



文学批评家金圣叹喜欢点评经典文学,对《史记》《杜诗》《水浒传》《西厢记》等都有点评,相当于给这些文学作品加注脚。坊间流传金圣叹点评的《三国志》,后来又有人说它是冒牌货,还有一系列考证,相当于给注脚再加注脚。这种注脚的平方背后一般都有趣味的故事。我们这篇文章不讲文学作品,讲两个与数学有关的注脚,算是数学八卦,也可以雅称为数学文化。

1. 约克教授为其趣味题目加的注脚

有一天我在约克 (James Yorke) 教授的脸书账号上看见一个趣味题目。题目很简单,但其注脚却很有味道。





James A Yorke

September 18, 2018 · 3

constructing puzzles

"A rose red city half as old as time,"

in 3 billion years it will be 11 times its age 6 billion years ago.

How old is the universe?

The text in quotes is from John Burgon

Here I update a puzzle by Martin Gardner for more accuracy.

先翻译一下题目：

红玫瑰城的年龄是宇宙年龄的一半，30 亿年以后它的年龄将会是它 60 亿年以前年龄的 11 倍。问：宇宙年龄是多少？

约克教授是著名数学家，被格雷克（James Gleick）称之为在数学意义上用“混沌”（chaos）这个词的第一人。2003 年与曼德勃罗（Benoit B. Mandelbrot）同获日本科技奖。这样的数学大家怎么会会对这种简单题目有兴趣呢？答案可以从约克教授题目后面的注脚找到。他说这是更新马丁·嘉德纳（Martin Gardner）的题目。

马丁·嘉德纳是公认的趣味数学大师。他为《科学美国人》杂志写趣味数学专栏，一写就是二十多年，同时还写了几十本这方面的书。这些书和专栏影响了好几代人。在美国受过高等教育的人（尤其是搞自然科学的），或许没听说过菲尔兹奖得主丘成桐的名字，也不一定知道证明费马大定理的怀尔斯（Andrew Wiles），但很多都知道马丁·嘉德纳。许多大数学家、科学家都说过他们是读着嘉德纳的专栏走向自己现有专业的。他的仰慕者（就是通常所说的粉丝）众多，从哈佛大教授到公司小职员，覆盖面很大。他的许多书被译成各种文字，影响力遍及全世界。有人甚至说他是上世纪后半叶在全世界范围内数学界最有影响力的人。著名数学家约翰·康威（John Conway）和他的合作者把他们的名著《取胜之道》（*Winning ways for your mathematical plays*）献给嘉德纳。献词说：“献给马丁·嘉德纳，在数学上受益于他的人以百万计，远远超出其它任何人。”对我们这一代中国人来说，他那本被译成《啊哈，灵机一动！》的书很有影响力，相信不少人都读过。关于嘉德纳的故事，参见我以前给《数学文化》写的文章《游戏人生》¹。

知道了嘉德纳的名气，就不会奇怪知名大数学家为什么会去更新他给的初等题目了。一个自然的问题是：嘉德纳的题目为什么需要更新？答案是：宇宙的年龄更新了。

大家接受大爆炸理论后就等于接受我们这个宇宙年龄有限的结论。那么宇宙的年龄是多大呢？最开始的估计是 20 亿 (2 billion years)，但误差太大。后

¹ 数学文化，2010，第一卷第四期，pp 32-36.

来比较准确一点的估计是 120 亿正负 25 亿的误差。再后来的估计是 140 亿。电视剧《生活大爆炸》的主题曲就是用的 140 亿 (Our whole universe was in a hot, dense state, Then nearly fourteen billion years ago expansion started,...)。嘉德纳出题目的时候也是用的 140 亿。嘉德纳的原题是以诗的形式出现的。

A rose-red city half as old as Time.
One billion years ago the city's age
Was just two-fifths of what Time's age will be
A billion years from now. Can you compute
How old the crimson city is today?

