Algèbre 2

Cours et Travaux Dirigés

Marc Pauly

Cours d’algèbre 2

Marc Pauly

Sommaire du cours d'algèbre 2

Chapitre 1. Matrices

1 Définition. Somme de matrices.

Une matrice est un objet très simple : c'est un tableau rectangulaire rempli de scalaires (des éléments d'un corps). Comme nous allons le voir dans ce chapitre, les matrices permettent de représenter de manière agréable les applications linéaires.

Définition. *Soit K un corps commutatif, et p, n deux entiers naturels.*
Une matrice à p lignes et n colonnes et à coefficients dans K *est une famille $(A_{ij})_{(i,j)\in[[1,p]]\times[[1,n]]}$ à valeurs dans K.*

Une telle matrice est souvent appelée une matrice $p \times n$. On écrit d'abord le nombre de lignes, ensuite le nombre de colonnes.

Les matrices sont représentées sous forme d'un tableau rectangulaire à p lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ l'ensemble des matrices $p \times n$ (à p lignes et n colonnes) à valeurs dans K. Les scalaires d'une matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Si on fixe une application linéaire $u : V \to W$, une base e de V, une base f de W, alors on peut définir une matrice. Le nombre de lignes de cette matrice est la dimension de l'espace d'arrivée W et le nombre de colonnes de cette matrice est la dimension de l'espace de départ V.

Réciproquement, si on fixe une matrice A avec p lignes et n colonnes, un espace vectoriel V de dimension n avec une base e, un espace vectoriel W de dimension p avec une base f, alors on peut définir une application linéaire de V vers W. Ces deux constructions seront réciproques l'une de l'autre.

Nous allons d'abord expliquer comment associer une matrice à un triplet $(u; e, f)$ d'une application linéaire et deux bases.

Définition.
Soient V, W deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K, avec $\dim V = n, \dim W = p$.
Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V, et $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ une base de W.
On appelle **matrice associée à u dans les bases** e, f *et on note $\mathscr{M}_f^e(u)$ la matrice $p \times n$ définie par la règle : $\forall j \in [[1, n]], u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} (\mathscr{M}_f^e(u))_{ij} \cdot f_i$. Autrement dit, $\forall i \in [[1, p]], \forall j \in [[1, n]]$, le scalaire $(\mathscr{M}_f^e(u))_{ij}$ est la i-ème coordonnée du vecteur $u(e_j) \in W$ dans la base f.*

Exemple. On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie (x, y) sur $(2x + y, 3x - 2y, 4x)$.
Quelle est la matrice associée à u si on prend pour e la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $e = ((1, 0), (0, 1))$ et pour f la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $f = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$?

On calcule

$$u(e_1) = u(1, 0) = (2, 3, 4) = 2f_1 + 3f_2 + 4f_3$$

$$u(e_2) = u(0, 1) = (1, -2, 0) = 1f_1 + (-2)f_2 + 0f_3,$$

puis on obtient

$$\mathscr{M}_f^e(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour bien illustrer le fait qu'**une matrice associée à une application linéaire dépend du choix des bases e et f**, on va considérer la même application linéaire u, mais on prend cette fois la base $\tilde{e}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{e} = ((1,0),(1,1))$$

et la base $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{f} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)).$$

Alors

$$u(\tilde{e}_1) = (2,3,4) = 2\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(0,1,0) + 4\cdot(0,1,1)$$

et

$$u(\tilde{e}_2) = (3,1,4) = 3\cdot(1,0,0) + (-3)\cdot(0,1,0) + 4\cdot(0,1,1),$$

de sorte que

$$\mathscr{M}_{\tilde{f}}^{\tilde{e}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

ce qui n'est pas la même matrice que $\mathscr{M}_f^e(u)$.

Maintenant nous allons expliquer la construction réciproque.

Définition.
Soit V un espace vectoriel de dimension n sur K, et e une base de V. Soit W un espace vectoriel de dimension p sur K, et f une base de W. Soit A une matrice $p \times n$ à coefficients dans K.
On appelle **application linéaire associée à A dans les bases** e, f *et on note $\mathscr{L}_f^e(A)$ l'application linéaire de V vers W définie par la règle : $\forall j \in [[1,n]], \left(\mathscr{L}_f^e(A)\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} A_{ij}\cdot f_i$. Autrement dit, $\forall i \in [[1,p]], \forall j \in [[1,n]]$, le scalaire A_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur $\left(\mathscr{L}_f^e(A)\right)(e_j) \in W$ dans la base f.*

Cette définition est pour l'instant incomplète. Il faut encore se convaincre qu'il existe une seule application linéaire obéissant à cette règle. Cela découle immédiatement du lemme ci-dessous.

Lemme 1.1.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K, et $e = (e_1,\dots,e_n)$ une base de V. Soit W un espace vectoriel sur K, et $(w_1,\dots,w_n)$ une famille quelconque de n vecteurs de W. Alors il existe une seule application linéaire $u : V \to W$ telle que $\forall j \in [[1,n]], u(e_j) = w_j$.

Preuve.
Existence de u : Soit $v \in V$ un vecteur quelconque. On note $(k_1,\dots,k_n)$ les coordonnées de v dans la base e. On définit ensuite

$$u(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i \in W.$$

Il est clair que u est une application linéaire de V vers W et que $u(e_j) = w_j$ pour tout j.
Unicité de u : Supposons que u, u' soient deux applications comme ci-dessus. Alors $u - u'$, qui est encore une application linéaire de V vers W, s'annule sur tous les vecteurs de la base $(e_j)_{j\in[[1,n]]}$. Et comme cette base est une famille génératrice de V, on obtient que pour tout vecteur $v \in V$, on a $(u-u')(v) = 0$. D'où l'égalité d'applications $u = u'$. □

Par construction, on a ceci : Soit V un espace vectoriel de dimension n sur K, et W un espace vectoriel de dimension p sur K. Soit e une base de V, et f une base de W. Alors :

$$\text{Pour toute application linéaire } u \in \mathcal{L}(V,W), \qquad \mathscr{L}_f^e\left(\mathscr{M}_f^e(u)\right) = u,$$

$$\text{Pour toute matrice } A \in \mathcal{M}_{p,n}(K), \qquad \mathscr{M}_f^e\left(\mathscr{L}_f^e(A)\right) = A.$$

Nous pouvons donc dire ceci :

Théorème 1.2.
Soient V, W deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K, avec $\dim V = n, \dim W = p$. Soient e, f des bases de V, W. Alors les applications

$$\begin{array}{lll} \mathscr{M}_f^e : & \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{p,n}(K) : & u \mapsto \mathscr{M}_f^e(u) \\ \mathscr{L}_f^e : & \mathcal{M}_{p,n}(K) \to \mathcal{L}(V,W) : & A \mapsto \mathscr{L}_f^e(A) \end{array}$$

sont des bijections, et elles sont réciproques l'une de l'autre.

Or on se souvient que l'ensemble $\mathcal{L}(V,W)$ de toutes les application linéaires de V vers W est *un espace vectoriel*, si on le munit de l'addition des applications, et de la multiplication externe par les scalaires. Nous pouvons donc nous demander de quelles opérations il faut munir l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ pour que les deux bijections ci-dessus deviennent *des isomorphismes d'espaces vectoriels*. Autrement dit, nous voulons définir sur $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ une structure d'espace vectoriel compatible avec les deux bijections du théorème 1.2.

Théorème 1.3. *Soient u, u' deux applications linéaires de V vers W. Alors on a*

$$\forall i \in [[1,p]], \forall j \in [[1,n]], \quad (\mathscr{M}_f^e(u+u'))_{ij} = (\mathscr{M}_f^e(u))_{ij} + (\mathscr{M}_f^e(u'))_{ij}.$$

En outre, si $k \in K$ est un scalaire quelconque,

$$\forall i \in [[1,p]], \forall j \in [[1,n]], \quad (\mathscr{M}_f^e(k \cdot u))_{ij} = k \cdot (\mathscr{M}_f^e(u))_{ij}.$$

Preuve. On a pour tout $j \in [[1,n]]$,

$$(u+u')(e_j) = \sum_{i=1}^{p} (\mathscr{M}_f^e(u+u'))_{ij} \cdot f_i.$$

D'autre part

$$(u+u')(e_j) = u(e_j) + u'(e_j) = \sum_{i=1}^{p} (\mathscr{M}_f^e(u))_{ij} f_i + \sum_{i=1}^{p} (\mathscr{M}_f^e(u'))_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{p} \left((\mathscr{M}_f^e(u))_{ij} + (\mathscr{M}_f^e(u'))_{ij} \right) f_i.$$

Par identification des coefficients (f est une base), on trouve la première égalité.
Pour la deuxième égalité, on travaille de la même manière. $\square$

On voit maintenant comment il faut définir une addition interne et une multiplication externe sur $\mathcal{M}_{p,n}(K)$.

Définition. *La somme de deux matrices A, B de type $p \times n$ est la matrice $p \times n$ dont le coefficient (i,j) est la somme des coefficients (i,j) des matrices A, B. Autrement dit, $(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$.*
Le produit d'un scalaire $k \in K$ par une matrice A de type $p \times n$ est la matrice $p \times n$ dont le coefficient (i,j) est le produit de k et du coefficient (i,j) de A. Autrement dit, $(kA)_{ij} := k \cdot A_{ij}$.

Par exemple, pour $p = 2, n = 3$, voici comment on fait une somme de deux matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8 & 5-1 & -1+2 \\ 0+4 & 3-1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Et voici comment on multiplie un scalaire et une matrice 2×3 :

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 5 & 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 25 & -5 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.4. *Avec les opérations de somme et de multiplication externe définies ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K. En outre les applications*

$$\mathscr{M}_f^e : \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{p,n}(K) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}_f^e : \mathcal{M}_{p,n}(K) \to \mathcal{L}(V,W)$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels. Ils sont réciproques l'une de l'autre.

Preuve. Il suffit de vérifier que l'ensemble des matrices, muni de l'addition interne et de la multiplication externe, est en effet un espace vectoriel sur K. Cela revient à vérifier que toutes les règles d'espace vectoriel sont respectées. $\square$

Comme il existe un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels, on peut s'en servir pour trouver leur dimension (c'est nécessairement la même).

Théorème 1.5. *Soient V, W des espaces vectoriels de dimensions finies n, p sur K. Alors*

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim \mathcal{M}_{p,n}(K) = np = \dim V \cdot \dim W.$$

Preuve. Comme les deux espaces sont isomorphes, il est clair qu'ils ont la même dimension. Pour voir qu'elle vaut le produit des dimensions de V et W, nous déterminons la dimension de l'espace des matrices $\mathcal{M}_{p,n}(K)$. Pour cela nous cherchons une base de cet espace vectoriel. Soit $n = \dim V, p = \dim W$.
Pour tout $i \in [[1, p]], j \in [[1, n]]$, on appelle E_{ij} la matrice $p \times n$ dont le coefficient (i, j) vaut 1, et tous les autres valent 0. Ainsi, par exemple , si $p = 2, n = 3$, on a

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les np matrices E_{ij} sont appelées les **matrices élémentaires** à p lignes et n colonnes.
Il est évident que la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[[1,p]]\times[[1,n]]}$ est une base de l'espace vectoriel des matrices. Il suffit de voir que pour toute matrice A on a

$$A = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot E_{ij}.$$

(Attention : A_{ij} est un élément de K, mais E_{ij} est une matrice $p \times n$). En outre cette décomposition est unique, ce qui fait de $(E_{ij})_{(i,j)\in[[1,p]]\times[[1,n]]}$ une base. Cette base est appelée **la base des matrices élémentaires**. Enfin

$$\dim \mathcal{M}_{p,n}(K) = np.$$

□

En particulier, si on prend $W = K$, et donc $\dim W = 1$, on trouve

$$\dim \mathcal{L}(V, K) = (\dim V) \cdot 1 = \dim V.$$

Or $\mathcal{L}(V, K)$ est l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur V. On appelle cet espace vectoriel **l'espace dual de** V et on le note souvent V^*. Notre calcul des dimensions montre :

$$\dim V < \infty \Rightarrow \dim V^* = \dim V.$$

2 Produit matriciel

Le calcul qui suit est fondamental, car il conduit à la définition du **produit de deux matrices**. Le produit matriciel traduira la composition de deux applications linéaires.

Théorème 1.6. *Soient V, W, X trois espaces vectoriels de dimensions finies respectives n, p, q. Soient e, f, g des bases de V, W, X. Soient $u : V \to W$ et $u' : W \to X$ deux applications linéaires. On note $A = \mathscr{M}_f^e(u), A' = \mathscr{M}_g^f(u')$ et $B = \mathscr{M}_g^e(u' \circ u)$. Par conséquent, A est une matrice $p \times n$, A' est une matrice $q \times p$, et B est une matrice $q \times n$.*
Alors, pour tout $i \in [[1, q]], k \in [[1, n]]$, on a la formule

$$B_{ik} = \sum_{j=1}^{p} A'_{ij} \cdot A_{jk}.$$

Preuve. Soit $k \in [[1,n]]$ quelconque. Alors d'une part, dans l'espace vectoriel X,

$$(u' \circ u)(e_k) = \sum_{i=1}^{q} B_{ik} \cdot g_i.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(u' \circ u)(e_k) &= u'(u(e_k)) \\
&= u'(\sum_{j=1}^{p} A_{jk} \cdot f_j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} A_{jk} \cdot u'(f_j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} A_{jk} \cdot (\sum_{i=1}^{q} A'_{ij} \cdot g_i) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} A_{jk} \cdot (A'_{ij} \cdot g_i) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} (A_{jk} \cdot A'_{ij}) \cdot g_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} (A_{jk} \cdot A'_{ij}) \cdot g_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} A_{jk} \cdot A'_{ij} \right) \cdot g_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} A'_{ij} \cdot A_{jk} \right) \cdot g_i.
\end{aligned}$$

Comme g est une base, il suffit maintenant d'identifier les coefficients. □

Définition. *Soient n, p, q trois entiers, A' une matrice $q \times p$ à coefficients dans K, et A une matrice $p \times n$ à coefficients dans K. On appelle* **le produit de la matrice** A' **et de la matrice** A*, et on note $A' \cdot A$ ou $A'A$ la matrice $q \times n$ définie par la règle*

$$\boxed{\forall i \in [[1,q]], k \in [[1,n]], (A' \cdot A)_{ik} = \sum_{j=1}^{p} A'_{ij} \cdot A_{jk}.}$$

Exemple. Soient les deux matrices réelles

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A' est de type 2×3 et A de type 3×2. Le produit $A' \cdot A$ est alors de type 2×2 et on calcule

$$A' \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer $A \cdot A'$. On obtient maintenant une matrice 3×3 :

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarques :
1. On ne peut pas multiplier une matrice avec n'importe quelle matrice. Si on veut écrire un produit $A'A$, il faut que le nombre de colonnes de A' soit égal au nombre de lignes de A. Sans cette condition, le produit n'a pas de sens.
2. Lorsque A, A' sont toutes les deux des matrices $n \times n$, alors on a le droit d'écrire les deux matrices $A' \cdot A$ et $A \cdot A'$. Ces deux matrices sont de type $n \times n$. Mais en général elles ne sont pas égales.

