



TECHNIQUES  
DE L'INGÉNIEUR

Réf. : AF162 V1

# Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Gérard DEBEAUMARCHÉ**

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
[infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **03/05/2017**  
Pour le compte : **7200043660 - centralesupelec // 138.195.79.110**

# Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires

par **Gérard DEBEAUMARCHÉ**

Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan

Professeur de mathématiques spéciales au lycée Clemenceau de Reims

<b>1. Classification des e.d.p. linéaires du second ordre .....</b>	AF 162 -	3
<b>2. Une équation hyperbolique : l'équation des ondes.....</b>	—	4
2.1 Équation des cordes vibrantes .....	—	4
2.1.1 Cas d'une corde infinie.....	—	4
2.1.2 Cas d'une corde finie.....	—	5
2.2 Généralisation : l'équation des ondes en dimension $n$ .....	—	7
<b>3. Une équation parabolique : l'équation de la chaleur.....</b>	—	7
3.1 Équation de la chaleur en dimension 1 .....	—	7
3.1.1 Cas d'une barre infinie .....	—	7
3.1.2 Cas d'une barre finie .....	—	9
3.2 Généralisation : équation de la chaleur en dimension $n$ .....	—	11
<b>4. Une équation elliptique : l'équation de Laplace .....</b>	—	12
4.1 Présentation .....	—	12
4.2 L'équation de Laplace et les fonctions harmoniques dans un ouvert $U$ . .....	—	12
4.3 L'équation de Laplace et le problème de Dirichlet dans un cercle .....	—	14
4.3.1 Unicité d'une éventuelle solution par le principe du maximum .....	—	14
4.3.2 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables .....	—	15
4.4 L'équation de Laplace et le problème de Neumann dans un cercle.....	—	16
4.4.1 Généralités .....	—	16
4.4.2 Unicité à une constante additive près d'une éventuelle solution...	—	17
4.4.3 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables .....	—	17
4.5 Le potentiel newtonien et l'équation de Poisson.....	—	18
<b>5. Théorie spectrale et séparation des variables.....</b>	—	18
<b>Références bibliographiques .....</b>	—	21

**O**n se propose dans cet article de décrire quelques propriétés élémentaires des équations aux dérivées partielles (e.d.p.) linéaires du second ordre à coefficients constants, autrement dit, dans le cas de deux variables, des équations de la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) \quad (\text{E})$$

où  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  désignent six nombres réels donnés ( $a, b, c$  étant non tous nuls),  $F$  une fonction continue de deux variables réelles définie sur un ouvert  $U$  du plan et  $u$  une fonction inconnue, supposée de classe  $C^2$ .

On distingue a priori deux types de problèmes :

— ceux dans lesquels n'intervient pas la variable temps  $t$ , et qui ne dépendent donc que des variables spatiales  $x, y, z$ ; ils sont appelés **problèmes stationnaires**;

— ceux dans lesquels intervient, en plus des variables spatiales  $x, y, z$ , la variable temps  $t$ ; ils sont appelés **problèmes d'évolution**.

■ On recherche le plus souvent des solutions vérifiant des conditions aux limites, signifiant que la solution considérée  $u$ , a priori définie sur l'ouvert  $U$  du plan, satisfait certaines conditions sur la frontière de  $U$ . On distingue à ce sujet deux types de conditions, celles de Dirichlet et de Neumann.

Les **conditions de Dirichlet** imposent à la solution  $u$  d'être continue sur l'adhérence de  $U$ , c'est-à-dire sur  $U$  et sa frontière, et d'être alors égale à une fonction donnée sur la frontière de  $U$ .

Les **conditions de Neumann** imposent à la solution  $u$  d'être continue sur l'adhérence de  $U$ , c'est-à-dire sur  $U$  et sa frontière, et d'admettre en tout point de la frontière de  $U$  une dérivée  $\partial u / \partial N$  suivant le vecteur normal  $N$  orienté vers l'extérieur de la frontière de  $U$  (supposée suffisamment régulière) égale à une fonction donnée.

