

基金项目论文

# 基于稳态逼近算法的光学双稳态现象研究

李 敏<sup>1</sup>, 杨 俭<sup>2</sup>, 袁健华<sup>1</sup>

(1.北京邮电大学 理学院, 北京 100876; 2.北京市十一学校, 北京 100039)

**摘 要:** 光子晶体的双稳态现象是光子晶体制作光限幅器和光开关的理论基础, 研究具有低阈值的双稳态系统对大规模集成光路具有非常重要的意义。本文采用有限元方法和稳态算法对含有缺陷的一维光子晶体结构中的双稳态效应现象进行了理论推导和数值分析。在频域上, 一维双稳态效应问题可化为非线性亥姆霍兹方程的两点边值问题。本文基于非线性亥姆霍兹方程建立了有限元数学模型, 构造了基于有限元方法和稳态迭代算法的数值求解算法。研究算例结果表明该数值算法能有效地模拟含有缺陷的一维光子晶体结构中双稳态效应现象, 并能推广到高维问题的研究。本文还利用该模型算法进一步研究了结构参数对双稳态效应的影响, 当选择非线性强度大的材料, 或者增强入射场强度, 或增加中间层厚度时可以降低双稳态效应发生的阈值。

**关键词:** 光子晶体; 双稳态效应; 非线性; 有限元; 迭代法

**中图分类号:** O29 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1003-6970.2017.08.001

**本文著录格式:** 李敏, 杨俭, 袁健华. 基于稳态逼近算法的光学双稳态现象研究[J]. 软件, 2017, 38(8): 01-05

## Numerical Research on Optical Bistability in One-dimensional Nonlinear Photonic Crystals

LI Min<sup>1</sup>, YANG Jian<sup>2</sup>, YUAN Jian-hua<sup>1</sup>

(1. Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China; 2. Beijing national day school, Beijing 100039, China)

**【Abstract】:** In this paper, we discuss a numerical method, which combines the finite element method (FEM) with a special iterative scheme, to study the nonlinear optical response of one-dimensional (1D) finite grating structures. In the frequency domain, the problem of optical bistability in one-dimensional nonlinear photonic crystals can be expressed as a two-point boundary value problem (BVP) of the nonlinear Helmholtz equation, which can be solved by combining the linear finite element method with a special iterative method. Results of numerical experiments show that the numerical results agree well with the theory one and our numerical scheme is an efficient algorithm.

**【Key words】:** Photonic crystals; Optical bistability; Nonlinear; Finite element method; Iterative method

## 0 引言

上世纪 80 年代, E.Yablonovitch 率先提出了光子晶体(Photonic Crystal)的概念。光子晶体是指具有光子带隙(Photonic Band-Gap, 简称为 PBG)特性的人造周期性电介质结构, 有时也称为 PBG 光子晶体结构<sup>[1]</sup>。光子晶体有着广泛的应用, 利用其特性可制作光子晶体激光器、全向反射镜、光子晶体波导和光纤、滤波器、发光二极管、光开关、光限制器、光子晶体激光器等<sup>[2]</sup>。当光子晶体中的周期结构破坏时, 我们称其是带有缺陷的。带缺陷的非线性光子晶体会产生缺陷模和双稳态现

象<sup>[3]</sup>。双稳态现象的物理解释是当入射波进入非线性光子晶体缺陷时, 缺陷区域介质的折射率受到影响进一步影响到透射率。当入射波频率增大到某一数值时, 透射率会迅速增大, 跳跃到另一个值, 之后又达到稳定状态。另一方面, 当入射频率减小到另一数值时, 透射率又会迅速下降, 之后又达到稳定状态。但是两个跳跃点的阈值不同, 即对一给定频率处在两阈值点之间的电磁波, 它的透射率存在两个输出值, 该现象称为双稳态效应<sup>[4]</sup>。光学双稳态效应在工程上最重要的一个应用是光学双稳开关。光学双稳开关是一种具有反馈效应的非线性光学器件, 它的输入—输出特性不是单值的, 而是一个

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(11671052, 11471052); 国家自然科学基金重大研究计划(91630202)