Grâce à cette définition, nous pouvons reformuler le théorème 1.6 sous une forme courte :

$$\boxed{\mathscr{M}_g^e(u' \circ u) = \mathscr{M}_g^f(u') \cdot \mathscr{M}_f^e(u).}$$

Nous obtenons comme corollaire le formule correspondante pour le symbole $\mathscr{L}$:

$$\boxed{\mathscr{L}_g^f(A') \circ \mathscr{L}_f^e(A) = \mathscr{L}_g^e(A' \cdot A).}$$

On peut vérifier les formules suivantes pour les matrices (à condition que les sommes et produits matriciels aient un sens) :

$$\begin{array}{rcl} A_3 \cdot (A_2 \cdot A_1) & = & (A_3 \cdot A_2) \cdot A_1, \\ A' \cdot (A_1 + A_2) & = & A' \cdot A_1 + A' \cdot A_2, \\ (A_1' + A_2') \cdot A & = & A_1' \cdot A + A_2' \cdot A. \end{array}$$

Ce sont des conséquences directes de relations bien connues pour les applications linéaires :

$$\begin{array}{rcl} u_3 \circ (u_2 \circ u_1) & = & (u_3 \circ u_2) \circ u_1, \\ u' \circ (u_1 + u_2) & = & u' \circ u_1 + u' \circ u_2, \\ (u_1' + u_2') \circ u & = & u_1' \circ u + u_2' \circ u. \end{array}$$

Si V est un espace vectoriel sur K, l'ensemble $\mathcal{L}(V)$ de tous les endomorphismes de V, muni de l'addition des endomorphismes et de la composition des endomorphismes, est un anneau (en général non commutatif). Cet anneau est noté $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$. Les neutres de cet anneau sont évidemment l'endorphisme nul (pour l'addition) et l'endomorphisme **identité** (pour la composition). L'endomorphisme identité est noté id_V ou parfois id lorsqu'on n'a pas besoin de préciser l'espace vectoriel.

Si V est de dimension finie n, et e une base quelconque de V, alors on peut définir l'application

$$\mathscr{M}_e^e : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{M}_{n,n}(K) : u \mapsto \mathscr{M}_e^e(u).$$

Nous savons déjà que ceci est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Mais c'est plus que cela. Puisque l'ensemble de départ est un anneau, et que

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_e^e(u + u') & = & \mathscr{M}_e^e(u) + \mathscr{M}_e^e(u') \\ \mathscr{M}_e^e(u \circ u') & = & \mathscr{M}_e^e(u) \cdot \mathscr{M}_e^e(u'), \end{array}$$

on peut dire que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(K)$, avec l'addition et la multiplication matricielle, est un anneau et que $\mathscr{M}_e^e$ est un isomorphisme d'anneaux de l'anneau $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$ vers l'anneau $(\mathcal{M}_{n,n}(K), +, \cdot)$.

Le neutre additif dans $(\mathcal{M}_{n,n}(K), +, \cdot)$ est $\mathscr{M}_e^e(0_V) = 0_n$. C'est la matrice nulle $n \times n$, c'est-à-dire la matrice à n lignes et n colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

Le neutre multiplicatif dans $(\mathcal{M}_{n,n}(K), +, \cdot)$ est $\mathscr{M}_e^e(\mathrm{id}_V)$. C'est la matrice **identité**. On la note I_n ou parfois I lorsqu'on n'a pas besoin de préciser n. Comme pour tout $j \in [[1, n]]$, on a $\mathrm{id}(e_j) = e_j$, on voit que I_n ne dépend pas de la base e, et que

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

De manière plus courte, on a

$$\forall i, j \in [[1, n]], \quad I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Les matrices de type $n \times n$ sont appelées **matrices carrées de taille** n. On écrit souvent $\mathcal{M}_n(K)$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.

Tout ceci est résumé par le théorème suivant.

Théorème 1.7. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K. Alors $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$ est un anneau de neutre additif 0_V et de neutre multiplicatif id_V. De même, $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ est un anneau de neutre additif 0_n et de neutre multiplicatif I_n. En outre, si e est une base quelconque de V, l'application*

$$\mathscr{M}_e^e : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{M}_n(K)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Bien évidemment, la réciproque de cet isomorphisme d'anneaux est l'application

$$\mathscr{L}_e^e : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{L}(V) : A \mapsto \mathscr{L}_e^e(A).$$

3 Matrices-ligne. Matrices-colonne.

Définition.
Une **matrice-ligne** *est une matrice ayant une seule ligne.*
Une **matrice-colonne** *est une matrice ayant une seule colonne.*

Les matrices-ligne apparaissent de façon naturelle lorsqu'on traduit les formes linéaires en matrices. En effet, soit V un espace vectoriel sur K, avec V de dimension n. Si e est une base de V, f une base de K, et $\varphi : V \to K$ une forme linéaire sur V, alors $\mathscr{M}_f^e(\varphi)$ est une matrice $1 \times n$, puisque $\dim V = n$, $\dim K = 1$. En d'autres termes, la base f possède un seul élément. En général on choisit d'ailleurs $f = (1)$. C'est la base canonique de $K = K^1$.

Les matrices-colonne sont très pratiques pour représenter les coordonnées d'un vecteur $v \in V$ par rapport à une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V. En effet, nous savons qu'il existe un unique n-uplet $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. Ce n-uplet forme les coordonnées de v par rapport à e. Nous l'avons écrit ici sous forme horizontale. Mais le prochain théorème montre qu'il est beaucoup plus commode d'écrire les coordonnées sous forme verticale. Nous notons $\mathscr{C}_e(v)$ la matrice-colonne $n \times 1$ contenant les coordonnées de v par rapport à e :

$$\mathscr{C}_e(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.8. *Soit $u : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels sur K de dimension finies respectives n, p. Soient e, f des bases de V, W. Alors*

$$\forall v \in V, \qquad \mathscr{C}_f(u(v)) = \mathscr{M}_f^e(u) \cdot \mathscr{C}_e(v).$$

Preuve. Pour simplifier les notations, on note $C = \mathscr{C}_e(v), C' = \mathscr{C}_f(u(v))$ et $A = \mathscr{M}_f^e(u)$. Il s'agit de montrer l'égalite de matrices $C' = A \cdot C$.

D'une part,

$$u(v) = \sum_{i=1}^{p} C'_{i1} f_i$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} u(v) &= u\left(\sum_{j=1}^{n} C_{j1} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} C_{j1} u(e_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} C_{j1} \sum_{i=1}^{p} A_{ij} f_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{j1} A_{ij} \right) f_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{j1} \right) f_i.
\end{aligned}
$$

Comme f est une base de W, on peut identifier les coefficients de $u(v)$, d'où pour tout $i \in [[1,p]]$:

$$C'_{i1} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{j1}.$$

Or $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{j1} = (A \cdot C)_{i1}$. Donc

$$C'_{i1} = (A \cdot C)_{i1}$$

pour tout $i \in [[1,p]]$. On en déduit que les deux matrices-colonne C' et $A \cdot C$ sont égales. □

Corollaire 1.9. *Soit $\varphi : V \to K$ une forme linéaire sur V, et e une base de V. On note $f = (1)$ la base canonique de K. Alors*

$$\forall v \in V, \qquad \varphi(v) = \mathscr{M}_f^e(\varphi) \cdot \mathscr{C}_e(v).$$

Preuve. Il faut sous-entendre que le membre de gauche n'est pas exactement le scalaire $\varphi(v)$, mais la matrice 1×1 dont le seul coefficient est le scalaire $\varphi(v)$. On voit alors clairement que ceci est un corollaire du théorème 1.8 avec $W = K$ et $f = (1)$. □

Le prochain corollaire montre également qu'il est souvent commode d'identifier l'espace vectoriel K^n et l'espace des matrices-colonne $n \times 1$ par l'isomorphisme naturel qui existe entre ces deux espaces.

Corollaire 1.10. *Soient n, p deux entiers, et A une matrice $p \times n$. On note* b.c.(n) *et* b.c.(p) *les bases canoniques de K^n et K^p. Alors l'application linéaire $\mathscr{L}_{\text{b.c.}(p)}^{\text{b.c.}(n)}(A)$ est exactement*

$$K^n \to K^p : \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. L'application proposée est clairement linéaire, grâce à la propriété de distributivité de l'addition et multiplication des matrices). Il suffit maintenant de voir que A est la matrice associée à cette application dans les bases canoniques de K^n et K^p. □

4 Endomorphismes inversibles. Matrices carrées inversibles.

Définition. *Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Un endomorphisme v de V est* **inversible** *s'il existe un endomorphisme v' de V avec $v \circ v' = v' \circ v = \mathrm{id}_V$.*

Dans ce cas, v' est unique, v est une bijection, et $v' = v^{-1}$. En fait, les endomorphismes inversibles de V sont exactement les automorphismes de V.

Nous savons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau forme un groupe. Comme $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$ est un anneau, l'ensemble des endomorphismes inversibles, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes de V, est un groupe pour l'opération interne $\circ$. Ce groupe est appelé **le groupe linéaire de** V et il est noté $(\mathrm{GL}(V), \circ)$. En général, c'est un groupe non commutatif.

Lorsque V est de dimension finie, il y a de nombreuses manières d'exprimer la propriété «être un automorphisme». La clé est ici le théorème du rang, que nous démontrons maintenant.

Théorème 1.11 («Théorème du rang»).
Soit $u : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels sur K, avec V de dimension finie. Alors $\ker u$ et $\operatorname{im} u$ sont de dimension finie, et

$$\dim \ker u + \dim \operatorname{im} u = \dim V.$$

Preuve. Comme $\ker u$ est un sous-espace vectoriel de V, avec $\dim V < \infty$, on voit déjà que $\ker u$ est de dimension finie.
Choisissons un sous-espace vectoriel V' de V tel que $\ker u \oplus V' = V$. Nous savons qu'il est toujours possible de choisir un tel V', et que $\dim V' = \dim V - \dim \ker u$. Il suffit maintenant de prouver que V' et $\operatorname{im} u$ ont la même dimension. Pour cela nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $u' : V' \to \operatorname{im} u$. Nous définissons u' par la règle $\forall v \in V', u'(v) = u(v) \in \operatorname{im} u$.
D'abord, u' est une injection, car si $v \in V'$ est tel que $u'(v) = 0$, alors $v \in \ker u$. Dès lors $v \in V' \cap \ker u = \{0\}$, ce qui donne $v = 0$. L'injectivité de u' est démontrée.
Ensuite, u' est une surjection. Fixons $y \in \operatorname{im} u$. Alors il existe $x \in V$ avec $u(x) = y$. On peut décomposer $x = x' + x''$ avec $x' \in V', x'' \in \ker u$. Par linéarité de u, on a

$$y = u(x) = u(x') + u(x'') = u(x') + 0 = u'(x').$$

Cela montre que $x' \in V'$ est un antécédent de y par u'. Donc u' est également surjective.
Comme la linéarité de u' est évidente, nous savons désormais que u' est un isomorphisme de V' vers $\operatorname{im} u$. Il en découle l'égalité de leurs dimensions, et en particulier que $\operatorname{im} u$ est de dimension finie. Le théorème du rang est prouvé. □

Ce théorème s'appelle «théorème du rang», parce que le rang d'une application linéaire est par définition la dimension de l'image de cette application. Une manière d'énoncer le théorème est donc de dire que le rang d'une application linéaire est égal à la dimension de l'espace de départ moins la dimension du noyau de l'application.

Corollaire 1.12.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de V. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
(1) u est un automorphisme.
(2) u est injectif.
(3) u est surjectif.
(4) Il existe un endomorphisme u' de V tel que $u' \circ u = \mathrm{id}_V$.
(5) Il existe un endomorphisme u' de V tel que $u \circ u' = \mathrm{id}_V$.

Preuve. Par définition, la condition (1) implique les autres. Nous allons montrer d'abord que (2) et (3) impliquent (1).
Supposons (2) vraie. Alors $\ker u = \{0\}$ et $\dim \ker u = 0$. Le théorème du rang donne alors $\dim \operatorname{im} u = \dim V$, c'est-à-dire u surjectif. Donc u est bijectif, et comme u est linéaire, c'est un automorphisme.
Supposons (3) vraie. Alors $\operatorname{im} u = V$ et $\dim \operatorname{im} u = \dim V$. Le théorème du rang donne alors $\dim \ker u = 0$, c'est-à-dire $\ker u = \{0\}$, ou encore : u injectif. Encore une fois, u est un automorphisme de V.
Si (4) est vraie, alors u est injectif. En effet, si $u(v) = 0$, alors $v = u'(u(v)) = u'(0) = 0$. En vertu de ce qui précède, u est un automorphisme. Donc (4) implique (1).
Enfin, si (5) est vraie, alors u est surjectif. En effet, pour tout $v \in V$, on a $v = u(u'(v))$, et donc $u'(v)$ est un antécédent de v par u. En vertu de ce qui précède, u est un automorphisme. Donc (5) implique (1). □

Nous allons également nous intéresser aux éléments inversibles de l'anneau des matrices $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et K un corps commutatif. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est appelée* **inversible** *s'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AA' = A'A = I_n$.*

Si A' existe, elle est unique. On appelle A' **la matrice inverse de** A et on la note A^{-1}.

Comme $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ est un anneau, l'ensemble des matrices inversibles est un groupe pour l'opération interne de multiplication. Ce groupe est appelé **le groupe linéaire de taille** n **sur** K et il est noté $(\mathrm{GL}(n, K), \cdot)$ ou $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$. En général, c'est un groupe non commutatif.

Si e est une base de V (où V est de dimension finie, notée n), alors $\mathscr{M}_e^e : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{M}_n(K)$ est un isomorphisme d'anneaux. Donc cette application envoie l'ensemble des inversibles du premier anneau exactement sur l'ensemble des inversibles du deuxième anneau. Autrement dit, la restriction de cet isomorphisme d'anneaux aux inversibles dans les deux anneaux fournit un isomorphisme de groupes entre $(\mathrm{GL}(V), \circ)$ et $(\mathrm{GL}(n, K), \cdot)$. En particulier, si $A = \mathscr{M}_e^e(u)$, alors $A^{-1} = \mathscr{M}_e^e(u^{-1})$.

Exemple. Voici une matrice inversible d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, on vérifie par le calcul que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En revanche, la matrice ci-dessous n'est pas inversible :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, supposons qu'il existe une matrice 2×2, appelée X, telle que $B \cdot X = I_2$. En particulier, en regardant le coefficient $(2, 2)$, on aurait

$$B_{21}X_{12} + B_{22}X_{22} = 1.$$

Puisque $B_{21} = B_{22} = 0$, c'est impossible.

Le théorème suivant découle directement de ce que nous savons déjà des automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie n.

Corollaire 1.13.
Soit n un entier, K un corps commutatif et A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans K. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
(1) A est inversible.
(2) Il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A' \cdot A = I_n$.
(3) Il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A \cdot A' = I_n$.

Dans le chapitre consacré au déterminant, nous allons fabriquer un outil pour décider si un endomorphisme (en dimension finie) est inversible ou si une matrice carrée est inversible.