Dans un problème d'évolution, on recherche de plus des solutions vérifiant certaines conditions initiales (ou **conditions de Cauchy**), signifiant que, à l'instant  $t = 0$ , la solution  $u(x, y, z, t)$  de l'équation vérifie

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

où  $f$  est une fonction donnée, et parfois

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = g(x, y, z)$$

où  $g$  est une fonction donnée.

■ Les **problèmes que l'on peut alors étudier** sont les suivants.

- Un problème stationnaire donné avec des conditions aux limites ou un problème d'évolution donné avec des conditions aux limites et des conditions initiales, admettent-ils une solution et une seule ?

- Dans l'affirmative, la solution obtenue dépend-elle continûment des données (autrement dit, une « petite » erreur commise sur les conditions aux limites ou sur les conditions initiales conduit-elle à une « petite » erreur sur la solution) ?

Notons dès maintenant que la linéarité de l'équation  $E$  implique que :

- les solutions de l'équation homogène (équation obtenue lorsque le second membre  $F$  est nul) forment un espace vectoriel ;

- la solution générale de l'équation complète s'obtient comme la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène.

Cet article est introductif et ne fait appel qu'à des méthodes élémentaires. En particulier, il ne fait jamais référence à la théorie des distributions, cependant centrale dans toutes ces questions. De même, les méthodes numériques de résolution (par différences finies ou par éléments finis) dont l'importance est essentielle puisque la résolution analytique n'est pas praticable en général ne sont pas abordées ici.

On se reportera en bibliographie aux références [1] à [5].

# 1. Classification des e.d.p. linéaires du second ordre

Ce paragraphe est destiné à distinguer trois types d'équations, qui se révèlent différentes tant du point de vue mathématique (propriétés des solutions, méthodes de démonstration) que physique.

Étudions tout d'abord le cas des e.d.p. dépendant de deux variables réelles.

## Définition 1.

L'équation aux dérivées partielles (E) donnée dans l'introduction :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) \quad (1)$$

est dite de type :

- **hyperbolique** lorsque  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  ;
- **parabolique** lorsque  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  ;
- **elliptique** lorsque  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

Dans la suite, on dira que  $\Delta = b^2 - 4ac$  est le **discriminant de l'équation** (1).

Cette définition est intéressante car invariante par changement de bases dans le plan, comme on le vérifie en effectuant le changement de bases, défini par :

$$x' = Ax + By ;$$

$$y' = Cx + Dy ;$$

avec  $AD - BC \neq 0$ ,

et en posant alors :

$$u'(x', y') = u'(Ax + By, Cx + Dy) = u(x, y).$$

En calculant les dérivées partielles de  $u$  en fonction de celles de  $u'$ , on voit alors que  $u$  est solution de (1) si, et seulement si,  $u'$  est solution de :

$$a' \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + b' \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial y'} + c' \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \alpha' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \gamma' u' = F'(x', y') \quad (2)$$

où l'on a notamment :

$$a' = aA^2 + bAB + cB^2 ;$$

$$b' = 2(aAC + cBD) + b(AD + BC) ;$$

$$c' = aC^2 + bCD + cD^2.$$

On vérifie par le calcul que le discriminant de (2) est égal à  $(AD - BC)^2 (b^2 - 4ac)$ . Il est donc du signe de  $b^2 - 4ac$  et les équations (1) et (2) sont bien de même type.

## Proposition 1.

*A l'aide de changements de bases convenables et quitte à changer les notations, la recherche des solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) est équivalente à la recherche :*

### 1. Des solutions de l'équation suivante dans le cas hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) ;$$

### 2. Des solutions de l'équation suivante dans le cas parabolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) ;$$

(On exclura le cas  $\beta = 0$ , qui ramène à une simple équation différentielle).

### 3. Des solutions de l'équation suivante dans le cas elliptique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) .$$

**Démonstration.** ◊ Établissons, par exemple, ce résultat dans le cas d'une équation elliptique.

D'après les calculs de changements de base effectués précédemment, il suffit de trouver  $A, B, C, D$  tels que :

$$aA^2 + bAB + cB^2 = aC^2 + bCD + cD^2 ;$$

$$2(aAC + cBD) + b(AD + BC) = 0.$$

La première de ces relations est vérifiée en choisissant :

$$B = D = 1 ;$$

$$\bullet A, C de la forme \frac{-b}{2a} + h \text{ et } \frac{-b}{2a} - h.$$

La seconde équation est alors vérifiée pour  $h^2 = (4ac - b^2)/4a^2$ , expression positive puisque  $\Delta < 0$  ici.