**作者简介:** 李敏(1992-), 女, 研究生, 研究方向: 计算数学; 杨俭, 男, 博士, 研究方向: 物理电子学; 袁健华, 教授, 研究方向: 有限元、最优化及其工程应用。

回线, 抗干扰能力强<sup>[5]</sup>。因此在电子技术中, 双稳态电子开关被广泛的应用。

在频域中, 双稳态问题的求解可以表示为非线性亥姆霍兹方程的两点边界值问题 (BVP), 解决此类问题的数值模拟方法有很多<sup>[6]</sup>。有限元法作为一种传统方式, 能够在高精度下解决大型的复杂问题<sup>[7-8]</sup>, 而且容易推广至高维。所以本文采用有限元法与 Zhengfu Xu 和 Gang Bao 在文[9]中提出的一种稳态逼近的算法结合并对模型进行求解。最后本文通过简单算例研究了一些参数对双稳态现象的影响, 并对结果进行了理论分析。

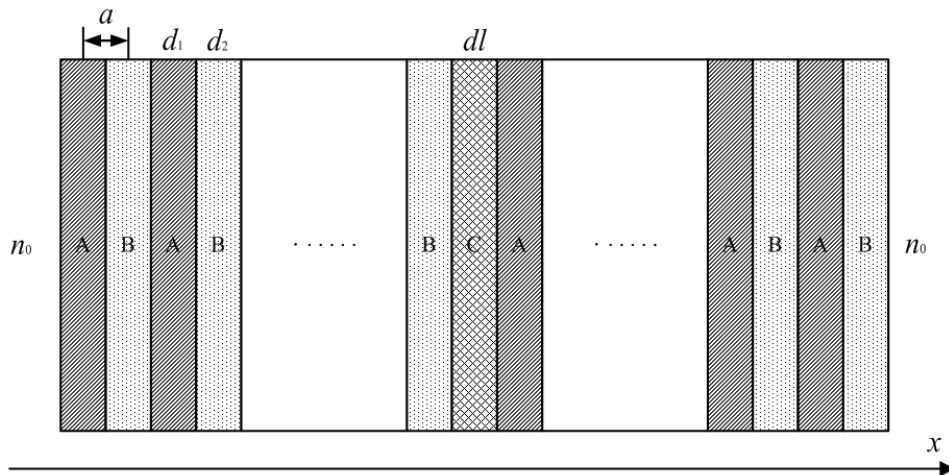


图1 带缺陷的一维光子晶体结构图

Fig. 1 Anone-dimensional photonic crystals with defects

麦克斯韦方程组可以刻画宏观电磁现象本质规律。对于通常的时谐变场, 微分形式的麦克斯韦方程组一般包含以下四个一阶偏微分方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

上式中, 方程组左边的物理量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$  及  $\mathbf{B}$  分别用以描述电磁场的性质, 其中:  $\mathbf{E} = \vec{E}(x, t)$  为电场强度 ( $V \cdot m^{-1}$ , 伏特/米),  $\mathbf{D} = \vec{D}(x, t)$  为电位移 ( $C \cdot m^{-2}$ , 库仑/平方米),  $\mathbf{H} = \vec{H}(x, t)$  为磁场强度 ( $A \cdot m^{-1}$ , 安培/米),  $\mathbf{B} = \vec{B}(x, t)$  为磁通量密度 ( $Wb \cdot m^{-2}$ , 韦伯/平方米)。方程组的右边为激励

## 1 光学双稳性理论推导

### 1.1 一维模型问题

我们讨论如图 1 所示的带有缺陷的非线性光子晶体。结构模型为  $(AB)^N C (BA)^N$ ,  $C$  为缺陷层, 层数  $m = 2N + 1$ 。A、B、C 材料的厚度分别为  $d_1$ 、 $d_2$  和  $dl$ 。显然  $d_1 + d_2 = a$ 。将该结构放置于折射率为  $n_0$  的背景材料中, 假定周期按  $x$  轴方向排列且长度为  $L$ , 则当  $x < 0$  和  $x > L$  时, 折射率为  $n_0$ 。

