



TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR

Réf. : **AF503 V1**

Date de publication :
10 juillet 2002

Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Pierre SPITERI**

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **02/05/2017**

Pour le compte : **7200043660 - centralesupelec // 138.195.79.110**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis

par **Pierre SPITERI**

Docteur ès sciences mathématiques
Professeur à l'École nationale supérieure d'électronique, d'électrotechnique,
d'informatique, d'hydraulique et de télécommunication de Toulouse (ENSEEHT)

1. Présentation générale.....	AF 503 – 2
2. Modélisation d'un problème d'élasticité simple.....	— 2
3. Analyse mathématique du problème	— 5
4. Formulation variationnelle pour diverses EDP monodimensionnelles.	— 7
5. Extension au cas de problèmes d'EDP bidimensionnels	— 9
6. Conclusion	— 13
Références bibliographiques	— 13

Depuis l'avènement des ordinateurs il y a maintenant plus d'un demi-siècle et, compte tenu en particulier de l'augmentation de leur puissance de calcul, la simulation numérique a remplacé l'expérimentation directe trop coûteuse et longue à mettre en œuvre ; celle-ci n'est plus, de nos jours, qu'un moyen de vérification des calculs effectués sur machine. Sur le plan mathématique, la simulation numérique nécessite essentiellement la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles qui conduisent à l'obtention de solutions approchées. Il existe de nombreuses méthodes d'approximation qui présentent toutes des avantages et des inconvénients ; citons, à titre illustratif, la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, les méthodes spectrales, etc.

Dans les **trois articles qui composent cet ensemble**, nous nous intéressons à la **méthode des éléments finis** qui est très utilisée dans l'industrie, en particulier en aéronautique, dans l'industrie automobile, en météorologie, etc. Cette méthode est intéressante, compte tenu de sa souplesse d'utilisation, en particulier vis-à-vis de l'approximation des divers opérateurs modélisant des phénomènes en physique-mathématique et également pour la prise en compte de conditions aux limites portant sur les gradients de la fonction à calculer. Cette souplesse apparaît également dans le fait que les domaines où sont définies les équations aux dérivées partielles peuvent être approchés au mieux et, en particulier, il peut être tenu compte du caractère courbe des frontières de ces domaines ; de plus, les nœuds de la discrétisation, c'est-à-dire les points où sont approchées les fonctions à calculer, peuvent être répartis de façon arbitraire, ce qui permet d'avoir un maillage serré dans les zones à forte variation de la solution et un maillage relativement grossier dans les régions où cette solution varie peu ; dans le même ordre d'idée, il n'est pas nécessaire d'utiliser des maillages uniformes à pas constant, la définition d'éléments de dimension variable s'effectuant sans difficulté ; cela est particulièrement appréciable lors de l'étude des phénomènes définis dans des milieux hétérogènes. Enfin, sur le plan informatique, la méthode des éléments finis conduit à l'écriture de code de calculs les plus généraux possible, ce qui correspond certes à un avantage mais aussi à un inconvénient, compte tenu de la difficulté pratique de programmation de cet algorithme ; il convient de noter cependant que le schéma de principe du code est relativement simple, la complexité découlant des innombrables possibilités qu'offre la méthode. De plus, le développement d'un tel code nécessite de longs mois de programmation.

Une autre difficulté de compréhension de la méthode des éléments finis réside dans le formalisme mathématique préalable et sous-jacent à la mise en œuvre algorithmique. En effet, compte tenu de la complexité croissante des modèles mathématiques permettant la compréhension de phénomènes de plus en plus compliqués à expliquer, il a été nécessaire de s'appuyer sur des résultats d'analyse fonctionnelle élaborés [1] pour formuler cette méthode d'approximation. Paradoxalement, ce cadre conceptuel abstrait permet de ne pas imposer aux solutions éventuelles d'être indéfiniment dérivables mais au contraire de rechercher la dérivabilité minimale que l'on doit imposer afin que les écritures mathématiques aient un sens. Cela permet d'obtenir une formulation du problème qui peut s'interpréter sur le plan physique soit comme la solution d'un problème de minimisation d'énergie, à condition toutefois que certaines propriétés de symétrie soient vérifiées (ce qui n'est pas toujours le cas), soit grâce à une analogie avec le classique théorème des travaux virtuels. Ce second point de vue a été préféré à l'aspect minimisation du fait de sa plus grande facilité d'exposition et de sa plus grande généralité. Cette partie théorique sera abordée de manière progressive, les aspects conceptuels étant essentiellement exposés en dimension un mais de telle sorte que la généralisation à la dimension deux ou trois s'effectue de manière naturelle.

Il convient de noter pour terminer que la mise en œuvre informatique n'a pas été volontairement abordée dans la mesure où la présentation de l'implantation de cette méthode aurait considérablement alourdi l'exposé ; cependant les aspects abordés dans cet article facilitent la compréhension des phases de programmation de la méthode des éléments finis.

Cet ensemble se compose de trois articles :

- [AF 503] *Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis* ;
- [AF 504] *Introduction à la méthode des éléments finis* ;
- [AF 505] *Présentation générale de la méthode des éléments finis*.

1. Présentation générale

La méthode des éléments finis est une **méthode d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles** qui est construite à partir d'une formulation équivalente du problème à résoudre ; cette dernière est appelée **formulation variationnelle du problème** et nécessite le minimum de régularité de la solution.

Cette phase de transformation du problème est certainement la plus délicate et la plus difficile à traiter car, en toute rigueur, elle nécessite l'utilisation de notions mathématiques très fines et très abstraites, comme la théorie des distributions. Dans cet article, nous nous sommes efforcés d'aplanir les difficultés en considérant pour commencer d'une part la modélisation d'un problème simple, ce qui permet de vérifier l'équivalence de la formulation de divers problèmes, et d'autre part des équations aux dérivées partielles définies dans un domaine Ω monodimensionnel. La généralisation à des domaines inclus dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 s'effectue en toute rigueur grâce à l'utilisation de la théorie des distributions ; pour notre part, nous avons préféré utiliser la **formule de Green**, qui généralise la formule d'intégration par parties utilisée dans le cas précédent simple où $\Omega \subset \mathbb{R}$. Par ailleurs, la formulation variationnelle d'une équation aux dérivées partielles nécessite l'utilisation d'espaces fonctionnels, les **espaces de Sobolev**, que nous définissons de la façon la plus simple possible ; ces espaces sont importants car ils rendent compte en fait de la régularité des fonctions à approcher au mieux. Enfin on donne quelques indications sur la formulation du problème d'équation aux dérivées partielles qui, dans certains cas, peut s'exprimer sous forme d'un problème d'optimisation, ce qui conduit à la **méthode de Ritz**, que nous ne développerons pas ici.