Comme  $AD - BC = 2h \neq 0$ , ce changement de variables ramène clairement une équation elliptique à la forme indiquée dans la proposition 1. ◊

## Proposition 2.

*A l'aide de changements de fonctions inconnues convenables, la recherche des solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) est équivalente à la recherche :*

### — des solutions de l'équation suivante dans le cas hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + kv = G(x, y)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + kv = G(x, y) ;$$

### — des solutions de l'équation suivante dans le cas parabolique :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k \frac{\partial v}{\partial y} = G(x, y) ;$$

### — des solutions de l'équation suivante dans le cas elliptique :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + kv = G(x, y)$$

**Démonstration.** ◊ Reprenons encore le cas d'une équation elliptique qui, d'après la proposition 1, peut se ramener à la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) .$$

Posons alors

$$u(x, y) = v(x, y) \exp\left(-\frac{\alpha x + \beta y}{2}\right).$$

Un simple calcul de dérivées montre que l'équation précédente équivaut à la suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + kv = F(x, y) \exp\left(\frac{\alpha x + \beta y}{2}\right) .$$

Le résultat est donc établi, quitte à poser

$$G(x, y) = F(x, y) \exp\left(\frac{\alpha x + \beta y}{2}\right). \quad \diamond$$

### Généralisation.

Soit une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants à  $n$  variables, qui s'écrit donc sous la forme suivante (avec, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ) :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = F(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Désignant par  $Q$  la forme quadratique

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

on dira alors que cette équation (3) est :

- hyperbolique, si sa signature est de la forme  $(p, n-p)$  avec  $0 < p < n$  ;
- parabolique, si sa signature est de la forme  $(p, q)$  avec  $p+q < n$  ;
- elliptique, enfin, si sa signature est  $(n, 0)$  ou  $(0, n)$ .

(On rappelle que si  $(p, q)$  est la signature d'une forme quadratique,  $p$  et  $q$  sont respectivement les nombres des carrés précédés de signes + et - dans une décomposition en carrés de formes linéaires indépendantes).

On aborde maintenant quelques exemples illustrant ces trois types d'équation, l'équation des ondes, l'équation de la chaleur et l'équation de Laplace.

Les paragraphes 2, 3 et 4 sont effectivement consacrés à l'étude d'équations importantes sur le plan physique, l'ouvert  $U$  étant à chaque fois géométriquement simple afin de conduire les calculs à leur terme.

l'équation avec les **conditions initiales** suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel  $x$  :

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Ces conditions signifient que la corde a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction  $f$ , que l'on suppose de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  (ou même de classe  $C^1$  et de classe  $C^2$  par morceaux).

En s'inspirant des changements de bases qui ont été réalisés au paragraphe 1, on considère les nouvelles variables :

$$X = x + vt \quad \text{et} \quad T = x - vt$$

et l'on pose :

$$v(X, T) = v(x + vt, x - vt) = u(x, t).$$

■ Par un simple calcul de dérivées partielles, on constate que  $u$  satisfait l'équation des cordes vibrantes si, et seulement si,  $v$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = 0.$$

Il en résulte que  $\frac{\partial v}{\partial T}$  ne dépend pas de  $X$ , et donc que :

$$\frac{\partial v}{\partial T}(X, T) = a(T)$$

où  $a$  est une fonction de classe  $C^1$ .

Quitte à noter  $A$  une primitive de  $a$ , on obtient alors par une nouvelle intégration :

$$v(X, T) = A(T) + B(X)$$

où  $A$  et  $B$  sont donc deux fonctions de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On obtient, par conséquent :

$$u(x, t) = A(x - vt) + B(x + vt).$$

Réiproquement, il est immédiat de constater qu'une telle fonction est bien solution de l'équation des cordes vibrantes.