5 Matrices de passage

Définition. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur K, et soient e, e' deux bases de cet espace vectoriel. La* **matrice de passage de la base** e **à la base** e'*, notée $\mathscr{P}_{e\to e'}$ est la matrice $n \times n$ définie par*

$$\mathscr{P}_{e\to e'} = \mathscr{M}_e^{e'}(\mathrm{id}_V).$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice $\mathscr{P}_{e\to e'}$ sont les coordonnées des vecteurs de la base e' par rapport à la base e.

Il est évident que la matrice de passage d'une base e à la même base e est la matrice identité.

Le résultat suivant résume ce qu'il faut savoir à propos des matrices de passage.

Théorème 1.14.
1. Soient e, e', e'' trois bases de V. Alors

$$\mathscr{P}_{e\to e'} \cdot \mathscr{P}_{e'\to e''} = \mathscr{P}_{e\to e''}.$$

2. Toute matrice de passage est inversible, et

$$(\mathscr{P}_{e\to e'})^{-1} = \mathscr{P}_{e'\to e}.$$

3. Soit $u : V \to W$ une application linéaire, e, e' deux bases de V, f, f' deux bases de W. Alors

$$\mathscr{M}_{f'}^{e'}(u) = \mathscr{P}_{f\to f'}^{-1} \cdot \mathscr{M}_f^e(u) \cdot \mathscr{P}_{e\to e'}.$$

4. Soit u un endomorphisme de V, et e, e' deux bases de V. Alors

$$\mathscr{M}_{e'}^{e'}(u) = \mathscr{P}_{e\to e'}^{-1} \cdot \mathscr{M}_e^e(u) \cdot \mathscr{P}_{e\to e'}.$$

5. Soit e, e' deux bases de V. Alors

$$\forall v \in V, \qquad \mathscr{C}_{e'}(v) = \mathscr{P}_{e\to e'}^{-1} \cdot \mathscr{C}_e(v).$$

Preuve.
1.

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{e\to e'} \cdot \mathscr{P}_{e'\to e''} &= \mathscr{M}_e^{e'}(\mathrm{id}) \cdot \mathscr{M}_{e'}^{e''}(\mathrm{id}) \\ &= \mathscr{M}_e^{e''}(\mathrm{id} \circ \mathrm{id}) \\ &= \mathscr{P}_{e\to e''}. \end{aligned}$$

2. est un corollaire de 1. en prenant $e'' = e$.

3.

$$\begin{aligned} (\mathscr{P}_{f\to f'})^{-1} \cdot \mathscr{M}_f^e(u) \cdot \mathscr{P}_{e\to e'} &= \mathscr{P}_{f'\to f} \cdot \mathscr{M}_f^e(u) \cdot \mathscr{P}_{e\to e'} \\ &= \mathscr{M}_{f'}^{f}(\mathrm{id}) \cdot \mathscr{M}_f^e(u) \cdot \mathscr{M}_e^{e'}(\mathrm{id}) \\ &= \mathscr{M}_{f'}^{e'}(\mathrm{id} \circ u \circ \mathrm{id}) \\ &= \mathscr{M}_{f'}^{e'}(u). \end{aligned}$$

4. découle directement de 3.

5.

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{e'}(v) &= \mathscr{C}_{e'}(\mathrm{id}(v)) \\ &= \mathscr{M}_{e'}^{e}(\mathrm{id}) \cdot \mathscr{C}_e(v) \\ &= (\mathscr{P}_{e\to e'})^{-1} \cdot \mathscr{C}_e(v). \end{aligned}$$

□

Soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie n. Si on choisit une base e de V, on obtient un isomorphisme de groupes $\mathscr{M}_e^e : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n, K)$. L'image du neutre $\mathrm{id}_V \in \mathrm{GL}(V)$ est évidemment $I_n \in \mathrm{GL}(n, K)$, et cette image ne dépend pas du choix de la base e. Mais pour d'autres éléments $u \in \mathrm{GL}(V)$, l'élément $\mathscr{M}_e^e(u)$ peut dépendre du choix de la base e. Précisément, si f est une autre base,

$$\forall u \in \mathrm{GL}(V), \mathscr{M}_f^f(u) = \mathscr{P}_{e\to f}^{-1} \cdot \mathscr{M}_e^e(u) \cdot \mathscr{P}_{e\to f}.$$

On dit alors que l'isomorphisme de groupes $\mathscr{M}_f^f$ est le conjugué de l'isomorphisme $\mathscr{M}_e^e$ par l'élément $\mathscr{P}_{e\to f} \in \mathrm{GL}(n, K)$. Ce nom vient de la définition suivante : si g, h sont deux éléments d'un groupe $(G, \cdot)$, on appelle $g^{-1} \cdot h \cdot g$ le conjugué de h par g.

6 Transposée. Trace. Matrices diagonales et triangulaires

Nous terminons ce chapitre par quelques définitions courantes en théorie des matrices.

Définition. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$*. La* **transposée de** A *est la matrice* ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ *définie par*

$$\forall i \in [[1,n]], j \in [[1,p]], ({}^tA)_{ij} = A_{ji}.$$

Il est clair que ${}^t({}^tA) = A$ pour une matrice quelconque A. La transposition est une involution.

Exemple.

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}.$$

Définition.
Une matrice **symétrique** *est une matrice carrée* A *qui vérifie* ${}^tA = A$.
Une matrice **anti-symétrique** *est une matrice carrée* A *qui vérifie* ${}^tA = -A$.

Ainsi, la matrice identité est une matrice symétrique. La matrice nulle est à la fois symétrique et anti-symétrique. On peut aussi observer que si A est anti-symétrique $n \times n$ (et $1_K + 1_K \neq 0_K$), alors pour tout $i \in [[1,n]]$, le coefficient A_{ii} doit être nul. Les coefficients A_{ii} d'une matrice carrée sont appelés **les coefficients diagonaux**.

Théorème 1.15.
1. Soient A, B *deux matrices de type* $p \times n$*. Alors* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
2. Soit B *de type* $q \times p$ *et* A *de type* $p \times n$*. Alors* ${}^t(B \cdot A) = {}^tA \cdot {}^tB$.

Preuve.
1. est évident.
2. Soit $i \in [[1,n]]$, $k \in [[1,q]]$. On a

$$\begin{aligned} ({}^t(B \cdot A))_{ik} &= (BA)_{ki} \\ &= \sum_{j=1}^{p} B_{kj} A_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{p} ({}^tA)_{ij} ({}^tB)_{jk} \\ &= ({}^tA \cdot {}^tB)_{ik} \end{aligned}$$

□

Définition. *La* **trace d'une matrice carrée** A *de taille* n *est la somme de ses coefficients diagonaux. On la note* $\mathrm{tr}(A)$ *:*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Bien sûr, la trace d'une somme de matrices est la somme des traces.

Théorème 1.16. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$*. Alors les matrices* $A \cdot B$ *et* $B \cdot A$ *ont la même trace :*

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{ij} B_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} B_{ji} A_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} B_{ji} A_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{p} (BA)_{jj} \\
&= \operatorname{tr}(BA).
\end{aligned}$$

□

Cette propriété de la trace d'une matrice nous permet de définir également la trace d'un **endomorphisme** d'un espace vectoriel de dimension finie.

Définition. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, et $u : V \to V$ un endomorphisme de V. On appelle* **trace de** *u et on note $\operatorname{tr}(u)$ la trace de la matrice $\mathscr{M}_e^e(u)$, où e est une base quelconque de V :*

$$\textit{Pour toute base } e \textit{ de } V, \quad \operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}\big(\mathscr{M}_e^e(u)\big).$$

Bien entendu, cette définition fonctionne seulement si le membre de droite est indépendant du choix de la base e. Il faut donc se convaincre par une preuve que pour deux bases e, f de V, on a toujours l'égalité

$$\operatorname{tr}\big(\mathscr{M}_e^e(u)\big) = \operatorname{tr}\big(\mathscr{M}_f^f(u)\big)$$

Pour cela, utilisons la matrice de passage $\mathscr{P}_{f\to e}$ de la base f à la base e :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\big(\mathscr{M}_e^e(u)\big) &= \operatorname{tr}\big(\mathscr{P}_{f\to e}^{-1} \cdot \mathscr{M}_f^f(u) \cdot \mathscr{P}_{f\to e}\big) \\
&= \operatorname{tr}\big(\mathscr{P}_{f\to e} \cdot \mathscr{P}_{f\to e}^{-1} \cdot \mathscr{M}_f^f(u)\big) \\
&= \operatorname{tr}\big(\mathscr{M}_f^f(u)\big).
\end{aligned}$$

Exemples. (1) Si V est de dimension n, et $k \in K$ un scalaire, alors la trace de $k \cdot \mathrm{id}_V$ est égale à kn.
(2) Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme défini par

$$u\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Q_{11}a_1 + \cdots + Q_{1n}a_n \\ \vdots \\ Q_{n1}a_1 + \cdots + Q_{nn}a_n \end{bmatrix},$$

où les (Q_{ij}) sont des réels. Alors la trace de u est égale à la trace de la matrice Q, c'est-à-dire

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{j=1}^{n} Q_{jj} = Q_{11} + Q_{22} + \cdots + Q_{nn}.$$

Définition. *Soit A une matrice carrée de taille n.*
On dit que A est **diagonale** *si* $\forall i,j \in [[1,n]], \quad i \neq j \Rightarrow A_{ij} = 0$.
On dit que A est **triangulaire supérieure** *si* $\forall i,j \in [[1,n]], \quad i > j \Rightarrow A_{ij} = 0$.
On dit que A est **triangulaire inférieure** *si* $\forall i,j \in [[1,n]], \quad i < j \Rightarrow A_{ij} = 0$.

Dans l'exemple ci-dessous, la matrice A_1 est diagonale, A_2 est triangulaire supérieure et A_3 est triangulaire inférieure.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, la somme de deux matrices diagonales (respectivement triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures) est encore diagonale (respectivement triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure). Il est plus remarquable que cela reste encore vrai pour le produit de deux matrices.

Théorème 1.17. *Soit n un entier, K un corps. Soient A, B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(K)$.*
Si A et B sont diagonales, alors AB est diagonale et $AB = BA$.
Si A et B sont triangulaires supérieures, alors AB est triangulaire supérieure.
Si A et B sont triangulaires inférieures, alors AB est triangulaire inférieure.

Preuve. Si A et B sont toutes les deux diagonales, alors on calcule

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} = BA.$$

La dernière égalité est justifiée par le fait que K est un corps commutatif.
Supposons maintenant A, B triangulaires supérieures. Prenons un couple d'indices $i, j \in [[1,n]]$ avec $i > j$. Alors

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=i}^{n} A_{ik}B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot B_{kj} + \sum_{k=i}^{n} A_{ik} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il en découle que AB est triangulaire supérieure.
Si A, B sont triangulaires inférieures, alors leurs transposées ${}^tA, {}^tB$ sont triangulaires supérieures. Par ce qui précède, on sait que ${}^tB \cdot {}^tA$ est triangulaire supérieure. Mais ${}^tB \cdot {}^tA = {}^t(AB)$. Donc AB est triangulaire inférieure. $\square$

7 Vocabulaire du chapitre

Une matrice	un endomorphisme inversible
une ligne de matrice	une matrice inversible
une colonne de matrice	le groupe linéaire
un coefficient	le théorème du rang
une matrice élémentaire	l'inverse d'une matrice
l'espace dual d'un espace vectoriel	une matrice de passage
une somme de matrices	la transposée
un produit de matrices	la trace
l'endomorphisme identité	une matrice diagonale
la matrice identité	une matrice triangulaire supérieure
une matrice carrée	une matrice triangulaire inférieure
une matrice-ligne	une matrice symétrique
une matrice-colonne	une matrice anti-symétrique

8 Exercices

1. Si A, B sont deux matrices inversibles $n \times n$, montrer que AB est inversible. Quel est son inverse ?

2. Calculer les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^4$$

3. Soit A une matrice $p \times n$ à coefficients réels. Montrer que la trace de ${}^tA \cdot A$ est un réel positif.

4. Soit K un corps tel que $1_K + 1_K \neq 0_K$. Montrer que toute matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans K s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Chapitre 2. Déterminants

1 Le groupe symétrique $\mathrm{Sym}(n)$

Définition. *Soit E un ensemble. Une* **permutation de** *E est une bijection de E vers E. La bijection de E vers E définie par $E \ni x \mapsto x \in E$ est appelée* **identité sur** *E. On la note id_E.*

Théorème 2.1.
L'ensemble des permutations d'un ensemble E, muni de la loi $\circ$ de composition, est un groupe.

Preuve. Tout d'abord, la composée $f \circ g$ de deux bijections de E vers E est encore une bijection de E vers E. La loi $\circ$ est donc une loi interne sur l'ensemble des permutations.
L'associativité de la loi $\circ$ est évidente.
Le neutre pour $\circ$ est l'identité sur E.
Toute permutation f admet un inverse pour la loi $\circ$, à savoir la permutation réciproque f^{-1}.
Toutes les propriétés de groupe sont vérifiées. □

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle* **groupe symétrique associé à** *n, et on note $\mathrm{Sym}(n)$, le groupe de toutes les permutations de l'ensemble fini $[[1,n]] = \{1,\ldots,n\}$.*

Il est facile de voir que le groupe $\mathrm{Sym}(n)$ possède $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ éléments.

En outre, le groupe $\mathrm{Sym}(n)$ est non commutatif si $n \geqslant 3$. Il est commutatif si $n \in \{0,1,2\}$.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathrm{Sym}(n)$ une permutation de $[[1,n]]$. Le* **nombre d'inversions de** *f est le nombre de couples $(i,j) \in [[1,n]]$ qui vérifient $i < j$ et $f(i) > f(j)$. On note $I(f)$ le nombre d'inversions de f.*

Exemple. Soit la permutation $f \in \mathrm{Sym}(4)$ définie par $(f(1), f(2), f(3), f(4)) = (3,4,1,2)$. Alors $I(f) = 4$. Les 4 couples sont $(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)$.

Définition.
Soit $f \in \mathrm{Sym}(n)$. On appelle **signature de** *f, et on note $\epsilon(f)$, le nombre $\epsilon(f) = (-1)^{I(f)}$.*

La signature d'une permutation de $[[1,n]]$ vaut $+1$ ou -1, selon que $I(f)$ est pair ou impair.

