TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

Réf. : **AF103 V1**

Date de publication :
**10 octobre 2001**

# Équations différentielles linéaires

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Bernard RANDÉ**

# Équations différentielles linéaires

*par* **Bernard RANDÉ**
*Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud*
*Docteur en mathématiques*
*Agrégé de mathématiques*
*Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis*



*Parmi les équations différentielles en général, les **équations différentielles linéaires** jouissent d'un statut particulier. Cela est dû à leur relative simplicité d'étude, ainsi qu'à leur fréquence d'apparition dans la modélisation. En outre, les procédés numériques qui permettent d'en obtenir des solutions approchées sont robustes, et ne sont pas soumis aux fluctuations imprévisibles qui sont inhérentes aux phénomènes non linéaires.*

*Le cadre naturel de la modélisation étant habituellement l'espace de dimension 3, les phénomènes fonction des coordonnées spatiales relèvent plus souvent des équations aux dérivées partielles. C'est pourquoi les équations différentielles décrivent de préférence des évolutions temporelles, dans lesquelles la variable scalaire est le temps.*

*Une littérature très riche a été élaborée sur ce sujet, notamment durant le XIXe siècle. Cet article, sans aborder les points les plus techniques soulevés par les fonctions spéciales, se contente d'évoquer les aspects les plus élémentaires de la théorie.*

# 1. Résultats généraux

## 1.1 Position du problème

Une **équation différentielle** est dite **linéaire** lorsqu'elle exprime la condition d'annulation d'une application linéaire, ou si l'on veut d'un **opérateur différentiel**. Par opposition aux équations aux dérivées partielles, les équations différentielles ont pour fonctions inconnues des fonctions d'une seule variable scalaire. Nous nous intéresserons principalement au cas où la variable est réelle. Si $E$ est un espace vectoriel normé, on note $\mathscr{L}_c(E)$ l'espace des endomorphismes **continus** de $E$.

**Définition 1** : Soit $I$ un intervalle de P, $E$ un espace de Banach sur K, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des applications continues de $I$ vers $\leqslant_c(E)$. On dit que $x$, application $n$ fois dérivable de $I$ vers $E$, est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$ :

$$(\mathscr{E}') \quad x^{(n)} = a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x$$

lorsque :

$$\forall t \in I \;\; x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)(x^{(n-1)}(t)) + \ldots + a_1(t)(x'(t)) + a_0(t)(x(t)).$$

On constate que la notation $a_0 \cdot x$, par exemple, est une **abréviation** commode de la notation $a_0(x)$, elle-même forme fonctionnelle de l'expression $t \mapsto a_0(t)(x(t))$. Elle permet d'alléger le nombre de parenthèses utilisées, et de s'adapter au cas usuel, que l'on va évoquer ci-après, où les applications linéaires sont représentées par des tableaux ou des matrices.

L'**ordre** $n$ de l'équation est celui de la dérivée exprimée en fonction des dérivées d'ordre inférieur.

■ **Écriture à l'aide de tableaux ou de matrices**

Notons $a$ le tableau dont les éléments sont eux-mêmes des applications linéaires continues :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathrm{Id} \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $X$, application de $I$ vers $E^n$, dont les composantes sont écrites en colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

L'équation $(\mathscr{E}')$ admet la forme équivalente :

$$X' = a \cdot X.$$

Ici, $a(t) \in \mathscr{L}_c(I, E^n)$ et $a(t)$ est représentée sous forme d'un tableau d'éléments de $\mathscr{L}_c(E)$. En particulier, Id désigne l'**identité** de $E$ et 0 l'**endomorphisme nul** de $E$.

Nous avons pu ramener l'équation $(\mathscr{E}')$ à une **équation différentielle linéaire homogène d'ordre** 1, dont la fonction inconnue est à valeurs dans $E^n$ : on peut diminuer l'**ordre** de l'équation différentielle en augmentant la **taille** de l'espace, dite **taille de l'équation**.

Par exemple, si l'équation initiale est scalaire (c'est-à-dire si $E = \mathbb{K}$) d'ordre $n$, elle équivaut à une équation vectorielle de taille $n$, mais d'ordre 1.

**Exemple 1 :** l'équation :

$$x' = e^t x$$

est une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 1.

**Exemple 2 :** l'équation vectorielle d'ordre 2, de taille 2 :

$$\begin{cases} x_1'' = t x_2' + x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1' + t^2 x_2' \end{cases}$$

équivaut à l'équation vectorielle d'ordre 1, de taille 4 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

■ La **linéarité** de l'équation s'exprime dans la description de l'ensemble $S'$ des solutions de :

$$(\mathscr{E}') \quad X' = a \cdot X$$

**Proposition 1.**
*Si* $a \in C^0(I, \mathscr{L}_c(E))$, *S' est un sous-espace vectoriel de* $C^1(I, E)$.

**Preuve.** ∊ Puisqu'une solution $X$ est dérivable, elle est continue.

Or $t \mapsto a(t)$ est aussi continue ; donc $t \mapsto a(t) \cdot (X(t))$ est continue et $X'$ aussi par conséquent. Ainsi :

$$S' \subset C^1(I, E).$$

D'autre part, $0 \in S'$ et, si $X$, $Y$ sont dans $S'$, on a :

$$(\lambda X + \mu Y)'(t) = \lambda X'(t) + \mu Y'(t) = \lambda a(t)(X(t)) + \mu a(t)(Y(t))$$

$$= a(t)(\lambda X(t) + \mu Y(t)) .$$

Donc $S'$ est stable par combinaison linéaire. ∊

Le fait que la somme de deux solutions de $(\mathscr{E}')$ est encore une solution de $(\mathscr{E}')$ s'exprime en disant que la **superposition** de deux solutions est solution.

Nous avons introduit le terme d'**équation linéaire homogène**, ce dernier adjectif pouvant sembler superflu. Il n'est dû qu'à une circonstance historique, qui fait traditionnellement appeler **équation différentielle linéaire avec second membre**, ou encore **non homogène**, une équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \quad X' = a \cdot X + \boldsymbol{b} ,$$

où $a$ appartient toujours à $C^0(I, \mathscr{L}_c(E))$, et $b \in C^0(I, E)$.

Une terminologie plus adaptée, qui n'a pas prévalu, serait celle d'équation différentielle **affine**.

L'expression « avec second membre » provient de la mise de $(\mathscr{E})$ sous la forme :

$$X' - a \cdot X = b$$

À l'équation $(\mathscr{E})$, on associe systématiquement l'équation $(\mathscr{E}')$ sans second membre :

$$X' - a \cdot X = 0 .$$

**Proposition 2.**

*Soient* $a \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E))$ *et* $b \in C^0(I, E)$.

*Soit S l'ensemble des solutions de* :

$$(\mathcal{E}) \quad X' = a \cdot X + b$$

*et S′ celui des solutions de* :

$$(\mathcal{E}') \quad X' = a \cdot X .$$

*Si* $X_0 \in S$, *alors* :

$$S = X_0 + S' .$$

**Preuve.** ∊ Si $X_0 \in S,\ X_0' = a \cdot X_0 + b$. Donc :

$$X \in S \Leftrightarrow X' - a \cdot X = X_0' - a \cdot X_0$$

$$\Leftrightarrow (X - X_0)' = a \cdot (X - X_0) \Leftrightarrow X - X_0 \in S' \quad ∊$$

Si $X_0$ est considéré comme **solution particulière** de $(\mathcal{E})$, la solution générale de $(\mathcal{E})$ est la somme de $X_0$ et de la solution générale de $(\mathcal{E}')$. Plus géométriquement, $S$ est obtenu à partir de $S'$ par la translation de vecteur $X_0$.

Une autre conséquence de la forme de l'équation $(\mathcal{E})$ est la suivante. Si :

$$X_1' = a \cdot X_1 + b_1 \quad \text{et} \quad X_2' = a \cdot X_2 + b_2$$

alors :

$$(X_1 + X_2)' = a \cdot (X_1 + X_2) + (b_1 + b_2)$$

Donc $X_1 + X_2$ est solution de l'équation dont les seconds membres ont été ajoutés.

## 1.2 Description de l'ensemble des solutions

On considère le **problème de Cauchy** :

$$(\mathcal{E}) \quad X' = a \cdot X + b \ ; \ X(t_0) = X^0$$

où $(t_0, X^0) \in I \times E$ est donné. Il s'agit donc de trouver les solutions d'une équation $(\mathcal{E})$ qui, à l'**instant** $t_0$ (dit **initial**), occupent la **position** $X^0$ (dite **position initiale**).

Le problème de Cauchy entraîne, par intégration :

$$X(t) - X^0 = \int_{t_0}^{t} (a(s) \cdot X(s) + b(s))\mathrm{d}s .$$

Réciproquement, si $X \in C^0(I, E)$ vérifie l'égalité précédente, elle sera par dérivation solution du problème de Cauchy.

Soit donc :

$$\varphi \ : \ C^0(I, E) \to C^0(I, E)$$
$$X \mapsto \varphi(X)$$

où $\varphi(X)(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} (a(s) \cdot X(s) + b(s))\mathrm{d}s$ .

Il s'agit de trouver les **points fixes** de cette application $\varphi$.

La norme sur $E$ est notée $|\,.\,|$.

Si $J$ est un segment inclus dans $I$, on note $\|\,.\,\|_\infty$ la norme uniforme sur $C^0(J, \mathcal{L}_c(E))$ :

$$\|a\|_\infty = \sup_{t \in J} \|a(t)\| \quad \text{où} \quad \|\ell\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |\ell(x)|$$

lorsque $\ell \in \mathcal{L}_c(E)$.

On notera aussi $\|\,.\,\|_\infty$ la norme uniforme sur $C^0(J, E)$.

Soit $t_0 \in J$ et $\mu$ la longueur de $J$.

**Lemme 1.** Soit $X, Y \in C^0(J, E)$. Il existe une constante $K$ telle que, pour tout $p \geqslant 0$ :

$$\|\varphi^p(X) - \varphi^p(Y)\|_\infty \leqslant \frac{K^p}{p!}\|X - Y\|_\infty$$

**Preuve.** ∊ Montrons par récurrence sur $p$ le résultat :

$$\forall t \in J \quad |\varphi^p(X)(t) - \varphi^p(Y)(t)| \leqslant \frac{|t - t_0|^p}{p!}\|a\|_\infty^p \ \|X - Y\|_\infty$$

Il est vrai pour $p = 0$. Supposons-le vrai pour un certain $p$ ; alors :

$$\forall t \in J \quad |\varphi^{p+1}(X)(t) - \varphi^{p+1}(Y)(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |a(s)| \frac{|s - t_0|^p}{p!}\|a\|_\infty^p \ \|X - Y\|_\infty \mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant \frac{\|a\|_\infty^{p+1}}{p!}\|X - Y\|_\infty \frac{|t - t_0|^{p+1}}{p+1} = \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!}\|a\|_\infty^{p+1}\|X - Y\|_\infty \quad .$$

Comme on peut majorer $|t - t_0|$ par $\mu$, on obtient le résultat avec la constante $K = \mu\|a\|_\infty$. ∊

**Théorème 1.** Soient $a \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E))$, $b \in C^0(I, E)$, $t_0 \in I$ et $X^0 \in E$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$X' = a \cdot X + b \quad ; \quad X(t_0) = X^0 .$$

**Preuve.** ∊ Fixons $J$ un segment inclus dans $I$ contenant $t_0$.

Pour $p \geqslant p_0$ :

$$\frac{K^p}{p!} \leqslant \frac{1}{2} ,$$

de sorte que $\varphi^{p_0}$ est lipschitzienne de rapport $< 1$. Elle admet donc dans l'espace de Banach $C^0(J, \mathcal{L}_c(E))$ un unique point fixe $X$. Mais alors :

$$\varphi^{p_0}(\varphi(X)) = \varphi(\varphi^{p_0}(X)) = \varphi(X)$$

de sorte que $\varphi(X) = X$ par unicité. Donc $\varphi$ admet un point fixe, unique, car tout point fixe de $\varphi$ l'est pour $\varphi^{p_0}$.