Tenant maintenant compte des deux conditions initiales, il vient :

$$A(x) + B(x) = f(x)$$

et

$$A'(x) - B'(x) = 0.$$

Il en résulte que

$$A'(x) = B'(x) = \frac{f'(x)}{2},$$

ce qui montre enfin que :

$$2A(x) = f(x) + \lambda \quad \text{et} \quad 2B(x) = f(x) - \lambda$$

et

$$2B(x) = f(x) - \lambda$$

où  $\lambda$  désigne une constante réelle.

Ainsi, le problème posé admet **une solution et une seule**, donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - vt) + f(x + vt)).$$

■ Cette solution possède la remarquable **interprétation physique** suivante.

● Considérons uniquement le premier terme  $f(x - vt)/2$ . Celui-ci donne l'amplitude du mouvement d'une corde à l'instant  $t$  et à l'abscisse  $x$ , et l'on remarque que c'est la même amplitude que celle figurant à l'instant initial 0 à l'abscisse  $x - vt$ .

## 2. Une équation hyperbolique : l'équation des ondes

### 2.1 Équation des cordes vibrantes

Il s'agit de l'une des premières équations aux dérivées partielles mises en évidence.

Elle fut étudiée dès la première moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle par d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où  $v$  désigne la vitesse de propagation de l'onde dans la corde et  $u(x, t)$  l'ordonnée du point d'abscisse  $x$  de la corde à l'instant  $t$  (cette ordonnée étant mesurée par rapport à la position d'équilibre supposée d'ordonnée nulle).

#### 2.1.1 Cas d'une corde infinie

■ On suppose la corde vibrante infinie, et on assimile la position d'équilibre de celle-ci à la droite réelle  $\mathbb{R}$ . On se propose d'étudier

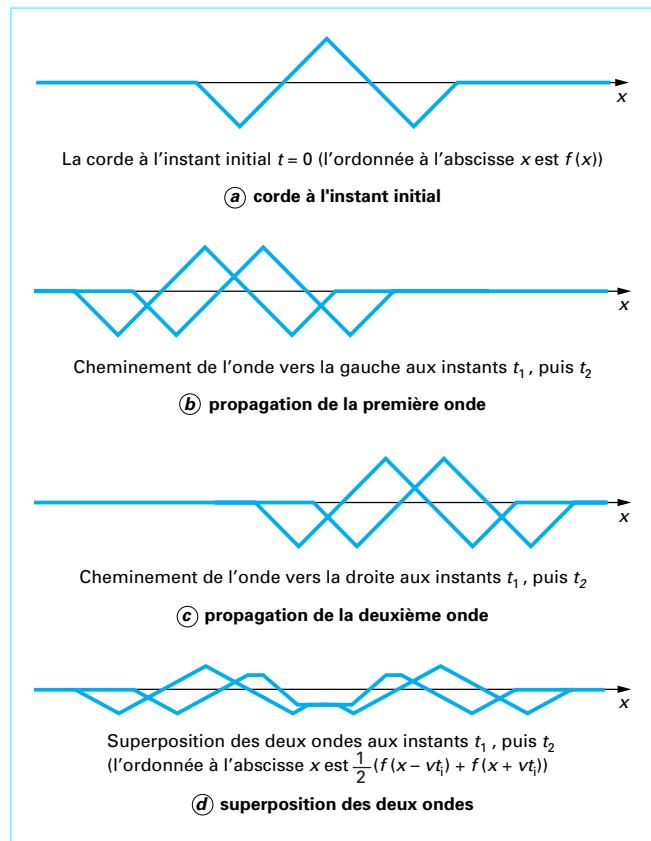


Figure 1 – Problème de la corde vibrante infinie

Ainsi, ce terme indique le cheminement d'une onde qui se déplace vers la droite à la vitesse  $v$ , puisque, entre les instants 0 et  $t$ , elle est passée de l'abscisse  $x - vt$  à l'abscisse  $x$ .

De même, le second terme  $f(x+vt)/2$  indique le cheminement d'une onde qui se déplace vers la gauche à la même vitesse  $v$ .

Le problème de la corde vibrante infinie est représenté figure 1.