电场的源项, 其中:  $\mathbf{J} = \vec{J}(x, t)$  为电流密度 ( $A \cdot m^{-2}$ , 安培/平方米),  $\rho$  为电荷密度 ( $C \cdot m^{-3}$ , 库仑/立方米)。介质的本构关系反映了该类介质的宏观性质, 通常由实验确定或者由介质的微观结构推导得出。通常情况下, 本构关系可以写成下面形式:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (2)$$

这里的本构参数  $\varepsilon$ ,  $\mu$  和  $\sigma$  描述的分别是介质的介电常数, 磁导率以及电导率。

在如图 1 所示的结构中, 假定在无源空间中 ( $\mathbf{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ ), 介质是无色散无损耗的, 则电场和磁场具有以下形式:

$$\mathbf{E}(x, t) = (0, E_y(x, t), 0) \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(x, t) = (H_x(x, t), 0, 0) \quad (4)$$

在时谐场的情况下  $E_y$  可以表示如下形式：

$$E_y(x, t) = E(x)e^{i\omega t} \quad (5)$$

假定媒质是各向同性，介质的极化强度  $\mathbf{P}$  与电场  $\mathbf{E}$  平行，即：

$$\mathbf{P}(x, t) = (0, \mathbf{P}_y(x, t), 0) \quad (6)$$

如果考虑材料的非线性效应，以单一频率  $\omega$  入射的波不会导致克尔(Kerr)介质中高阶谐波的产生，则介质的极化强度可以表示成如下形式：

$$\mathbf{P}_y(x, t) = \varepsilon_0 \left\{ \chi^{(1)}(x) E_y(x, t) + \chi^{(3)}(x) |E_y(x, t)|^2 E_y(x, t) \right\} \quad (7)$$

在这里  $n$  是折射率， $\chi^{(3)}(x)$  是三阶非线性极化率，他们的关系为  $n^2(x) = 1 + \chi^{(1)}(x)E_y(x, t)$ 。由 (3) - (7)，利用方程组 (1) 可得 Kerr 介质中关于电场的如下非线性方程：

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k^2 [n^2(x) + \chi^{(3)}(x) |E|^2] E = 0 \quad (8)$$

其中  $k = \frac{\omega}{c}$ ， $k_0$  是自由空间的波数  $k_0 = \frac{\omega_0}{cn_0}$ ， $c$  是真空中光速。由于电场强度和磁场强度是在界面处 ( $x = 0, x = L$ ) 是连续可导的，易推出如下边界条件：

$$\frac{dE}{dx}(0) = 2ik_0 E_I - ik_0 E(0) \quad (9)$$

$$\frac{dE}{dx}(L) = ik_0 E(L) \quad (10)$$

则我们要研究的一维光子晶体非线性效应问题中电场强度满足下面的边界值问题 (11)：

$$\begin{cases} \frac{d^2 E}{dx^2} + k^2 [n^2(x) + \chi^{(3)}(x) |E|^2] E = 0 \\ \frac{dE}{dx}(0) = 2ik_0 E_I - ik_0 E(0) \\ \frac{dE}{dx}(L) = ik_0 E(L) \end{cases} \quad (11)$$

## 1.2 模型求解方法

基于 Zhengfu Xu 教授和 Gang Bao 教授在文[9]中提出的稳态逼近算法，问题 (11) 的求解等同与求解薛定谔方程(12)在边界条件(13)和(14) 下的解，其中方程是<sup>[9]</sup>：

$$i \frac{dE}{dt} = -\frac{d^2 E}{dx^2} - k^2 [n^2(x) + \chi^{(3)}(x) |E|^2] E \quad (12)$$

边界条件是：

$$\frac{dE}{dx}(0) = 2ik_0 E_I - ik_0 E(0) \quad (13)$$

$$\frac{dE}{dx}(L) = ik_0 E(L) \quad (14)$$

下面我们采用有限元法结合该稳态迭代法求解这一问题。具体过程如下：

第一步：给定迭代误差限  $\varepsilon$ ，令  $m=0$ ，用有限元法求解  $E_0^*(x)$ ，其中  $E_0^*(x)$  满足方程：

$$\frac{d^2 [E_0^*(x)]}{dx^2} + k^2 n^2(x) E_0^*(x) = 0, 0 < x < L \quad (15)$$

以及边界条件：

$$\frac{dE_0^*}{dx}(0) = 2ik_0 E_I - ik_0 E_0^*(0) \text{ 和 } \frac{dE_0^*}{dx}(L) = ik_0 E_0^*(L)$$

