不遗漏，逐个写出可定向素流形的全部同胚类型，术语称递归可枚举（recursively enumerable）。这样回答比起普通所理解的分类来还有微妙的不同，大致在于序列没有被刻画为有效的通项式，甚至也没有递推式。

——那几何化用哪儿了呢？那三维算全知道了么？

让我们为此设想这样的场景：一天，当你在苹果树下沉思的时候，某个陌生的三维流形如巧遇般闪现脑海。你很希望知道它是序列中的哪项，想从头比对，可你立即意识到：必须有办法判断陌生流形与序列项是否同胚才行。这时摆在你面前的就是所谓的同胚问题（Homeomorphism Problem）。它是拓扑学理论计算中的一大类算法决定问题（algorithmic decision problem）的典型代表。前文提到，马尔可夫定理表明一般维数的同胚问题在算法意义上不可决定，但三维的情况大为改观。

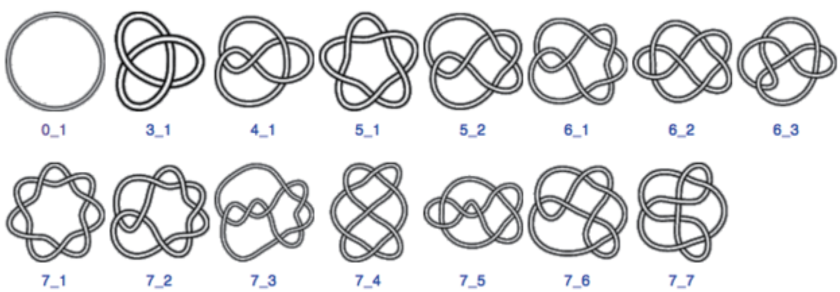
拓扑学中有个重要的代数型不变量，叫基本群（也就是第一同伦群）。除了零散的几种例外，三维闭流形的同胚类型都被基本群的同构类型完全决定。给定三维闭流形（以图汇为数据），我们通常能很快写出基本群的一组生成元和生成关系，从而得到基本群的一个有限表现（finite presentation）。一般来说，任意写下某个群的有限表现，再写下生成元拼成的某个字（word），我们没有办法计算该字是否代表群里的恒等元。术语讲，关于任意有限表现群的字问题（Word Problem）算法上不可决定。

关于三维闭流形基本群的字问题却存在决定算法：白天，我们挨个尝试生

成关系组成的一切字，以期验证所给字代表恒等元；夜晚，我们挨个尝试基本群的一切有限商群，读所给字的剩余类，以期验证所给字不代表恒等元；如此交替。假使那个字果真代表恒等元，我们显然会在某个白天验证成功。否则，我们一定会在某个夜晚验证成功，但这一次很不显然。夜晚进程之所以必停，其依据在于基本群的一项重要性质，称为剩余有限性（residual finiteness）。而事实上，剩余有限性的证明关键恰恰在于几何化图景，在于只有通过几何零件的组装才能完成的归纳。

对于可定向情形，三维闭流形的同胚问题已经完全解决[2]。它的决定算法以字问题的决定算法为基础，要稍微困难一些，特别要使用更多的三维双曲流形知识。不可定向情形在文献中暂无明确结论。

必须承认，以上提到的算法都只有理论可行的意义。它们的复杂度不仅不切实际，而且天马行空。低维拓扑的计算不都是这种风格。不能不提的是威克斯（Jefferey R. Weeks）开发的 SnapPea 程序（图标正是一枚绿色的豌豆荚）。它能够构建三维双曲流形的理想四面体剖分，计算常用不变量的数值近似，意外而惊喜地高效。它被应用在小体积普查、扭结区分等场合，表现十分出色。1998 年，威克斯参与建立的扭结库已包含多至 16 交叉的全部素扭结，总共有 1701936 个[3]。这比早期的计算机辅助扭结表(至多 13 交叉，共 12965 个素扭结）扩充了百余倍，比手工时代最先进的扭结表（至多 11 交叉，共 801 个素扭结）更扩充了不止两万倍。



图中显示了至多 7 交叉的全部素扭结。下方的数字表示它们在罗尔夫森扭结表中的编号。罗尔夫森（Dale Rolfsen）在拓扑学名著《扭结与链环》的附录中列出了至多 10 交叉的扭结表。比如，4_1 表示扭结图最少包括 4 个交叉点的素扭结的第 1 号，这个扭结又叫做 8 字结（figure-eight knot）。它在三维球中的补空间是个重要的三维双曲流形，在可定向的、带尖点的三维双曲流形中是体积最小者。

图 4. 扭结表（图片源自网络）

[2] G. Kuperberg: Algorithmic homeomorphism of 3-manifolds as a corollary of geometrization. Pacific J. Math. 301 (2019), no. 1, 189–241.