2. Modélisation d'un problème d'élasticité simple

On considère une corde élastique de longueur unité, fixée en ses extrémités, qui au repos occupe une position qui coïncide avec l'axe Ox . On soumet cette corde à une force de densité par unité de longueur $f(x)$ dont la direction est perpendiculaire à l'axe Ox . Sous l'effet de cette force, la corde subit un déplacement $u(x)$, perpendiculaire à l'axe Ox . Dans la suite, on supposera que ce déplacement est petit. Le problème revient à déterminer $u(x)$, en tous points $x \in]0, 1[$. Soit $E(v)$ l'énergie totale du système mécanique considéré pour un déplacement v de la corde. On sait que le déplacement $u(x)$ minimise $E(v)$ pour tous les déplacements admissibles, c'est-à-dire pour tous les déplacements nuls aux points $x = 0$ et $x = 1$, tels que l'énergie $E(v)$ ait un sens physique, c'est-à-dire que $E(v)$ soit finie. Soit V l'espace des déplacements admissibles, c'est-à-dire l'espace qui rend compte des contraintes du problème, à savoir :

$$v \in V \Leftrightarrow v(0) = v(1) = 0 \text{ et } E(v) < +\infty \text{ (énergie finie)}$$

L'énergie $E(v)$ est la somme de l'énergie de déformation E_D et de l'énergie potentielle E_P dérivant de la force $f(x)$ pour un déplacement $v \in V$. Écrivons en détail le bilan d'énergie : l'énergie E_D est l'énergie des contraintes intérieures et l'on sait qu'elle est proportionnelle à la variation de la longueur de la corde ; par conséquent, cette quantité est donnée par la relation :

$$E_D(v) = A \int_0^1 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} - 1 \right) dx, \forall v \in V$$

avec A coefficient de proportionnalité strictement positif.

L'énergie potentielle E_p est donnée par :

$$E_p(v) = - \int_0^1 f v dx, \forall v \in V$$

le signe négatif traduisant l'antagonisme entre l'énergie interne du système et l'énergie potentielle.

Par conséquent, l'énergie totale $E(v)$ s'écrit :

$$E(v) = A \int_0^1 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} - 1 \right) dx - \int_0^1 f v dx, \forall v \in V$$

soit encore, en adoptant des notions plus générales :

$$E(v) = A \int_0^1 \left(\sqrt{1 + |\nabla v|^2} - 1 \right) dx - \int_0^1 f v dx, \forall v \in V$$

avec $\nabla v = \text{grad}(v)$ gradient de la fonction v .

Or, on a fait l'hypothèse des petits déplacements, c'est-à-dire que l'on a supposé que la fonction v ainsi que ses variations $\frac{dv}{dx}$ sont

petites ; si nous posons $\varepsilon = \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$, sous l'hypothèse précédente, on a donc $\sqrt{1 + \varepsilon} - 1 \approx \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$ et, dans ce contexte, $E(v)$ est remplacée par la fonctionnelle $J(v)$ définie par :

$$E(v) \approx J(v) = \frac{A}{2} \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 f v dx, \forall v \in V$$

Notons que, plus généralement, on peut écrire $J(v)$ sous la forme :

$$J(v) = \frac{A}{2} \int_0^1 |\nabla v|^2 dx - \int_0^1 f v dx, \forall v \in V$$

Pour terminer la modélisation du problème précédent d'élasticité, nous allons essayer de préciser au plan mathématique la définition de l'espace des déplacements admissibles V , en reliant ce dernier aux espaces fonctionnels les plus classiques qui prennent en compte la réalité physique du problème considéré, en particulier le plus simple d'entre eux, l'espace $L^2([0, 1])$ des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$ dont nous rappelons la définition :

$$L^2([0, 1]) = \left\{ v \mid \int_0^1 v^2(x) dx < +\infty \right\}$$

Si l'on considère la première intégrale définissant $J(v)$, on constate que l'énergie de déformation sera finie à condition que $\frac{dv}{dx} \in L^2([0, 1])$; de plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut majorer l'expression de l'énergie potentielle par :

$$E_p(v) = \int_0^1 f v dx \leq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx} \sqrt{\int_0^1 v^2 dx}$$

et, par conséquent, l'énergie potentielle du système aura un sens si les fonctions f et v sont des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$.

Remarque

Dans la majoration précédente, nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz par abus en supposant implicitement que l'espace des déplacements admissibles était un espace préhilbertien, ce que l'on peut vérifier a posteriori.

En résumé, l'espace V des déplacements admissibles est inclus dans l'espace W défini par :

$$V \subset W = \left\{ v \in L^2([0, 1]), \frac{dv}{dx} \in L^2([0, 1]) \right\}$$

cet espace W étant défini dans la littérature comme l'espace de Sobolev d'ordre 1 noté traditionnellement par $H^1([0, 1])$, notation que nous conserverons désormais dans toute la suite. De plus, le déplacement de la corde étant nul en les points $x = 0$ et $x = 1$, l'espace V des déplacements admissibles est donc :

$$V = \left\{ v \in L^2([0, 1]), \frac{dv}{dx} \in L^2([0, 1]), v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

$$\text{Soit : } V = \left\{ v \in H^1([0, 1]), v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

cet espace est également noté $H_0^1([0, 1])$ dans la littérature et on a l'inclusion :

$$H_0^1([0, 1]) \subset H^1([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$$

Remarque

À ce stade de l'exposé, on peut effectuer une première remarque qui peut être omise en première lecture. En effet, sans vouloir insister exagérément sur les notions d'analyse fonctionnelle [2], il convient de noter que les espaces $H^1([0, 1])$ et $H_0^1([0, 1])$ possèdent, comme l'espace $L^2([0, 1])$, une structure d'espace de Hilbert, c'est-à-dire une structure d'espace vectoriel normé complet, cette dernière propriété signifiant simplement que toute suite de Cauchy admet une limite qui appartient à l'espace. Il convient de préciser que l'espace $L^2([0, 1])$ d'une part et les espaces $H^1([0, 1])$ et $H_0^1([0, 1])$ ne sont pas munis, en tant qu'espaces vectoriels normés, de la même norme ; en effet on note par :

$$\|v\|_{0, [0, 1]} = \sqrt{\int_0^1 v^2(x) dx}$$

la norme définie dans l'espace $L^2([0, 1])$, et par :

$$\|v\|_{1, [0, 1]} = \sqrt{\int_0^1 \left(v^2(x) + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) dx}$$

celle définie dans les espaces $H^1([0, 1])$ et $H_0^1([0, 1])$.

En fait, l'espace $L^2([0, 1])$ des fonctions de carré intégrable est construit, dans les cours de mathématiques, comme le complété de l'espace $C([0, 1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$; par ailleurs, l'inclusion $H^1([0, 1]) \subset C([0, 1])$ est vraie en dimension un, mais n'est pas vraie en général quelle que soit la dimension d'espace. Ces considérations ne sont pas superflues ; elles donnent des indications sur la régularité des fonctions manipulées, régularité qui aura un impact sur la qualité de l'approximation obtenue lorsque l'on discrétise des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis. Le lecteur est renvoyé à [3] pour un complément d'information.

On peut à présent formuler le problème de détermination du déplacement de la corde comme le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in H_0^1([0, 1]) \end{cases} \quad (1)$$

Posons :

$$a(u, v) = A \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx$$

où l'application $(u, v) \rightarrow a(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique définie sur $H_0^1([0, 1]) \times H_0^1([0, 1])$ et $v \rightarrow L(v)$ est une forme linéaire définie sur $H_0^1([0, 1])$.

Avec ces notations, on a alors :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

Il peut être difficile de travailler directement sur le problème de minimisation ; c'est pourquoi, dans la suite, nous allons donner deux formes équivalentes de ce même problème, l'une permettant de caractériser la solution du problème de minimisation et l'autre d'interpréter la solution de ce problème comme celle d'une équation aux dérivées partielles linéaire.

Théorème 1. Toute solution du problème d'optimisation (1) est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1([0, 1]) \end{cases} \quad (2)$$

Preuve ♦

1 – Soit u la solution du problème (1) et $v = u + \varepsilon w$, où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $w \in H_0^1([0, 1])$.

