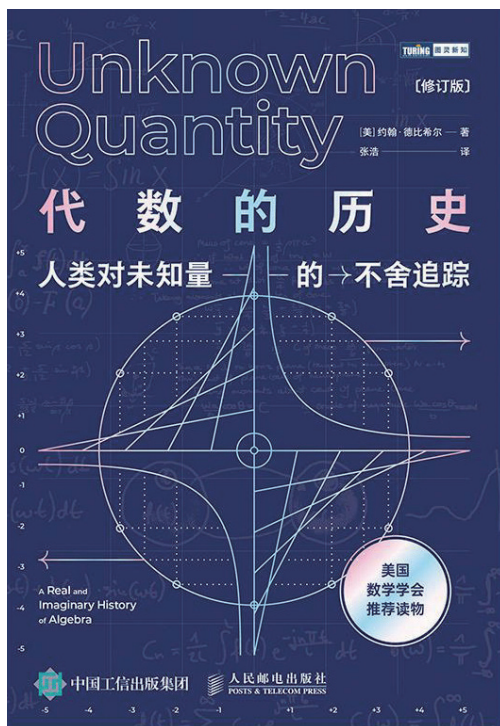


## 数学的两对辩证矛盾

### ——读《代数的历史》有感

宋 宁



一夜之间读完了人民邮电出版社的新书《代数的历史》，脑海中满满地就是两对矛盾——并不是“逻辑矛盾”，而是辩证唯物主义所讲的“辩证矛盾”，也就是蕴含在任何事物内部的辩证而又统一两个方面。

哪两对辩证矛盾呢？

一是数学的抽象与具体直观，二是数学的内在逻辑与形成逻辑。

#### M 的误解

之所以在读过《代数的历史》之后，第一时间想到“数学的抽象与具体直观”这对矛盾，是因为：我觉得这是本书的一条暗线。

当然，这本书谈的是历史，是代数的历史，而代数的历史正是逐层抽象的历史。我这里用了“逐层”两个字，这并非信口开河。虽然人们公认数学是抽象的，但是这种抽象与具体直观并不是绝对的，而是相对的，更是有层次的。低一个层次的抽象，对高一个层次的抽象来说便是相对的“具体直观”。

这是我在多年数学学习和工作中形成的体会。我非常希望通过这篇文章澄清很多人对“数学抽象”的误解。

前些天我刚与一位朋友（姑且称为 M）讨论过这个话题，正好，借着《代数的历史》这本书，我们也可以聊一聊这个话题。

当时，友人 M 正在查找德国数学家戴德金在 1870 年代的一些论文。我很好奇：他为什么要找那么古老的论文？毕竟他所找其实就是关于戴德金分割的文献，它是用来刻画实数的，现在这已经是经典理论了，很多书上都能找到。

M 回答说，现在数学教材上出现的戴德金分割并非戴德金的本意，而 M 正在探求一种“好理解又兼具严谨性的无理数定义方式”，M 觉得“康托和戴德金搞得太抽象，把实数搞得面目全

## 好书推荐

非”，抛弃了“几何启示”，而且“晦涩难懂，令人畏惧”；何况，一个戴德金分割就是一个实数，这太不直观了。

——但，我个人觉得这种顾虑是多余的。

我并不想公开地与 M 展开“论战”，我只是想就事论事地谈我对数学抽象性的理解。我觉得包括 M 这种比较专业的人，以及我们的某些数学教育工作者在内的很多人，都有类似的误解，他们把数学的抽象性绝对化了。

### 抽象的相对性

我认为，不论在数学教学中还是在数学研究中，追求“绝对直观”是没有必要也是不应该的。

说没有必要，是因为数学的抽象是相对的，分层次的。抽象并不等于“难”，也不等于“繁”。“抽象”只不过是我们将一些研究对象的共性从这些个体中抽取出来进行思考的过程。我们每个人从小到大都在不停地对客观或主观世界进行着各种各样的抽象，这不过是我们人类思维的功能而已。

以自然数 3 为例（这也是《代数的历史》中所举的例子），3 个苹果是 3，这没错；把苹果装进箱子里，装了 3 箱，这也是 3；再把苹果箱子装进卡车里，装了 3 车，这还是 3。这里的 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果从绝对的数量上看是完全不同的，但是它们的共性就是自然数 3。在这个例子里，自然数 3 就是 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果的“抽象”，而 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果等等都是自然数 3 的“具体直观”。