第二步：同样用有限元法求解  $\tilde{E}_m(x, \Delta t)$ ，其中  $\tilde{E}_m(x, \Delta t)$  满足方程：

$$i \frac{d\tilde{E}_m}{dt} = -\frac{d^2 \tilde{E}_m}{dx^2} - k^2 n^2(x) \tilde{E}_m, 0 < t < \Delta t, 0 < x < L \quad (16)$$

以及边界条件：

$$\begin{cases} \tilde{E}_m(x, 0) = E_0^*(x), 0 < x < L \\ \frac{d\tilde{E}_m}{dx}(0, t) = 2ik_0 E_I - ik_0 \tilde{E}_m(0, t), 0 < t < \Delta t \\ \frac{d\tilde{E}_m}{dx}(L, t) = ik_0 \tilde{E}_m(L, t), 0 < t < \Delta t \end{cases} \quad (17)$$

第三步：将第二步得到的  $\tilde{E}_m(x, \Delta t)$  作为初始值即  $\tilde{E}_m(x, \Delta t) = E_m(x, \Delta t)$ ，求解下列非线性方程得  $E_m(x, 0)$ ：

$$i \frac{dE_m}{dt} = -k^2 \chi^{(3)}(x) |E_m|^2 E_m, 0 < t < \Delta t, 0 < x < L \quad (18)$$

第四步：令  $E_1^*(x) = E_m(x, 0)$

第五步：如果  $\|E_1^*(x) - E_0^*(x)\| / \|E_1^*(x)\| < \varepsilon$  进行第六步，否则令  $E_0^*(x) = E_1^*(x)$  和  $m = m + 1$  转到第二步；

第六步：令  $E = E_1^*(x)$ ，输出  $E$  停止程序。

下面我们以第二步求解为例说明有限元求解步骤。对于方程：

$$i \frac{d\tilde{E}_m}{dt} = -\frac{d^2 \tilde{E}_m}{dx^2} - k^2 n^2(x) \tilde{E}_m, 0 < t < \Delta t, 0 < x < L \quad (19)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时有  $\frac{d\tilde{E}_m(x, t)}{dt} \approx \frac{\tilde{E}_m(x, \Delta t) - \tilde{E}_m(x, 0)}{\Delta t}$  和  $\tilde{E}_m(x, t) \approx \tilde{E}_m(x, \Delta t)$ ，则方程 (19) 可化为如下形式：

$$i \frac{\tilde{E}_m(x, 0) - \tilde{E}_m(x, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \tilde{E}_m(x, \Delta t)}{dx^2} + k^2 n^2(x) \tilde{E}_m(x, \Delta t) + i \frac{\tilde{E}_m(x, \Delta t)}{\Delta t} \quad (20)$$

然后引入试探函数  $\bar{v} \in H^1(\Gamma)$ ，对方程(20)两边同乘试探函数并在  $\Omega = (0, L)$  中积分得：

$$\int_{\Omega} i \frac{\tilde{E}_m(x, 0) - \tilde{E}_m(x, \Delta t)}{\Delta t} \bar{v} dx = \int_{\Omega} \left[ \frac{d^2 \tilde{E}_m(x, \Delta t)}{dx^2} + k^2 n^2(x) \tilde{E}_m(x, \Delta t) \right] \bar{v} dx \quad (21)$$

$$+k^2 n^2(x) \tilde{E}_m(x, \Delta t) + i \frac{\tilde{E}_m(x, \Delta t)}{\Delta t} \bar{v} dx$$

化简得:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{i \bar{v}}{\Delta t} (\tilde{E}_m(x, \Delta t) + \tilde{E}_m(x, 0)) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{d \tilde{E}_m(x, \Delta t)}{dx} \frac{d \bar{v}(x)}{dx} - k^2 n^2(x) \tilde{E}_m(x, \Delta t) \bar{v}(x) \right) dx \quad (22) \\ & - \bar{v}(L) \frac{d \tilde{E}_m}{dx}(L, \Delta t) + \bar{v}(0) \frac{d \tilde{E}_m}{dx}(0, \Delta t) \end{aligned}$$