La somme de deux fonctions de carré intégrable étant évidemment de carré intégrable, il en résulte que la fonction v est de carré intégrable ; de même les dérivées des fonctions u et w étant de carré intégrable, la dérivée de v est également de carré intégrable ; comme de plus $v(0) = (u + \varepsilon w)(0) = 0$ et que, de même $v(1) = (u + \varepsilon w)(1) = 0$, il en résulte que $v \in H_0^1([0, 1])$; u étant solution du problème d'optimisation et v une fonction quelconque de $H_0^1([0, 1])$, on a, compte tenu de la symétrie de la forme bilinéaire :

$$J(u) \leq J(u + \varepsilon w) \Rightarrow J(u) \leq J(u) + \varepsilon (a(u, w) - L(w)) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(w, w), \quad \forall w \in H_0^1([0, 1])$$

soit encore :

$$0 \leq \varepsilon (a(u, w) - L(w)) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(w, w), \quad \forall w \in H_0^1([0, 1])$$

Le nombre ε étant un nombre réel de signe quelconque, de deux choses l'une :

— soit ε est positif et, après simplification par ε et si de plus $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs positives, on a :

$$0 \leq a(u, w) - L(w), \quad \forall w \in H_0^1([0, 1])$$

— soit ε est négatif et, après simplification par ε et si de plus $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs négatives, on a :

$$0 \geq a(u, w) - L(w), \quad \forall w \in H_0^1([0, 1])$$

On arrive donc à une incompatibilité entre ces deux inéquations et la seule possibilité est l'égalité, donc u est solution du problème (2).

2 – Réciproquement soit u solution à présent du problème (2) ; v étant un élément quelconque de $H_0^1([0, 1])$, on peut toujours écrire que $J(v) = J(u + (v - u))$, ce qui, compte tenu de la bilinéarité de $a(\cdot, \cdot)$ et de la linéarité de $L(\cdot)$, entraîne après quelques calculs simples :

$$J(v) = J(u) + (a(u, v - u) - L(v - u)) + \frac{1}{2} a(v - u, v - u), \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

Or, u étant solution du problème (2), le terme $a(u, v - u) - L(v - u)$ est nul, donc :

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2} a(v - u, v - u), \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

or :

$$a(v - u, v - u) = A \int_0^1 \left(\frac{d(v - u)}{dx} \right)^2 dx \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

et, par conséquent, cette quantité étant positive, on a $J(u) \leq J(v)$, $\forall v \in H_0^1([0, 1])$, et u est bien solution du problème de minimisation (1). Pour terminer, il convient de noter que $J(v) = J(u)$ si $a(v - u, v - u) = 0$, pour $v \in H_0^1([0, 1])$, ce qui entraîne $\frac{d(v - u)}{dx} = 0$, soit $(v - u)(x) = \text{Cte}$ pour tout $x \in [0, 1]$; or $(v - u)(0) = (v - u)(1) = 0$, donc la constante est nulle et on a donc $J(v) = J(u)$ lorsque $v = u$, ce qui termine la preuve. ♦

Remarque

La formulation (2) du problème équivalent au problème d'optimisation correspond à l'application du théorème des travaux virtuels en mécanique, le déplacement virtuel étant ici la fonction test v .

Remarque

À ce stade de l'exposé, il est important de noter que la norme :

$$v \rightarrow \|v\|_{1, [0, 1]} = \sqrt{\int_0^1 \left(v^2(x) + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) dx}$$

introduite dans les espaces $H^1([0, 1])$ et $H_0^1([0, 1])$, correspond en fait, à un coefficient de proportionnalité près, à la forme bilinéaire introduite dans la formulation faible associée à l'équation.

Corollaire 1. Si la solution du problème (1) existe, elle est unique.

Preuve ♦ Il suffit de raisonner par l'absurde et de supposer que u_1 et u_2 , avec $u_1 \neq u_2$, sont solutions du problème ; en reprenant la fin de la preuve du théorème précédent, on conclut que :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \blacklozenge$$

On peut caractériser la solution du problème d'optimisation (1), comme la solution d'un problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes ; en effet, on a le résultat suivant :

Théorème 2. Soit $u \in H_0^1([0, 1])$, la solution du problème (1) (ou (2)). On suppose de plus que u est deux fois continûment différentiable sur $[0, 1]$. Alors u est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -A \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Preuve ♦ En effet u étant solution du problème (1), u est solution du problème (2) et l'on a :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

soit :

$$A \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

On peut calculer la première intégrale en effectuant une intégration par parties, ce qui conduit à :

$$A \frac{du(1)}{dx} v(1) - A \frac{du(0)}{dx} v(0) - A \int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx = \int_0^1 f v dx, \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(-A \frac{d^2 u}{dx^2} - f \right) v dx = 0, \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

ce qui entraîne :

$$-A \frac{d^2 u}{dx^2} = f, \forall x \in]0, 1[\quad (4)$$

Comme, de plus, $u \in H_0^1([0, 1])$, on a $u(0) = u(1) = 0$ et u est bien solution du problème (3).

Réciproquement considérons l'équation (4) ; multiplions cette relation par $v \in H_0^1([0, 1])$ et intégrons par rapport à $x \in [0, 1]$; en remontant les calculs précédents, c'est-à-dire en effectuant une intégration par parties, il vient :

$$A \frac{du(0)}{dx} v(0) - A \frac{du(1)}{dx} v(1) + A \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx, \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

Or $v \in H_0^1([0, 1])$, ce qui entraîne $v(0) = v(1) = 0$, et u est donc bien solution du problème (2). ♦

Remarque

Les problèmes (1), (2) et (3) sont donc équivalents. Pour la formulation (3), qui nécessite des hypothèses de régularité plus fortes, on dit que u est solution au sens fort du problème. Dans la formulation (2) du problème, les dérivées secondes des fonctions n'apparaissent pas ; cette formulation (2) a donc un sens même si u n'est pas deux fois continûment différentiable. On a donc affaibli le problème et la solution du problème (2) est dite **solution faible** du problème.

Remarque

La formulation (2) du problème s'appelle aussi formulation variationnelle du problème. La démarche suivie au cours de la réciproque du théorème 2, à savoir multiplication de l'équation aux dérivées partielles par une fonction test appropriée et intégration par partie sur tout le domaine Ω où est définie l'EDP, constitue la mise sous forme variationnelle du problème. Cette démarche est préalable à l'approximation par la méthode des éléments finis d'une équation aux dérivées partielles. Nous verrons dans les sous-paragraphe suivants le caractère général de la démarche.

Remarque

Pour construire des schémas aux différences finies, on utilise la formulation forte du problème. Pour construire des schémas aux éléments finis, on utilise la formulation faible du problème.

3. Analyse mathématique du problème

On a implicitement supposé, lors de l'énoncé des théorèmes 1 et 2, que la solution du problème existait ; on a ensuite montré avec le résultat du corollaire 1 que, si elle existait, cette solution était unique. C'est un aspect important qui est ici soulevé, car cela permet une validation partielle du modèle retenu dans la mesure où le physicien considère toujours empiriquement que le phénomène qu'il étudie a une solution unique. Il est certain que l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème d'EDP est difficile et dépasse largement le cadre de cet article. Cependant, dans le cas du problème modèle, on peut déduire, relativement simplement, grâce à l'équivalence des formulations du problème étudié, l'existence et

l'unicité de la solution du problème de minimisation (1) ; cette question peut cependant ne pas être abordée en première lecture, auquel cas le lecteur est renvoyé au paragraphe 4. De plus, les critères que nous dégagerons seront utiles dans la suite de l'exposé. Nous aurons besoin, pour minimiser une fonctionnelle, de calculer sa dérivée ; nous donnons ci-dessous la définition de la dérivée généralisée valable dans des espaces de dimension infinie, ce qui correspond au cas considéré dans la mise sous forme variationnelle d'une EDP.