它难吗？不难。

它繁杂吗？恰恰相反，它更简洁了，因为自然数 3 是从 3 个苹果、3 箱苹果、3 车苹果抽取出来的共性，它像除草剂一样剔除了干扰思维的各种“杂草”。

那么，“抽象的相对性”是什么意思呢？还

是沿着上面的例子继续想。上面的例子，不过是从现实生活中抽象出“数”。在我们几乎整个小学阶段就是在熟悉这些“数”之间的各种运算。又经过小学高年级的一些铺垫，到了初中，情况发生了一次重大转变。因为到了初中，你开始学习用字母代替数运算了，在你的感受里，数学这个笼统的学科中第一次分化出一个分支。既然这个分支用字母代替数运算，那么它的名字当然就是“代数”了。

按照《代数的历史》中的记叙，这个事情在数学史上正式形成，要追溯到 16 世纪法国数学家韦达。实际上，这是第二个层次上的抽象。对那些初学代数的中学生来说，过去用数来做计算就是相对具体直观的，而现在使用字母代替数运算则是相对抽象的（但如前所述，相对现实生活来说，使用数来计算又是相对抽象的）。

再进一步，当中学生沿着代数这条路走下去，就不可避免地要面临解方程和方程组的问题。可能有学生在小学时代就知道鸡兔同笼问题，那时是用具体直观的数进行计算的，所以方法上要使用技巧性很强的所谓“假设法”。而现在呢，完全不需要了，因为已经从数的计算抽象到了代数运算，“假设法”中的“假设”完全可以用设取未知量  $x$  列方程来代替了。而且这样不仅可以解鸡兔同笼问题，还可以解其他类似问题。

你看，抽象过程让问题变难了吗？不，恰恰没有，正是这种抽象把问题变得简洁、清晰而且简单。

再继续，学会了解一次方程、二次方程之后，可能还有学生学会了卡丹公式，能解三次方程了，甚至有人知道了四次方程的根式解法。按《代数的历史》的记叙，这发生在 16 世纪的意大利（而且比韦达早）。虽然它们一个比一个难，但是并没有出现抽象层次上的跃升。实际上它依然停留在同一个层次上，它们都是关于代数方程根式解的问题。

## 好书推荐

直到人们发现，五次方程的根式解似乎无法给出来。但是进一步研究之后，人们又发现，由方程的根所构成的对称多项式与方程的系数之间有着密切的联系，这就是我们在中学就熟悉的韦达定理（不过，根据《代数的历史》的记叙，牛顿爵士也发现了这个联系）。这仍然没有出现抽象层次的提升，但是却为下次提升提供了重要的准备：**对称多项式**。

所谓“对称多项式”，是指将多项式的几个变元相互进行**置换**后不变的多项式。这种“变中有不变”的现象就是**对称**。比如，我们说正三角形是关于中心对称的，那是因为：如果我们将它绕中心逆时针旋转 120 度，它还和原来的三角形重合。在这个过程中，整个正三角形的边界上的每个点的位置都变了，但是这个三角形在旋转后整体上又是不变的（与原三角形重合），这就是“变中有不变”，这就是对称。

于是，如果仍然停留在用字母代替数字这个抽象层次上，那肯定是不行的，要想真正解决高次方程根式解的问题，需要研究这种置换变元时的“对称性”。按《代数的历史》的记叙，这在拉格朗日的时代已经有所研究了，代表性的工作就是**拉格朗日预解式**。

再进一步，仅仅研究代数方程上的对称性还不足以彻底解决问题，应该更抽象更广泛地研究对称性。那么对称有什么特点呢？

我们不妨把对称看成是一种“变中有不变”的变换，姑且称之为**对称变换**吧。接下来，我们固定一组研究对象的集合  $S$ （在正三角形的例子中， $S$  就是其边界上的点的全体），考虑它们的全部的对称变换所构成的集合  $G$ 。 $G$  有什么性质呢？