然后我们采用线性有限元离散可以求解得到  $\tilde{E}_m(x, \Delta t)$ 。

## 2 双稳态效应数值模拟的实现

### 2.1 算例分析

一般地, 结构中引入克尔非线性将改变缺陷区域介质的折射率进一步影响透射率, 当非线性足够强时将产生双稳态现象。在如图 1 所示的结构中, 我们取结构模型为  $(AB)^{10} B(BA)^{10}$ 。参考波长  $\lambda_0 = 1.00 \mu m$ , 也就是中间层 C 就取了介质 B。其中, 材料 A 的折射率  $n_1 = 1.25$ , 材料 B 的折射率为  $n_2 = 2.25$ 。介电常数  $\varepsilon = n^2$ 。材料 A 三阶非线性极化率  $\chi_1^{(3)} = 0$ , 材料 B 三阶非线性极化率  $\chi_2^{(3)} = 0.052$ 。材料 A 和材料 B 的厚度都是  $\lambda_0 / 4$  (即缺陷层和非缺陷层厚度都是  $\lambda_0 / 4$ )。  $E_i = 1.0$ 。记  $\gamma = \chi^{(3)} E_i$  则有  $\gamma_1 = 0$  和  $\gamma_2 = 0.052$ 。图 3 给出了该数值模拟的结果。该图显示了透射率随入射频率的变化。当入射频率增大到某一数值时, 透射率会迅速增大, 跳跃到另一个值, 此后继续增大入射频率, 系统的透射率会缓慢到达一个相对稳定的透射态。而当入射频率减小到另一数值时, 透射率又会迅速下降之后进入另一个相对稳定状态。两跳跃点的阈值频率不同, 即对一给定频率处在两阈值频率点之间的电磁波, 它的透射率存在两个稳定的输出值。

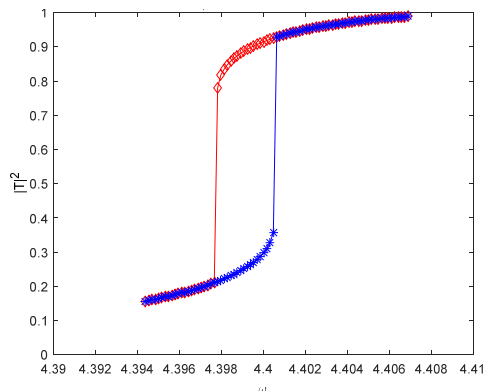


图3 随频率改变的双稳态现象

Fig. 3 Bistable solution through frequency tuning

### 2.2 影响双稳态特性的参数

光学双稳态现象的一个重要课题是对阈值变化的研究<sup>[10]</sup>。下面我们讨论阈值的影响因素。首先我们来研究  $\gamma$  的影响, 使用初始算例保证其他参数不变仅改变  $\gamma$  的取值时得到图形 4。由图 4 可见当  $\gamma$  增大时阈值减小, 因此选取非线性强度大的材料或者增强入射场强时能降低双稳态发生的阈值。

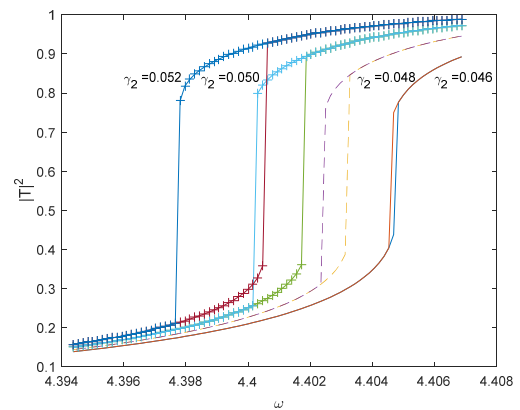


图4 不同  $\gamma$  的下的双稳态现象

Fig. 4 Bistable solution through frequency tuning for different  $\gamma$

下面我们研究缺陷层厚度对阈值的影响。我们研究的结构依然为  $(AB)^{10} B(BA)^{10}$ 。中间缺陷层 B 的厚度为  $dl$ 。当我们保证其他参数取值不变, 改变  $dl$  的取值时得到图 5。由图 5 可见当增大中间层厚度时双稳态发生的阈值会减小, 但是实际情况中我们要考虑整体结构大小的影响, 因此应在适当范围内增加中间层厚度这也将是我们下一步研究的课题。