En d'autres termes, le problème de Cauchy admet une unique solution sur $J$. Elle est aussi unique sur $I$ par restriction à chaque $J$. L'existence d'une solution sur $I$ provient du fait que $I$ est réunion d'une suite croissante de segments, sur chacun desquels on définira une solution, coïncidant avec la restriction de la solution sur un segment plus grand par unicité. ∊

Le procédé précédent est **numériquement praticable**. En effet, posant $X_p = \varphi^p(0)$, on a :

$$\|X_{p+1} - X_p\|_\infty \leqslant C\frac{K^p}{p!}$$

et la suite $(X_p)_{p \geqslant 0}$ converge vers sa limite mieux qu'exponentiellement. Le procédé peut néanmoins présenter des difficultés aux extrémités de $I$ lorsqu'elles n'appartiennent pas à $I$.

Le théorème **1** admet d'importantes conséquences.

**Théorème 2.** Soient $a \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E))$, $b \in C^0(I, E)$ et $t_0 \in I$.
Notons $S$ l'ensemble des solutions de l'équation :

$$(\mathcal{E}) \qquad X' = a \cdot X + b$$

et $S'$ celui des solutions de l'équation homogène associée :

$$(\mathcal{E}') \qquad X' = a \cdot X .$$

Alors :

**(1)** l'application

$$\begin{aligned} S' &\to E \\ X &\mapsto X(t_0) \end{aligned}$$

est un **isomorphisme linéaire** ;

**(2)** l'application

$$\begin{aligned} S &\to E \\ X &\mapsto X(t_0) \end{aligned}$$

est un **isomorphisme affine**.

En particulier, $S'$ est un espace vectoriel isomorphe à $E$ et $S$ un espace affine de direction $S'$.

**Preuve.** $\epsilon$

**(1)** La linéarité de $X \mapsto X(t_0)$ est évidente. Le théorème **1** exprime (dans le cas ou $b = 0$) que cette application est bijective.

**(2)** La situation est identique. Il faut noter que le théorème **1** entraîne que $S$ n'est pas vide. Par conséquent, si $X_0$ est un élément particulier de $S$, on a :

$$S = X_0 + S' ,$$

ce qui montre que $S$ est la direction $S'$. $\epsilon$

Les théorèmes **1** et **2** rendent compte du fait que le problème de Cauchy est un problème **bien posé** (existence et unicité de la solution).

**Exemple 3 :** si $E = \mathbb{K}^n$, l'ensemble $S'$ des solutions de $(\mathcal{E}')$ est un espace vectoriel de dimension $n$.

**Exemple 4 :** si $E = \mathbb{K}$, considérons l'équation différentielle scalaire d'ordre $n$ :

$$x^{(n)} = a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x.$$

L'espace $S'$ des solutions est un espace vectoriel de dimension $n$. Si $t_0 \in I$, on dispose de l'isomorphisme linéaire :

$$\begin{aligned} S &\to \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto (x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned} .$$

Ainsi, dans ce cas, la condition initiale $X(t_0) = X^0$ s'exprime par $n$ conditions initiales scalaires portant sur les dérivées successives de $x$ en $t_0$ :

$$x(t_0) = x^0 \ ; \ x'(t_0) = x^1 \ ; \ \ldots \ ; \ x^{(n-1)}(t_0) = x^{n-1}.$$

## 1.3 Résolvante

Soient $a \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E))$ et l'équation à l'inconnue $M$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E)$ :

$$M' = a \cdot M .$$

On lui associe le problème de Cauchy à la condition initiale $(t_0, \mathrm{Id})$, où $t_0 \in I$. Le théorème **1** entraîne l'existence d'une solution $M_{t_0}$. Posons :

$$R(t, t_0) = M_{t_0}(t) .$$

Si $X^0 \in E$, posons :

$$X(t) = R(t, t_0)(X^0).$$

Alors :

$$\begin{aligned} X'(t) = \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0)(X^0) &= M'_{t_0}(t)(X^0) = (a(t) \circ M_{t_0})(t)(X^0) \\ &= a(t)[M_{t_0}(t)(X^0)] \\ &= a(t)(X(t)) . \end{aligned}$$

Autrement dit, $X$ est solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}') \qquad X' = a \cdot X .$$

En outre :

$$X(t_0) = M_{t_0}(t_0)(X^0) = \mathrm{Id}(X^0) = X^0 .$$

Cela signifie que $X$ est la solution de $(\mathcal{E}')$ qui, à l'instant $t_0$, prend la valeur $X^0$.

La connaissance de $R$ permet donc de résoudre complètement l'équation $(\mathcal{E}')$.

**Définition 2.** On appelle résolvante de l'équation $(\mathcal{E}')$ l'application :

$$\begin{aligned} R : \ I^2 &\to \mathcal{L}_c(E) \\ (t, t_0) &\mapsto R(t, t_0). \end{aligned}$$

On se rappelle que

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = a(t) \circ R(t, t_0)$$

et que

$$R(t_0, t_0) = \mathrm{Id} .$$

La solution du problème de Cauchy :

$$X' = a \cdot X \ ; \quad X(t_0) = X^0$$

est alors fournie par l'égalité :

$$X(t) = R(t, t_0) X^0 .$$

Il faut remarquer que, sauf cas particulier, la détermination de $R$ ne se fait pas explicitement par **quadratures**, c'est-à-dire à la seule aide d'intégrations.

**Proposition 3.**
*On a* :

**(1)** $\forall t_1 \in I \qquad R(t_1, t_1) = \mathrm{Id}$.

**(2)** $\forall (t_1, t_2, t_3) \in I^3 \qquad R(t_1, t_2) \circ R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$.

**(3)** $\forall (t_1, t_2) \in I^2 \qquad R(t_1, t_2)$ *est inversible, d'inverse* $R(t_2, t_1)$.

**Preuve.** ∊
**(1)** a déjà été constaté.
**(2)** Soit $\varphi(t) = R(t, t_2) \circ R(t_2, t_3)$. On a :

$$\varphi'(t) = \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_2) \circ R(t_2, t_3)$$

$$= a(t) \circ R(t, t_2) \circ R(t_2, t_3) = a(t) \circ \varphi(t)$$

et $\varphi(t_2) = R(t_2, t_3)$.
Si $\psi(t) = R(t, t_3)$, on a aussi :

$$\psi'(t) = a(t) \circ \psi(t)$$

et

$$\psi(t_2) = R(t_2, t_3)$$

Par unicité :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = \psi(t)$$

et, en particulier :

$$\varphi(t_1) = \psi(t_1).$$

**(3)** Il suffit d'appliquer **(2)** à $t_3 = t_1$ et d'utiliser **(1)**. ∊

La connaissance de *R* permet aussi de résoudre $(\mathscr{E})$.

**Proposition 4.**
*Soit R la résolvante de l'équation homogène attachée à* :

$$(\mathscr{E}) \quad X' = a \cdot X + b.$$

*La solution de* $(\mathscr{E})$ qui à l'instant $t_0$ *prend la valeur* $X^0$ *est alors* :

$$X(t) = R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\mathrm{d}s + R(t, t_0)X^0.$$

**Preuve.** ∊ Cherchons $X(t)$ sous la forme $R(t, t_0)Y(t)$, ce qui revient à poser :

$$Y(t) = R(t_0, t)X(t).$$

Il vient :

$$(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0)Y(t) + R(t, t_0)Y'(t) = (a(t) \circ R(t, t_0))Y(t) + b(t).$$

Comme :

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = a(t) \circ R(t, t_0),$$

il s'ensuit :

$$Y'(t) = R(t_0, t)b(t).$$

Finalement :

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\mathrm{d}s + X^0$$

ou :

$$X(t) = R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\mathrm{d}s + R(t, t_0)X^0.$$

∊

Remarquons que la solution de $(\mathscr{E})$ peut aussi se mettre sous la forme :

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\mathrm{d}s + R(t, t_0)X^0.$$

La méthode qui nous a permis de déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ est appelée **méthode de variation des constantes**. Elle consiste à chercher *X* sous la forme $R(t,t_0)Y(t)$ où $Y(t)$, au lieu d'être une constante (ce qui redonnerait les solutions de $(\mathscr{E}')$), est une application.

## 1.4 Équations différentielles dans un espace de dimension finie

Supposons que *E* est de dimension *n*. Dans ce cas :

$$\mathscr{L}_c(E) = \mathscr{L}(E).$$

Le choix d'une base permet d'identifier les éléments de *E* à ceux de $\mathbb{K}^n$, ou encore aux vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrices unicolonnes). Les endomorphismes de *E* peuvent alors être identifiés à des matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit donc $(\mathscr{E}')$ l'équation :

$$X' = a \cdot X.$$

L'espace *S'* des solutions est, d'après le théorème **2**, un espace vectoriel de dimension *n*. Une base *S'* est appelée **système fondamental de solutions**.

**Définition 3.** Si $X_1, \ldots, X_n$ sont *n* applications dérivables de $I$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on appelle matrice wronskienne de ces applications la matrice :

$$W(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)].$$

Le déterminant de $W(t)$, noté $w(t)$, est appelé wronskien.

**Proposition 5.**
*Soient* $(X_1, \ldots, X_n) \in S'^n$ *et W leur matrice wronskienne.*
*Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

**(1)** $(X_1, \ldots, X_n)$ *est un système fondamental de solutions* ;
**(2)** *pour tout* $t \in I$, $W(t)$ *est inversible* ;
**(3)** *il existe* $t_0 \in I$ *tel que* $W(t_0)$ *est inversible.*

**Preuve.** ∊ Ces équivalences résultent du fait que, pour $t_0 \in I$, l'application :

$$S' \to \mathbb{K}^n$$
$$X \mapsto X(t_0)$$

est un isomorphisme, et donc transforme une base en une base. ∊

Pour montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un système fondamental de solutions, il suffit donc d'évaluer $w(t_0)$ pour un certain $t_0$ de *I*, et de vérifier que $w(t_0) \neq 0$.

On peut d'ailleurs calculer $w(t)$.