## 2.1.2 Cas d'une corde finie

### 2.1.2.1 Présentation

On suppose la corde vibrante finie de longueur  $L$ , et on assimile la position d'équilibre de celle-ci au segment  $[0, L]$ . On se propose ici d'étudier l'équation avec :

— les **conditions initiales** suivantes, réalisées pour tout nombre réel  $x$  :

$$u(x, 0) = f(x)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

qui signifient que la corde a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction  $f$ , que l'on suppose de classe  $C^2$  sur  $[0, L]$  (ou même de classe  $C^1$  et de classe  $C^2$  par morceaux) ;

— les **conditions aux limites** suivantes, réalisées pour tout nombre réel positif  $t$  :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

qui signifient que la corde est fixée à ses deux extrémités.

Pour  $t = 0$ , on a donc :

$$f(0) = f(L) = 0.$$

On étudie les problèmes d'existence et d'unicité de la solution  $u$  d'une telle e.d.p.

### 2.1.2.2 Unicité d'une éventuelle solution par considération de l'énergie

Supposons que l'on dispose de deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites.

Posons  $u = u_1 - u_2$  et introduisons la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right) dx.$$

Les hypothèses faites autorisent la dérivation de  $E$  sous le signe intégral, et on a, puisque  $u = u_1 - u_2$  est aussi solution de l'équation des cordes vibrantes :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L \left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) \right) dx \\ &= \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) \right) dx. \end{aligned}$$

L'expression sous le signe intégral est une dérivée et on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = 0$$

par dérivation des relations  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , ce qui donne :

$$E'(t) = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_0^L = 0.$$

Par conséquent, la fonction  $t \rightarrow E(t)$  est constante et, en fait, nulle puisque  $E(0) = 0$ . Cela résulte de l'expression de  $E(0)$  et du fait que,  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant les mêmes conditions initiales, leur différence  $u$  vérifie :

— d'une part,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$  ;

— d'autre part,  $u(x, 0) = 0$

donc, par dérivation,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0$ .

Puisque  $E(t) = 0$ , on a donc, pour  $t \geq 0$  et  $0 \leq x \leq L$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0.$$

La fonction  $u$  est par conséquent constante sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$ , et en fait nulle puisque  $u(x, 0) = 0$ . Ainsi, on a bien  $u_1 = u_2$  et l'unicité annoncée.

### 2.1.2.3 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

Indiquons tout d'abord l'idée de la **méthode**.

■ On commence par rechercher des solutions multiplicatives non nulles de la forme

$$(x, t) \rightarrow u(x) v(t)$$

qui vérifient les conditions aux limites vues paragraphe 2.1.2.1.

Ici, de telles solutions vérifient donc :

$$u(x)v''(t) = v^2 u''(x)v(t).$$

Puisque l'on recherche des solutions non nulles, il existe a priori des nombres réels  $x_0$  et  $t_0$  pour lesquels :

$$u(x_0) \neq 0 \text{ et } v(t_0) \neq 0.$$

On en déduit, quitte à fixer  $x = x_0$ , puis  $t = t_0$ , l'existence de constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que l'on ait pour  $t \geq 0$  et  $0 \leq x \leq L$  :

$$u''(x) = \lambda u(x);$$

$$v''(t) = \mu v(t).$$

En reportant réciproquement dans l'équation, on voit que, en fait :

$$\mu = v^2 \lambda$$

et pour tenir compte des conditions aux limites, il faut enfin bien sûr que :

$$u(0) = u(L) = 0.$$

(On est ainsi amené à résoudre un problème, ici très simple, de Sturm-Liouville (§ 5) ; on verra que cela est général dans cette méthode de séparation des variables).

- Si le nombre  $\lambda$  est nul, alors :

$$u(x) = Ax + B$$

et puisque  $u(0) = u(L) = 0$ , on a  $A = B = 0$  et  $u$  est la solution nulle, ce qui est exclu.

- Si le nombre  $\lambda$  est strictement positif, on a :

$$u(x) = A \operatorname{Ach}(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{Bsh}(\sqrt{\lambda}x)$$

et puisque  $u(0) = u(L) = 0$ , on a  $A = B = 0$  et  $u$  est la solution nulle, ce qui est exclu.