Définition.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f \in \mathrm{Sym}(n)$ est une **transposition de** *$[[1,n]]$ s'il existe deux éléments distincts $p, q \in [[1,n]]$ tels que $f(p) = q, f(q) = p$ et $\forall i \in [[1,n]] - \{p,q\}, f(i) = i$.*

Si $n \geqslant 2$, il existe des transpositions de $[[1,n]]$. Le nombre de transpositions de $[[1,n]]$ est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 2.2. *Toute transposition de $[[1,n]]$ a une signature égale à -1.*

Preuve. Soient $p < q$ les deux éléments de $[[1,n]]$ qui sont échangés par la transposition f. Les autres nombres restent fixes. Les couples (i,j) tels que $i < j$ et $f(i) > f(j)$ sont alors $(p,p+1)$, $(p,p+2), \ldots, (p,q)$ et $(p+1,q), (p+2,q), \ldots, (q-1,q)$. Il y en a au total $(q-p)+(q-p-1) = 2(q-p)-1$. Le nombre d'inversions $I(f)$ est donc impair, ce qui donne une signature égale à -1. □

Théorème 2.3. *Si f est une permutation de* $[[1,n]]$, *alors*

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{f(i)-f(j)}{i-j} = \pm 1.$$

Preuve. Soit X le membre de gauche. En échangeant i et j on a

$$X = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} \frac{f(j)-f(i)}{j-i} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}.$$

Donc

$$X^2 = \left(\prod_{i<j} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}\right) \cdot \left(\prod_{i>j} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}\right) = \prod_{i\neq j} \frac{f(i)-f(j)}{i-j} = \frac{\prod_{i\neq j}(f(i)-f(j))}{\prod_{i\neq j}(i-j)}.$$

Or f est une permutation de $[[1,n]]$, donc $\prod\limits_{i\neq j}(f(i)-f(j)) = \prod\limits_{i\neq j}(i-j)$, ce qui montre $X^2=1$. On peut en déduire $X=\pm 1$. □

Théorème 2.4. *Pour toute permutation f de* $[[1,n]]$ *on a*

$$\epsilon(f) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}.$$

Preuve. On sait déjà que le membre de gauche et le membre de droite appartiennent tous deux à $\{+1,-1\}$. Pour montrer leur égalité, il suffit de montrer qu'ils ont le même signe. Or dans le produit de droite, le facteur $\dfrac{f(i)-f(j)}{i-j}$ est négatif si et seulement si $i<j$ et $f(i)>f(j)$. Donc le nombre de facteurs négatifs est égal à $I(f)$. Le signe du membre de droite est donc le signe de $(-1)^{I(f)} = \epsilon(f)$. □

Théorème 2.5. *Si f,g sont deux permutations de* $[[1,n]]$, *alors*

$$\epsilon(f\circ g) = \epsilon(f)\cdot\epsilon(g).$$

Preuve.

$$\epsilon(f\circ g) = \prod_{i<j} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{i-j} = \prod_{i<j} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)} \cdot \prod_{i<j} \frac{g(i)-g(j)}{i-j}.$$

Comme le deuxième facteur est égal à la signature de g, il suffit de montrer que le premier facteur est égal à la signature de f, ou encore

$$\prod_{i<j} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)} = \prod_{a<b} \frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Dans le membre de gauche, posons $i=g^{-1}(a), j=g^{-1}(b)$. Il faut alors montrer que

$$\prod_{g^{-1}(a)<g^{-1}(b)} \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \prod_{a<b} \frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Si on note $C_{ab} = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, il faut observer que $C_{ab}=C_{ba}$. Or dans le membre de gauche on fait le produit des C_{ab} pour tous les couples (a,b) avec $g^{-1}(a)<g^{-1}(b)$, alors que dans le membre de droite on fait le produit des C_{ab} pour tous les couples (a,b) avec $a<b$.
Or pour tout ensemble $\{a,b\}$ avec $a\neq b$, exactement un des deux couples (a,b) et (b,a) apparaît dans l'ensemble des indices de chacun des deux produits. Comme $C_{ab}=C_{ba}$, on trouve l'égalité. □

Définition.
Une **permutation paire** *dans* $\mathrm{Sym}(n)$ *est une permutation de signature* $+1$.
Une **permutation impaire** *dans* $\mathrm{Sym}(n)$ *est une permutation de signature* -1.

Pour illustrer, nous donnons maintenant les permutations paires et les permutations impaires dans les groupes $\mathrm{Sym}(1), \mathrm{Sym}(2), \mathrm{Sym}(3)$.

$\boxed{\text{Le groupe Sym(1)}}$

Il contient un seul élément, l'identité. Le nombre d'inversions de l'identité est nul, donc la signature de l'identité vaut $+1$. C'est une permutation paire. Il n'y a pas de permutation impaire dans ce groupe.

$\boxed{\text{Le groupe Sym(2)}}$

Il contient 2 éléments, l'identité et la transposition τ définie par $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$. L'identité est la seule permutation paire du groupe, et la transposition τ est la seule permutation impaire du groupe.

$\boxed{\text{Le groupe Sym(3)}}$

Il contient $3! = 6$ éléments, les voici :

$$\begin{array}{llllllllllll}
\mathrm{id}: & 1 \mapsto 1 & c_+: & 1 \mapsto 2 & c_-: & 1 \mapsto 3 & \tau_{12}: & 1 \mapsto 2 & \tau_{23}: & 1 \mapsto 1 & \tau_{13}: & 1 \mapsto 3 \\
 & 2 \mapsto 2 & & 2 \mapsto 3 & & 2 \mapsto 1 & & 2 \mapsto 1 & & 2 \mapsto 3 & & 2 \mapsto 2 \\
 & 3 \mapsto 3 & & 3 \mapsto 1 & & 3 \mapsto 2 & & 3 \mapsto 3 & & 3 \mapsto 2 & & 3 \mapsto 1
\end{array}$$

Leurs trois dernières permutations sont des transpositions, donc ce sont des permutations impaires. L'identité est une permutation paire. Le nombre d'inversions de c_+ est 2, le nombre d'inversions de c_- est également 2. Donc c_+ et c_- sont des permutations paires. Au total, il y a dans le groupe symétrique $\mathrm{Sym}(3)$ trois permutations paires et trois permutations impaires. Les permutations c_+ et c_- sont appelées les **permutations circulaires** sur $\{1, 2, 3\}$. Elles sont inverses l'une de l'autre, et elles vérifient $c_+ \circ c_+ \circ c_+ = \mathrm{id} = c_- \circ c_- \circ c_-$. Les transpositions obéissent aux règles suivantes :

$$\begin{aligned}
&\tau_{12} \circ \tau_{12} = \tau_{13} \circ \tau_{13} = \tau_{23} \circ \tau_{23} = \mathrm{id}, \quad && \text{et aussi} \\
&\tau_{12} \circ \tau_{23} = \tau_{23} \circ \tau_{13} = \tau_{13} \circ \tau_{12} = c_+, \quad && \tau_{23} \circ \tau_{12} = \tau_{13} \circ \tau_{23} = \tau_{12} \circ \tau_{13} = c_-.
\end{aligned}$$

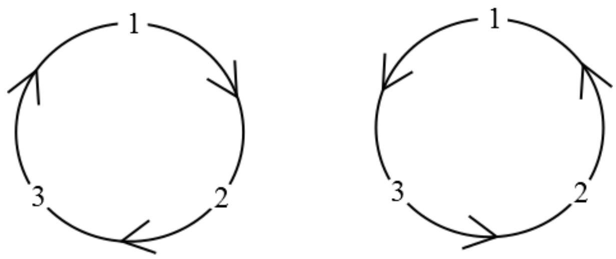

FIGURE 1 – Les deux permutations circulaires

Théorème 2.6. *Soit* $n \geqslant 2$. *Alors* $\mathrm{Sym}(n)$ *contient le même nombre de permutations paires que de permutations impaires. Si* τ *est une transposition fixée dans* $\mathrm{Sym}(n)$, *alors toute permutation impaire s'écrit d'une seule manière sous la forme* $\sigma \circ \tau$, *avec* σ *une permutation paire.*

Preuve. Nous montrons d'abord la deuxième partie. Soit σ' impaire. Alors $\sigma' = (\sigma' \circ \tau^{-1}) \circ \tau$, et $\sigma \circ \tau^{-1}$ est paire, puisque $\epsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) = (-1) \cdot (-1)^{-1} = 1$. L'existence de σ est établie. Pour son unicité, il suffit de voir que $\sigma' = \sigma \circ \tau$ implique $\sigma = \sigma' \circ \tau^{-1}$.
L'application $\gamma : \{\sigma \in \mathrm{Sym}(n) | \sigma \text{ paire}\} \to \{\sigma' \in \mathrm{Sym}(n) | \sigma' \text{ impaire}\} : \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est alors une bijection. Comme les bijections conservent les cardinaux des ensembles finis, on voit qu'il y a le même nombre de permutations paires que de permutations impaires. $\square$

Théorème 2.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Toute permutation de* $\mathrm{Sym}(n)$ *peut s'écrire comme une composée d'un nombre fini (éventuellement nul) de transpositions.*

Preuve. Lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, le groupe symétrique associé à n ne contient que l'identité, qui est évidemment la composée de zéro transpositions. Nous allons maintenant raisonner par récurrence. Prenons $n \geqslant 2$ et une permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$.
Si $\sigma(n) = n$, on définit $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Sym}(n-1)$ par restriction de σ à l'ensemble de départ $[[1, n-1]]$ et à l'ensemble d'arrivée $[[1, n-1]]$.
Si $\sigma(n) \neq n$, on appelle τ la transposition qui échange n et $\sigma(n)$, et on constate que $(\tau \circ \sigma)(n) = n$. On définit $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Sym}(n-1)$ par restriction de $\tau \circ \sigma$ à l'ensemble de départ $[[1, n-1]]$ et à l'ensemble d'arrivée $[[1, n-1]]$.
Par l'hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe une écriture $\tilde{\sigma} = t_1 \circ \cdots \circ t_p$, où les t_i sont des transpositions de $\mathrm{Sym}(n-1)$. Bien sûr, on peut voir les t_i comme des permutations de $[[1, n]]$, et on obtient alors (dans le premier cas) $\sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_p$ ou (dans le deuxième cas) $\sigma = \tau \circ t_1 \circ \cdots \circ t_p$. $\square$

2 Déterminant d'une famille par rapport à une base

Nous avons déjà rencontré les familles de vecteurs, les endomorphismes, et les matrices. Pour chacun des ces objets, on peut se poser ces questions naturelles :

1. Dans un espace vectoriel de dimension n, prenons une famille de n vecteurs. Comment savoir si c'est une base de l'espace ?

2. Prenons un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Comment savoir si c'est un automorphisme ?

3. Prenons une matrice carrée d'ordre n. Comment savoir si elle est inversible ?

Ces trois questions sont en fait équivalentes. Pour pouvoir y répondre, nous allons construire des outils très précieux : *les déterminants.* Dans cette section, nous allons d'abord construire le déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base. Les sections suivantes construiront le déterminant d'un endomorphisme, puis le déterminant d'une matrice carrée.

Définition. *Soient V, W deux espaces vectoriels sur K, et n un nombre naturel.*
Une **application n-linéaire de V dans W** *est une application $f : V^n = V \times V \times \cdots \times V \to W$ telle que pour tout $i \in [[1, n]]$ et pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n) \in V^{n-1}$, l'application*

$$V \to W : x \mapsto f(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n)$$

est une application linéaire.
On dit aussi que f est «linéaire en chacune de ses variables».

Les applications 1-linéaires de V dans W sont les applications linéaires $V \to W$.

Ci-dessous un exemple d'une application 2-linéaire (on dit aussi «bilinéaire») de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto (x_1 y_3, x_2 y_2 - x_3 y_1).$$

Définition. *Soit V un espace vectoriel sur K. Une* **forme n-linéaire sur V** *est une application n-linéaire de V^n vers le corps K.*

Le produit scalaire dans le plan est un exemple d'une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

De même, le produit scalaire dans l'espace est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Définition. *Une forme n-linéaire* **alternée** *sur V est une forme n-linéaire f sur V qui vérifie la propriété suivante :*

$$\forall (v_1, \ldots, v_n) \in V^n, \forall (i,j) \in [[1,n]]^2, (i \neq j \text{ et } v_i = v_j) \Rightarrow f(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

En d'autres termes : lorsque le n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ contient deux vecteurs égaux, on a $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Théorème 2.8. *Toute forme n-linéaire alternée est anti-symétrique, c'est-à-dire :*

$$\forall (v_1, \ldots, v_n) \in V^n, \forall (i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j \Rightarrow f(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -f(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots).$$

En d'autres termes : lorsque que, dans le n-uplet $(v_1, \ldots, v_n)$, on échange deux vecteurs, alors $f(v_1, \ldots, v_n)$ est transformé en son opposé dans K.

Preuve. Comme f est alternée, on peut écrire

$$\begin{aligned}
0 &= f(\ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots) \\
&= f(\ldots, v_i, \ldots, v_i + v_j, \ldots) + f(\ldots, v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots) \\
&= f(\ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots) + f(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + f(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots) + \\
&\quad + f(\ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots) \\
&= 0 + f(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + f(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots) + 0.
\end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant prêts pour la définition du déterminant d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n par rapport à une base de cet espace.

Définition. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur K, et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V. On appelle* **déterminant de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ par rapport à la base** *e, et on note $\det_e(v_1, \ldots, v_n)$ le scalaire*

$$\det_e(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym(n)}} \epsilon(\sigma) \cdot c_{\sigma(1)1} c_{\sigma(2)2} \cdots c_{\sigma(n)n} \in K,$$

où $\forall i, j \in [[1,n]]$, le scalaire c_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur v_j par rapport à la base e.

Théorème 2.9. *L'application $\det_e : V^n \to K : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det_e(v_1, \ldots, v_n)$ est une forme n-linéaire alternée sur V.*

Preuve. En écrivant la condition, il devient clair que f est une forme n-linéaire sur V.
Reste à montrer que f est alternée.

Si $n \leqslant 1$, il n'y a rien à montrer. On peut tout de suite supposer que $n \geqslant 2$.
Supposons que $v_i = v_j$ avec $i < j$ (sans restreindre la généralité). Il faut montrer que $f(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0$. Comme $v_i = v_j$, on peut dire que pour tout $k \in [[1,n]]$, $c_{ki} = c_{kj}$. On peut calculer comme ceci :

$$\begin{aligned}
f(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) \cdot c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(j)j} \cdots c_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) \cdot c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(j)i} \cdots c_{\sigma(n)n}.
\end{aligned}$$

Appelons τ la transposition de $[[1,n]]$ qui échange les nombres i et j. Rappelons aussi que $\mathrm{Sym}(n)$ contient autant de permutations paires que de permutations impaires, et que toute permutation impaire peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sigma \circ \tau$, où σ est une permutation paire. Dès lors

$$\begin{aligned}
f(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n), \epsilon(\sigma)=1} c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(j)i} \cdots c_{\sigma(n)n} \\
&\quad - \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n), \epsilon(\sigma)=1} c_{\sigma(\tau(1))1} \cdots c_{\sigma(\tau(i))i} \cdots c_{\sigma(\tau(j))i} \cdots c_{\sigma(\tau(n))n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n), \epsilon(\sigma)=1} c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(j)i} \cdots c_{\sigma(n)n} \\
&\quad - \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n), \epsilon(\sigma)=1} c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(j)i} \cdots c_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(n)n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

f est bien une forme n-linéaire alternée. □

Corollaire 2.10. *L'application* $\det_e : V^n \to K$ *est anti-symétrique.*

La définition du déterminant d'une famille par rapport à une base est compliquée, parce que la formule qu'on y trouve est compliquée. Grâce au résultat suivant, on peut décrire l'application $\det_e : V^n \to K$ d'une autre manière, plus courte.