**Lemme 2.** Soient $V_1, \ldots, V_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \det(V_1, \ldots, AV_i, \ldots, V_n) = (\mathrm{tr}A)\det(V_1, \ldots, V_n)$$

**Preuve.** ∊ Quitte à considérer les coefficients des $V_i$ et de *A* comme des indéterminées, on peut supposer $(V_1, \ldots, V_n)$ libre. Alors :

$$AV_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}V_j,$$

où la matrice $[\alpha_{ij}]$ est semblable à $A$ (elle représente le même endomorphisme dans la base $(V_1, \ldots, V_n)$ ). Dans ces conditions :

$$\det(V_1, \ldots, AV_i, \ldots, V_n) = \alpha_{ii} \det(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_n)$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \det(V_1, \ldots, AV_i, \ldots, V_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_{ii}}\right) \det(V_1, \ldots V_n) .$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \operatorname{tr} A$, le résultat est prouvé. ∊

**Proposition 6.**

*Soit* $(X_1, \ldots X_n) \in S'^n$ *, et* $w(t)$ *son wronskien. Alors, si* $t_0 \in I$ :

$$w(t) = w(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} a(s) \mathrm{d}s\right]$$

**Preuve.** ∊ En dérivant $w(t)$ colonne par colonne, il vient :

$$w'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1(t), \ldots X_i'(t), \ldots X_n(t))$$

$$= (\operatorname{tr} a(t)) w(t) \text{ grâce au lemme } \mathbf{2}.$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire scalaire d'ordre un donne le résultat (cf. § 2). ∊

On peut très facilement exprimer la résolvante à l'aide d'un système fondamental de solutions $(X_1, \ldots X_n)$, ou si l'on veut de sa matrice wronskienne $W(t)$. En effet :

$$W'(t) = [X_1'(t), \ldots X_n'(t)] = [a(t)X_1(t), \ldots a(t)X_n(t)] = a(t)W(t) .$$

Par conséquent, pour $s \in I$ fixé :

$$(W(t)W(s)^{-1})' = a(t)(W(t)W(s)^{-1}) .$$

Comme $W(s)W(s)^{-1} = \mathrm{Id}$, on voit que :

$$R(t, s) = W(t)W(s)^{-1} .$$

Si, réciproquement, $R(t,s)$ est connu pour un $s$ et pour tout $t$, les colonnes de sa matrice forment un système fondamental de solutions.

Notons que l'on peut exprimer la solution de :

$$(\mathscr{E}) \quad X' = a \cdot X + b \quad ; \quad X(t_0) = X^0$$

grâce à la proposition **4** :

$$X(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} W(s)^{-1} b(s) \mathrm{d}s + W(t)W(t_0)^{-1} X^0 .$$

## 1.5 Cas des équations scalaires d'ordre *n*

Considérons l'équation :

$$(\mathscr{E}) \quad x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x + b$$

où $x$, application inconnue, appartient à $C^n(I, \mathbb{K})$ et où $a_{n-1}, \ldots, a_0, b$ sont dans $C^0(I, \mathbb{K})$. Posons :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

L'équation $(\mathscr{E})$ équivaut alors à :

$$X' = AX + B$$

(cf. § 1.1). Notant toujours $S$ et $S'$ l'ensemble des solutions, respectivement de $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{E}')$, nous allons interpréter les résultats du paragraphe 1.4.

Nous savons que $S$ et $S'$ sont des sous-espaces, respectivement affine et vectoriel, de $C^n(I, \mathbb{K})$, chacun de dimension $n$, avec ce renseignement que $S$ est de direction $S'$.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in S'^n$. On appelle **wronskienne** de cette famille la matrice :

$$W = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & \cdots & x_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

qui n'est autre que la matrice wronskienne des vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ associés à $x_1, \ldots, x_n$.

Nous disposons, pour $t_0 \in I$, de l'isomorphisme linéaire :

$$S' \to \mathbb{K}^n$$
$$x \mapsto (x(t_0), \ldots x^{(n-1)}(t_0))$$

Il en résulte que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de $S'$ si, et seulement si, $W(t_0)$ est une matrice inversible. Notant $w$ le déterminant de $W$ (appelé **déterminant wronskien**), cette condition équivaut à $w(t_0) \neq 0$. Notons que :

$$w(t) = w(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s) \mathrm{d}s\right]$$

par un calcul déjà effectué (proposition **6**).

**Proposition 7.**

*Soit* $x \in S', x \neq 0$ . *Les zéros de x sont isolés.*

**Preuve.** ∊ Soit $t_0 \in I$. On ne peut avoir :

$$x(t_0) = \ldots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 ,$$

faute de quoi $x$ serait l'application nulle.

Soit $p$ le plus petit entier tel que $x^{(p)}(t_0) \neq 0$ . Si $t_0$ est zéro de $x$, on a $p \geqslant 1$ et, d'après Taylor-Young :

$$x(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) .$$

Il en résulte que $x$ ne s'annule pas dans un voisinage de $t_0$. ∊

Un **corollaire** de la proposition **7** est le fait que $x$, solution non nulle de $S'$, ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros dans un compact de $I$. D'autre part, sans hypothèse particulière sur $I$, on peut indexer les zéros de $x$ dans $I$ par un intervalle de $\mathbb{Z}$. Par exemple si $I = [0, +\infty[$, on peut indexer les zéros de $x$ par un intervalle ⟦0, $k$⟧ si l'ensemble de ces zéros est fini, ou par $\mathbb{N}$ s'il est infini.

# 2. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

## 2.1 Position du problème

Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad X' = a \cdot X + b$$

où $a \in \mathcal{L}_c(E)$.

Ici, $a$ **ne dépend pas de la variable** $\boldsymbol{t}$, ce qui revient à dire que $t \mapsto a(t)$ est une **application constante**. On ne fait en revanche aucune hypothèse sur $b$, si ce n'est que $b \in C^0(I, E)$.

**Définition 4.** Une équation $(\mathcal{E})$, où $a$ est constante, est dite linéaire à coefficients constants.

Nous allons voir qu'une telle équation se résout explicitement **par quadratures**, ce qui lui confère un statut très particulier dans le cadre général des équations différentielles linéaires.

■ Donnons quelques résultats préliminaires sur **l'exponentielle** d'un élément $\ell$ de $\mathcal{L}_c(E)$, définie par :

$$e^{\ell} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\ell^k}{k!} = \mathrm{Id} + \ell + \frac{\ell^2}{2!} + \ldots$$

● La famille intervenant dans la somme ci-dessus est bien sommable car, si $\|\ .\ \|$ désigne la norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ subordonnée à la norme de $E$, on a :

$$\left\| \frac{\ell^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{\|\ell\|^k}{k!},$$

et il est bien connu que la famille $\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)_{k \geqslant 0}$ est sommable pour $\rho \in \mathbb{R}_+$.

On a évidemment :

$$e^0 = \mathrm{Id}.$$

■ D'autre part, si $\ell_1$ et $\ell_2$ commutent, on a :

$$e^{\ell_1 + \ell_2} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(\ell_1 + \ell_2)^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!\,q!} \ell_1^p \ell_2^q$$

$$= \sum_{\substack{p \geqslant 0 \\ q \geqslant 0}} \frac{\ell_1^p}{p!} \frac{\ell_2^q}{q!} = \left( \sum_{p \geqslant 0} \frac{\ell_1^p}{p!} \right) \left( \sum_{q \geqslant 0} \frac{\ell_2^q}{q!} \right) = e^{\ell_1} e^{\ell_2}.$$

Notons que ce résultat **ne se généralise pas** à deux endomorphismes $\ell_1$ et $\ell_2$ qui ne commutent pas.

En particulier, puisque $-\ell$ et $\ell$ commutent :

$$e^{\ell} \cdot e^{-\ell} = e^{-\ell} \cdot e^{\ell} = e^0 = \mathrm{Id}.$$

Donc $e^{\ell}$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$, d'inverse $e^{-\ell}$.

● Posons alors $\varphi(t) = e^{ta}$ pour $a \in \mathcal{L}_c(E)$. On a :

$$\varphi(t) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{t^k}{k!} a^k.$$

Or :

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left( \frac{t^k}{k!} a^k \right) \right\| = \left\| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} a^k \right\| = \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \|a\|^k \leqslant \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \|a\|^k$$

si $t \in [-M, M]$.

La série dérivée converge donc normalement sur $[-M, M]$. Il en résulte que $\varphi$ est de classe $C^1$, et que :

$$\varphi'(t) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} a^k = a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a.$$

Par conséquent, $\varphi$ est solution de l'équation différentielle :

$$\varphi'(t) = a \circ \varphi(t).$$

Comme $\varphi(0) = \mathrm{Id}$, $e^{(t-s)a}$ n'est autre que la résolvante de l'équation :

$$(\mathcal{E}') \qquad X' = a \cdot X.$$

■ On a donc obtenu le théorème suivant.

**Théorème 3.**
**(1)** La solution du problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}') \qquad X' = a \cdot X \quad ; \quad X(t_0) = X^0$$

est définie par :

$$X(t) = e^{(t-t_0)a} X^0.$$

**(2)** La solution du problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}') \qquad X' = a \cdot X + b \quad ; \quad X(t_0) = X^0$$

est définie par :

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\,\mathrm{d}s + e^{(t-t_0)} X^0.$$

Pratiquement, tout revient à calculer l'exponentielle de $t\,a$.

Pour davantage d'exemples à ce sujet, nous renvoyons à l'article [AF 181] *Comportements asymptotiques dans les systèmes dynamiques* qui étudie en particulier la situation lorsque $E$ est de dimension 2.

## 2.2 Cas des équations scalaires d'ordre *n*

Considérons l'équation différentielle scalaire à coefficients constants :

$$(\mathcal{E}) \qquad x^{(n)} = a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x + b$$

où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $b \in C^0(I, \mathbb{K})$.

On peut, bien entendu, la ramener à un système, et utiliser le théorème **3**. Une méthode directe est néanmoins préférable, car plus élémentaire.

■ Soit $V = C^{\infty}(I, \mathbb{K})$ et $D$ l'endomorphisme de $V$ défini par :

$$D : V \to V$$
$$x \mapsto x'.$$

Ainsi :

$$D^k x = x^{(k)}.$$

L'équation $(\mathscr{E})$ équivaut donc à :

$$\chi(D)x = b$$

où $\chi(T) = T^n - a_{n-1}T^{n-1} - \dots - a_1 T - a_0$ .

L'équation $\chi(T) = 0$ associée est **appelée équation caractéristique**.

La recherche de ses solutions conduit à factoriser $\chi$ dans $\Psi$ :

$$\chi = \prod_\lambda (T-\lambda)^{m(\lambda)}$$

● Supposons d'abord $b = 0$, c'est-à-dire que nous étudions alors :

$$(\mathscr{E}') \quad \chi(D)x = 0 .$$

Nous savons que :

$$\mathrm{Ker}\,\chi(D) = \bigoplus_\lambda \mathrm{Ker}\,(D - \lambda\mathbf{Id})^{m(\lambda)}$$

où Id désigne ici l'identité de *V*.