再后来,对宇宙年龄的估计更准确了。现在的估计是 13.799 ± 0.021 billion (近似为 13.8 billion)。约克教授的题目就是把原来的数字修改后凑出这个 13.8。有趣的是,修改的题目只用到简单的数字 3, 6, 11, 没有用什么分数,可以算是很完美了。

约克教授是一个很有趣的人。有一阵他的办公室贴了一幅很大的毛主席像。我问他为什么,他说好玩。还说,许多人认为与中国有关的事都比较有趣(这是 30 年前的事)。接着又给我讲了一个与中国有关的故事。话说《美国名人录》找他要个人资料,他说出生于北京。于是名人录里约克教授名下就赫然列着出生地:北京。

顺便讲一个相关的笑话。我在查宇宙年龄估计的历史时,发现有人列出的最早的估计竟然是根据宗教故事而得出的。亚里士多德的估计是 6500 年,以后这就是教廷的标准说法。看到这个数字与 137.99 ± 0.21 亿年放在一起,感觉是一种讽刺。

这篇文章的题目是“注脚的注脚”,也就是注脚的平方。如果有搞物理的人因为此文写一个关于宇宙年龄测量的文章,那就是注脚的立方了。或者倒过来,搞物理的人写一篇关于宇宙年龄测量的文章,把这个题目作为注脚。如果这样的话,立方关系也倒过来了,我这个文章就成了注脚的立方。

说到这个注脚问题,前几天看见有微博问:大家读维基上的条目,是深度优先还是广度优先?严格意义上的深度优先是不可能的。如果注脚的注脚的注脚一条条读下去,永无止境。我个人的原则是,如果不影响阅读,那么广度优先。影响阅读的时候可以深度走一层,但只走一层。

最后的感想:嘉德纳影响深远;约克教授退休后有闲;科技进步惊人,宇宙年龄测量误差小于 0.2%。

二. 与信封炸弹有关的趣味题目的注脚

常常有人问谁是最著名的数学家?数学家著名有两种,一种是在数学圈内著名,另一种是在公众中著名(比如在中国,知道陈景润的一定比知道丘成桐的多)。上面的问题显然问的是后面那种,谁在公众中更著名。

在美国,答案是: Ted Kaczynski (中文名:卡钦斯基)

这个数学家著名不是在数学上的贡献，而是因为他搞的信封炸弹恐怖活动。他反对现代化，给宣扬现代化的人发信封炸弹，在上世纪七十年代到九十年代炸死三个，炸伤 20 多。那段时间，他的代号 Unabomber 在美国可以说是家喻户晓。不过介绍他时都说他是数学家。于是他就成了最著名的数学家。

既然是数学家，而且是加州伯克利大学历史上最年轻的数学助理教授，数学上还是有些成就的。变狂热以前还发表过一些数学文章。

下图是一篇数学文章的一段。里面提到卡钦斯基对一个数学问题的解答。在他的名字后面有一个注脚，写的是：“别的工作更著名”。这个“别的工作”不是数学，但大家都知道其所指，所以说更著名。这个注脚被许多人评为最佳注脚。

Two years later T. J. Kaczynski¹ [3] answered Sutcliffe's question in the negative. His elegant proof showed that if there exists a 3-digit solution for n , then deleting the middle digit gives a 2-digit solution for n . Together with Sutcliffe's work, this proved that there exists a 2-digit solution for n if and only if there exists a 3-digit solution for n .

¹Better known for other work.

标题故事讲完了，我们来看看卡钦斯基解答的是什么样的数学题。

后面的故事要从哈代说起。哈代是英国著名数学家，把印度著名数学家拉马努金请到英国的就是这位。哈代在题为《一个数学家的辩白》(*A mathematician's apology*) 的书中写道：“8712 与 9801 是仅有的两个能整除它们的镜像数的四位数。”镜像数就是把这个数的所有数字反一个顺序。8712 就变成 2178，9801 就变成 1089。哈代后来又说，这个题目意义不大，因为它没有推广空间。