Théorème 2.11.
1. *L'application* $\det_e : V^n \to K$ *est la seule forme* n*-linéaire alternée sur* V *telle que* $\det_e(e) = 1$.
2. *Si* $\psi : V^n \to K$ *est une forme* n*-linéaire alternée, et* e *une base de* V*, alors*

$$\forall (v_1, \ldots, v_n) \in V^n, \quad \psi(v_1, \ldots, v_n) = \psi(e) \cdot \det_e(v_1, \ldots, v_n).$$

Preuve. 1. Montrons d'abord que $\det_e(e) = 1$. En effet, dans ce cas, on a

$$\forall i, j \in [[1, n]], \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La définition donne alors

$$\det_e(e) = \epsilon(\mathrm{id}) \cdot c_{11} \cdots c_{nn},$$

puisque tous les autres termes de la somme sont nuls. On trouve bien $\det_e(e) = 1$.
Nous montrons maintenant l'unicité. Supposons que ψ est une forme n-linéaire alternée sur V telle que $\psi(e) = 1$. Il faut montrer que $\psi = \det_e$, ou (de manière équivalente) que

$$\forall (v_1, \ldots, v_n) \in V^n, (\psi - \det_e)(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

Il est clair que $\psi - \det_e$ est une forme n-linéaire alternée sur V, et qu'elle s'annule sur $(e_1, \ldots, e_n)$. Comme elle est antisymétrique, et que toute permutation dans $\mathrm{Sym}(n)$ s'écrit comme une composée de transpositions, on trouve

$$\forall \sigma \in \mathrm{Sym}(n), \quad (\psi - \det_e)(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \cdot (\psi - \det_e)(e_1, \ldots, e_n) = 0.$$

On sait maintenant que $\psi - \det_e$ est une forme n-linéaire alternée qui s'annule sur toutes les familles obtenues par permutation des vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Et comme elle est alternée, elle s'annule même sur tous les n-uplets $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$, où $\sigma : [[1, n]] \to [[1, n]]$ est une application quelconque. En effet, si σ n'est pas une bijection, alors ce n'est pas non plus une injection, et il existe donc deux vecteurs égaux dans le n-uplet $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$.
Finalement, par n-linéarité, on arrive bien à la conclusion que $(\psi - \det_e)(v_1, \ldots, v_n) = 0$ pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs. L'unicité est établie.
2. Il suffit de faire le raisonnement de la partie «unicité» du (1) avec la forme n-linéaire alternée $\psi - \psi(e)\det_e$. On trouve ainsi qu'elle est nulle. □

Nous pouvons maintenant affirmer que l'application déterminant $\det_e : V^n \to K$ est la seule forme n-linéaire alternée sur V qui envoie la base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ sur 1_K. Cette définition est plus naturelle, même si elle cache la formule qui donne la valeur de $\det_e(v_1, \ldots, v_n)$.

Grâce à ce déterminant, il devient facile de décrire les familles de n vecteurs qui sont des bases :

Théorème 2.12. *Soit* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base quelconque d'un espace vectoriel* V *de dimension finie* n *sur un corps commutatif* K*. Soit* $(v_1, \ldots, v_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* V*.*
La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une base de* V *si et seulement si* $\det_e(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

Preuve. Partie «seulement si» : On suppose que $v = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de V. Montrons que $\det_e(v) \neq 0$. Considérons la forme n-linéaire alternée $\det_v$ sur V. Par le théorème 2.11 on trouve alors

$$1 = \det_v(v) = \det_v(e) \cdot \det_e(v).$$

On en déduit en particulier que $\det_e(v) \neq 0$.

Partie «si» : Nous allons montrer sa contraposée : Si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ n'est pas une base de V, alors son déterminant est nul.

Si on suppose que la famille n'est pas une base, alors elle est liée (nous sommes en dimension finie). Par conséquent, il existe $j \in [[1,n]]$ et des scalaires $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ tels que

$$v_j = \sum_{i \in [[1,n]]-\{j\}} a_i v_i$$

Ensuite nous pouvons calculer le déterminant :

$$\begin{aligned} \det_e(v_1, \dots, v_n) &= \det_e(v_1, \dots, v_{j-1}, \sum_{i \in [[1,n]]-\{j\}} a_i v_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i \in [[1,n]]-\{j\}} a_i \cdot \det_e(v_1, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i \in [[1,n]]-\{j\}} a_i \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

A l'avant-dernière ligne, le déterminant s'annule, parce qu'il y a répétition du vecteur v_i dans la famille.

□

Exemples.

$\boxed{\text{En dimension 1}}$ Soit K un corps et $e = (e_1) = (1)$ la base canonique de $K^1 = K$. Pour un vecteur $v_1 = (c_{11})$, on a

$$\det_e(v_1) = c_{11}.$$

$\boxed{\text{En dimension 2}}$ Soit K un corps et $e = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de K^2. Pour des vecteurs $v_1 = (c_{11}, c_{21}), v_2 = (c_{12}, c_{22})$ de K^2, on a

$$\det_e(v_1, v_2) = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}.$$

$\boxed{\text{En dimension 3}}$ Soit K un corps et $e = (e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de K^3. Pour des vecteurs $v_1 = (c_{11}, c_{21}, c_{31}), v_2 = (c_{12}, c_{22}, c_{32}), v_3 = (c_{13}, c_{23}, c_{33})$ de K^3, on a

$$\det_e(v_1, v_2, v_3) = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{21}c_{32}c_{13} + c_{31}c_{12}c_{23} - c_{11}c_{32}c_{23} - c_{31}c_{22}c_{13} - c_{21}c_{12}c_{33}.$$

Définition. *Soit $v_1, \dots, v_p$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel V. On appelle* **combinaison linéaire de** *$v_1, \dots, v_p$ tout élément de $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, c'est-à-dire tout vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$, où les λ_i sont des scalaires quelconques.*

Le théorème suivant résume les règles de calcul les plus importantes pour le déterminant d'une famille de vecteurs.

Théorème 2.13. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n, et e une base de V. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V.*
1. Si on ajoute à un vecteur v_i une combinaison linéaire des **autres** *vecteurs de la famille, le déterminant $\det_e(v_1, \dots, v_n)$ ne change pas.*
2. Si on multiplie un vecteur v_i par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.
3. Si on multiplie tous les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ^n.
4. Si un des vecteurs v_i est nul, le déterminant est nul.
5. Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe.

Preuve. 1. Supposons qu'on remplace v_i par $v_i + \sum_{j \in [[1,n]]-\{i\}} \lambda_j v_j$, où les λ_j sont des scalaires. Comme le detérminant est n-linéaire et alterné, on trouve

$$\begin{aligned} \det_e(v_1, \dots, v_i + \sum_{j \in [[1,n]]-\{i\}} \lambda_j v_j, \dots, v_n) &= \det_e(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \sum_{j \in [[1,n]]-\{i\}} \lambda_j \det_e(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) \\ &= \det_e(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \sum_{j \in [[1,n]]-\{i\}} \lambda_j \cdot 0 \\ &= \det_e(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n). \end{aligned}$$

2. découle directement de la n-linéarité du déterminant.
3. découle directement de 2.
4. découle directement de la n-linéarité du déterminant.
5. est vrai, car le caractère alterné du déterminant implique son caractère anti-symétrique. □

3 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème 2.14. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur K. Soit f un endomorphisme de V et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Alors le scalaire $\det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in K$ ne dépend pas de la base e.*

Preuve. Soient deux bases e, e' de V. Nous devons montrer que

$$\det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_{e'}(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)).$$

On note $\psi : V^n \to K : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det_e(f(v_1), \ldots, f(v_n))$. Comme f est linéaire, l'application ψ est une forme n-linéaire. Elle est évidemment alternée. On sait alors que

$$\psi = \psi(e) \cdot \det_e = \det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \cdot \det_e.$$

En évaluant cette égalité d'applications sur la base e', on trouve

$$\det_e(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)) = \det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \cdot \det_e(e').$$

Nous savons aussi que $\det_e = \det_e(e') \cdot \det_{e'}$. En particulier cela donne

$$\det_e(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)) = \det_e(e') \cdot \det_{e'}(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)).$$

Le résultat est maintenant immédiat puisque $\det_e(e') \neq 0$. □

Définition. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie n sur K. On appelle* **déterminant de** *f et on note* $\det f$ *le scalaire*

$$\det f = \det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)),$$

où $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de V.

Exemple. Si f est l'identité sur V, on a $\det f = 1$.

Le déterminant d'un endormorphisme a des propriétés agréables. En voici quelques-unes :

Théorème 2.15.
Soient f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie n sur K. On a
1. $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.
2. *Pour tout scalaire $\lambda \in K$, on a* $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.
3. *f est un automorphisme si et seulement si* $\det f \neq 0$.
4. *Si f est inversible, alors* $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$*, où le membre de droite est l'inverse multiplicatif du scalaire non nul* $\det f$.

Preuve. 1. Choisissons une base quelconque e de V. La preuve du théorème 2.14 nous montre en particulier que pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de V, on a l'égalité $\det_e(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det f \cdot \det_e(v_1, \ldots, v_n)$. Maintenant on écrit

$$\begin{aligned}
\det(f \circ g) &= \det_e((f \circ g)(e_1), \ldots, (f \circ g)(e_n)) \\
&= \det_e(f(g(e_1)), \ldots, f(g(e_n))) \\
&= (\det f)\det_e(g(e_1), \ldots, g(e_n)) \\
&= (\det f)(\det g)\det_e(e) \\
&= \det f \cdot \det g.
\end{aligned}$$

2. Choisissons une base quelconque e de V. Alors

$$\begin{aligned}
\det(\lambda f) &= \det_e(\lambda f(e_1), \ldots, \lambda f(e_n)) \\
&= \lambda^n \det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \\
&= \lambda^n \det f.
\end{aligned}$$

3. Choisissons une base quelconque e de V.

$$\begin{aligned} f \text{ est un automorphisme} &\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \text{ est une base de } V \\ &\Leftrightarrow \det_e(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det f \neq 0. \end{aligned}$$

4. On a $\det(f \circ f^{-1}) = 1$ et donc par la partie (1) : $\det f \cdot (\det f^{-1}) = 1$. Le résultat en découle. □

On en tire une jolie propriété de théorie des groupes.

Théorème 2.16. *L'application* $\mathrm{GL}(V) \to K - \{0\} : f \mapsto \det f$ *est un morphisme du groupe linéaire* $(\mathrm{GL}(V), \circ)$ *vers le groupe* $(K - \{0\}, \cdot)$.

Remarquons aussi la propriété suivante : Si f est un automorphisme de V (espace vectoriel de dimension finie), et g un endomorphisme quelconque de V, alors $\det(f^{-1} \circ g \circ f) = \det g$.

4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans K.* **Le déterminant de la matrice** *A, noté $\det A$, est le déterminant de la famille des n matrices-colonnes de la matrice A par rapport à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, notée «b.c.» :*

$$\det A = \det_{\text{b.c.}}(A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, \dots, A_{\cdot n}).$$

Ici $A_{\cdot j}$ est la matrice $n \times 1$ définie par $(A_{\cdot j})_{i1} = A_{ij}$. En d'autres termes,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n}.$$

Bien sûr, on a aussi $\det A = \det \mathscr{L}_{\text{b.c.}}^{\text{b.c.}}(A)$, où «b.c.» désigne la base canonique de K^n. De cette manière, nous avons relié le déterminant d'une matrice au déterminant d'une famille de vecteurs et au déterminant d'un endomorphisme. Observons également que pour $f : V \to V$ un endomorphisme en dimension finie, et e une base quelconque de V, on a $\det f = \det \mathscr{M}_e(f)$.

Théorème 2.16. *Soient A, B deux matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans K. On a :*
1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
2. *Pour tout scalaire $\lambda \in K$, on a* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
3. *A est une matrice inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.
4. *Si A est une matrice inversible, alors* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Preuve. C'est le théorème 2.14, exprimé dans le langage des matrices. □

Calculons le déterminant pour des matrices de petite taille ($n \in \{1, 2, 3\}$).

Si A est une matrice 1×1, A possède un seul coefficient A_{11}, et alors

$$\det A = \det [A_{11}] = A_{11}.$$

Si A est une matrice 2×2, on trouve

$$\det A = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}.$$

Si A est une matrice 3×3, on trouve

$$\det A = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{31}A_{12}A_{23} - A_{11}A_{32}A_{23} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{21}A_{12}A_{33}.$$

Le déterminant est invariant par transposition d'une matrice.

Théorème 2.17. *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans K. Alors*

$$\det {}^tA = \det A.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\det {}^tA &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) {}^tA_{\sigma(1)1} {}^tA_{\sigma(2)2} \cdots {}^tA_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma^{-1}) A_{1\sigma^{-1}(1)} A_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}
\end{aligned}$$

On arrive à la dernière ligne par le changement de variable $\sigma \to \sigma^{-1}$. Ensuite, comme $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$,

$$\begin{aligned}
\det {}^tA &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) A_{1\sigma^{-1}(1)} A_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots A_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(\sigma^{-1}(1))\sigma^{-1}(1)} A_{\sigma(\sigma^{-1}(2))\sigma^{-1}(2)} \cdots A_{\sigma(\sigma^{-1}(n))\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.18. *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans K.*
1a. Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des **autres** *colonnes de A, son déterminant ne change pas.*
1b. Si on ajoute à une ligne de A une combinaison linéaire des **autres** *lignes de A, son déterminant ne change pas.*
2a. Si on multiplie une colonne de A par un scalaire λ, son déterminant est multiplié par λ.
2b. Si on multiplie une ligne de A par un scalaire λ, son déterminant est multiplié par λ.
3a. Si on multiplie toutes les colonnes de A par un scalaire λ, son déterminant est multiplié par λ^n.
3b. Si on multiplie toutes les lignes de A par un scalaire λ, son déterminant est multiplié par λ^n.
4a. Si une colonne de la matrice A est nulle, son déterminant est nul.
4b. Si une ligne de la matrice A est nulle, son déterminant est nul.
5a. Si on échange deux colonnes de la matrice A, son déterminant change de signe.
5b. Si on échange deux lignes de la matrice A, son déterminant change de signe.

Preuve. Les affirmations 1a,2a,3a,4a,5a sont la traduction matricielle du théorème 2.13. Ensuite, les affimations 1b,2b,3b,4b,5b découlent de l'invariance du déterminant par transposition, puisque la transposition transforme les colonnes en lignes et vice-versa. □

5 Vocabulaire du chapitre

Un déterminant	les permutations circulaires
le groupe symétrique	une application n-linéaire
une permutation	une forme n-linéaire
la permutation identité	une forme n-linéaire alternée
le nombre d'inversions d'une permutation	une forme n-linéaire anti-symétrique
la signature d'une permutation	le déterminant d'une famille par rapport à une base
une transposition	une combinaison linéaire de vecteurs
une permutation paire	le déterminant d'un endomorphisme
une permutation impaire	le déterminant d'une matrice carrée

6 Exercices

1. Calculer le déterminant de la famille $((1,2),(2,1))$ par rapport à la base $e=((2,2),(3,0))$.

2. Écrire la permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(5)$ définie par

$$\sigma(1,2,3,4,5) = (3,1,2,5,4)$$

comme une composée de transpositions. En déduire sa signature.

3. L'ensemble de toutes les permutations paires de $\mathrm{Sym}(n)$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{Sym}(n)$?
L'ensemble de toutes les permutations impaires de $\mathrm{Sym}(n)$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{Sym}(n)$?