Posons $\mathrm{e}_\lambda(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

Si $y \in V$, on a :

$$D(\mathbf{e}_\lambda y) = \lambda \mathbf{e}_\lambda y + \mathbf{e}_\lambda Dy$$

et donc :

$$(D - \lambda\mathbf{Id})(\mathbf{e}_\lambda y) = \mathbf{e}_\lambda Dy$$

Par une récurrence immédiate, il vient :

$$(D-\lambda\mathbf{Id})^{m(\lambda)}(\mathbf{e}_\lambda y) = \mathbf{e}_\lambda D^{m(\lambda)} y$$

de sorte que :

$$\mathbf{e}_\lambda y \in \mathrm{Ker}\,(D - \lambda \mathrm{Id})^{m(\lambda)} \Leftrightarrow$$

$$y \in \mathrm{Ker}\,D^{m(\lambda)} \Leftrightarrow y \in \mathbb{C}_{m(\lambda)-1}[t]$$

où $\mathbb{C}_k[t]$ désigne l'espace vectoriel des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à *k*.

En résumé :

$$\mathrm{Ker}\,(D - \lambda\mathbf{Id})^{m(\lambda)} = \mathbf{e}_\lambda \mathbb{C}_{m(\lambda)-1}[t] .$$

● Une base de $\mathrm{Ker}\,(D-\lambda\mathrm{Id})^{m(\lambda)}$ est formée des applications :

$$t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda t} \qquad k = 0, 1, \dots, m(\lambda) - 1 .$$

La réunion de ces bases forme une base de Ker $\chi(D)$, c'est-à-dire une base de *S'*.

**Proposition 8.**

*La solution générale de* :

$$(\mathscr{E}') \quad x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$$

*est de la forme :*

$$t \mapsto \sum_\lambda P_\lambda(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

*où* $\chi(T) = T^n - a_{n-1}T^{n-1} - \dots - a_0 T = \prod_\lambda (T-\lambda)^{m(\lambda)}$ *, et où* $P_\lambda$ *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* $m(\lambda) - 1$ .

*Une base de l'espace S ' des solutions est formée des fonctions* :

$$t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda t} \quad \lambda \text{ racine de } \chi \ , \quad k \in [\![0, m(\lambda) - 1]\!] .$$

■ Venons-en à l'équation non homogène $(\mathscr{E})$. Si l'on se réfère à la traduction de l'équation scalaire en termes d'un système, nous introduirons $W(t)$ la matrice wronskienne de la base *S '* fournie précédemment. La solution générale en sera donc de la forme :

$$X(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} W(s)^{-1} b(s)\,ds + W(t)W(t_0)^{-1}X^0 .$$

Comme seule une solution particulière nous intéresse, on peut prendre $t_0 = 0$ et $X^0 = 0$ . Il s'agit donc d'inverser $W(s)$ et d'effectuer la primitivation. On prendra ensuite la première coordonnée de *X* pour en déduire *x.*

Le calcul peut **se simplifier** lorsque *b* est de la forme $P(t)\mathrm{e}^{\mu t}$, où $P \in \mathbb{C}_{m-1}[t]$ . Dans ce cas, on constate que, si $x \in S$ et :

$$\chi_1(T) = (T-\mu)^m \chi(T) ,$$

alors :

$$\chi_1(D)(x) = (D - \mu\mathbf{Id})^m (b) = 0$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}\,\chi_1(D)$ .

On peut toujours considérer que $\mu$ figure parmi les $\lambda$, éventuellement à l'ordre de multiplicité 0 (si $\mu$ n'est pas racine de $\chi$). Ainsi :

$$\chi_1(D) = (T-\mu)^{m+m(\mu)} \prod_{\lambda \neq \mu} (T-\lambda)^{m(\lambda)} .$$

Le noyau de $\chi_1(D)$ est décrit par l'égalité :

$$\mathrm{Ker}\,\chi_1(D) = \mathrm{Ker}\,(D-\mu\mathbf{Id})^{m+m(\mu)} \oplus \bigoplus_{\lambda\neq\mu} \mathrm{Ker}\,(D-\lambda\mathbf{Id})^{m(\lambda)} .$$

Ainsi, compte tenu de la description qui a été faite des noyaux intervenant dans la somme directe précédente, *x* admet la forme :

$$x(t) = P_\mu(t)\mathrm{e}^{\mu t} + \sum_{\lambda\neq\mu} P_\lambda(t)\mathrm{e}^{\lambda t} ,$$

avec $\deg P_\mu \leqslant m + m(\mu) - 1$ et $\deg P_\lambda \leqslant m(\lambda) - 1$ .

Si l'on ne cherche qu'une solution particulière, ce qui suffit, on remarquera que l'on peut retrancher à *x* une expression de la forme

$$Q(t)\mathrm{e}^{\mu t} + \sum_{\lambda\neq\mu} P_\lambda(t)\mathrm{e}^{\lambda t} ,$$

avec $\deg Q \leqslant m(\mu) - 1$ , puisque cette dernière fonction est solution de l'équation homogène. En d'autres termes, il existe une solution particulière de la forme $R(t)\mathrm{e}^{\mu t}$, avec $\deg R \leqslant m + m(\mu) - 1$ et $\mathrm{val}\,(R) \geqslant m(\mu)$ (val (*R*) désigne la valuation de *R*).

La méthode des coefficients indéterminés conduit alors à rechercher une solution particulière sous la forme :

$$\left(\sum_{i=m(\mu)}^{m+m(\mu)-1} r_i t^i\right)\mathrm{e}^{\mu t}$$

en substituant cette expression à *x* dans l'équation $(\mathscr{E})$, et en écrivant le système (de Cramer) en les coefficients $r_i$ que l'on obtient par identification.

**Exemple 5 :** résolvons :

$$(\mathscr{E}) \quad x'' - 2x' + x = t\mathrm{e}^{2t} .$$

L'équation caractéristique

$$T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2 = 0$$

fournit la racine double 1.

L'espace *S '* est donc engendré par $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $t \mapsto t\mathrm{e}^t$.

Ici, $m(2) = 0$ et $m = 2$. On peut chercher une solution particulière de la forme:

$$x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{2t},$$

donc :

$$x'(t) = (2\alpha_1 t + 2\alpha_0 + \alpha_1)e^{2t}$$

$$x''(t) = (4\alpha_1 t + 4\alpha_0 + 4\alpha_1)e^{2t}$$

D'où :

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = (\alpha_1 t + 2\alpha_1 + \alpha_0)e^{2t} = te^{2t}.$$

Il vient :

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_0 = -2$$

et

$$x(t) = (t-2)e^{2t}.$$

La solution générale de $(\mathscr{E})$ est donc :

$$(t-2)e^{2t} + Ce^{t} + Dte^{t}.$$

**Exemple 6 :** résolvons :

$$(\mathscr{E}) \qquad x''' - x = e^{t} + t$$

L'équation caractéristiques

$$T^3 - 1 = (T-1)(T-j)(T-j^2)$$

conduit à la base de $S'$ formée des applications

$$t \mapsto e^{t},\ t \mapsto e^{jt},\ t \mapsto e^{j^2 t}.$$

- On considère d'abord :

$$(\mathscr{E}_1) \qquad x''' - x = e^{t}\ .$$

Puisque 1 est racine simple de $T^3 - 1$, on cherche une solution $x_1$ de $(\mathscr{E}_1)$ sous la forme :

$$x_1(t) = \alpha t e^{t}.$$

Alors :

$$x'''_1(t) - x_1(t) = \alpha(t+3)e^{t} - \alpha te^{t} = 3\alpha e^{t} = e^{t}.$$

Donc $x_1(t) = \frac{t}{3}e^{t}$ convient.

On considère ensuite :

$$(\mathscr{E}_2) \qquad x''' - x = t,$$

dont on cherche une solution particulière

$$x_2(t) = at + b$$

qui fournit immédiatement $x_2(t) = -t$.

- La superposition, $\frac{t}{3}e^{t} - t$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$, dont la solution générale est alors :

$$x(t) = \frac{t}{3}e^{t} - t + Ae^{t} + Be^{jt} + Ce^{j^2 t}.$$

Si on se limite à des applications à valeurs réelles, on doit imposer $C = \overline{B}$ ou :

$$\begin{aligned} Be^{jt} + Ce^{j^2 t} &= \mathrm{Re}((\lambda + i\mu)e^{jt}) \\ &= \mathrm{Re}\left((\lambda + i\mu)e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \mu\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

Soit, pour $x$ à valeurs réelles :

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{t} - t + Ae^{t} + \lambda e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \mu e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$((A, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3)$.

# 3. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

## 3.1 Résolution

Considérons $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$ et l'équation :

$$(\mathscr{E}) \qquad x' = ax + b$$

où l'application inconnue est à rechercher dans $C^1(I, \mathbb{K})$. Il se trouve que l'on peut toujours résoudre $(\mathscr{E})$ par quadratures.

Soit en effet $(\mathscr{E}')$ l'équation homogène associée :

$$(\mathscr{E}') \qquad x' = ax.$$

Notons $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Alors $t \mapsto e^{A(t)}$ est solution (non nulle) de $(\mathscr{E}')$, et donc engendre $S'$.

La méthode habituelle de la variation des constantes conduit à rechercher la solution $x$ de $(\mathscr{E})$ sous la forme :

$$x = e^{A}y,$$

soit :

$$y = be^{-A}.$$

Pour primitiver, fixons $t_0$ dans $I$. Il vient :

$$x(t) = e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds + e^{A(t)}x(t_0)$$

En général, il n'est pas possible de calculer complètement ces intégrales, qui toutefois suffisent largement à une étude précise des solutions.

**Exemple 7 :** soit $(\mathscr{E}) \qquad x' = tx + t - t^3$

La solution générale de $(\mathscr{E}')$ est $ce^{\frac{t^2}{2}}$.

La méthode de variation des constantes conduit à :

$$x(t) = ce^{\frac{t^2}{2}} + t^2 + 1.$$

**Exemple 8 :** soit $(\mathscr{E})$ $\quad tx' = -x + \cos t$

Plaçons-nous d'abord sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. La méthode usuelle conduit à :

$$x(t) = \frac{c}{t} + \frac{\sin t}{t}.$$

Si l'on cherche des solutions sur $I = \mathbb{R}$, on constate que, nécessairement, $c_+$ et $c_-$ (constantes relatives à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$) sont nulles, donc que la seule solution possible sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$.

Réciproquement, cette application, prolongée par 1 en 0, est bien $C^1$ et est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On constate, sur cet exemple, que l'on ne peut appliquer les théorèmes généraux qui affirment que $S$ est un espace affine de dimension 1. Ici, c'est un singleton. La raison en est la forme de l'équation $(\mathscr{E})$, qui ne peut être ramenée à la forme standard qu'après division par $t$ :

$$x' = -\frac{1}{t}x + \frac{\cos t}{t},$$

opération interdite en 0.

**Exemple 9 :** soit $(\mathscr{E}')$ $\quad \sin t \cdot x' = 2\cos t \cdot x$.

Sur chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ :

$$x(t) = c_k \sin^2 t.$$

Définissons, pour $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ arbitraire, $x$ par une telle égalité, sur chaque $[k\pi, (k+1)\pi]$. On vérifie que l'on obtient une application $C^1$ sur $\mathbb{R}$, qui vérifie $(\mathscr{E}')$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'espace des solutions n'est donc pas de dimension finie.