Définition 1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et J une application définie sur un domaine $D \subset E$ et à valeurs dans F . L'application J est F -différentiable (ou différentiable au sens de Fréchet) en tout point u de l'intérieur du domaine D , s'il existe un opérateur linéaire continu A de E dans F , tel que

$$J(u+h) = J(u) + \langle A, h \rangle + \|h\|_E \varepsilon(h), \forall h \in E$$

avec $\lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_F = 0$

L'opérateur linéaire A , noté encore J' , est appelé F -dérivée de J au point u et sera noté $J'(u)$

Remarque

On montre que si l'application J est F -différentiable au point u , elle est alors continue en ce point. De plus on montre que la F -dérivée, si elle existe, est unique (voir [4]).

Définition 2. Soit Ω un ouvert de l'espace vectoriel E . On dit que l'application $J : \Omega \subset E \rightarrow F$ est dérivable dans Ω , si elle est F -différentiable en tout point u de Ω .

On définit de manière analogue les dérivées d'ordre supérieur ; en fait, nous n'aurons besoin que de la notion de dérivée seconde :

Définition 3. Soit $J : \Omega \subset E \rightarrow F$ une application F -dérivable sur l'ouvert Ω . Si l'application dérivée J' est F -différentiable en un point $u \in \Omega$, sa dérivée, notée $J''(u)$, est appelée F -dérivée seconde de l'application J au point u , et on dit que l'application J est deux fois F -différentiable au point u .

Exemple 1. Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans \mathbb{R} et $L(\cdot)$ une forme linéaire de E dans \mathbb{R} ; soit J une fonctionnelle de E dans \mathbb{R} définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

alors on a :

$$J(v+h) = J(v) + a(v, h) - L(h) + \frac{1}{2} a(h, h)$$

ce qui implique, par les définitions précédentes, que :

$$\langle J'(v), h \rangle = a(v, h) - L(h) \text{ et } \langle J''(v), h, h \rangle = a(h, h)$$

Ces expressions seront très utiles pour l'étude des problèmes d'EDP mis sous forme variationnelle.

Par ailleurs nous définissons, également, des propriétés de régularité de la fonctionnelle à minimiser.

Définition 4. Un ensemble D_0 est convexe si et seulement si :

$$\forall x \in D_0, \forall y \in D_0, \forall \theta \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (\theta x + (1-\theta)y \in D_0)$$

Remarque

Autrement dit, dans un domaine convexe, si deux points x et y appartiennent à l'ensemble D_0 , alors le segment qui joint ces deux points est également contenu dans l'ensemble D_0 .

Définition 5. Soit E un espace vectoriel normé. Une fonctionnelle $J : D_0 \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est :

— convexe sur le domaine convexe D_0 si :

$$\forall u \in D_0, \forall v \in D_0, \forall \theta \in]0, 1[\subset \mathbb{R},$$

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$$

— strictement convexe sur le domaine convexe D_0 si :

$$\forall u \in D_0, \forall v \in D_0, u \neq v, \forall \theta \in]0, 1[\subset \mathbb{R},$$

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) < \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$$

— uniformément convexe sur le domaine convexe D_0 s'il existe une constante $c > 0$, telle que :

$$\forall u \in D_0, \forall v \in D_0, \forall \theta \in]0, 1[\subset \mathbb{R},$$

$$\theta J(u) + (1 - \theta)J(v) - J(\theta u + (1 - \theta)v) \geq c\theta(1 - \theta)\|u - v\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme sur E .

Remarque

La notion de convexité correspond à une propriété de régularité de la fonctionnelle, moins particulière que la notion de linéarité.

Remarque

Il est clair que la convexité uniforme entraîne la convexité stricte qui, à son tour, entraîne la convexité ; la réciproque n'est pas vraie.

Nous aurons besoin, dans la suite, d'un résultat technique classique, connu sous le nom d'**inégalité de Poincaré** :

Lemme 1. Soit v une application continue et dérivable, dont la dérivée est continue, et définie sur l'ensemble $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Si $v(a) = v(b) = 0$ ou si $v(a) = 0$ ou encore $v(b) = 0$, il existe une constante notée $C(\Omega)$ telle que :

$$\|v\|_{0, [a, b]} \leq C(\Omega) \left\| \frac{dv}{dx} \right\|_{0, [a, b]}$$

où $\|\cdot\|_{0, [a, b]}$ désigne la norme dans $L^2([a, b])$.

Preuve ♦ En effet, dans les deux premiers cas, on a

$$v(x) = \int_a^x \frac{dv}{dt} dt$$

soit encore en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|v(x)| \leq \left| \int_a^x \frac{dv}{dt} dt \right| \leq \int_a^x \left| \frac{dv}{dt} \right| dt \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^x \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C(\Omega)} \left\| \frac{dv}{dx} \right\|_{0, [a, b]}$$

En élevant au carré et en intégrant par rapport à x , il vient :

$$\|v\|_{0, [0, 1]}^2 = \int_a^b |v(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \left\| \frac{dv}{dx} \right\|_{0, [a, b]}^2$$

qui est l'inégalité cherchée. Dans le cas où $v(b) = 0$, on se ramène aisément à l'un des deux cas précédents. ♦

Exemple 2. Soit J une fonctionnelle de $E = H_0^1([0, 1])$ dans \mathbb{R} définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$, où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique de $H_0^1([0, 1]) \times H_0^1([0, 1])$ dans \mathbb{R} définie par :

$$a(u, v) = A \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

et $L(\cdot)$ une forme linéaire de $H_0^1([0, 1])$ dans \mathbb{R} . Un calcul direct simple permet de constater que pour $\theta \in]0, 1[$, on obtient :

$$\theta J(u) + (1 - \theta)J(v) - J(\theta u + (1 - \theta)v) = \frac{\theta(1 - \theta)}{2} a(u - v, u - v)$$

En travaillant dans l'espace $H_0^1([0, 1])$, on est dans les hypothèses du lemme 1 et on peut appliquer l'inégalité de Poincaré ; en effet on a :

$$a(u - v, u - v) = A \left\| \frac{d(u - v)}{dx} \right\|_{0, [0, 1]}^2 = \frac{A}{2} \left\| \frac{d(u - v)}{dx} \right\|_{0, [0, 1]}^2 + \frac{A}{2} \left\| \frac{d(u - v)}{dx} \right\|_{0, [0, 1]}^2$$

ce qui implique la minoration suivante :

$$a(u - v, u - v) \geq \inf \left(\frac{A}{2}, \frac{A}{2C[0, 1]} \right) \|u - v\|_{1, [0, 1]}^2 = c \|u - v\|_{1, [0, 1]}^2$$

ce qui implique bien l'uniforme convexité de la fonctionnelle $J(v)$.

Définition 6. Une fonctionnelle $J : D_0 \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est infinie à l'infini si $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = +\infty$.

Cette propriété est importante car elle garantit l'existence d'un minimum de J (cf. [4]), et nous admettrons le résultat suivant.