4. Que valent les déterminants des matrices suivantes ?

$$[5], \qquad \begin{bmatrix} 1+x & 2 \\ 2+x & x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chapitre 3. Quelques applications

1 Inverse d'une matrice inversible

Lemme 3.1. *Soit A une matrice $n \times n$ telle que*

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], A_{in} = 0.$$

On appelle A' la matrice obtenue en supprimant la n-ème ligne et la n-ème colonne de A. Alors

$$\det A = A_{nn} \cdot \det A'.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n} \\
&= A_{nn} \cdot \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n), \sigma(n)=n} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n-1)\, n-1}.
\end{aligned}$$

Or il y a une bijection évidente entre l'ensemble de toutes les permutations σ de $[\![1, n]\!]$ qui vérifient $\sigma(n) = n$ et l'ensemble les permutations ψ de $[\![1, n-1]\!]$. D'où

$$\begin{aligned}
\det A &= A_{nn} \cdot \sum_{\psi \in \mathrm{Sym}(n-1)} \epsilon(\psi) A_{\psi(1)1} \cdots A_{\psi(n-1)\, n-1} \\
&= A_{nn} \cdot \det A'.
\end{aligned}$$

□

Exemple.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot (2-3) = -5.$$

Corollaire 3.2.
Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure, ou diagonale), alors le déterminant de A est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det A = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn} = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Preuve. Il suffit évidemment (grâce à la propriété de transposition d'un déterminant) de montrer la propriété pour une matrice triangulaire inférieure. Par applications successives du lemme précédent, on trouve la formule annoncée. □

Corollaire 3.3. *Une matrice triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure, ou diagonale) est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

Définition. *Soit A une matrice carrée $n \times n$, et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.*
On appelle **mineur de** A_{ij} *le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On note Δ_{ij}^A le mineur de A_{ij}.*
On appelle **cofacteur de** A_{ij} *le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}^A$.*

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & 0 & d \\ 2 & e & f \end{pmatrix}$.

Le mineur de A_{22} est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & f \end{pmatrix}$. Donc $\Delta_{22}^A = af - 2$.

Le cofacteur de A_{12} est $(-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} c & d \\ 2 & f \end{pmatrix} = -(cf - 2d) = 2d - cf$.

Les cofacteurs donnent un moyen de calculer un déterminant par récurrence.

Théorème 3.4 («développement d'un déterminant suivant une colonne»).
Soit A une matrice carrée $n \times n$. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}^{A} A_{ij}.$$

Preuve. Fixons j. Appelons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les n matrices-colonne qui forment la matrice A. Alors en particulier $C_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} T_i$, où $(T_1, \ldots, T_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. On a par définition

$$\det A = \det\nolimits_{\text{b.c.}}(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Par n-linéarité du déterminant

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, T_i, C_{j+1}, \ldots C_n)$$

et par anti-symétrie (appliquée $n - j$ fois)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} (-1)^{n-j} \det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots C_n, T_i).$$

Appelons B_i la matrice $(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots C_n, T_i)$. Regardons maintenant la matrice D_i obtenue à partir de B_i en échangeant d'abord les lignes L_i et L_{i+1}, puis L_{i+1} et L_{i+2}, ... , et enfin L_{n-1} et L_n. On a clairement

$$\det B_i = (-1)^{n-i} \det D_i,$$

de sorte que

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} \det D_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (\det D_i) \cdot A_{ij}.$$

Mais la dernière colonne de D_i est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on peut appliquer le lemme 3.1 :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (\det \widetilde{D}_i) \cdot A_{ij},$$

où $\widetilde{D}_i$ est la matrice obtenue en supprimant la n-ème ligne et la n-ème colonne de D_i.
D'après les transformations que nous avons faites, on voit que

$$\widetilde{D}_i = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i-1,1} & \cdots & A_{i-1,j-1} & A_{i-1,j+1} & \cdots & A_{i-1,n} \\ A_{i+1,1} & \cdots & A_{i+1,j-1} & A_{i+1,j+1} & \cdots & A_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant $\det \widetilde{D}_i$ est le mineur Δ_{ij}^{A}. $\square$

Grâce à la propriété $\det A = \det {}^t A$, on a aussi un théorème semblable pour les lignes.

Corollaire 3.5 («développement d'un déterminant suivant une ligne»). *Soit A une matrice carrée $n \times n$. Alors, pour tout $i \in [[1, n]]$, on a*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}^{A} A_{ij}.$$

Pour prouver ce résultat, il suffit de se ramener - par la transposition - au théorème de développement d'un déterminant suivant une colonne.

Exemple. On retrouve la formule classique pour un déterminant 3×3 :
Si on développe, par exemple, suivant la première ligne, on trouve

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} x_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} x_{13} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} \\ &= x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31}) + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}) \\ &= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{31}x_{12}x_{23} + x_{21}x_{32}x_{13} - x_{11}x_{32}x_{23} - x_{31}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33}. \end{aligned}$$

Définition. *Soit A une matrice $n \times n$. On appelle* **comatrice de** *A, et on note* $\mathrm{Com}(A)$*, la matrice $n \times n$ dont le coefficient de i-ème ligne et j-ème colonne est le cofacteur de A_{ij}.*

Exemple. La comatrice d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de taille 2×2 est $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Lorsqu'une matrice est inversible, son inverse est liée à la comatrice. C'est l'objet de notre prochain théorème.

Théorème 3.6. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ quelconque. Alors*

$$A \cdot {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \cdot A = (\det A) \cdot I_n.$$

Preuve. Nous allons nous contenter de prouver l'égalité $A \cdot {}^t\mathrm{Com}(A) = (\det A) \cdot I_n$, l'autre égalité se prouve par une méthode semblable.
Quels que soient $(i, j) \in [[1, n]]$,

$$\begin{aligned} (A \cdot {}^t\mathrm{Com}(A))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \mathrm{Com}(A)_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}^{A}. \end{aligned}$$

Premier cas : $i = j$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}^{A} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{i+k} \Delta_{ik}^{A} = \det A = \det A \cdot I_{ii}$$

par le théorème de développement suivant une ligne.
Second cas : $i \neq j$. Dans ce cas, nous devons prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}^{A} = 0.$$

On appelle B la matrice obtenue en remplaçant la ligne numéro j de A par la ligne numéro i de A. Dans la matrice B, il y a alors deux lignes identiques (la ligne i et la ligne j). Il en découle que $\det B = 0$. Or, si nous développons le déterminant de B suivant la ligne j de B, on trouve

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} B_{jk} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}^{B} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}^{A},$$

puisque les matrices A et B sont égales partout sauf sur la ligne j. Nous avons pu établir que

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}^{A} = 0.$$

□

Grâce à cette égalité, nous avons une formule pour l'inverse d'une matrice inversible.

Théorème 3.7. *Soit $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ (A est une matrice inversible $n \times n$). Alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{Com}(A).$$

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible (c'est-à-dire $ad - bc \neq 0$), on a une formule pour l'inverse de la matrice A :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple. Montrons que la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible, puis calculons A^{-1} à l'aide de la comatrice. D'abord, on calcule que

$$\det A = 4 + 9 + 6 - 18 - 12 - 1 = -12 \neq 0.$$

La matrice est bien inversible. Ensuite

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

et enfin on trouve l'inverse de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

2 Rang d'une matrice

Nous connaissons déjà le rang d'une application linéaire ; c'est la dimension de l'image de cette application. Nous allons maintenant définir le rang d'une matrice (pas forcément carrée).

Définition. *Soient n, p deux entiers naturels et A une matrice $p \times n$ à coefficients dans un corps commutatif K. On appelle* **rang de** *A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de l'application linéaire $\mathscr{L}_{\mathrm{b.c.}}^{\mathrm{b.c.}}(A)$ de K^n vers K^p.*

Autrement dit, le rang de la matrice A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les n colonnes de A dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(K)$. Comme cet espace vectoriel engendré est un sous-espace de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$, on voit que $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. D'un autre côté, cet espace vectoriel possède une famille génératrice de n vecteurs, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$. Pour résumer,

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(p, n).$$

Théorème 3.8. *Soient V, W deux espaces vectoriels de dimensions finies n, p sur K. Soit $u : V \to W$ une application linéaire. Quelles que soient les bases e de V et f de W, on a*

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\mathscr{M}_f^e(u).$$

Preuve. Les bases e et f donnent des isomorphismes $\phi_e : K^n \to V$ et $\phi_f : K^p \to W$. Mais alors $(\phi_f)^{-1} \circ u \circ \phi_e : K^n \to K^p$ est une application linéaire, et la matrice associée à cette application linéare dans les bases canoniques de K^n et K^p est la matrice $\mathscr{M}_f^e(u)$. Il faut donc montrer que le rang de u est égal au rang de $(\phi_f)^{-1} \circ u \circ \phi_e$, ou encore que

$$\dim u(V) = \dim((\phi_f)^{-1} \circ u \circ \phi_e)(K^n).$$

Comme ϕ_e est une surjection, on a $\phi_e(K_n) = V$ et il reste à montrer

$$\dim u(V) = \dim(\phi_f)^{-1}(u(V)).$$

Or $(\phi_f)^{-1}$ est un isomorphisme de W vers K^p, et $u(V)$ est un sous-espace vectoriel de W. Donc $u(V)$, sous-espace de W, et $(\phi_f)^{-1}(u(V))$, sous-espace de K^p, sont isomorphes. En particulier, ils ont la même dimension. □

Exemple. Le rang de la matrice suivante (avec $K = \mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est égal à 2. En effet, les trois colonnes de cette matrice engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et la dimension de ce sous-espace est le rang de la matrice. La première colonne est égale à la deuxième colonne. Donc l'espace vectoriel est engendré seulement par la première et la troisième colonne. Comme ces deux colonnes-là sont non colinéaires, l'espace engendré est de dimension 2, ce qui signifie que la matrice proposée est de rang égal à 2.

Définition. *Soient A, B deux matrices dans $\mathcal{M}_{p,n}(K)$. On dit que A et B sont deux matrices* **équivalentes** *s'il existe $P \in GL(p, K)$ et $N \in GL(n, K)$ avec*

$$B = P \cdot A \cdot N.$$

Remarquons ceci : Si A et B sont équivalentes avec $B = PAN$, alors $A = P^{-1}BN^{-1}$.

Théorème 3.9. *Si deux matrices sont équivalentes, alors elles ont le même rang.*

Preuve. Il suffit d'utiliser le théorème 3.8 et la formule de changement de base pour les matrices associées à une application linéaire. □

Il est assez surprenant que la réciproque de ce théorème est vraie : si deux matrices $p \times n$ ont le même rang, alors elles sont équivalentes. Ce sera un corollaire de la proposition suivante :

Théorème 3.10. *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ une matrice. On suppose qu'elle est de rang r.*
Alors A est équivalente à la matrice $L_r \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par

$$(L_r)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. La matrice $L_3 \in \mathcal{M}_{4,5}(K)$ est

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Considérons l'application linéaire $u : K^n \to K^p$ avec $u = \mathscr{L}_{\text{b.c.}}^{\text{b.c.}}(A)$. Par hypothèse, le rang de u est égal à r. Pour montrer que la matrice A est équivalente à la matrice L_r, il suffit de montrer qu'il existe une base e de K^n et une base f de K^p telle que

$$\mathscr{M}_f^e(u) = L_r.$$

Construisons d'abord une base convenable e de K^n. Pour commencer, on choisit un sous-espace vectoriel S de K^n supplémentaire au noyau de u :

$$K^n = S \oplus \ker u.$$

On sait (grâce à la preuve du théorème du rang) qu'il existe un isomorphisme entre S et l'image de u. Donc S est de dimension r. On peut maintenant choisir une base e de K^n telle que les vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ forment une base de S, et les vecteurs $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ forment une base de $\ker u$.

On pose ensuite

$$f_1 = u(e_1), \qquad \cdots \qquad , f_r = u(e_r).$$

Comme la restriction $u : S \to \mathrm{Im}(u)$ est un isomorphisme, la famille

$$(f_1, \dots, f_r)$$

est une famille libre de K^p. On peut alors utiliser le théorème de la base incomplète, et trouver une base $f = (f_1, \dots, f_p)$ de K^p dont les r premiers vecteurs sont $(f_1, \dots, f_r)$.

Par construction des deux bases e, f, on a

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, r]\!], \qquad & u(e_i) = f_i. \\ \forall i \in [\![r+1, n]\!], \qquad & u(e_i) = 0. \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\mathscr{M}_f^e(u) = L_r.$$

□

Corollaire 3.11. *Si deux matrices $p \times n$ ont le même rang, alors elles sont équivalentes.*

Preuve. Soient A, B deux matrices $p \times n$ de même rang r. Par le théorème que nous venons de démontrer, A et B sont toutes deux équivalentes à la même matrice L_r. Donc il existe des matrices inversibles P, P', N, N' avec

$$A = PL_rN, \qquad B = P'L_rN'.$$

Il en découle

$$B = (P'P^{-1})A(N^{-1}N'),$$

ce qui montre que A et B sont équivalentes. □

Tout ceci peut être résumé par une équivalence logique :

Corollaire 3.12. *Deux matrices $p \times n$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Enfin, le rang d'une matrice est invariant par transposition.

Théorème 3.13. *Soit A une matrice $p \times n$. Alors le rang de A est égal au rang de ${}^tA$.*

Preuve. On appelle r le rang de A. On sait alors qu'il existe $P \in GL(p, K), N \in GL(n, K)$ avec

$$A = P \cdot L_r \cdot N.$$

Prenons la transposée des deux membres :

$${}^tA = {}^tN \cdot {}^tL_r \cdot {}^tP.$$

Or $\det {}^tN = \det N \neq 0$, donc ${}^tN \in GL(n, K)$. De même ${}^tP \in GL(p, K)$. Donc la matrice ${}^tA$ est équivalente à la matrice ${}^tL_r$, et cette dernière matrice est évidemment de rang r (regarder les colonnes de ${}^tL_r$). La transposée de A est alors aussi de rang r. □

Définition.
Soit A une matrice $p \times n$. Les trois **opérations élémentaires** *sur les* **colonnes** *de A sont :*
1. ajouter à une colonne un multiple d'une **autre** *colonne (on note $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$, avec $i \neq j$),*
2. multiplier une colonne par un scalaire **non nul** *(on note $C_i \leftarrow \alpha C_i$, avec $\alpha \neq 0$),*
3. échanger deux colonnes (on note $C_i \leftrightarrow C_j$).

On définit de la même façon les trois opérations élémentaires sur les **lignes** *de A.*

Théorème 3.14. *Les six opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice A conservent son rang.*

Preuve.
Montrons d'abord que les opérations sur les colonnes d'une matrice n'en changent pas le rang.
Soit A une matrice. Son rang est la dimension du sous-espace vectoriel de K^p engendré par les n colonnes de la matrice A. Pour comprendre que le rang ne change pas sous l'effet d'une opération élémentaire sur les colonnes, il suffit de comprendre que ce sous-espace vectoriel reste le même.

On appelle $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Montrons que

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$$

ne change pas si on effectue une opération sur les colonnes.

Première opération : $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ (avec i, j distincts).
Il est clair que

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i + \alpha C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n).$$

Deuxième opération : $C_i \leftarrow \alpha C_i$ (avec α non nul).
Il est clair que

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n)$$

Troisième opération : $C_i \leftrightarrow C_j$.
Il est clair que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \\ &= \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que le rang d'une matrice ne change pas si on fait des opérations élémentaires sur les colonnes.