## 3.2 Comportement des solutions

Puisque l'équation scalaire d'ordre 1 peut être résolue par quadratures, rien n'est plus aisé que d'étudier le comportement des solutions, globalement ou au voisinage d'un point.

### Périodicité

- Considérons l'équation $(\mathscr{E}')$ $\quad x' = ax$.

S'il existe une solution $x$ $T$-périodique et non nulle, l'égalité

$$a = \frac{x'}{x}$$

(valide du fait que $x$ ne peut s'annuler) entraîne que $a$ est $T$-périodique. En outre :

$$\int_0^T a = \int_0^T \frac{x'}{x} = \ln\left|\frac{x(T)}{x(0)}\right| = 0.$$

Si, réciproquement, $a$ vérifie ces deux conditions, l'application $A$ définie par :

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$$

est $T$-périodique, puisque :

$$A(t+T) - A(t) = \int_0^{t+T} a - \int_0^t a = \int_0^T a + \int_T^{t+T} a - \int_0^t a$$
$$= \int_T^{t+T} a - \int_0^t a = 0$$

grâce au changement de variable $s = u + T$ dans la première intégrale.

En **résumé** : les solutions de $(\mathscr{E}')$ sont $T$-périodiques si, et seulement si, $a$ est $T$-périodique, de valeur moyenne sur une période nulle.

- Considérons à présent $(\mathscr{E})$ : $x' = ax + b$.

Supposons que toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont $T$-périodiques.

Nécessairement, par différence, celles de $(\mathscr{E}')$ le sont, donc les conditions précédentes sont réalisées. En outre, $b$ est $T$-périodique. Enfin, puisque alors $A$ est $T$-périodique, on doit nécessairement avoir :

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Réciproquement, lorsque ces trois conditions sont réalisées, toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont $T$-périodiques.

### Comportement en + ∞

Si les comportements de $a$ et $b$ en $+\infty$ sont connus, on peut obtenir des renseignements sur le comportement des solutions grâce à l'étude d'intégrales.

**Exemple 10 :** soit $(\mathscr{E})$ :

$$x' = t^\alpha x + b(t)$$

où $\alpha > -1$.

Cherchons à quelles conditions sur $b$ $(\mathscr{E})$ admet une solution tendant vers 0 en $+\infty$. On a :

$$x(t) = \exp\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\left[c + \int_0^t \exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) b(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Nécessairement, la valeur entre crochets tend vers 0, donc

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) b(s)\,\mathrm{d}s$$

converge et $c$ est l'opposé de cette valeur. Alors :

$$x(t) = -\exp\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \cdot \int_t^{+\infty} \exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Supposons à présent $b(t) \underset{+\infty}{\sim} t^\beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$. Alors :

$$\int_t^{+\infty} \exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) s^\beta ds = \int_t^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) s^\alpha\right) s^{\beta-\alpha} \mathrm{d}s$$

$$= -\left[\exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) s^{\beta-\alpha}\right]_t^{+\infty} + (\beta-\alpha)\int_t^{+\infty} \exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) s^{\beta-\alpha-1} \mathrm{d}s.$$

Comme $\beta - \alpha - 1 < \beta$, la dernière intégrale est négligeable devant la première et donc, pour $\beta \neq \alpha$ :

$$\int_t^{+\infty} \exp\left(\frac{-s^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) s^\beta \mathrm{d}s \underset{+\infty}{\sim} \exp\left(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) t^{\beta-\alpha}.$$

Finalement, après examen du cas où $\beta = \alpha$ :

$$x(t) \sim -t^{\beta-\alpha}$$

et, en particulier, la condition cherchée est $\alpha > \beta$.

### Monotonie

Supposons que toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ : $x' = ax + b$ sont croissantes.

Soit $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe $x$ solution telle que $x(t_0) = \alpha$, et donc, puisque $x'(t_0) \geqslant 0$ :

$$a(t_0)\alpha + b(t_0) \geqslant 0 .$$

Cela étant vrai pour tout $\alpha$, $a$ est l'application nulle. Donc, en général, la monotonie des solutions dépend des conditions initiales.

# 4. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

## 4.1 Généralités

Considérons l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' + a_1 x' + a_0 x = b$$

où $a_0, a_1, b \in C^0(I, \mathbb{K})$. Nous savons que l'espace affine des solutions est de dimension 2 et, plus précisément, si $t_0 \in I$, que

$$x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$$

réalise une bijection affine entre cet espace et $\mathbb{R}^2$.

On peut mettre $(\mathscr{E})$ sous la forme équivalente :

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

lorsque $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$

Si $(x_1, x_2)$ sont solutions de l'équation homogène :

$$(\mathscr{E}') \qquad x'' + a_1 x' + a_0 x = 0 ,$$

leur matrice wronskienne est :

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{bmatrix} .$$

Leur wronskien $w(t)$ est égal à $w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} -a_1(s)\mathrm{d}s\right)$.

**Mise sous forme canonique**

Supposons $a_1 \in C^1(I, \mathbb{K})$ et cherchons $x = yz$ solution de $(\mathscr{E}')$. Il vient :

$$zy'' + (2z' + a_1 z)y' + (z'' + a_1 z' + a_0 z)y = 0 .$$

Si l'on impose $z(t) = \exp\left(\frac{-1}{2}\int_{t_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s\right)$, l'équation équivaut à :

$$y'' + \left(\frac{z''}{z} + a_1\frac{z'}{z} + a_0\right)y = 0$$

soit, tous calculs faits :

$$y'' + py = 0$$

avec :

$$p = \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a'_1}{2}\right) .$$

On peut ainsi ramener $(\mathscr{E}')$, et donc $(\mathscr{E})$, à une forme où dans le premier membre ne figurent que $y''$ et $y$.

D'un point de vue théorique, nous nous limiterons à l'étude d'une telle équation :

$$(\mathscr{E}) \qquad y'' + py = b .$$

Notons que, dans ce cas, le **wronskien de deux solutions est constant** (cf. § 1.5).

**Exemple 11 :** $tx'' + 2x' + x = 0$ se ramène à l'équation en $y = tx$ :

$$ty'' + y = 0 .$$

**Expression des solutions à partir d'une solution non nulle**

Si $z$ est une solution non nulle de :

$$(\mathscr{E}') \qquad x'' + a_1 x' + a_0 x = 0 ,$$

on cherche toute les solutions sous la forme $x = yz$.

Le calcul ci-dessus conduit à l'équation :

$$zy'' + (2z' + a_1 z)y' = 0 .$$

Sur un sous-intervalle où $z$ ne s'annule pas, cette équation d'ordre 1 en $y'$ s'écrit :

$$y'' + \left(2\frac{z'}{z} + a_1\right)y' = 0 ,$$

soit

$$y' = C\exp\left(-2\int\frac{z'}{z} - \int a_1\right) = \frac{C}{z^2}\exp\left(-\int a_1\right)$$

Finalement :

$$x(t) = z(t)\left[D + C\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a_1(u)\mathrm{d}u\right)}{z^2(s)}\mathrm{d}s\right] .$$

On obtient ainsi une **seconde solution** :

$$t \mapsto z(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a_1(u)\mathrm{d}u\right)}{z^2(s)}\mathrm{d}s ,$$

en tous cas sur les intervalles $J$ où $z$ ne s'annule pas.

Mais cette fonction est solution sur $J$ d'un certain problème de Cauchy, qui admet une solution sur $I$. D'après l'unicité sur $J$, ces solutions coïncident sur $I$. La seconde solution s'étend donc en une solution sur $I$ tout entier.

D'ailleurs, si $z(\alpha) = 0$ :

$$z(t) \underset{\alpha}{\sim} \lambda(t-\alpha) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 ,$$

donc

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a_1(u)\mathrm{d}u\right)}{z^2(s)}\mathrm{d}s \underset{\alpha}{\sim} \frac{\mu}{t-\alpha} .$$

Donc, on a bien un prolongement par continuité en $\alpha$.

### Transformation de Liouville

Il s'agit d'effectuer un changement de variables qui permette de ramener l'équation :

$$(\mathscr{E}') \qquad x'' - r^2 s x = 0$$

à une forme plus maniable.

On suppose que $r \in C^1(I, \mathbb{R})$ et que $r > 0$ sur $I$.

Quant à $s$, elle peut être à valeurs complexes.

- On pose :

$$R(t) = \int r(t)\,\mathrm{d}t,$$

de sorte que $R'(t) = r(t)$.

Les hypothèses entraînent que $R$ réalise un difféomorphisme de classe $C^1$ d'un intervalle sur son image. On effectue le changement de variables :

$$\xi = R(t).$$

Posons $x(t) = X(\xi)$. Il vient :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}(\xi)R'(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}(\xi)R''(t) + \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)R'^2(t).$$

L'équation $(\mathscr{E}')$ :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) - r(t)^2 s(t)x(t) = 0$$

s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)R'^2(t) + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}(\xi)R''(t) - R'^2(t)s(t)X(\xi) = 0$$

ou :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{R''(t)}{R'^2(t)} - s(t)X(\xi) = 0.$$

Mais si $r(t) = \rho(\xi)$ :

$$R''(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\xi}(\xi)r(t).$$

Donc, si de plus $s(t) = \sigma(\xi)$ :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{1}{\rho(\xi)} - \sigma(\xi)X(\xi) = 0.$$

- En **résumé**, si :

$$\xi = \int r(t)dt \;;\quad r(t) = \rho(\xi) \;;\quad s(t) = \sigma(\xi) \;;\quad x(t) = X(\xi),$$

on a l'équation

$$X'' + \frac{\rho'}{\rho}X' - \sigma X = 0.$$

- Il reste à mettre cette équation sous la forme canonique en posant $X = YZ$ avec

$$Z(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\xi)}}$$

Il vient :

$$Y'' + PY = 0$$

avec : $$P = -\sigma - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho''}{\rho} - \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) = \frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \sigma.$$

**Exemple 12 :** $(\mathscr{E}') \qquad x'' - t^{2\alpha}x = 0$

On prend :

$$r(t) = t^{\alpha} \quad \text{et} \quad s(t) = 1.$$

Il vient :

$$\xi = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \;;\quad \rho(\xi) = ((\alpha+1)\xi)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \;;\quad \sigma(\xi) = 1 \;;$$

$$X(\xi) = x\left(((\alpha+1)\xi)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad Z(\xi) = \frac{1}{((\alpha+1)\xi)^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}}.$$

Posant $X(\xi) = Y(\xi)Z(\xi)$, $Y$ est solution de :

$$Y'' + PY = 0$$

avec : $$P = \frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \sigma.$$

Or $\ln\rho = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\ln((\alpha+1)\xi)$, donc

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{\xi}.$$

puis :

$$\frac{\rho''}{\rho} - \frac{\rho'^2}{\rho^2} = -\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{\xi^2}.$$

Donc :

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{\xi^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\frac{1}{\xi^2}\right] - 1$$
$$= \left[-\frac{\alpha^2}{4(\alpha+1)^2} + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\right]\frac{1}{\xi^2} - 1 = \frac{\alpha(\alpha+2)}{4(\alpha+1)^2}\frac{1}{\xi^2} - 1.$$

### Solutions de l'équation non homogène

Revenons à l'équation non homogène :

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' + a_1x' + a_0x = b.$$

Supposons connue une base $(x_1, x_2)$ de $S'$, dont $W$ désigne la matrice wronskienne et $w$ le wronskien.