Théorème 3. Soit E un espace vectoriel normé et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue. Alors si J est infinie à l'infini, J admet au moins un minimum sur E .

Exemple 3. Soit J une fonctionnelle de $E = H_0^1([0, 1])$ dans \mathbb{R} définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique de $H_0^1([0, 1]) \times H_0^1([0, 1])$ dans \mathbb{R} définie par :

$$a(u, v) = A \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

et $L(\cdot)$ une forme linéaire de $H_0^1([0, 1])$ dans \mathbb{R} donnée par

$L(v) = \int_0^1 f v dx$, où $f \in L^2([0, 1])$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a avec les notations précédentes :

$$L(v) \leq |L(v)| \leq \|f\|_{0, [0, 1]} \|v\|_{0, [0, 1]} \leq \|f\|_{0, [0, 1]} \|v\|_{1, [0, 1]}$$

car la définition des normes dans $L^2([0, 1])$ et $H_0^1([0, 1])$ implique évidemment $\|v\|_{0, [0, 1]} \leq \|v\|_{1, [0, 1]}$. De plus, grâce au résultat développé dans l'exemple 2, on a : $a(v, v) \geq c \|v\|_{1, [0, 1]}^2$ et, par conséquent :

$$J(v) \geq \left(c \|v\|_{1,[0,1]} - \|f\|_{0,[0,1]} \right) \|v\|_{1,[0,1]}$$

et, lorsque $\|v\|_{1,[0,1]}$ est une quantité suffisamment grande, la quantité $\left(c \|v\|_{1,[0,1]} - \|f\|_{0,[0,1]} \right)$ est positive, ce qui montre que la fonctionnelle est infinie à l'infini et, compte tenu du résultat du théorème 3, assure l'existence d'une solution au problème de la minimisation de la fonctionnelle $J(v)$ dans $H_0^1([0,1])$

Le problème de l'existence d'un minimum de la fonctionnelle $J(v)$ étant résolu, il reste à régler celui de l'unicité, ainsi que celui de la caractérisation de la solution ; citons le résultat suivant (cf. [4]) :

Théorème 4. Soit $J(v)$ une fonctionnelle strictement convexe ; alors la solution du problème :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^1([0,1]) \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in H_0^1([0,1]) \end{cases}$$

est unique. De plus si la fonctionnelle est F -dérivable, la solution u est caractérisée par l'équation d'Euler suivante :

$$J'(u) = 0$$

L'application de ce résultat au problème modèle est immédiate car, $J(v)$ étant uniformément convexe grâce au résultat présenté dans l'exemple 2, elle est strictement convexe. De plus, compte tenu du résultat établi dans l'exemple 1, l'équation d'Euler se résume ici à :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1([0,1])$$

qui correspond à la formulation variationnelle du problème d'EDP. Il convient de noter que les résultats précédents impliquaient implicitement que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ soit symétrique. Le théorème de Lax-Milgram que nous admettrons sans démonstration (cf. [5]), donne un résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat nécessite l'introduction de deux notions nouvelles.

Définition 7. Une forme bilinéaire $a(u, v)$ définie sur un espace de Hilbert E est continue si :

$$a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|, \forall u \in E, \forall v \in E$$

avec M constante indépendante de u et de v ,
 $\| \cdot \|$ norme sur E .

Définition 8. Une forme bilinéaire $a(u, v)$ définie sur un espace de Hilbert E est coercive (ou E -elliptique) si :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in E$$

avec α constante indépendante de v ,
 $\| \cdot \|$ norme sur E .

Définition 9. Une forme linéaire $L(v)$ définie sur un espace de Hilbert E est continue si :

$$|L(v)| \leq c \|v\|, \forall v \in E$$

avec c constante indépendante de v ,
 $\| \cdot \|$ norme sur E .

On peut à présent, énoncer le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 5. Soit E un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire définie sur E continue et coercive et $L(\cdot)$ une forme linéaire définie sur E continue. Alors le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in E \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{cases}$$

admet une solution unique.

Ce résultat s'applique à notre problème modèle ; en effet, on a indiqué que $H_0^1([0,1])$, muni de la norme $v \rightarrow \|v\|_{1,[0,1]}$ est un espace de Hilbert. Grâce à l'inégalité de Poincaré, on peut vérifier que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive par un raisonnement analogue à celui développé dans l'exemple 2 ; de plus la continuité découle trivialement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin on vérifie que la forme linéaire $L(v)$ est continue de la même façon que celle abordée lors de l'étude de l'exemple 3. Ce qui permet de retrouver l'existence et l'unicité de la solution du problème modèle.

4. Formulation variationnelle pour diverses EDP monodimensionnelles

Lors de la mise sous forme variationnelle du problème modèle d'élasticité, on a transformé le problème en un problème équivalent, les deux problèmes admettant la même solution. La formulation faible ne comporte pas apparemment de conditions aux limites ; celles-ci sont en fait incluses dans le choix de l'espace $H_0^1([0,1])$ des fonctions tests associées au problème considéré. Comme cela a été indiqué précédemment, la démarche est générale et comporte, après le choix de l'espace E des fonctions tests en fonction du problème considéré, la multiplication de l'équation aux dérivées partielles par une fonction de E et une intégration par partie. Considérons des situations distinctes de celle du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes considérées au paragraphe 2.

Dans la suite de ce paragraphe, f désignera une fonction de carré intégrable.

■ Soit, à présent le **problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann non homogènes** suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x)u(x) = f(x), q(x) \geq q_0 > 0, x \in]0, 1[\\ \frac{du(0)}{dx} = g_0, \frac{du(1)}{dx} = g_1 \end{cases} \quad (5)$$

avec g_0 et g_1 données du problème caractérisant l'intensité du flux en chacune des extrémités,
 q_0 constante positive donnée.

Pour mettre ce problème sous forme variationnelle, on a choisi, dans l'exemple précédent, l'espace $H_0^1([0,1])$, qui incluait les conditions aux limites de Dirichlet homogènes dans sa définition ; dans la situation du problème (5), on va choisir également comme espace de travail un espace E de type $H^1([0,1])$. On pourrait penser à définir comme espace de fonctions tests un espace du type :

$$E = \left\{ v \in H^1([0,1]), \frac{dv(0)}{dx} = g_0, \frac{dv(1)}{dx} = g_1 \right\}$$

Cependant, ce choix n'est pas possible. En effet, sans rentrer dans des détails théoriques :

— d'une part, sauf si $g_0 = g_1 = 0$, l'espace E n'est pas un espace vectoriel, condition rendue nécessaire pour l'utilisation du théorème de Lax-Milgram ;

— d'autre part, si v est une fonction quelconque de $H^1([0, 1])$, sa dérivée est simplement continue par morceaux et sa valeur en un point précis (par exemple, $x = 0$ ou $x = 1$) peut ne pas être définie.

C'est pourquoi, faute de pouvoir introduire explicitement les conditions aux limites de type Neumann dans l'espace du travail on choisit $E = H^1([0, 1])$ comme espace de fonctions tests. Soit v une fonction de $H^1([0, 1])$; multiplions la première équation par v et intégrons par partie ; il vient, compte tenu de la définition des conditions aux limites de Neumann non homogènes :

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x)uv \right) dx = \int_0^1 f v dx + g_1 v(1) - g_0 v(0), \forall v \in H^1([0, 1])$$

Posons :

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x)uv \right) dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx + g_1 v(1) - g_0 v(0)$$

avec ces notations le problème (5) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer } u \in H^1([0, 1]) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1([0, 1]) \end{array} \right. \quad (6)$$

On peut, à partir de la formulation (6), retrouver le problème (5) par simple remontée des calculs et identification.