首先，如果连续对  $S$  做两个对称变换  $g$  和  $h$ ，那么  $S$  依然是不变的（可以参考正三角形的例子），换句话说，连续进行两个对称变换  $g$  和  $h$ ，仍然会得到一个对称变换，记作  $g \cdot h$ ，它正好可以看成  $g$  和  $h$  之间的运算，我们姑且称之为

乘法吧。上面这个事实说得更数学化一点就是：

对  $G$  中任意的  $g$  和  $h$ ，其乘积仍然属于  $G$ 。

这叫**封闭律**。

其次，既然  $G$  中两个对称变换的乘法很重要，那么我们不妨试试三个对称变换的乘法，很容易发现，存在着这样的规律： $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ ，这与数的运算中的结合律太像了，我们也叫它**结合律**吧。

第三， $S$  上恒等映射  $e$ （也就是把每个点变成自身）显然不改变  $S$ ，因而是个对称变换，属于  $G$ 。而恒等映射因为实际上什么也没做，所以与  $G$  中的其他对称变换  $g$  相乘的结果还是  $g$  本身，这类似于数上的乘法中 1 的作用，所以我们叫它**么元**（“么”呢，就是 1 啦），这条结论就叫**么元律**吧。

最后，对  $G$  中每一个对称变换  $g$ ，我们总能再找一个变换  $h$  把  $g$  变回去，以正三角形的对称为例，如果  $g$  表示正三角形绕中心逆时针旋转 120 度，那么  $h$  只要取顺时针旋转 120 度就可以了。换句话说， $g \cdot h$  相当于什么也没动，也就是说， $g \cdot h = e$ （恒等变换）。如果将恒等映射类比为实数乘法中的 1，那么  $g$  和  $h$  就可以类比于互为倒数的两个数，于是我们可以把它们叫做对方的逆元，这条规律也就可以叫做**逆元律**了。

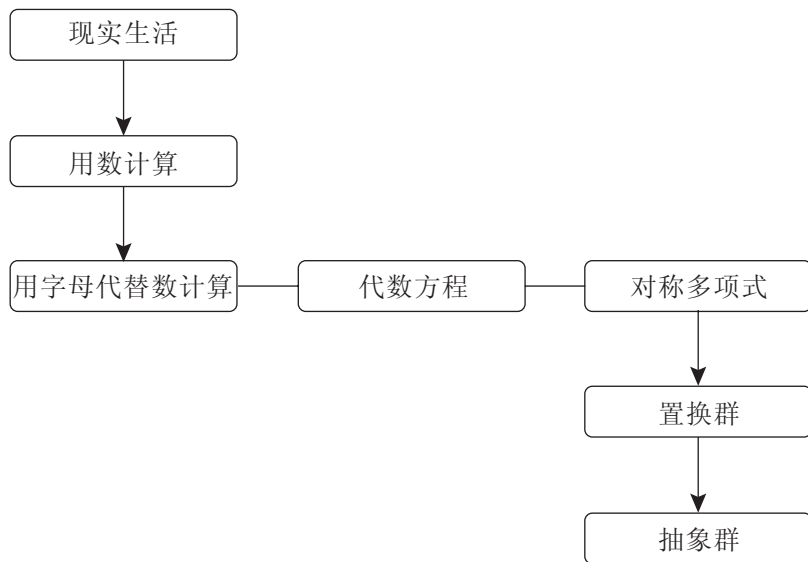
这样就从  $S$  的全体对称变换的集合  $G$  上抽象出了四条本质属性：封闭律、结合律、么元律和逆元律，这样的  $G$  再配上对称变换的乘法，就构成了**置换群**。按《代数的历史》的记叙，这项研究始于法国数学家柯西，并被挪威数学家阿贝尔引用，最终证明了一般的五次方程没有根式解。而正式开始研究置换群的，则是法国的苦命天才伽罗瓦，他死于一场虚妄的决斗。

再进一步抽象。把封闭律、结合律、么元律和逆元律四条作为公理，并且规定：只要一个非空集合  $G$  上能定义一种运算，使得这四条

## 好书推荐

公理都满足，那么，我们就说  $G$  和这个运算构成了一个**抽象群**。按《代数的历史》的记叙，它由英国数学家凯莱正式引入。这也是数学专业本科生在近世代数（或者抽象代数）这门课程中的入门概念。