[3] J. Hoste, M. Thistlethwaite, and J. Weeks: The first 1,701,936 knots. Math. Intelligencer 20 (1998), no. 4, 33–48.

进入本世纪，趁几何化后短暂的余暇，几何拓扑学在一项精致的课题上又完成一次小小骄傲的登顶。人们确定了体积最小的可定向的闭的三维双曲流形[4]。这个流形在八十年代后期被马特维耶夫、福缅科、威克斯发现，后来被冠以他们的名字（the Matveev-Fomenko-Weeks manifold）。与双曲的理想正四面体相比，它的体积要小不到一成（体积值约等于 0.9427）。无论是它的发现还是求证，都用到高度技巧性的理论估计，还需要大量交给程序的调查、排检。许多数学工作者共同参与其中。两方面时代工艺的结合，加之便捷的学术交流，使我们关于这个流形收获了清楚的知识。

复叠的世界

数学的发展是许多线索穿插、交织而成的。如果把镜头拉回七十年代前期，我们会看见赖利（Robert Riley）拿着打孔卡片出入在南安普敦大学的机房，尝试寻找扭结群的离散忠实表示。与此同时，马尔古利斯（Gregory A. Margulis）在算术群方面的工作正辐射其国际影响，成为讨论班上研读的材料。早些时候建立的刚性定理继续努力扩大它的战果。瑟斯顿则由于赖利的发现，开始认真思考，想要弄清双曲几何和纤维丛之间某种错觉的悖论。几何化猜想的论证草案正在成形。

以今天的眼光来看，当时的人们对于三维双曲流形了解还很不充分。在 1982 年的综述里，瑟斯顿集结了 24 个相关问题，它们后来成为领域的重要驱动。现在，它们中大部分都已解决。这些问题里有四个涉及三维双曲流形的有限复叠，可以归为一组。它们在几何化完整证明后的十年成为舞台的主角。瑟斯顿的四个问题，提法都是“某某拓扑性质能否在有限复叠上得到”。比如，其中一个问题是这样问的：三维双曲流形是不是总以某个哈肯流形为其有限复叠？还记得前文，我们提到瑟斯顿曾经证明哈肯流形的几何化，实际上“是”的回答就将促成当时整个几何化纲领的实现。不过，历史在这里安排了有趣的剧本，反而让几何化成为了解答这些问题的基础。

有两条远来的河流在新世纪灌溉了这些问题的领域。一条起源于局部对称空间的动力系统研究，另一条起源于几何群论。卡恩（Jeremy Kahn）、马尔可维奇（Vladimir Markovic）、怀斯（Daniel T. Wise）等数学家在其中完成了重要的工作。2012 年，建立在怀斯等人设想的纲领基础上，阿戈尔（Ian Agol）一举解决了瑟斯顿关于有限复叠的全部问题[5]。2016 年，他被授予数学突破奖（Breakthrough Prize in Mathematics），正是由于他在低维拓扑与几何群论方面的瞩目贡献。

在后来的日子里，怀斯、阿戈尔等人的工作被推广到几何群论中更多值得

[4] P. Milley: Minimum volume hyperbolic 3-manifolds. J. Topol. 2 (2009), no. 1, 181–192.

[5] M. Aschenbrenner, S. Friedl, and H. Wilton: 3-Manifold Groups. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. ISBN: 978-3-03719-154-5.

关注的群类。卡恩、马尔可维奇的构造方法则大大加强，今天已经能处理包括秩 1 的局部实对称空间、有限体积的三维双曲流形在内的其它情形。三维拓扑与相关领域相互激发。至于三维拓扑本身，有限复叠的世界正在揭开昔日的面纱，不少现象依旧等待探索。有的数学家开始思考它们共同构成的系统，思考它们在多大程度上决定流形的拓扑。三维双曲几何与量子不变量、算术群、规范场论等数学的联系都是引人入胜的话题。

看起来，三维流形既没有多到不可理喻，又没有少到乏味。通过几何化这座桥梁，今天的三维拓扑领域正成为越来越多的数学家来往切磋的地方[6]。

更多相关阅读：

Erika Klarreich: Getting into shapes: from hyperbolic geometry to cube complexes and back. Quanta Magazine, October 2, 2012. https://www.quantamagazine.org/from-hyperbolic-geometry-to-cube-complexes-and-back-20121002

Dale Rolfsen: Knots and Links. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. ISBN: 0-914098-16-0

姜伯驹：《绳圈的数学》，大连理工大学出版社，2011. ISBN: 9787561161449

作者简介：

刘毅，2006 年毕业于北京大学数学院，2012 年获得加州伯克利大学博士学位。现任北京大学北京国际数学研究中心教授。

[6] Donal O'Shea: The Poincaré Conjecture. In Search of the Shape of the Universe. Walker & Company, New York, 2007. x+293 pp. ISBN: 978-0-8027-1532-6; 0-8027-1532-X