Il reste à montrer que le rang est également invariant si on fait des opérations élémentaires sur les lignes. Soit A une matrice, et B la matrice obtenue en faisant une opération sur les lignes. Mais alors on peut dire que ${}^tB$ est la matrice obtenue de ${}^tA$ en faisant une opération sur les colonnes. Par la première partie de la preuve, on peut dire

$$\mathrm{rg}({}^tB) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

Or nous savons aussi que le rang est invariant par transposition. D'où

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A).$$

□

Faire une opération sur les **colonnes** de la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, c'est multiplier A à **droite** par une matrice inversible $n \times n$.
Faire une opération sur les **lignes** de la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, c'est multiplier A à **gauche** par une matrice inversible $p \times p$.
Un bon exercice consiste à trouver ces matrices inversibles pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes.

On peut montrer que pour toute matrice A de type $p \times n$, il existe une suite finie d'opérations élémentaires qui transforme A en la matrice L_r, où r est le rang de A. Au lieu de prouver ce résultat, nous allons seulement l'illustrer sur un exemple concret. La méthode utilisée pour transformer A en la matrice L_r s'appelle **la méthode du pivot de Gauss**.

Exemple. On considère la matrice 4×5 à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouvons le rang de A.

Pour commencer, utilisons des opérations sur les lignes de A pour créer une première colonne de zéros (sauf en A_{11}). On y arrive en faisant

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous créons des zéros sur la première ligne par des opérations de colonne :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \qquad C_4 \leftarrow C_4 + C_1.$$

La matrice devient
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Échangeons maintenant L_2 et L_3 pour poser un coefficient non nul sur la diagonale :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Si on fait $C_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}C_2$, le coefficient diagonal devient 1, et on peut ensuite créer des zéros sur la deuxième ligne. On trouve
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
On s'occupe maintenant de la troisième colonne. Faisons $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$. On obtient
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$
Divisons la 3ème colonne par -2, et créons des zéros sur la 3ème ligne. On arrive à
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$
Divisons enfin la 4ème colonne par 4, et terminons par $C_5 \leftarrow C_5 + 3C_4$. La matrice est transformée en
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
C'est la matrice L_4, de rang 4. Le rang de la matrice A vaut aussi 4, puisque les opérations élémentaires ne changent pas le rang.

Les opérations élémentaires peuvent aussi servir à trouver l'inverse d'une matrice inversible.

Théorème 3.15. *Soit $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ une matrice inversible. Alors on obtient son inverse A^{-1} comme ceci :*
On trouve une suite finie d'opérations élémentaires **uniquement sur les colonnes** *qui transforme A en la matrice identité I_n (on ne le prouvera pas, mais c'est toujours possible).*
Ensuite on effectue les mêmes opérations de colonne, dans le même ordre, en partant de la matrice I_n. Le résultat est A^{-1}.

Preuve. Chaque opération élémentaire sur les colonnes correspond à la multiplication à droite par une matrice. Si on appelle $P_1, \dots, P_k$ les matrices correspondant aux opérations dans l'ordre où elles sont appliquées, on a donc
$$A \cdot P_1 \cdot P_2 \cdots P_k = I_n.$$
Il en découle que
$$A^{-1} = P_1 \cdot P_2 \cdots P_k.$$
ou encore
$$A^{-1} = I_n \cdot P_1 \cdot P_2 \cdots P_k.$$
Pour avoir A^{-1}, il suffit d'appliquer ces opérations de colonne à la matrice I_n. $\square$

On a un théorème similiaire si on travaille uniquement avec des opérations de ligne.

Exemple. Calculons l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Nous ne savons pas encore que A est inversible, mais nous le découvrirons au cours de nos calculs. Essayons de ramener A à la matrice I_3 par des opérations de colonne uniquement.

En nous servant du coefficient 1 en A_{12}, on peut créer une première ligne de zéros avec

$$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2.$$

Ensuite on peut faire $C_1 \leftrightarrow C_2$ pour ramener le coefficient non nul sur la diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant faire $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$, puis $C_2 \leftarrow (-1)C_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Á l'aide du coefficient 1 en position $(2,2)$ on peut vider la deuxième ligne : $C_1 \leftarrow C_1 - 4C_2, C_3 \leftarrow C_3 + 4C_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Terminons par $C_3 \leftarrow -C_3, C_1 \leftarrow C_1 + C_3, C_2 \leftarrow C_2 - C_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice identité. C'est aussi la matrice L_3. Donc A est de rang 3, ce qui signifie évidemment qu'elle est inversible.

Pour trouver A^{-1}, il suffit d'écrire la matrice identité I_3 et d'effectuer, dans cet ordre, toutes les opérations que nous venons de faire pour transformer A en I_3. Ce sont

$$\begin{array}{rcl} C_3 & \leftarrow & C_3 - 2C_2 \\ C_1 & \leftrightarrow & C_2 \\ C_2 & \leftarrow & C_2 + C_3 \\ C_2 & \leftarrow & -C_2 \\ C_1 & \leftarrow & C_1 - 4C_2 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 + 4C_2 \\ C_3 & \leftarrow & -C_3 \\ C_1 & \leftarrow & C_1 + C_3 \\ C_2 & \leftarrow & C_2 - C_3. \end{array}$$

Si on fait cela, la matrice I_3 est transformée en la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & 4 \\ -13 & 8 & -6 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier, par exemple en calculant $A^{-1}A$, que c'est bien l'inverse de la matrice A.

3 Systèmes d'équations linéaires

Définition. *Un* **système linéaire à** p **équations et** n **inconnues sur** K *est un système d'équations de la forme*

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n &= B_1 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{p1}x_1 + \cdots + A_{pn}x_n &= B_p, \end{cases}$$

où les A_{ij} et les B_i sont des éléments donnés de K, et x_j des scalaires inconnus.

On note A la matrice $p \times n$ dont les coefficients sont les A_{ij}.
On note B la matrice-colonne à p lignes dont les coefficients sont les B_i.
On note x la matrice-colonne à n lignes dont les coefficients sont les x_j.

Bien entendu, on peut réécrire le système d'équations sous forme d'une seule équation matricielle :

$$A \cdot x = B.$$

Les matrices A et B sont connues, la matrice-colonne x est inconnue.

On considère un système linéaire quelconque $A \cdot x = B$.

Le système $A \cdot x = 0$ est appelé **système homogène associé** à $A \cdot x = B$. C'est le système dans lequel on a remplacé tous les B_i par des zéros.

On appelle **image de la matrice** A, noté $\mathrm{Im}(A)$, l'ensemble

$$\mathrm{Im}(A) = \{A \cdot x \,|\, x \in \mathcal{M}_{n,1}(K)\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$. Sa dimension est $\mathrm{rg}(A)$.

On appelle **noyau de la matrice** A, noté $\ker(A)$, l'ensemble

$$\ker(A) = \{x \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \,|\, A \cdot x = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. Sa dimension est $n - \mathrm{rg}(A)$ par le théorème du rang. Le noyau de A est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $A \cdot x = 0$.

Théorème 3.16.
Si $B \notin \mathrm{Im}(A)$, alors le système $A \cdot x = B$ n'a pas de solution.
Si $B \in \mathrm{Im}(A)$, alors l'ensemble des solutions de $A \cdot x = B$ est de la forme

$$\{x_p + h | h \in \ker(A)\},$$

où x_p est une solution particulière du système $A \cdot x = B$ (une telle solution existe car $B \in \mathrm{Im}(A)$).

La preuve de ce théorème est immédiate.

Définition. *On dit qu'un système d'équations $A \cdot x = B$ est un* **système de Cramer** *si la matrice A est carrée ($n = p$) et inversible.*

Les systèmes linéaires de Cramer sont les plus agréables, car ils ont toujours une seule solution, et on peut la calculer à l'aide de déterminants.

Théorème 3.17.
Soit $A \cdot x = B$ un système de Cramer. Alors ce système admet une seule solution $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
On a aussi $\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$, où A_j est la matrice $n \times n$ obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par la matrice-colonne B.

Preuve. La matrice A est par hypothèse inversible. On peut alors multiplier l'équation $A \cdot x = B$ à gauche par A^{-1}, et on trouve une équation matricielle équivalente :

$$x = A^{-1} \cdot B.$$

Ceci prouve déjà qu'il existe une solution unique, à savoir la matrice-colonne $A^{-1} \cdot B$.
Il nous faut encore montrer la formule pour les x_j. On a

$$\begin{aligned} x_j &= (A^{-1}B)_{j1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})_{ji} B_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\det A} \mathrm{Com}(A)_{ij} B_i \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}^{A} B_i}{\det A} \\ &= \frac{\det A_j}{\det A}. \end{aligned}$$

On obtient la dernière ligne en faisant le développement du déterminant de A_j par rapport à la j-ème colonne. □

On dit qu'un système de Cramer est **triangulaire** si c'est un système de Cramer et si la matrice A est triangulaire (supérieure ou inférieure).

Nous savons déjà qu'un système de Cramer est agréable (parce qu'il y a une solution unique, et il y a une formule pour trouver les inconnues). Les systèmes de Cramer triangulaires sont encore plus agréables, parce qu'ils sont très faciles à résoudre.

Exemple d'un système de Cramer triangulaire (inférieur).

$$\begin{cases} 2x_1 & & & & = 6 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & = 7 \\ x_1 & -x_2 & +5x_3 & & = 9 \\ -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = 0. \end{cases}$$

La matrice A est carrée et inversible (car le déterminant vaut $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \neq 0$), et la matrice A est également triangulaire inférieure. Pour résoudre le système, il suffit de commencer par l'équation la plus simple (c'est-à-dire la première), et de trouver les inconnues les unes après les autres.
Tout d'abord on trouve $x_1 = 3$. Le remplacement de cette valeur dans la deuxième équation fournit $x_2 = -1$. Ensuite la troisième équation donne $x_3 = 1$, et enfin $x_4 = 4$.
L'unique solution est donc $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Nous allons maintenant décrire une méthode générale de résolution des systèmes $A \cdot x = B$. Ici A est une matrice à p lignes et n colonnes, à coefficients dans le corps K. On note $r = \mathrm{rg}(A)$. On sait que la matrice A est équivalente à la matrice L_r, et on peut montrer qu'il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme A en L_r. Autrement dit, il existe des matrices inversibles $p \times p$, notées $\mathcal{O}_1^L, \ldots, \mathcal{O}_\mu^L$ et des matrices inversibles $n \times n$, notées $\mathcal{O}_1^C, \ldots, \mathcal{O}_\nu^C$ telles que

$$L_r = \mathcal{O}_\mu^L \cdots \mathcal{O}_1^L \cdot A \cdot \mathcal{O}_1^C \cdots \mathcal{O}_\nu^C.$$

Les matrices $\mathcal{O}^L$ correspondent aux opérations de ligne, alors que les matrices $\mathcal{O}^C$ correspondent aux opérations de colonne. On a l'équivalence

$$A \cdot x = B \iff L_r \cdot (\mathcal{O}_\nu^C)^{-1} \cdots (\mathcal{O}_1^C)^{-1} \cdot x = \mathcal{O}_\mu^L \cdots \mathcal{O}_1^L \cdot B.$$

On pose maintenant $y = (\mathcal{O}_\nu^C)^{-1} \cdots (\mathcal{O}_1^C)^{-1} \cdot x$ ou encore $x = \mathcal{O}_1^C \cdots \mathcal{O}_\nu^C \cdot y$. Le système devient maintenant (avec la nouvelle matrice inconnue y) :

$$L_r \cdot y = \mathcal{O}_\mu^L \cdots \mathcal{O}_1^L \cdot B =: B'.$$

Notons $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. L'équation matricielle $L_r \cdot y = B'$ devient alors le système très simple

$$\begin{cases} y_1 &= B'_1 \\ y_2 &= B'_2 \\ \vdots &= \vdots \\ y_r &= B'_r \\ 0 &= B'_{r+1} \\ \vdots &= \vdots \\ 0 &= B'_p. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Premier cas.}}$ Il existe $i \in [\![r+1, p]\!]$ tel que $B'_i \neq 0$. Alors le système $A \cdot x = B$ n'a aucune solution.

$\boxed{\text{Deuxième cas.}}$ Pour tout $i \in [\![r+1, p]\!]$, $B'_i = 0$. Alors les $p - r$ dernières équations sont automatiquement satisfaites, et on peut les supprimer. Les solutions y de $L_r \cdot y = B'$ sont données par

$$y = \begin{bmatrix} B'_1 \\ \vdots \\ B'_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

où $y_{r+1}, \dots, y_n$ sont des scalaires quelconques, appelée **paramètres libres**. Il y en a $n - r = n - \mathrm{rg}(A)$, ce qui est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Il faut encore revenir aux inconnues de départ, c'est-à-dire à la matrice x. On trouve

$$x = \mathcal{O}_1^C \cdots \mathcal{O}_\nu^C \cdot \begin{bmatrix} B'_1 \\ \vdots \\ B'_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ceci donne une méthode (ou un **algorithme**) de résolution d'un système d'équations linéaires :

1. On transforme la matrice A en la matrice L_r par des opérations élémentaires.
2. On fait les opérations de **ligne** de la partie (1.) sur la matrice-colonne B. On obtient B'.
3. Si les $p - r$ derniers coefficients de B' ne sont pas tous nuls, il n'y a aucune solution et l'algorithme s'arrête. Sinon, il continue :
4. On écrit la matrice-colonne y.
5. On regarde les opérations de **colonne** de la partie (1.) **dans l'ordre inverse**. On les transforme en opérations de ligne sur la matrice-colonne x, en suivant la procédure suivante :

$$\begin{array}{lcr} C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j & \text{devient} & L_j \leftarrow L_j + \alpha L_i \\ C_i \leftarrow \alpha C_i & \text{devient} & L_i \leftarrow \alpha L_i \\ C_i \leftrightarrow C_j & \text{devient} & L_i \leftrightarrow L_j. \end{array}$$

Exemple 1. Soit le système (sur $K = \mathbb{R}$) à 3 équations et 5 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & -2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. Les opérations suivantes transforment A en $J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_2 & \leftarrow & \frac{1}{2}L_2 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2 \\ L_3 & \leftarrow & \frac{2}{5}L_3 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 + \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - \frac{2}{5}C_1 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 + \frac{1}{5}C_2 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 + \frac{2}{5}C_3 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 - \frac{13}{5}C_1 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 + \frac{4}{5}C_2 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 - \frac{7}{5}C_3. \end{array}$$

2. Si on effectue les opérations de ligne sur la matrice B, on trouve $B' = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$.

3. Comme $p - r = 0$, l'algorithme continue.

4. On a $y = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$.

5. Enfin, on transforme les opérations de colonne (dans l'ordre inverse) en opérations de ligne sur y : Ce sont

$$\begin{array}{rcl} L_3 & \leftarrow & L_3 - \frac{7}{5}L_5 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + \frac{4}{5}L_5 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - \frac{13}{5}L_5 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + \frac{2}{5}L_4 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + \frac{1}{5}L_4 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - \frac{2}{5}L_4. \end{array}$$

On trouve $x = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{2}{5}y_4 - \frac{13}{5}y_5 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{5}y_4 + \frac{4}{5}y_5 \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5}y_4 - \frac{7}{5}y_5 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$. C'est l'ensemble de toutes les solutions. On voit que $\begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution particulière du système, et que les deux vecteurs $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13 \\ 4 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ engendrent l'espace vectoriel des solutions de $A \cdot x = 0$.