- Si le nombre  $\lambda$  est strictement négatif, on a :

$$u(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

puisque  $u(0) = 0$ , on a  $A = 0$  et puisque  $u(L) = 0$ , on a  $B = 0$ , donc encore  $u = 0$ , sauf s'il existe un nombre entier naturel non nul  $n$  tel que

$$\lambda = \frac{-n^2 \pi^2}{L^2},$$

auquels cas on obtient alors les solutions suivantes :

$$u(x) = A_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right);$$

$$v(t) = B_n \cos\left(\frac{n \pi vt}{L}\right) + C_n \sin\left(\frac{n \pi vt}{L}\right).$$

■ L'équation étant linéaire, les combinaisons linéaires des solutions précédentes sont encore solutions de l'équation. L'idée est de ne pas se borner nécessairement à des « combinaisons linéaires finies » pour obtenir une solution.

Posons donc, de façon purement formelle (on peut faire  $A_n = 1$ ) :

$$u(x, t) = \sum \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \left( B_n \cos\left(\frac{n \pi vt}{L}\right) + C_n \sin\left(\frac{n \pi vt}{L}\right) \right).$$

Les conditions de Cauchy portant sur  $u(x, 0)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$  seront formellement vérifiées en choisissant les coefficients  $C_n$  nuls et les coefficients  $B_n$  tels que :

$$f(x) = \sum B_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right).$$

Un tel développement est celui d'une fonction impaire et  $2L$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , que l'on obtient en prolongeant la fonction  $f$  par imparité sur  $[-L, L]$ , puis par  $2L$ -périodicité. La fonction  $f$  ainsi prolongée est clairement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle est a priori de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  privé de l'ensemble  $L\mathbb{Z}$  des multiples de  $L$ , sauf si elle vérifie la condition supplémentaire

$$f''(0) = f''(L) = 0,$$

auquel cas elle est alors de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit qu'elle est développable en série de Fourier et que sa série de Fourier converge normalement vers  $f$ .

Si l'on pose pour  $t \geq 0$  et  $0 \leq x \leq L$  :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n \pi vt}{L}\right),$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx$$

on voit que la série définissant  $u$  est normalement convergente sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$ , donc continue, et l'on vérifie aisément, à l'aide des formules de trigonométrie et du développement en série de Fourier de  $f$ , que l'on a :

$$u(x, t) = \frac{[f(x+vt) + f(x-vt)]}{2}.$$

La fonction  $u$  obtenue ci-dessus est donc de classe  $C^2$  sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$  et vérifie les conditions aux limites et les conditions initiales requises.

Elle est de plus de classe  $C^2$  sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$  et solution de l'équation des cordes vibrantes si :

$$f''(0) = f''(L) = 0.$$

Sinon, elle n'est de classe  $C^2$  et solution de l'équation des cordes vibrantes que sur l'ensemble  $[0, L] \times [0, +\infty]$  privé des segments de droite d'équations

$$x \pm vt = kL$$

avec  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq L$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. La formule obtenue pour une corde finie (après avoir prolongé convenablement par imparité et périodicité la fonction  $f$ ) est exactement l'analogue de la formule obtenue dans le cas d'une corde infinie (§ 2.1.1).

2. La solution  $u$  ainsi obtenue dépend continûment de la donnée initiale  $f$ . En effet, on remarque facilement que l'on a :

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Supposons que la donnée initiale  $f$  ne soit connue que par une approximation  $\underline{f}$ .

Notons alors  $u$  et  $\underline{u}$  les solutions associées à ces données initiales exactes et approchées  $f$  et  $\underline{f}$

$$\Delta u = u - \underline{u} \text{ et } \Delta f = f - \underline{f}$$

les erreurs. On a, par différence :

$$\Delta u(x, t) = \frac{[\Delta f(x+vt) + \Delta f(x-vt)]}{2}$$

et donc, de même :

$$\|\Delta u\|_\infty = \sup |u(x) - \underline{u}(x)| \leq \|\Delta f\|_\infty = \sup |f(x) - \underline{f}(x)|.$$

## 2.2 Généralisation : l'équation des ondes en dimension $n$

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right).$$

Ainsi, pour  $n = 2$ , on obtient l'**équation des membranes vibrantes** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

où  $v$  désigne la vitesse de propagation de l'onde dans la membrane et  $u(x, y, t)$  la cote du point de coordonnées  $(x, y)$  d'une membrane vibrante à l'instant  $t$  (cette cote étant mesurée par rapport à la position d'équilibre supposée de cote nulle).