Nous pouvons expliciter $x$ grâce aux calculs du paragraphe 1.4. Imposons

$$x(t_0) = x'(t_0) = 0.$$

Comme

$$W(s)^{-1} = \frac{1}{w(s)}\begin{vmatrix} x_2'(s) & -x_2(s) \\ -x_1'(s) & x_1(s) \end{vmatrix},$$

il vient :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{x_1(s)x_2(t) - x_2(s)x_1(t)}{w(s)}b(s)\mathrm{d}s.$$

## 4.2 Équations $y'' + py = 0$ avec $p \leqslant 0$

■ Soit $S'$ l'espace des solutions de :

$$(\mathscr{E}') \qquad y'' + py = 0$$

où $p \in C^0(I, \mathbb{R}), p \leqslant 0$ .

Si $y \in S'$ :

$$(yy')' = yy'' + y'^2 = -py^2 + y'^2 \geqslant 0 \ .$$

Donc $y^2$ est convexe.

● **1er cas**. $y$ ne s'annule pas sur $I$. Alors $y$ est convexe ou concave sur $I$ (figure **1**)

● **2e cas**. $y$ s'annule sur $I$ et alors, sauf si c'est la solution nulle, elle ne s'y annule qu'une fois (faute de quoi $y^2$ serait négative entre deux points d'annulation, donc nulle). Le graphe de $y$ peut avoir l'allure de ceux sur la figure **2**.

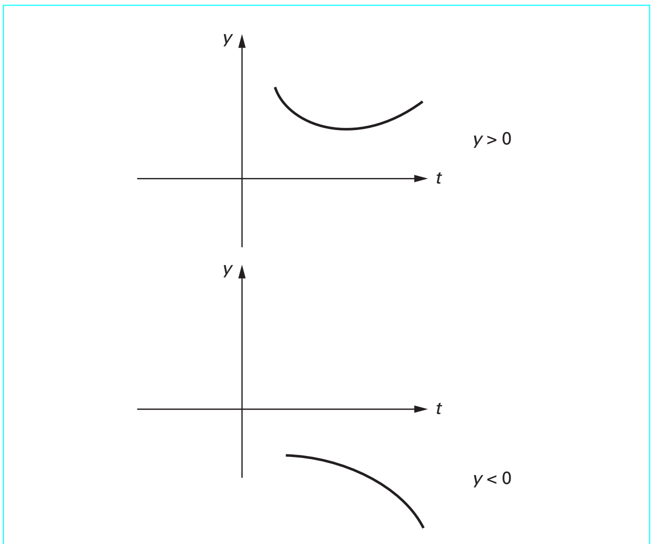


**Figure 1 – Solution de $y'' + py = 0$, $p \leqslant 0$, ne s'annulant pas**

■ Cette étude a une autre conséquence.

**Proposition 9.**

*Si $t_0 < t_1$ sont dans $I$, si $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , il existe une unique solution $y$ de $(\mathscr{E}')$ telle que* :

$$y(t_0) = y_0 \ ;$$

$$y(t_1) = y_1 \ .$$

**Preuve.** $\epsilon$ Considérons l'application :

$$S' \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \mapsto (y(t_0), y(t_1))$$

Le théorème **2**, dans son illustration de l'exemple **4**, nous montre que le noyau de cette application linéaire est réduit à 0. Elle réalise donc un isomorphisme. $\epsilon$

Cette étude sera approfondie dans le paragraphe 5 (problème de Sturm-Liouville).

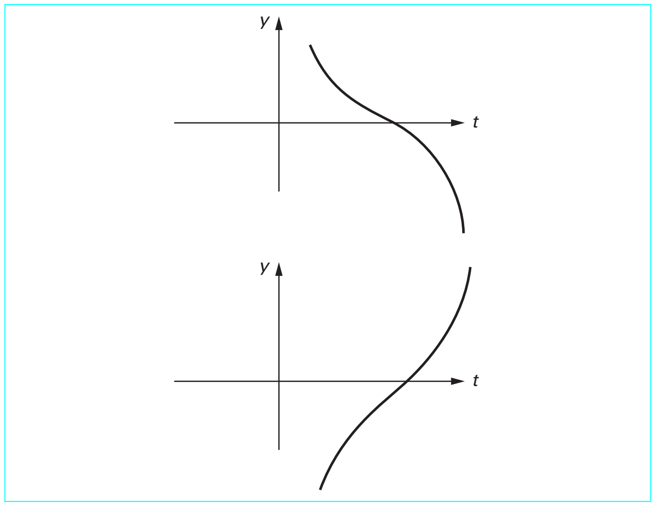


**Figure 2 – Solution de $y'' + py = 0$, $p \leqslant 0$, s'annulant**

## 4.3 Points d'annulation

On considère ici deux équations :

$$(\mathscr{E}'_1) \qquad y_1'' + p_1 y_1 = 0$$

$$(\mathscr{E}'_2) \qquad y_2'' + p_2 y_2 = 0 .$$

Considérons le wronskien

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

de deux solutions. Par dérivation :

$$w' = y_1 y_2 (p_1 - p_2)$$

Supposons $p_1 \geqslant p_2$ et considérons $a < b$ deux points d'annulation consécutifs de $y_2$ . Montrons que $y_1$ s'annule sur $[a,b]$ . Sinon, quitte à les changer en leurs opposés, on peut supposer les fonctions $y_1$ et $y_2 > 0$ sur $]a,b[$.

Ainsi, $w' \geqslant 0$ sur $[a,b]$ , donc :

$$w(a) \leqslant w(b) \ .$$

Mais :

$$w(a) = y_1(a) y'_2(a) > 0 \quad \text{et} \quad w(b) < 0 \ .$$

C'est une contradiction et $y_1$ s'annule sur $[a,b]$ .

Plus précisément, si $y_1$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, la même étude conduit à :

$$w(a) = w(b) = 0 \ ,$$

donc $w' = 0$ sur $[a,b]$ , donc $p_1 = p_2$ sur $[\bar{a},b]$ et donc $(y_1, y_2)$ liée sur $[a,b]$ .

On peut donc énoncer le résultat suivant.

**Proposition 10.**

*Soient $p_1 \geqslant p_2, y_1$ solution de :*

$$y''_1 + p_1 y_1 = 0$$

*et $y_2$ solution de*

$$y''_2 + p_2 y_2 = 0 \ ,$$

*$(y_1, y_2)$ étant une famille libre.*

*On suppose que $a < b$ sont deux points d'annulation consécutifs de $y_2$. Alors $y_1$ s'annule sur ]a,b[.*

**Corollaire.**

*Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions indépendantes de :*

$$y'' + py = 0,$$

*et si $a < b$ sont deux points d'annulation consécutifs de $y_1$, $y_2$ s'annule exactement une fois sur ]a,b[.*

■ Pour étudier le nombre de zéros d'une solution $y \neq 0$ de :

$$y'' + py = 0,$$

on se place sur un intervalle $J$ sur lequel $p > 0$.

En effet, si $p \leqslant 0$, $y$ ne peut s'annuler qu'une fois d'après le paragraphe 4.2. On encadre alors $p$ par deux constantes :

$$0 < m^2 \leqslant p \leqslant M^2$$

On sait résoudre l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ (à coefficients constants), dont la solution générale

$$t \mapsto A\sin(\omega t - \varphi)$$

s'annule sur une suite

$$k \mapsto \frac{\varphi}{\omega} + k\frac{\pi}{\omega}$$

Cette solution joue le rôle de $y_2$. Ainsi $y$ s'annule au moins une fois sur tout intervalle ouvert de longueur $\frac{\pi}{m}$. De même, $y$ s'annule au plus une fois sur tout intervalle de longueur $\frac{\pi}{M}$

**Exemple 13 :** considérons une solution non nulle de l'équation :

$$y'' + (1 + \varepsilon)y = 0$$

sur $[0, +\infty[$, où $\varepsilon \underset{+\infty}{\to} 0$.

Soit $1 > \alpha > 0$ et $a$ tel que $\varepsilon(t) \geqslant -\alpha$ sur $[a, +\infty[$.

Considérons la suite telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}$$

On sait que $y$ s'annule au moins une fois sur chaque intervalle $]u_n, u_{n+1}[$, qui est de longueur $\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}$.

Donc $y$ s'annule au moins $n$ fois sur $]u_0, u_n[$.

Notons $N(A)$ le nombre de zéros de $y$ sur $[0, A]$. D'après ce qui précède, si $A \geqslant u_n$, $N(A) \geqslant n$. Or : $u_n = a + \frac{n\pi}{\sqrt{1-\alpha}}$. Si donc

$$n = \left\lfloor \sqrt{1-\alpha}\left(\frac{A-a}{\pi}\right)\right\rfloor,$$

on a : $N(A) \geqslant n$.

Il en résulte que

$$\frac{N(A)}{A} \geqslant \sqrt{1-\alpha}\,\frac{A-a}{\pi A} - \frac{1}{A},$$

donc que

$$\underline{\lim}\frac{N(A)}{A} \geqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\alpha}.$$

Cela étant réalisé pour tout $\alpha$, on obtient :

$$\underline{\lim}\frac{N(A)}{A} \geqslant \frac{1}{\pi}$$

On montre même que $\overline{\lim}\frac{N(A)}{A} \leqslant \frac{1}{\pi}$. Finalement : $N(A) \sim \frac{A}{\pi}$.

■ Nous allons généraliser l'exemple **13** à une large classe d'équations, de la forme :

$$x'' + qx = 0$$

où $q \in C^1([a, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$.

Supposons que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q}$ diverge, et appliquons à l'équation précédente la transformation de Liouville.

Avec les notations du paragraphe 4.1, supposons que :

$$\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} \underset{+\infty}{\to} 0.$$

Notons que la divergence de $\int_a^{+\infty} \sqrt{q}$ entraîne bien que le changement de variable $\xi = R(t)$ réalise un difféomorphisme de $[a, +\infty[$ sur un intervalle $[b, +\infty[$ puisque ici $r = \sqrt{q}$ et $s = -1$.

L'équation transformée s'écrit :

$$Y'' + (1 + \varepsilon)Y = 0$$

avec $\varepsilon \underset{+\infty}{\to} 0$.

La méthode d'encadrement de l'exemple **13** montre que le nombre $N(B)$ de zéros de $Y$ dans $[b, B]$ équivaut à $\frac{B}{\pi}$. Il en va de même pour les zéros de $X$, qui s'annule en même temps que $Y$.

Soit $\nu(A)$ le nombre de zéros de $x$ dans $[a, A]$.