Exemple 2. Soit le système (sur $K = \mathbb{R}$) à 3 équations et 5 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 3 \end{array} \right.$$

Ici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Les opérations suivantes transforment A en $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 5L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_2 & \leftarrow & -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2 \\ C_2 & \leftarrow & C_2 - C_1 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 + 2C_1 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - C_1 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 + C_1 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 + 3C_2 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - C_2 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 + 5C_2. \end{array}$$

2. Si on effectue les opérations de ligne sur la matrice B, on trouve $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3. Comme $p - r = 1$, il faut regarder le dernier coefficient de B'. Il est non nul. L'algorithme s'arrête. Il n'y a aucune solution.

Exemple 3. Soit le système (sur $K = \mathbb{R}$) à 3 équations et 5 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = & 7 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 3 \end{array} \right.$$

Ici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Les opérations suivantes transforment A en $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 5L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_2 & \leftarrow & -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2 \\ C_2 & \leftarrow & C_2 - C_1 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 + 2C_1 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - C_1 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 + C_1 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 + 3C_2 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - C_2 \\ C_5 & \leftarrow & C_5 + 5C_2. \end{array}$$

2. Si on effectue les opérations de ligne sur la matrice B, on trouve $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Comme $p - r = 1$, il faut regarder le dernier coefficient de B'. Il est nul. L'algorithme continue. Il y a des solutions.

4. On a $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$.

5. Enfin, on transforme les opérations de colonne (dans l'ordre inverse) en opérations de ligne sur y : Ce sont

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 + 5L_5 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - L_4 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 + L_5 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - L_4 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 + 2L_3 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2. \end{array}$$

On trouve $x = \begin{bmatrix} 2 - y_3 - 4y_5 \\ -1 + 3y_3 - y_4 + 5y_5 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$. C'est l'ensemble de toutes les solutions. On voit que $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution particulière du système, et que les trois vecteurs $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ engendrent l'espace vectoriel des solutions de $A \cdot x = 0$.

Exemple 4.

Prenons le système à 2 équations et 4 inconnues sur $K = \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Ici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. La matrice A est transformée en $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ par les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_2 & \leftarrow & -\frac{1}{2}L_2 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 \\ C_2 & \leftarrow & C_2 - C_1 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - C_3 \\ C_2 & \leftrightarrow & C_3. \end{array}$$

2. Si on effectue les opérations de ligne sur la matrice B, on trouve $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Comme $p - r = 0$, l'algorithme continue. Il y a des solutions.

4. On a $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$.

5. Enfin, on transforme les opérations de colonne (dans l'ordre inverse) en opérations de ligne sur y : Ce sont

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftrightarrow & L_3 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_4 \\ L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2. \end{array}$$

On trouve $x = \begin{bmatrix} 1 - y_3 \\ y_3 \\ 1 - y_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$. C'est l'ensemble de toutes les solutions. On voit que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution particulière du système, et que les deux vecteurs $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ engendrent l'espace vectoriel des solutions de $A \cdot x = 0$.

4 Vocabulaire du chapitre

Un mineur	un système d'équations linéaires
un cofacteur	le système homogène associé à un système
le développement d'un déterminant	l'image d'une matrice
la comatrice d'une matrice	le noyau d'une matrice
le rang d'une application linéaire	un système de Cramer
le rang d'une matrice	un système de Cramer triangulaire
des matrices équivalentes	un algorithme
les opérations élémentaires sur une matrice	des paramètres libres

5 Exercices

1. Trouver l'inverse de la matrice ci-dessous :
a) par la méthode de la comatrice
b) par la méthode des opérations de colonne
c) par la méthode des opérations de ligne
d) en résolvant le système linéaire $Ax = y$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Soit A une matrice inversible. Montrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$ est proportionnelle à la matrice A.

3. Trouver le rang des matrices suivantes :

$$[2], \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

4. Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x + 5y + 6z & = & 1 \\ 3y + 5z + 6x & = & 2 \\ 3z + 5y + 6x & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a + b + c + d & = & 1 \\ a - b + d & = & 1 \\ 3a + 2b + c & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i - 2j + 2k + 3l & = & 4 \\ -i + 3j + 2k + l & = & 5 \\ 2i + 3j - 3k + 2l & = & 0 \\ 3i + j - k + 5l & = & 4. \end{array} \right.$$

Travaux dirigés d'algèbre 2

Marc Pauly

Algèbre 2

Travaux dirigés n°1

Thème : Matrices

Exercice 1.
On considère l'espace vectorial $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant n$ et $e = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique associée. Soit u l'endomorphisme de cet espace vectoriel défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)},$$

où $P^{(i)}$ correspond à la dérivée i-ème de P, par convention $P^{(0)} = P$. Déterminer la matrice $\mathscr{M}_e^e(u)$.

Exercice 2.
Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire, e une base de V et f une base de W. On suppose que V, W sont des espaces vectoriels sur K de dimension finies respectives n, p. On note A la matrice associée à α dans les bases e et f. On fixe $i \in [[1, p]]$ et on note $\varphi_i : V \to K$ l'application qui envoie un vecteur quelconque $x \in V$ sur la i-ème coordonnée de $\alpha(x)$ dans la base f.
a) Montrer que φ_i est une forme linéaire sur V.
b) Quelle est la matrice associée à cette forme linéaire dans les bases e et (1) de V et K ?

Exercice 3.
Soit $\beta : V \to V$ un endomorphisme, et V' un sous-espace vectoriel de V. On suppose V de dimension finie sur le corps commutatif K. Si $\beta(V') \subset V'$, montrer qu'il existe une base e de V telle que

$$\forall j \in [[1, \dim V']], \forall i \in [[\dim V' + 1, \dim V]], \quad (\mathscr{M}_e^e(\beta))_{ij} = 0.$$

Exercice 4.
On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels et de degré au plus d.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P - R$ est divisible par le polynôme $X^4 - 3$.

2. Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_3[X]$ qui associe à chaque polynôme P le polynôme R de la partie (1.).
a) Montrer que u est linéaire.
b) Soit e la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et f la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Écrire la matrice de u par rapport aux bases e et f.

Algèbre 2

Travaux dirigés n°2

Thème : Matrices

Exercice 1.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K et $p : V \to V$ un endomorphisme tel que $p \circ p = p$. Montrer qu'il existe une base e de V et un entier $r \in [[0, \dim V]]$ avec

$$\mathscr{M}_e^e(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & & 0 \end{bmatrix},$$

où le nombre de coefficients 1 est égal à r.
Indication : Montrer que $V = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

Exercice 2.
Soit n un entier naturel fixé et K un corps commutatif. On définit la matrice carrée J

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

Autrement dit, $J_{i,i+1} = 1$ pour tout $i \in [[1, n-1]]$, et tous les autres coefficients sont nuls.
1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la matrice J^k.

Soit $a \in K$. On définit la matrice carrée A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la matrice A^k.
Indication : Utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 3.
Soient p, q, r trois entiers naturels. Soient quatre entiers i, j, k, l avec

$$1 \leqslant i \leqslant p, \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant q, \qquad 1 \leqslant l \leqslant r.$$

On note E_{ij} la matrice élémentaire $p \times q$ ayant son seul coefficient 1 en position (i, j).
On note E_{kl} la matrice élémentaire $q \times r$ ayant son seul coefficient 1 en position (k, l).
Exprimer la matrice $E_{ij} \cdot E_{kl}$ en fonction de matrices élémentaires, et interpréter la formule du produit matriciel de deux matrices générales.

Algèbre 2

Travaux dirigés n°3

Thème : Matrices

Exercice 1.
On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donner une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 2.
Trouver la matrice de passage de la base e de $\mathbb{R}^3$ à la base e', où

$$e = ((2,3,3),(3,7,1),(1,2,1)), \quad e' = ((5,3,2),(3,1,4),(1,-1,7)).$$

Exercice 3.
On considère l'endomorphisme suivant : $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x+y, 2x-y)$. Écrire la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On considère la base $e' = ((3,2),(5,3))$. Écrire la matrice $\mathscr{M}_{e'}^{e'}(u)$.
Écrire la matrice de passage $\mathscr{P}_{\mathrm{can}\to e'}$, puis calculer son inverse. Trouver la matrice $\mathscr{M}_{e'}^{e'}(u)$ par un nouveau calcul.

Exercice 4.
Montrer : Une matrice carrée A de taille $n \times n$ à coefficients dans K est non inversible si et seulement s'il existe une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ non nulle avec $A \cdot X = 0$.
En déduire : Si A une matrice réelle carrée telle que

$$\forall i \in [[1,n]], \sum_{j\in[[1,n]], j\neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}|,$$

alors A est une matrice inversible.

Algèbre 2

Travaux dirigés n°4

Thème : Groupe symétrique et déterminants

Exercice 1.
Soit $n \geqslant 3$ un entier. Une permutation c de $[[1, n]]$ est appelé 3-cycle si l'ensemble $\{x \in [[1, n]] | c(x) \neq x\}$ possède exactement 3 éléments. Si $A \subset [[1, n]]$ est fixé, avec A de cardinal égal à 3, combien y a-t-il de 3-cycles c avec $A = \{x \in [[1, n]] | c(x) \neq x\}$? Quelle est la signature d'un 3-cycle ?

Soit σ une permutation paire de $[[1, n]]$. Montrer que σ est une composée d'un nombre fini de 3-cycles.

Exercice 2.
Soit n un entier, et $\varphi : (\mathrm{Sym}(n), \circ) \to (\{1, -1\}, \cdot)$ un morphisme de groupes. On suppose qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ avec $\varphi(\sigma) \neq 1$. Prouver que φ est le morphisme «signature».
Indication : Montrer d'abord qu'il suffit que toutes les transpositions τ de $[[1, n]]$ vérifient $\varphi(\tau) = -1$ pour que φ soit le morphisme «signature».

Exercice 3.
Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère la famille de n vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad v_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

On veut calculer $\det_e(v_1, \ldots, v_n)$ grâce à l'expression $\sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \cdots$. Combien de multiplications faut-il faire ? Combien d'additions faut-il faire (une soustraction est considérée comme une addition) ?

Exercice 4.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit u l'endomorphisme de cet espace vectoriel défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad u(P) = P + P'.$$

Calculer le déterminant de u.

Algèbre 2

Travaux dirigés n°5

Thème : Déterminants

Exercice 1.
Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée 2×2 à coefficients réels. On appelle (P) la propriété :

$$(P) \qquad \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \middle| \, m, n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ A \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \middle| \, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Montrer que la propriété (P) est équivalente à :

$$(a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \det A = \pm 1).$$

2. Montrer que l'ensemble des matrices A vérifiant la propriété (P) est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \cdot)$.

Exercice 2.
Soit K un corps commutatif quelconque, et x, y, z trois éléments quelconques de K. Calculer les déterminants des six matrices ci-dessous sous forme **factorisée** :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+y & y+z & z+x \\ xy & yz & zx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2x & x-(y+z) \\ 2y & y-(z+x) & 2y \\ z-(x+y) & 2z & 2z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & z & z & y \\ z & x & y & z \\ z & y & x & z \\ y & z & z & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (y+z)^2 & y^2 & z^2 \\ x^2 & (z+x)^2 & z^2 \\ x^2 & y^2 & (x+y)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^2 & 0 & z^2 \\ 1 & y^2 & z^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Algèbre 2

Travaux dirigés n°6

Thème : Déterminants

Soit K un corps commutatif, n un entier $\geqslant 1$, et $x_1, \dots x_n$ des éléments quelconques de K.

On définit le **déterminant de Vandermonde de** $(x_1, \cdots, x_n)$ de la façon suivante :

$$V(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nous allons démontrer la formule

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

1. Démontrer que la formule est vraie s'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$.

Nous pouvons dorénavant supposer que **les scalaires** $x_1, \cdots, x_{n-1}$ **sont deux à deux distincts**. On définit la fonction

$$f : K \to K : X \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X)$$

2. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.

3. Quel est le coefficient du terme X^{n-1} de la fonction polynomiale f ?

4. Montrer que la fonction polynomiale f possède au moins $n-1$ racines distinctes.

5. En déduire une formule pour la fonction polynomiale f.

6. Achever la preuve en raisonnant par récurrence sur n.

7. Application : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels.
On veut calculer le déterminant de la matrice réelle $n \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos 2a_1 & \cdots & \cos(n-1)a_1 \\ 1 & \cos a_2 & \cos 2a_2 & \cdots & \cos(n-1)a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos a_n & \cos 2a_n & \cdots & \cos(n-1)a_n \end{pmatrix}.$$

7.a. Démontrer les formules générales de linéarisation du cosinus :

$$\begin{aligned} \cos^{2n} x &= \frac{1}{4^n} \left[\binom{2n}{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{n-1-k} \cos(2(k+1)x) \right] \\ \cos^{2n+1} x &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} \cos((2k+1)x) \end{aligned}$$

7.b. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\cos^p x = \frac{1}{2^{p-1}} \cos(px) + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \cos(kx), \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}.$$

7.c. Écrire le déterminant de C sous la forme d'un déterminant de Vandermonde, puis le calculer.

Algèbre 2

Travaux dirigés n°7

Thème : Quelques applications

Exercice 1.
Soit A une matrice carrée inversible $n \times n$ à coefficients dans un corps commutatif K. Montrer qu'il existe une suite finie d'opérations élémentaires **sur les colonnes** de A qui transforme A en une matrice triangulaire supérieure. En déduire qu'il est possible de transformer A en la matrice identité I_n en faisant uniquement des opérations de colonne.

Exercice 2.
Quel est le rang de la matrice 4×5 ci-dessous (le corps est $K = \mathbb{Q}$) ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 4 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -6 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Soit A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans un corps commutatif K.

Montrer : si le rang de A est inférieur ou égal à $n-2$, alors la comatrice de A est nulle.

Montrer ensuite que la réciproque est vraie.

Exercice 4.
Résoudre le système d'équations suivant (les inconnues sont des nombres réels)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ tx_1 & + & 3x_2 & - & t^2x_3 & + & (t+3)x_4 & = & t \\ -x_1 & + & x_2 & + & tx_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

(Le nombre t est un réel donné ; l'ensemble des solutions dépendra donc de t)

Algèbre 2

Travaux dirigés n°8

Thème : Quelques applications

Exercice 1.
Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des nombres complexes quelconques. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Trouver son déterminant.
Indication : Considérer la matrice carrée $n \times n$ M definie par $M_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$, où $\omega = \exp(2\pi i/n)$ et calculer le produit matriciel $A \cdot M$. Prouver et utiliser le fait que M est inversible.

Exercice 2.
Soient a, b deux nombres complexes. Résoudre le système d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{cases}$$

Exercice 3.
Soit A une matrice $p \times n$ et B une matrice $n \times p$ avec $p > n$. Calculer le déterminant de AB.

Exercice 4.
Soient A et B des matrices réelles de taille 3×2 respectivement 2×3.
On suppose que $AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Montrer que $BA = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.