好了，连篇累牍这么长一串，我无非是想说明：抽象和具体直观是相对的，有层次的，不可能存在着一厢情愿的绝对的具体直观。上述讨论的若干数学对象和问题，其抽象层次如下图所示。



## 对 M 的回复

我当时对 M 说：关于戴德金分割，我觉得没什么不好，习惯了就好，挺本质的。

但是 M 强调：戴德金分割太不直观了。

我回复 M 说：我觉得戴德金分割并没有抛弃几何上的直观性，过度批判它可能反而是不利的。而且关于“不直观”——这种顾虑是多余的，数学的抽象是相对的，追求绝对的具体直观是没有意义的。

M 回复说，“直观”在专业数学的教学上是有意义的。

其实，这种貌似不直观的东西在现代数学里其实比比皆是，但是一旦你撕开它相对抽象的外衣，实际上就可以看到下一层抽象中相对直观而朴素的思想。好吧，既然讨论到这个层次了，那不妨，我们就在这个层次聊一聊，可

以说说更轻松的**有限射影平面**。

有限射影平面可以追溯到法国数学家德萨格、帕斯卡时代的**古典射影几何**。后来法国数学家彭赛列系统地对古典的射影几何加以总结。简单地来说，在彭赛列的著作里，射影平面就是在古典的欧氏平面上加上无穷远点，从而将平行看成是相交于无穷点的特殊的相交，再把所有的无穷远点串在无穷远直线上。

这个解释直观吧？直观。严谨吗？不严谨。

于是，后来一些数学家对射影几何进行公理化。一般认为可以用如下四条公理定义**射影平面**：

- 任意两点关联唯一一线；
- 任意两线关联唯一点；
- 任意一线至少关联三点；
- 任意一点至少关联三线。



## 好书推荐

这个严谨吗？严谨。直观吗？还行，不过有点不直观了。对了，开始相对的抽象了。

再进一步，满足这四条公理的射影平面能构造出来吗？能啊，古典的射影平面就是满足这四条啊。

不过那个射影平面上有无数个点，可是能构造出满足四条公理的有限射影平面吗？也就是只有有限个线、有限个点的射影平面？

当然可以，不仅可以，还能批量制造！

用有限域就可以。通俗地说，域是加减乘除都能做、而且常见的运算律也都满足的代数结构，比如全体有理数在通常的加法和乘法下就是域，只不过有无限个元素，所以是无限域。对整数全体模某个素数  $p$  所得的全部同余类就能构成一种特殊的有限域  $\mathbb{F}_p$ 。域和有限域在《代数的历史》的第三部分有详细的介绍。

那么，使用有限域  $\mathbb{F}_p$  怎么样批量地构造有限射影平面呢？很简单，考虑有限域  $\mathbb{F}_p$  上的三维向量空间  $V$  啊。“向量空间”这个东西，一般在大学线性代数课程上都会讲到，《代数的历史》的第二部分也清晰地介绍了这个概念。

怎么做呢？设  $V$  是有限域  $\mathbb{F}_q$  上的三维向量空间，把  $V$  的一维子空间（也就是过原点的直线）看成是“四条公理”中的“点”，把  $V$  的二维子空间（也就是过原点的平面）看成是“四条公理”中的“线”。验证一下吧，显然四条公理都满足。

这样就造出有限射影平面了，一般记作  $\text{PG}(2, p)$ 。它是有限的吗？确实是，很容易计算出，它的点数和线数都是

$$\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1.$$

著名的“七点平面”（或者叫 Fano 平面）就是它  $p=2$  的情况。

回头再看，这一路走来顺理成章吧？有什么不直观之处吗？因为我们是通过逐层的抽象，一步一步过来的，如果你认为有什么地方不直观、太抽象，那么唯一的解释就是：

你对这个层次的抽象不熟悉！

你没有把这个层次的抽象变成你的“具体直观”！

当然，在内在逻辑上，学过抽象代数课程之后，学习有限射影平面的逻辑前提已经具备了，因为你已经知道什么是域，什么是有限域了，也知道什么是向量空间了。但是如果此时直接让你接触有限射影平面，你很大概率会先蒙圈一段时间：不是说“点”么，“点”怎么是线（一维子空间）呢？不是说“线”么，“线”怎么是面（二维子空间）呢？