Puisque $\nu(A) = N(R(A))$ :

$$\nu(A) \sim \frac{R(A)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_a^A \sqrt{q(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons $\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}$ à l'aide de $r$ :

$$\rho(\xi) = r(t) \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r'}{r^2}$$

et

$$\frac{\rho''}{\rho} - \frac{\rho'^2}{\rho^2} = \left(\frac{r''}{r^2} - 2\frac{r'^2}{r^3}\right)\frac{1}{r}$$

donc :

$$\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} = \frac{1}{4}\frac{r'^2}{r^4} - \frac{1}{2}\left[\frac{r'^2}{r^4} + \frac{r''}{r^3} - 2\frac{r'^2}{r^4}\right] = \frac{3}{4}\frac{r'^2}{r^4} - \frac{1}{2}\frac{r''}{r^3}$$

Comme $r = \sqrt{q}$, il vient :

$$\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} = \frac{1}{4q}\left(\frac{5}{4}\frac{q'^2}{q^2} - \frac{q''}{q}\right).$$

On obtient finalement le **résultat** suivant :

si $q' = o(q^{3/2})$ et $q'' = o(q^2)$, si, en outre, $\int_a^{+\infty}\sqrt{q}$ diverge, le nombre $\nu(A)$ de zéros d'une solution non nulle de l'équation :

$$x'' + qx = 0$$

dont l'intervalle [a, A] équivaut à $\frac{1}{\pi}\int_a^A \sqrt{q}$.

**Exemple 14 :** soit l'équation

$$x'' + t^{\alpha} x = 0 \quad , \quad \alpha > -2 \, .$$

On constate que

$$t^{\alpha - 1} = 0(t^{3\alpha/2})$$

et

$$t^{\alpha - 2} = 0(t^{2\alpha}) \, ,$$

ainsi que la divergence de $\int_1^{+\infty} t^{\alpha/2} dt$. Donc :

$$\nu(A) \sim \frac{1}{\pi} \frac{2}{\alpha + 2} A^{[(\alpha/2)+1]} .$$

**Exemple 15 :** soit l'équation

$$x'' + e^t x = 0 \, .$$

Les hypothèses sont à nouveau réalisées ; donc :

$$\nu(A) \sim \frac{1}{2\pi} e^{A/2} .$$

# 5. Problème de Sturm-Liouville

## 5.1 Généralités

On considère l'équation différentielle linéaire avec second membre scalaire d'ordre 2 :

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' + px = y \, ,$$

où $y \in C^0([0,1], \mathbb{C})$ et $p \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.

L'inconnue $x$ appartient à $C^0([0,1], \mathbb{C})$ que l'on note $E$. On note $S$ l'espace affine des solutions.

Contrairement au problème de Cauchy, où l'on cherche $x \in S$ vérifiant deux conditions au même instant, le **problème de Sturm-Liouville** s'intéresse aux solutions $x$ qui vérifient des conditions aux bornes, ou encore **conditions aux limites** :

$$(\mathscr{C}) \qquad \begin{cases} ax(0) + bx'(0) = 0 \\ cx(1) + dx'(1) = 0 \end{cases}$$

Ici, $(a, b)$ et $(c, d)$ sont deux couples non nuls de réels.

L'espace ambiant est celui des applications continues sur [0, 1], à valeurs complexes, que l'on note E. Cet espace est muni, outre de la norme uniforme $\| \cdot \|_{\infty}$, du produit scalaire hermitien canonique :

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 \bar{x} y \, .$$

La norme hermitienne attachée sera notée $\| \cdot \|$.

Les solutions du problème de Sturm-Liouville constitué de l'équation $(\mathscr{E})$ et des conditions $(\mathscr{C})$ sont dans le sous-espace vectoriel $V$ de $E$ formé des applications de classe $C^2$ qui vérifient $(\mathscr{C})$ :

$$V = \{ x \in C^2([0, 1], \mathbb{C}) \; ; \; ax(0) + bx'(0) = cx(1) + dx'(1) = 0 \} \, .$$

Introduisons l'application linéaire $D$, de $V$ dans $E$, définie par :

$$Dx = x'' + px \, .$$

■ Ainsi, $S$ n'est autre que l'image réciproque de $\{y\}$ par $D$. L'opérateur différentiel $D$ vérifie sur $V$ la **condition d'hermicité** :

$$\langle Dx, y \rangle = \langle x, Dy \rangle \, .$$

En effet :

$$\langle Dx, y \rangle = \int_0^1 \bar{x}'' y + \int_0^1 p \bar{x} y \qquad \text{(car } p \text{ est à valeurs réelles)}$$

$$= [\bar{x}' y]_0^1 - \int_0^1 \bar{x}' y' + \int_0^1 p \bar{x} y \, .$$

Or :

$$\langle Dx, y \rangle = \langle x, Dy \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle Dx, y \rangle = \overline{\langle Dy, x \rangle} \Leftrightarrow [\bar{x}' y]_0^1 = [y' \bar{x}]_0^1 \, .$$

Cette dernière égalité est réalisées dans $V$ car :

$$[\bar{x}' y]_0^1 - [y' \bar{x}]_0^1 = \begin{vmatrix} y(1) & \bar{x}(1) \\ y'(1) & \bar{x}'(1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y(0) & \bar{x}(0) \\ y'(0) & \bar{x}'(0) \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

chacun des déterminants étant nul.

■ L'hermicité de $D$ a plusieurs **conséquences**.

Soit $x$ un vecteur non nul de $V$ tel que

$$Dx = \lambda x \, .$$

On dit que $x$ est vecteur propre de $D$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Alors :

$$\langle Dx, x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2 = \langle x, Dx \rangle = \lambda \|x\|^2 \, .$$

Donc :

$$\lambda \in \mathbb{R} \, .$$

Si, de plus, $y$ est un vecteur propre associé à une valeur propre $\mu \neq \lambda$, on aura :

$$\langle Dx, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, Dy \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

et donc $\langle x, y \rangle = 0$ : les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

## 5.2 Fonction de Green

Nous faisons dans ce paragraphe l'hypothèse supplémentaire que $D$ est injectif sur $V$. Il est évident que l'équation $Dx = y$ admet au plus une solution dans $V$. Nous allons en construire une explicitement.

Soit $x_1$ une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + px = 0 \, ; \\ x_1(0) = -b \, ; \\ x'_1(0) = a \, . \end{cases}$$

et de même $x_2$ solution de :

$$\begin{cases} x'' + px = 0 \, ; \\ x_2(1) = -d \, ; \\ x'_2(1) = c \, . \end{cases}$$

Supposons $(x_1, x_2)$ liée, par exemple :

$$x_2 = \alpha x_1 \, .$$

Puisque $x_1$ vérifie la condition

$$ax_1(0) + bx_1'(0) = 0 ,$$

il en va de même de $x_2$ qui, d'autre part, vérifie

$$cx_2(1) + dx_2'(1) = 0 .$$

Donc : $x_2 \in V$.

Comme $Dx_2 = 0$, $x_2 = 0$ par l'injectivité de $D$, ce qui n'est certainement pas le cas.

Ainsi, $(x_1, x_2)$ forme un système fondamental de solutions de l'équation

$$x'' + px = 0 .$$

Son wronskien est une constante non nulle. Quitte à diviser $x_2$ par une constante (ce qui ne change pas la condition $cx_2(1) + dx_2'(1) = 0$), on peut supposer que ce wronskien vaut 1. On a ainsi obtenu une famille libre $(x_1, x_2)$ solutions de l'équation $x'' + px = 0$ telle que :

$$\begin{cases} ax_1(0) + bx_1'(0) = 0 ; \\ cx_2(1) + dx_2'(1) = 0 ; \\ x_1x_2' - x_1'x_2 = 1. \end{cases}$$

**Définition 5.** On appelle fonction de Green associée au problème aux limites :

$$\begin{cases} x'' + px = y ; \\ ax(0) + bx'(0) = cx(1) + dx'(1) = 0 , \end{cases}$$

la fonction $K$ définie par les conditions suivantes :
— si $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1$ $\quad K(u, v) = x_1(u)x_2(v)$ ;
— si $0 \leqslant v \leqslant u \leqslant 1$ $\quad K(u, v) = K(v, u)$ .

La définition 5 est bien cohérente pour $u = v$. La fonction $K$ n'est pas, en général, de classe $C^1$ sur $[0,1]^2$. Néanmoins, elle l'est sur le triangle

$$T = \{(u, v) \;;\; (0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1)\}$$

et son symétrique. En conséquence, elle est lipschitzienne sur $[0,1]^2$.

**Théorème 4**. Si $D$ est injective, le problème de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} Dx = y ; \\ ax(0) + bx'(0) = cx(1) + dx'(1) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution $x$, donnée par l'égalité :

$$x(t) = \int_0^1 K(t, u)y(u)\mathrm{d}u .$$

**Preuve.** ∊ Il suffit de montrer que $x$ défini dans le théorème 4 convient. On a :

$$x(t) = \int_0^t K(t, u)y(u)\mathrm{d}u + \int_t^1 K(t, u)y(u)\mathrm{d}u$$

$$= x_2(t)\int_0^t x_1(u)y(u)\mathrm{d}u + x_1(t)\int_t^1 x_2(u)y(u)\mathrm{d}u .$$

Donc $x$ est de classe $C^1$ et :

$$x'(t) = x_2(t)x_1(t)y(t) + x'_2(t)\int_0^t x_1 y - x_1(t)x_2(t)y(t) + x'_1(t)\int_t^1 x_2 y ,$$

soit :

$$x'(t) = x_2'(t)\int_0^t x_1 y + x_1'(t)\int_t^1 x_2 y .$$

Il en résulte que $x$ est de classe $C^2$ et que :

$$x''(t) = x_2''(t)\int_0^t x_1 y + x'_2(t)x_1(t)y(t) + x_1''(t)\int_t^1 x_2 y - x_1'(t)x_2(t)y(t)$$

Compte tenu de l'égalité

$$x_1x_2' - x_1'x_2 = 1 ,$$

et du fait que

$$Dx_1 = Dx_2 = 0 ,$$

il vient :

$$x''(t) = -p(t)x_2(t)\int_0^t x_1 y + -p(t)x_1(t)\int_t^1 x_2 y + y(t) ,$$

soit :

$$x'' + px = y .$$

D'autre part :

$$\begin{cases} x(0) = x_1(0)\displaystyle\int_0^1 x_2 y \\ x'(0) = x_1'(0)\displaystyle\int_0^1 x_2 y \end{cases}$$

donc :

$$ax(0) + bx'(0) = 0 ,$$

et de même

$$cx(1) + dx'(1) = 0 \qquad ∊$$

Le théorème **4** permet de définir une application linéaire $\Phi$, de $E$ vers $V$, qui n'est autre que l'inverse de $D$ :

$$\Phi(y)(t) = \int_0^1 K(t, u)y(u)\mathrm{d}u .$$

Puisque $D$ est hermitien, $\Phi = D^{-1}$ l'est aussi.

D'autre part, les valeurs propres de $\Phi$ sont les inverses des valeurs propres de $D$, les espaces propres associés étant les mêmes.