顺便说一下，哈代辩白的一个主题是，纯数学家研究的东西很多都没有实用价值，因为他们追求的是纯粹的美。这种对纯粹美的追求不需要用是否可以应用来确认，他们有自己的价值，他在书中给出了一些数学美的例子。大半个世纪过去了，很多哈代认为没有实用价值的数学，现在都有了实际应用。比如哈代最推崇的数论，是他认为绝对不可能找到任何现实应用的数学分支，现在却已经成了我们生活中不可缺少的东西。我们现在天天用的信息加密（从手机到人造卫星上的各种应用）都需要用到数论。哈代还特别看不起应用数学，觉得它不入流，丑，而且乏味。他这种观点在当时还有一定的代表性。他同时代的有些数学家甚至觉得自己搞的东西有了应用是一件很丢脸的事，因为那说明他们的研究不神圣了。所幸的是，这种观点现在已经过时。现在的数学家如果发现自己研究的东西有应用价值，应该是很高兴的事。

当我们说很多纯数学研究的东西找到了应用的时候，必须承认还有很多研究题目找不到应用。比如哈代的这个镜像数问题。我个人觉得这样的游戏问题不会有什么应用。当然，找不到应用并不妨碍数学家们继续研究它。实际上，那篇有最佳注脚的文章就是关于哈代的这个题目的推广。把原来的在十进制下的题目推广到任意进制。数学上的准确表达就是

$$k(a_h n^h + a_{h-1} n^{h-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = a_0 n^h + a_1 n^{h-1} + \cdots + a_{h-1} n + a_h$$

with $n \geq 2$, $1 < k < n$, $0 \leq a_i \leq n-1$ for all i , $a_0 \neq 0$, $a_h \neq 0$.

n 进制下的 $h+1$ 位数，把第一位放到最后，第二位放到倒数第二，……，新数的整数 k 倍等于原来的数。

在十进制下，两位数，三位数都没有这个镜像数问题的解。推广后的一个问题是：是否有某个进制 n ，存在三位数的解，却不存在二位数的解？卡钦斯基通过一个巧妙证明，宣称任何一个三位数的解的中间那位数都是打酱油的，去掉中间那位数，就可以得到一个二位数的解。也就是说，有三位数解就必然有二位数的解。再结合前人的结果，可以证明反之亦然。

上面那篇文章除了最佳注脚，还有两个亮点。

第一个亮点是它的标题，《镜像数，不解释》(Digit Reversal Without Apology)，对仗哈代那本书的名字。一方面镜像数是把对应的数字反一个顺序，他们把书名的主题也给反了。另外一方面，他们似乎想说，我们就是要研究这些没有用的东西，不用解释。

第二个亮点是，哈代的年代还没有计算机。哈代要宣称四位数中只有那两个解，必须要手工遍历所有的四位数。或许他有巧妙的办法去除大部分数，但所有数都必须考虑到，这个工作量也是不小的。我在我的《数学札记》中提到，计算机的出现对数学研究给予了很大的帮助。其中一个帮助就是对一般问题搜索具体例子，从而给数学家提供新思路。哈代需要手工花大力计算的东西，计算机可以轻松解决。我们就以下面这几行 MATLAB 代码来结束本文。

```
a = (1001:9999)';
b = a./str2num(fliplr(num2str(a)));
a(round(b) == b & b > 1 & b < 10)
```

注1：实际上没有必要搜索 2000 以下的解，因为 4 位数的最小倍数都必须在 2000 以上，不过，不想加解释的话，就从 1000 开始搜索。反正对计算机来说几乎都是瞬间的事。

注2：给不懂 MATLAB 的人解释一下，第二句就是把一个数字变成字符串，反顺序再变回字母。这一步也可以通过数学运算来做，但代码就没有这么简明了。

注3：有些对称数可以整除自己，所以排除倍数等于 1 的情况。结尾是 0 的数反转后就成了三位数，所以必须排倍数大于等于 10 的解。

这几行代码的结果就是
8712, 9801

不到 0.1 秒，验证了哈代的结果。

感想：计算机不但在生活上给予我们各种方便，也把数学家从简单繁琐的计算中解放出来，让我们有更多时间考虑有创造性和突破性的东西。



作者简介：

万精油，本科毕业于四川大学数学系。中国科学院数学研究所硕士，美国马里兰大学数学博士。