——须知，越是抽象的数学，越不能抽象来学，否则只能是脚不落地的“空对空”；但是也不要奢求一杆子插到底的、绝对的直观具体，而是应该在你目前所处的抽象层次的前一层抽象中，去寻找属于你的相对的直观具体。

## 回到 M 的问题

类似地，回到 M 的问题上。如果清楚戴德金和康托当时所面临的问题，你就丝毫不会对他们的解答的抽象程度感到惊讶。

他们实际上要补上数学分析的最后一块拼图。这块拼图空缺了多久呢？两千年以上。早在古希腊的毕达哥拉斯时代，人们就发现只用有理数不能解决很多问题，但如何严格地定义无理数却成为了难题，《代数的历史》在第二章就提到了这个问题。

古希腊人的解决方案是彻底放弃了数，转而定义了一种叫量的东西，据说它归功于欧多克索斯，具体的定义方法记录在欧几里得的《几何原本》中，被称为比例论。处理类似微积分问题的方法叫穷竭法，而欧多克索斯也正是严格意义上的穷竭法的首创者。

在穷竭法上，接过欧多克索斯衣钵的人是阿基米德，但是此后，古希腊人对微积分再也没有什么贡献了。毕竟，他们不承认数，只能用几何

## 好书推荐

化的方法间接地处理问题，极大地束缚了手脚。

这个怪现象直到罗马帝国统治希腊才逐步改变，在《代数的历史》的第二章中，记录了这个关键人物——丢番图，他也被有些人称为**代数之父**。丢番图并没有直面无理数的严格定义，而是在假定它们存在的情况下，去解方程（《代数的历史》中说，他知道无理数存在，只是不感兴趣）。但是，在罗马帝国时代，人们对数学没有多大兴趣。下一个转变发生在文艺复兴以后，欧洲一大批数学家逐渐放弃了原来欧氏几何的条条框框，最后在牛顿和莱布尼茨的手上使用含混不清的“无穷小算法”，才建立起了微积分。但是微积分的基础很不牢固，后来又过了两百年，柯西和魏尔斯特拉斯等人才建立起 $\varepsilon - N$ 语言，相对严格的数学分析才建立起来。

但是还有一个问题没有解决，那就是：无理数究竟是什么？实数集合上不能没有无理数，否则实数轴上就会有无数个小“坑”，求极限的时候，一不小心就会掉进这些无理数小坑里。这时候，康托和戴德金等人就登上历史舞台了。最终，悬而未决两千年的问题在戴德金分割之下解决了。

一个延宕了两千年的问题，怎么可能使用一种“非常直观具体”的手段解决？又何必对它感到惊讶？

事实上，当戴德金分割提出的短短二十年之后，希尔伯特的《几何基础》就出版了，形式主义公理化的时代就正式拉开大幕了。在戴德金分割的加持下，完善的实数公理体系也面世了。

如果一个学生熟悉公理化、结构化的数学思想，比如，他如果熟悉希尔伯特几何公理体系，或者其他什么现代的公理体系，那么，他就不会对戴德金分割这个层次的抽象感到惊讶。

但是如果前面没有这种逐层抽象的铺垫，而是让他一上来就在一个高层次抽象的空中楼阁中，只是按照数学自身的内在逻辑接受这些理论，他当然会觉得抽象，没有几何直观，就像前面我举的有限射影平面的例子一样。

## 内在逻辑和形成逻辑

在前文中，我已经不止一次地提到了数学的内在逻辑。什么意思呢，我不是哲学家，我只是从我自己的体验来说一下。

我觉得，无论在数学的教学、学习还是研究中，实际上都存在两种逻辑，其中一种，我们叫它**内在逻辑**，另一种则叫它**形成逻辑**。

所谓内在逻辑，是在演绎推理之下，由公理和定义推导出各种引理、定理、性质、公式的逻辑。也是我们在数学教材和论文中，尤其是在证明二字之后，所看到的逻辑。虽然我称其为“内在逻辑”，但是实际上，却只是纸面上的表象。当我们撕开这层漂亮的纸面之后，我们才能看到它的**形成逻辑**。也就是这些数学证明是怎么来的。