■ Considérons, à présent, un autre type de conditions aux limites, par exemple un **problème de Poisson avec conditions aux limites mêlées de type Dirichlet-Neumann** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x), x \in]0, 1[\\ u(0) = 0, \frac{du(1)}{dx} = g_1 \end{array} \right. \quad (7)$$

où la solution est connue au point $x = 0$ et le flux est imposé à la valeur g_1 en $x = 1$. Soit E l'espace des fonctions tests défini par :

$$E = \{v \in H^1([0, 1]), v(0) = 0\}$$

Comme lors de l'étude des exemples précédents, multiplions la première équation par $v \in E$ et intégrons par partie ; il vient, compte tenu de la définition des conditions aux limites mêlées de type Dirichlet-Neumann non homogènes :

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx + g_1 v(1), \forall v \in E$$

Posons :

$$a(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx + g_1 v(1)$$

le problème (7) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer } u \in E \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{array} \right. \quad (8)$$

et, comme précédemment, par simple remontée des calculs, les problèmes (7) et (8) sont équivalents.

■ Considérons un problème de type Poisson un peu plus général, défini dans un domaine $\Omega =]0, 1[$, à coefficients non homogènes et comportant des **conditions aux limites de type Fourier (ou de Robin)** :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left(c(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + u(x) = f(x), x \in]0, 1[\\ c(0) \frac{du(0)}{dx} + k(u(0) - g_0) = 0, c(1) \frac{du(1)}{dx} + k(u(1) - g_1) = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

avec $k > 0$, $c(x) \in C^1([0, 1])$ (espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, 1]$) et $0 < c_0 \leq c(x) \leq c_1$. On choisit $E = H^1([0, 1])$ comme espace de fonctions tests. Soit v une fonction de $H^1([0, 1])$; multiplions la première équation par v et intégrons par parties ; il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(c(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + uv \right) dx \\ = \int_0^1 f v dx + c(1) \frac{du(1)}{dx} v(1) - c(0) \frac{du(0)}{dx} v(0), \forall v \in H^1([0, 1]), \end{aligned}$$

et, compte tenu de la définition des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(c(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + uv \right) dx \\ = \int_0^1 f v dx + k(g_1 - u(1))v(1) - k(g_0 - u(0))v(0), \forall v \in H^1([0, 1]) \end{aligned}$$

Comme précédemment, posons :

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(c(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + uv \right) dx + ku(1)v(1) - ku(0)v(0)$$

et

$$L(v) = \int_0^1 f v dx + kg_1 v(1) - kg_0 v(0)$$

Le problème (9) s'écrit alors sous la forme standard :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer } u \in H^1([0, 1]) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1([0, 1]) \end{array} \right. \quad (10)$$

et, comme précédemment, par simple remontée des calculs, les problèmes (9) et (10) sont équivalents.

■ Pour terminer de passer en revue les diverses conditions aux bords, considérons un problème aux limites muni de **conditions aux limites de type périodique**, ce qui se traduit, dans le cas du problème de Poisson monodimensionnel, par le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + qu(x) = f(x), x \in]0, 1[, (q > 0) \\ \frac{du(0)}{dx} = \frac{du(1)}{dx} \\ u(0) = u(1) \end{array} \right. \quad (11)$$

Choisissons comme espace de fonctions tests l'espace suivant :

$$E = \{v \in H^1([0, 1]), v(0) = v(1)\}$$

La mise sous forme variationnelle du problème (11) conduit, par des techniques similaires, à la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer } u \in E \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{array} \right. \quad (12)$$

avec :

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx$$

les problèmes (11) et (12) étant, dans ce cas, encore équivalents.

■ Par ailleurs, il existe d'autres types d'opérateurs aux dérivées partielles que le laplacien. Considérons, par exemple, les cas du **problème de convection-diffusion avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes** :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + c \frac{du(x)}{dx} + bu(x) = f(x), x \in]0, 1[, b \geq 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Compte tenu des conditions aux bords, l'espace des fonctions tests étant $H_0^1([0, 1])$, la formulation variationnelle du problème (13) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1([0, 1]) \end{cases} \quad (14)$$

avec :

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + c \frac{du}{dx} v + buv \right) dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx$$

et l'on peut vérifier directement l'équivalence des problèmes (13) et (14).

■ Pour terminer considérons la **formulation variationnelle d'un problème de double laplacien** suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u(x) = f(x), x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \\ \frac{d^2 u(0)}{dx^2} = \alpha, \frac{d^2 u(1)}{dx^2} = \beta \end{cases} \quad (15)$$

On introduit les espaces de Sobolev d'ordre 2, notés $H^2([0, 1])$ et $H_0^2([0, 1])$ et définis par :

$$H^2([0, 1]) = \left\{ v \mid v \in L^2([0, 1]), \frac{dv}{dx} \in L^2([0, 1]), \frac{d^2 v}{dx^2} \in L^2([0, 1]) \right\}$$

$$H_0^2([0, 1]) = \{ v \mid v \in H^2([0, 1]), v(0) = v(1) = 0 \}$$

Multiplions (15) par $v \in H_0^2([0, 1])$ et intégrons deux fois par parties le terme du quatrième ordre, une fois par parties le terme du second ordre ; compte tenu des valeurs aux bords des dérivées secondes, il vient :

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + uv \right) dx = \int_0^1 f v dx + \beta \frac{dv(1)}{dx} - \alpha \frac{dv(0)}{dx},$$

$$\forall v \in H_0^2([0, 1])$$

Posons :

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + uv \right) dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx$$

la formulation variationnelle du problème (15) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^2([0, 1]) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) + \beta \frac{dv(1)}{dx} - \alpha \frac{dv(0)}{dx}, \forall v \in H_0^2([0, 1]) \end{cases} \quad (16)$$

Remarque

Dans les problèmes précédents, nous avons simplement mis les problèmes forts sous forme variationnelle. Nous n'avons pas cherché à effectuer l'analyse du problème, qui consisterait à vérifier l'existence et l'unicité de la solution ; cette démarche peut se faire en appliquant le théorème de Lax-Milgram ; la démarche n'est pas toujours simple et nécessite l'utilisation de résultats d'analyse fonctionnelle. Nous renvoyons le lecteur à [5] pour des renseignements complémentaires sur ce type de question.

5. Extension au cas de problèmes d'EDP bidimensionnels

Soit m un entier naturel, définissant la dimension d'espace du problème d'équation aux dérivées partielles considéré. On considère la situation où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (en pratique $m = 2$ ou $m = 3$) ; on note de manière générale $\partial\Omega$ la frontière de Ω , qui correspond à une variété de dimension $m - 1$; on supposera dans la suite que d'une part Ω est borné, c'est-à-dire qu'il peut être inclus dans une boule de rayon fini et que d'autre part $\partial\Omega$ est « régulière », par exemple continue et à variation continue et ne comportant pas de points de rebroussement.