Remarquons que $\Phi(y)$, qui est continue, est même lipschitzienne :

$$|\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t')| \leqslant \int_0^1 |K(t, u) - K(t', u)||y(u)|\mathrm{d}u$$

$$\leqslant A|t - t'|\int_0^1 |y(u)|\mathrm{d}u$$

car $K$ est lipschitzienne.

On peut d'ailleurs majorer $\int_0^1 |y(u)|\mathrm{d}u$ par $\|y\|$ grâce à Cauchy-Schwarz :

$$|\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t')| \leqslant A\|y\||t - t'| .$$

## 5.3 Décomposition spectrale

Nous supposerons toujours, dans ce paragraphe, l'application *D*, de *V* dans *E*, injective.

On note $\Phi = D^{-1}$, conformément aux résultats du paragraphe 5.2.

**Théorème 5**. L'application $\Phi$, de $(E, \| \ \|)$ dans $(V, \| \ \|_\infty)$, est compacte.

**Preuve.** ∊ Il s'agit de montrer que l'image de la boule unité de $(E, \| \ \|)$ est d'adhérence compacte dans $(V, \| \ \|_\infty)$. D'après le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que cette image est bornée et équicontinue.

L'**équicontinuité** provient de l'inégalité

$$|\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t')| \leqslant A\|y\||t-t'|$$

où *A* ne dépend ni de *y*, ni de $(t, t')$ ; le caractère borné résulte de l'inégalité

$$|\Phi(y)(t)| \leqslant \|K\|_\infty \|y\|$$

obtenue en majorant $\int_0^1 |y|$ par $\|y\|$. ∊

**Lemme 3.** L'ensemble des valeurs propres de *D* est majoré

**Preuve.** ∊ Soient $\lambda$ une valeur propre de *D*, *y* un vecteur propre que l'on peut supposer, quitte à en prendre la partie réelle, à valeurs réelles, et, en outre, tel que $\|y\| = 1$. On dispose de l'inégalité :

$$[y(1)^2 - y(x)^2] = \int_0^1 2yy' \leqslant 2\|y'\| ,$$

et donc :

$$y(1)^2 \leqslant 2\|y'\| + y(x)^2 .$$

Par intégration entre 0 et 1, on obtient :

$$y(1)^2 \leqslant 2\|y'\| + 1 .$$

De même :

$$y(0)^2 \leqslant 2\|y'\| + 1 .$$

Mais $y \in V$. On a donc, pour $bd \neq 0$ :

$$\begin{cases} y'(0) = -\dfrac{a}{b} y(0) \\ y'(1) = -\dfrac{c}{d} y(1) \end{cases}$$

et donc :

$$|y(1)y'(1) - y(0)y'(0)| \leqslant C(y(1)^2 + y(0)^2) \leqslant C(4\|y'\| + 2) .$$

On dispose d'une égalité analogue lorsque $bd = 0$ ; si, par exemple :

$$b = 0, y(0) = 0 \ \text{ et } \ y(0)y'(0) = 0 .$$

D'autre part, $Dy = \lambda y$ et donc :

$$\lambda = \langle Dy, y \rangle = \int_0^1 yy'' + \int_0^1 py^2$$

$$= y(1)y'(1) - y(0)y'(0) - \int_0^1 y'^2 + \int_0^1 py^2 ,$$

soit :

$$\lambda \leqslant 4C\|y'\| + 2C + \|p\|_\infty - \|y'\|^2 .$$

Puisque $4C\alpha - \alpha^2 \leqslant 4C^2$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\lambda \leqslant 4C^2 + 2C + \|p\|_\infty .$$ ∊

**Proposition 11.**

*Soit* $\mu$ *une valeur propre de* $\Phi$. *L'espace propre correspondant est de dimension 1.*

**Preuve.** ∊ Soit $y \in E$ tel que :

$$\Phi y = \mu y ;$$

$\mu$ est non nulle puisque $\Phi$ est bijective.

Posons $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, de sorte que $Dy = \lambda y$. Ainsi, *y* satisfait l'équation différentielle :

$$y'' + (\rho - \lambda)y = 0 .$$

L'espace des solutions est de dimension 2. D'après le théorème de Cauchy, il existe une solution telle que :

$$y(0) = a , \ y'(0) = b ,$$

de sorte que :

$$ay(0) + by'(0) = a^2 + b^2 > 0 ,$$

et que :

$$y \notin V .$$

Donc l'espace propre est de dimension 1. ∊

Dans la suite, nous considérons pour chaque valeur propre un vecteur propre, que l'on peut choisir à valeurs réelles, et de norme hermitienne égale à 1.

Puisque $\Phi$ est un opérateur autoadjoint compact de $(E, \| \ \|)$ dans $(V, \| \ \|_\infty)$, c'en est un aussi de $(E, \| \ \|)$ dans $(V, \| \ \|)$ grâce à l'inégalité :

$$\forall x \in V \quad \|x\| \leqslant \|x\|_\infty .$$

On sait que l'ensemble de ses valeurs propres forme une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(|\mu_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante et tende vers 0. Le lemme **3** assure que, pour $n \geqslant n_0$, $\mu_n < 0$. En effet, les valeurs propres de *D* sont les $\dfrac{1}{\mu_n}$.

Pour chaque *n*, nous désignerons par $\varphi_n$ un vecteur propre à valeurs réelles, de norme 1 :

$$\Phi\varphi_n = \mu_n \varphi_n \Leftrightarrow D\varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\varphi_n .$$

La théorie générale des opérateurs hermitiens compacts assure que la famille de $\varphi_n$ forme une base hilbertienne de *V*.

Si $x \in V$, on note $\langle \varphi_n , x \rangle$ le coefficient de Fourier relatif à $\varphi_n$. On a alors :

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \varphi_n , x \rangle \varphi_n ,$$

la famille étant sommable au sens de la norme hermitienne.

Notons que, si $y \in E$, $\Phi y \in V$ et que :

$$\langle \varphi_n , \Phi y \rangle = \langle \Phi\varphi_n , y \rangle = \mu_n \langle \varphi_n , y \rangle .$$

On a donc pour, pour $y \in E$ :

$$\Phi y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \langle \varphi_n , y \rangle \varphi_n .$$

En réalité, l'égalité :

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \varphi_n , x \rangle \varphi_n$$

qui est vraie pour la norme hermitienne l'est aussi au sens de la convergence uniforme, comme nous allons le voir.

**Proposition 12.**

*Soit $x \in V$. Alors :*

$$\forall t \in [0, 1] \quad x(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \varphi_n , x \rangle \varphi_n(t) ,$$

*la famille sommable du second membre définissant une série uniformément convergente sur [0, 1].*

**Preuve.** ϵ Puisque $\Phi$ est surjective sur *V*, il suffit de montrer l'égalité pour $x = \Phi y$, où $y \in E$, soit :

$$(\Phi y)(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \varphi_n , y \rangle \mu_n \varphi_n(t) .$$

Or :

$$\mu_n \varphi_n(t) = (\Phi \varphi_n)(t) = \int_0^1 K(u, t) \varphi_n(u) \mathrm{d}u = \langle \varphi_n , K_t \rangle$$

avec $K_t(u) = K(u, t)$.

D'après Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{n = p}^{q} |\langle \varphi_n, y \rangle \mu_n \varphi_n(t)| \leqslant \left( \sum_{n = p}^{q} |\langle \varphi_n , y \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n = p}^{q} |\langle \varphi_n , K_t \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Puisque *y* et $K_t$ sont dans *E*, on peut leur appliquer l'inégalité de Bessel relativement à la famille orthonormale $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\sum_{n = p}^{q} |\langle \varphi_n , K_t \rangle|^2 \leqslant \|K_t\|^2 \leqslant \|K\|_\infty^2$$

et

$$\sum_{n = p}^{q} |\langle \varphi_n , y \rangle|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

pour $q \geqslant p \geqslant p_0$. Donc :

$$\sum_{n = p}^{q} |\langle \varphi_n , y \rangle \mu_n \varphi_n(t)| \leqslant \|K\|_\infty \varepsilon$$

pour $q \geqslant p \geqslant p_0$, ce qui achève la preuve. ϵ

## 5.4 Résolution complète du problème de Sturm-Liouville

Nous ne faisons plus ici l'hypothèse que *D* est injective.

D'après ce qui précède, on peut numéroter les valeurs propres de *D* en une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\ldots < \lambda_{n_0 + 1} < \lambda_{n_0} \leqslant 0 < \lambda_{n_0 - 1} < \ldots < \lambda_1 < \lambda_0 ,$$

la suite $(\lambda_n)$ tendant vers $-\infty$.

On désigne par $\varphi_n$ une fonction propre, à valeurs réelles, de norme hermitienne 1, associée à la valeur propre $\lambda_n$.

On considère le problème de Sturm-Liouville :

$$x'' + (p - \lambda)x = y \ ;$$

$$ax(0) + bx'(0) = cx(1) + dx'(1) = 0 .$$

■ Si $\lambda$ n'est pas valeur propre de *D*, c'est-à-dire n'est pas l'un des $(\lambda_n)$, on peut écrire :

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \varphi_n , x \rangle \varphi_n$$

et $\lambda_n \langle \varphi_n , x \rangle = \langle \lambda_n \varphi_n , x \rangle = \langle \varphi_n , Dx \rangle = \langle \varphi_n , \lambda x + y \rangle$, soit :

$$(\lambda_n - \lambda) \langle \varphi_n , x \rangle = \langle \varphi_n , y \rangle .$$

Donc :

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \varphi_n , y \rangle \varphi_n .$$

La série converge en outre uniformément sur [0, 1].

■ Si $\lambda = \lambda_p$, le calcul précédent montre que, nécessairement,

$$\langle \varphi_p , y \rangle = 0 .$$

Si cette condition n'est pas réalisée, le problème n'a pas de solution.

En revanche, si cette condition est réalisée, on obtient :

$$x = \sum_{n \neq p} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_p} \langle \varphi_n , y \rangle \varphi_n + C \varphi_p ,$$

où $C \in \mathbb{C}$ est arbitraire.

## 5.5 Exemple

Dans cet exemple, nous remplaçons l'intervalle [0, 1] par l'intervalle [0, π], ce qui n'est évidemment pas restrictif.

Étudions le problème de Sturm-Liouville :

$$x'' - \lambda x = y$$

avec $x(0) = x(\pi) = 0$.

Posons $Dx = x''$ ; cherchons les éléments de *V* tels que

$$Dx = \lambda x .$$

Une discussion sur le signe de $\lambda$ montre que ce problème n'a de solution non nulle que si $\lambda = -\omega^2$ et :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

avec $A = 0$ et $\sin \omega \pi = 0$.

Donc $\omega = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_n = -n^2$ , $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$.

Si $\lambda$ n'est pas de la forme $\lambda_n$, on obtient

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{-n^2 - \lambda} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nu \, y(u) \mathrm{d}u \sin nt \mathrm{d}t$$

Si $\lambda = \lambda_p$, on obtient :

$$x(t) = \sum_{n \neq p} \frac{1}{-n^2 - \lambda} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nu \, y(u) \mathrm{d}u \sin nt \mathrm{d}t + C \sin pt$$

sous réserve que $\int_0^\pi \sin pu \, y(u) \mathrm{d}u = 0$.