再具体一步，我们还可以将数学的形成逻辑区分成：**真实历史上的形成逻辑和想象中的形成逻辑**。

真实历史上的形成逻辑，就是相关的数学问题乃至数学分支是如何在数学史上一步一步形成的，正如《代数的历史》所展示出的。我们现在某些数学史、数学科普和数学文化的书有一个不良倾向，那就是把数学史和数学文化变成了“数学八卦”，只讲故事不讲当时的数学是怎么回事。结果呢，就是大家看完了以后哈哈一乐，原来数学家还有这事——这就缺乏意义了。

《代数的历史》却不是这样。一方面，它讲故事了，但并不拘泥于八卦故事，它更多地展示了相关时代背景和文化背景。另一方面，它不仅仅讲故事，还讲解了在过往那些时代里代数学发展情况，甚至于还会介绍当时数学家所采用的方法和技巧。这就会使我们知道，我们现在所学的向量空间、矩阵、行列式、群、环、域、体、模等等，它们之所以是我们现在所见到的模样，是因为那时的数学家们研究了那样的问题、使用了那样的技巧、参考和联想了那样的方法。

于是，我们在了解现在数学样貌的同时，更

## 好书推荐

能清晰地理解它是如何成为这个样子的。我们不至于疑惑为什么抽象群要定义成这个样子，也不至于疑惑为什么有限域、有限射影平面是这个样子，更不会疑惑戴德金分割为什么这么不直观。

当然，数学在真实历史上的形成逻辑并不完全能支撑我们相关课程的数学教学。第一，是因为我们不可能把所有的数学课程都变成数学史，我们不可能把“数学分析”课程变成“数学分析学史”，也不可能把“抽象代数”课程真的上成《代数的历史》。第二，真实历史中的形成逻辑往往是迂回曲折的，数学家们试错了两千年才搞出了戴德金分割，试错了三百年才搞出抽象群。我们没有必要这样搞，但是从历史中，我们能截弯取直，找到形成逻辑的捷径，这就是我所说的“想象中的形成逻辑”。

我们在各种数学课程中，应该把“相关数学知识是怎么来的”这件事说清楚，也就是把它的形成逻辑说清楚，这个时候就需要类似《代数的历史》这样的书，它既讲了历史故事，又说清楚了当时所采用的推导思路。

那么，我们还要不要讲内在逻辑呢？

当然需要，数学当然需要证明，那些妄想通过“看一看、做一做、猜一猜”就能学好数学的想法，不过就是想要把抽象的数学一杆子插到底、一步到位、直接绝对地直观化。这种想法短视，害人！

妄想通过这种途径“减负”更是痴人说梦！

### 痴人的“减负”梦

我并不反对减负，但是我反对通过减少学习内容、甚至破坏体系结构来减负！

减少学习内容能减负吗？不！我要勇敢地说，这样只是虚假的轻松，早晚会在未来增加负担。

以中学数学为例。现在的中学数学为什么要删减那么多的欧氏几何？为什么已经看不到公理化的几何体系？

当然，你可以说，欧氏几何是已经死掉不

再发展的数学分支，不如让他们多学点解析几何甚至大数据之类的。

但是，欧氏几何的价值是这样的吗？它本就不是知识性的！

一个正常人本就不需要通过欧氏几何学习知识，比如两点确定唯一一条直线，你不学欧氏几何就不知道这个了吗？当然不是。那么欧氏几何起什么作用呢？

公理化、体系化的欧氏几何能让学生体会“公理化”这种重要的数学思想，能让学生深刻地体验数学证明的过程。这是学生在未来学习更抽象的数学的必要阶梯。就像我前面论述的，数学的抽象是分层次的，每一个层次的抽象以之前一个层次的抽象为它的直观具体。这逐层的抽象构成了数学学习的阶梯，而现在你们竟然想从这抽象的阶梯中抽掉几个，那么结果呢？当他将来真正学习具备高层次抽象特征的数学时，他只好踏上一个不着地的空中楼阁，结果就是上课听不懂、下课不会做题、考试了才有点状态、考完试就全忘掉。

长此以往，国民的数学素养会怎么样？在工业化、信息化的时代，我们的国运会怎么样？

我也是痴人一个，痴人妄言，各位如果不解，那就一笑了之罢了……



#### 作者简介：

宋宁，山东师范大学学士，福州大学硕士，南开大学博士。2017年至今任教于山东理工大学数学系。