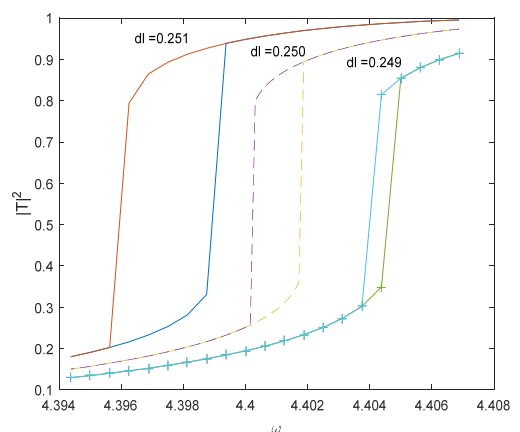


图5 不同的中间层厚度下的双稳态现象

Fig. 5 Bistable solution through frequency tuning for different  $dl$



### 3 结论

本文给出了带有缺陷的非线性光子晶体结构模型的推导过程及数值分析。利用有限元方法结合稳态算法展开数值模拟，可以观察到带缺陷的非线性光子晶体的双稳态现象。研究结果显示方法是收敛的。最后本文结合工程上的应用，对简单的一维光子晶体缺陷结构模型进行分析，通过对简单结构模型参数的改变发现：材料的非线性强度，入射场强度，中间层厚度对双稳态阈值有着重要影响。本文的研究成果对高效的光开关起到一定的指导作用。

### 参考文献

- [1] 高坛坛. 光子晶体能带结构的有限元法研究[D]. 北京邮电大学, 2012.
- [2] 章亮, 张巍, 聂秋华, 等. 二维光子晶体波导研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(3): 59-68.
- [3] 王筠, 刘丹, 靳海芹, 等. 含 Kerr 缺陷对称型函数光子晶体的色散光学双稳态[J]. 光电子技术, 2016(1): 12-18.
- [4] 赵年顺, 孙剑. 二维非线性光子晶体点缺陷的双稳态特性[J]. 南昌工程学院学报, 2014(3): 50-53.
- [5] 李淳飞. 全光开关原理[M]. 科学出版社, 2010.
- [6] 黄振侃. 数值计算: 微分方程数值解[M]. 北京工业大学出版社, 2006.
- [7] 刘泰康. 光子晶体技术及应用[M]. 国防工业出版社, 2015.
- [8] 周开锋. 非线性光子晶体双稳器件的研究[D]. 汕头大学, 2006.
- [9] Xu Z, Bao G. A numerical scheme for nonlinear Helmholtz equations with strong nonlinear optical effects[J]. Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision, 2010, 27(11): 2347.
- [10] Suryanto, E. van Groesen, M. Hammer. Finite Element Analysis of Optical Bistability in, One-Dimensional Nonlinear Photonic Band Gap Structures with a Defect[J]. Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials, 2012, 12(02): 187-204.

## 2017 年 1-7 月我国工业机器人产量接近 7.2 万套

当前，中国已成为世界工业机器人最大的市场。据统计，今年 1-7 月我国工业机器人产量已接近 7.2 万套，同比增长 57%。近五年规模增速基本保持在 20%以上，成为全球机器人产业规模稳定增长的重要力量。

同时，国内市场对工业机器人的需求也持续大幅增长，成为全球最重要的机器人市场。

在研发方面，我国坚持以点带面、小步快跑的原则，一方面抓住优势领域实现快速突破，另一方面强化基础研究推动整体提升。目前，语音识别、图像识别等技术已达到国际先进水平，机器人本体优化设计及性能评估、高速高精度控制等技术取得积极进展，控制器已接近国际水平。

此外，工业机器人，继汽车和电子等制造产业之后，在五金卫浴、家具家电等行业也已得到日益广泛应用。

——转自互联网