Dans ce paragraphe, nous allons étendre aux équations aux dérivées partielles définies dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ les résultats obtenus aux paragraphes précédents pour des problèmes en dimension 1 ; le problème considéré sera transformé en une formulation faible de manière à pouvoir utiliser le théorème de Lax-Milgram. Cette transformation a été obtenue en dimension 1 grâce à l'utilisation systématique de la formule d'intégration par parties ; il sera donc nécessaire de généraliser cette formule au cas d'une dimension supérieure à 1. De la même façon, il sera nécessaire de définir, dans ce cas, les espaces de Sobolev et, en particulier, les dérivées d'ordre élevé qui apparaissent dans ces espaces de fonctions tests dont la définition est nécessaire à l'écriture de la formulation variationnelle associée à l'équation aux dérivées partielles considérée. On mesure la difficulté théorique à laquelle on est confronté et, en toute rigueur, il faudrait utiliser la théorie des distributions, ce qui compliquerait l'exposé pour présenter la méthode des éléments finis à des ingénieurs non mathématiciens.

La façon la plus simple de généraliser la formule d'intégration par parties est d'utiliser la formule de Green suivante, qui se déduit de la formule d'Ostrogradski :

$$\iiint_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \iiint_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds$$

$$x = (x_1, \dots, x_m)$$

et :

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$$

avec \vec{n} normale dirigée vers l'extérieur, $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale définie par :

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cos(\vec{Ox_i}, \vec{n}) = \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{n}$$

et :

$$\vec{\nabla} u(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \right)^t$$

On peut écrire la formule de Green, en écriture condensée comme suit :

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx = - \iiint_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds$$

Si, par exemple, $m = 3$, la formule de Green s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \iiint_{\Omega} v \Delta u dx + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

et lorsque $m = 2$, on obtient :

$$\iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \iint_{\Omega} v \Delta u dx + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

■ Si l'on considère le problème analogue au problème de la corde étudié au paragraphe 2, mais cette fois-ci en dimension $m = 2$, correspondant à la situation où l'on calcule le **déplacement $u(x)$ d'une membrane élastique** occupant au repos un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, fixée sur sa frontière $\partial\Omega$ et soumise à une force $f(x)$ perpendiculaire au plan $x_1 O x_2$, on est amené à résoudre le **problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes** suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{sur } \overset{\circ}{\Omega} \\ u(x) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (17)$$

avec $f(x) \in L^2(\Omega)$,

$\overset{\circ}{\Omega}$ intérieur du domaine Ω .

On considère l'espace $H^1(\Omega)$, défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, m \right\}$$

et l'espace $E = H_0^1(\Omega)$, sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les fonctions sont nulles sur le bord $\partial\Omega$. Soit v une fonction test élément de $H_0^1(\Omega)$; multiplions le laplacien par v et intégrons sur Ω . Compte tenu de la formule de Green, il vient, dans le cas $m = 2$:

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx &= \iint_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx - \oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds \\ &= \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Or $v \in H_0^1(\Omega)$ et la trace de cette fonction sur le bord $\partial\Omega$ est nulle ; donc l'intégrale curviligne disparaît. Posons :

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx \text{ et } L(v) = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

la relation précédente s'écrit alors :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Réciproquement, partant de la relation précédente, et en remontant les calculs, grâce notamment à l'utilisation de la formule de Green, on constate que le problème (17) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Remarque

On montre que les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ munis du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \iiint_{\Omega} u(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^m \iiint_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx$$

sont des espaces préhilbertiens (cf. [3]). De plus ces espaces sont complets pour la norme associée $\| \cdot \|_{1,\Omega}$ au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donc $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert et on vérifie que, sous les hypothèses précédentes, on est dans le cadre du théorème de Lax-Milgram (cf. [3]).

■ Considérons, toujours dans un domaine Ω bidimensionnel, le problème aux limites comportant des **conditions aux limites de Neumann non homogènes** suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), & \text{sur } \overset{\circ}{\Omega} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

où $f(x) \in L^2(\Omega)$ et $g(x) \in L^2(\partial\Omega)$; la mise sous forme variationnelle s'effectue comme précédemment. On choisit ici $E = H^1(\Omega)$; on multiplie l'équation définie dans le domaine Ω par une fonction test v de $H^1(\Omega)$ et on intègre sur tout le domaine Ω ; l'application de la formule de Green conduit à la relation :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) + u(x) v(x) \right) dx - \oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds \\ = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

soit, compte tenu des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) + u(x) v(x) \right) dx = \\ \oint_{\partial\Omega} v(x) g(x) ds + \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Posons :

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) + u(x) v(x) \right) dx$$

et

$$L(v) = \oint_{\partial\Omega} v(x) g(x) ds + \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

avec ces notations, le problème (18), est alors transformé en un problème variationnel :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega)$$

Réciproquement, partant de la relation précédente, on peut remonter les calculs et, via l'utilisation de la formule de Green, on obtient la formulation forte (18). Finalement, par ce biais, on vérifie donc l'équivalence du problème (18) avec le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

pour lequel, sous les hypothèses précédentes, le théorème de Lax-Milgram est applicable.

■ Soit le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$; on suppose de plus que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; on considère le **problème de Poisson avec conditions aux limites mêlées de type Dirichlet-Neumann** suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{sur } \overset{0}{\Omega} \\ u(x) = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (19)$$

où $f(x) \in L^2(\Omega)$ et $g(x) \in L^2(\Gamma_1)$. La mise sous forme variationnelle du problème (19) nécessite la définition d'un espace de travail E adapté à la situation, notamment compte tenu des conditions aux limites considérées ; on choisira comme espace E un sous-espace de $H^1(\Omega)$. La condition aux limites de Dirichlet homogène sur Γ_0 pourra être introduite dans l'espace de travail ; cependant la condition aux limites sur Γ_1 définit la valeur de la dérivée normale sur cette partie de la frontière et ne peut être définie pour toutes les fonctions de l'espace $H^1(\Omega)$. On travaillera donc sur l'espace :

$$E = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v(0) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

Soit v une fonction test appartenant à E ; on multiplie l'équation définie dans le domaine Ω par une fonction test v de E et on intègre sur tout le domaine Ω ; l'application de la formule de Green conduit à la relation suivante :

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx - \oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in E$$

Or, en appliquant les résultats classiques sur la théorie de l'intégration, on peut décomposer l'intégrale curviligne en la somme de deux intégrales curvilignes définies respectivement sur Γ_0 et Γ_1 , soit :

$$\oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_0} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds + \oint_{\Gamma_1} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds$$

Or v appartenant à l'espace E , l'intégrale curviligne définie sur Γ_0 est nulle ; de plus, la dérivée normale de la fonction u sur Γ_1 est égale à $g(x)$; donc :

$$\oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_1} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_1} v(x) g(x) ds, \forall v \in E$$

Finalement, la transformation précédente du problème (19), conduit à l'écriture suivante :

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx + \oint_{\Gamma_1} v(x) g(x) ds, \forall v \in E$$

Posons

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx$$

et

$$L(v) = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx + \oint_{\Gamma_1} v(x) g(x) ds$$

on a donc la relation suivante :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in E$$

Réciproquement, de la même façon que lors de l'étude des problèmes précédents, et grâce à la formule de Green, on aboutit, en partant de la relation précédente et en remontant les calculs, à la formulation forte (19) et on vérifie l'équivalence de ce problème avec le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in E \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{cases}$$

Remarque

Compte tenu, d'une part, de la définition de l'espace des fonctions tests et, d'autre part, de celle de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et de la forme linéaire $L(\cdot)$, le problème variationnel associé au problème de Poisson avec conditions aux limites mêlées de type Dirichlet-Neumann rentre, sous les hypothèses précédentes, dans le cadre de l'utilisation du théorème de Lax-Milgram ; cependant la vérification des hypothèses de ce résultat reste délicate et nécessite l'utilisation d'estimations fines d'analyse fonctionnelle (cf. [3]).

■ Le dernier type de conditions aux limites rencontrées pour les équations aux dérivées partielles elliptiques sont les **conditions de Fourier (ou de Robin)** ; considérons donc le problème suivant, défini dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), & \text{sur } \overset{0}{\Omega} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} + b_0 u(x) = g(x), & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (20)$$

avec $b_0 > 0$, $f(x) \in L^2(\Omega)$ et $g(x) \in L^2(\partial\Omega)$. Compte tenu des conditions portant sur la dérivée normale, on choisit, comme espace de travail, l'espace $E = H^1(\Omega)$. On opère de manière analogue à ce qui a été établi précédemment ; soit v une fonction test de l'espace $H^1(\Omega)$; on multiplie par v et on intègre sur Ω ; compte tenu de la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) + u(x) v(x) \right) dx - \oint_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds \\ = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Or, sous le signe \oint , la dérivée normale $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ est égale à $g(x) - b_0 u(x)$; on a donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) + u(x) v(x) \right) dx + b_0 \oint_{\partial\Omega} v(x) u(x) ds \\ = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx + \oint_{\partial\Omega} v(x) g(x) ds, \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Posons :

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) + u(x) v(x) \right) dx + b_0 \oint_{\partial\Omega} v(x) u(x) ds$$

et

$$L(v) = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx + \oint_{\partial\Omega} v(x) g(x) ds$$

La transformation considérée, conduit au problème variationnel suivant :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega)$$

Comme lors des études précédentes, on peut partir de la relation précédente, et via l'utilisation de la formule de Green, remonter les calculs pour retomber sur le problème (20), ce qui montre l'équivalence de ce problème avec le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

qui, sous les hypothèses précédentes, rentre dans le cadre formel du théorème de Lax-Milgram.

Remarque

Ce contexte d'étude peut bien évidemment être étendu à des situations plus générales d'opérateurs elliptiques généraux du second ordre, définis dans des domaines bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^m$; soit A un opérateur aux dérivées partielles du type :

$$Au = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + b_0(x) u(x)$$

avec $b_{i,j}(x)$ et $b_0(x)$ fonctions continues et bornées sur le domaine Ω .

On suppose de plus vérifiées les hypothèses d'ellipticité suivantes :

$$b_0(x) \geq \beta_0 > 0, \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^m, (\beta > 0)$$

la dernière relation traduisant le fait que la matrice $B = (b_{i,j}(x))$ de type $m \times m$, est définie positive. Soit $f(x) \in L^2(\Omega)$ et $g(x)$ une fonction définie sur $\partial\Omega$, frontière du domaine Ω ; soit C un opérateur différentiel linéaire défini sur $\partial\Omega$ et décrivant l'une quelconque des conditions aux limites précédemment rencontrées. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} Au = f, & \text{sur } \Omega \\ Cu = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et soit E un espace de fonctions tests convenablement choisi, $E \subset H^1(\Omega)$ et muni d'une norme identique à celle de l'espace $H^1(\Omega)$; on peut associer au problème différentiel précédent une formulation variationnelle du type :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in E$$

où :

$$a(u, v) = \iiint_{\Omega} Au(x) v(x) dx + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n} v(x) ds$$

avec :

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cos(\overrightarrow{Ox_i} \cdot \vec{n})$$

avec \vec{n} normale à Ω , dirigée vers l'extérieur, $(\overrightarrow{Ox_i}, \vec{n})$ angle entre l'axe Ox_i et \vec{n} .

Compte tenu de l'expression de l'opérateur A , on peut transformer la forme bilinéaire $a(u, v)$ comme suit :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \iiint_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + b_0(x) u(x) v(x) \right) dx \\ &\quad + \text{termes de bords} \\ L(v) &= \iiint_{\Omega} f(x) v(x) dx + \text{termes de bords} \end{aligned}$$

■ Pour terminer, considérons l'équation d'une **plaque encastrée, soumise à des charges** et dont la **déformation $u(x)$ est donnée par l'équation biharmonique** suivante :

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u(x)) + u(x) = f(x), & \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

On considère, à présent les espaces fonctionnels suivants :

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i, j = 1, \dots, n \right\}$$

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \mid v \in H^2(\Omega), v = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

Soit v une fonction test de $H_0^2(\Omega)$; en multipliant l'équation biharmonique (21) définie sur Ω , puis en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\iiint_{\Omega} (\Delta(\Delta u(x)) v(x) + u(x) v(x)) dx = \iiint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Appliquons une première fois la formule de Green au premier terme :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \Delta(\Delta u(x)) v(x) dx &= - \iint_{\partial\Omega} \nabla(\Delta u(x)) \cdot \nabla(v(x)) ds + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u(x))}{\partial n} v(x) ds, \\ &\quad \forall v \in H_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

et comme $v \in H_0^2(\Omega)$, $v = 0$ sur le bord et par conséquent l'intégrale curviligne s'annule. Appliquons de nouveau la formule de Green au terme précédent, il vient, $\forall v \in H_0^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \Delta(\Delta u(x)) v(x) dx &= - \iint_{\partial\Omega} \nabla(\Delta u(x)) \cdot \nabla(v(x)) ds \\ &= \iint_{\Omega} \Delta u(x) \Delta v(x) dx - \oint_{\partial\Omega} \Delta u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial n} ds \end{aligned}$$

et comme $\frac{\partial v(x)}{\partial n} = 0$ sur le bord, par conséquent l'intégrale curviligne s'annule. Finalement l'équation aux dérivées partielles (21) se transforme alors comme suit :

$$\iiint_{\Omega} (\Delta u(x)) \Delta v(x) + u(x) v(x) dx = \iiint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

qui correspond à la formulation variationnelle associée au problème de plaque. Posons :

$$a(u, v) = \iiint_{\Omega} (\Delta u(x) \Delta v(x) + u(x) v(x)) dx$$

et

$$L(v) = \iiint_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

on aboutit donc à l'écriture standard :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Et, comme précédemment, en partant de cette écriture et en remontant les calculs, on vérifie l'équivalence entre le problème (21) et le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons transformé des classes variées de problèmes d'EDP, associées à divers opérateurs aux dérivées partielles et aux conditions aux limites classiques, en un problème équivalent. Cette opération correspond à la mise sous forme variationnelle du problème d'EDP et est formulée comme suit :

$$\begin{cases} \text{déterminer } u \in E \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{cases} \quad (22)$$

où E est un espace fonctionnel (en général un espace de Hilbert et, plus généralement, un espace vectoriel normé), $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue. D'autres types d'EDP peuvent être mis sous forme variationnelle. À partir de la formulation (22), on construit une méthode d'approximation de la solution par éléments finis en projetant le problème (22) sur un sous-espace de E de dimensions finies.

Cette méthode d'approximation est décrite dans les articles [AF 504] et [AF 505].

Références bibliographiques

- [1] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.L.). – *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Tome 1 à tome 9, Masson (1988).
- [2] BREZIS (H.). – *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées, Masson (1982).
- [3] RAVIART (P.A.) et THOMAS (J.M.). – *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées, Masson (1983).
- [4] CIARLET (P.G.). – *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection Mathématiques Appliquées, Masson (1982).
- [5] CIARLET (P.G.). – *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland (1978).