■ Pour une **membrane rectangulaire** par exemple, dont la position d'équilibre s'identifie au rectangle  $\mathbb{R} = [0, a] \times [0, b]$  du plan, le problème est d'étudier l'équation avec :

— les **conditions initiales** suivantes, réalisées pour tout nombre réel  $x$  :

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$$

qui signifient que la membrane a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction  $f$ , que l'on suppose de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ;

— les **conditions aux limites** suivantes, réalisées pour tout nombre réel positif  $t$  :

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b).$$

qui signifient que la membrane est fixée aux bords du rectangle  $R$ .

Pour  $t = 0$ , on a donc :

$$f(x, 0) = f(x, b) = f(0, y) = f(a, y) = 0 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

■ **L'unicité des solutions** de ce problème se traite exactement comme au paragraphe 2.1.2.2. Supposons que l'on dispose de deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites.

Posons  $u = u_1 - u_2$  et introduisons la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_R \left( \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) \right)^2 \right) dx dy.$$

Il est licite de dériver sous le signe intégral et, en omettant d'écrire  $(x, y, t)$  sous le signe intégral, il vient donc :

$$E'(t) = \iint_R \left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) dx dy.$$

Puisque  $u = u_1 - u_2$  est aussi solution de l'équation des membranes vibrantes, on a :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Comme  $u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$ , on a, par dérivation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(a, y, t) = 0,$$

et de même

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, b, t) = 0,$$

ce qui conduit aussitôt à :

$$E'(t) = \int_0^b \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^a dy + \int_0^a \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^b dx = 0.$$

Par conséquent, la fonction  $t \mapsto E(t)$  est constante et, en fait, nulle puisque  $E(0) = 0$ . Cela résulte de l'expression de  $E(0)$  et du fait que  $u_1$  et  $u_2$  vérifient les mêmes conditions initiales, on a :

— d'une part,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$  ;

— d'autre part,  $u(x, y, 0) = 0$ ,

donc par dérivation :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, 0) = 0.$$

Puisque  $E(t) = 0$ , on a donc, pour  $t \geq 0$  et  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = 0.$$

La fonction  $u$  est par conséquent constante sur

$$[0, a] \times [0, b] \times [0, +\infty],$$

et elle est nulle puisque  $u(x, y, 0) = 0$ . Ainsi, on a bien  $u_1 = u_2$  et l'unicité annoncée.

■ De même, la **méthode de séparation des variables** permet d'obtenir la solution  $u$  du problème lorsque la fonction  $f$  est supposée suffisamment régulière. La résolution du problème de Sturm-Liouville conduit à nouveau aux fonctions trigonométriques, alors que, avec une membrane circulaire, elle conduirait aux fonctions de Bessel.

## 3. Une équation parabolique : l'équation de la chaleur

### 3.1 Équation de la chaleur en dimension 1

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Les constantes  $c$  et  $\gamma$  désignent la capacité et la conductivité thermiques d'une barre et  $u(x, t)$  indique la température au point d'abscisse  $x$  de la barre à l'instant  $t$ .

#### 3.1.1 Cas d'une barre infinie

On suppose la barre infinie, et on assimile celle-ci à la droite réelle  $\mathbb{R}$ . On se propose d'étudier l'équation avec pour condition initiale, réalisée pour tout nombre réel  $x$  :

$$u(x, 0) = f(x).$$

Celle-ci indique la température des différents points de la barre à l'instant initial. On supposera cette fonction  $f$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  et, pour simplifier les notations, on posera

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{c}.$$

■ Pour trouver la forme d'une solution, nous allons suivre ici une méthode différente et plus complexe que celle mise en œuvre dans le cas de l'équation hyperbolique correspondante (équation des cordes vibrantes (§ 2.1)), reposant sur la **transformation de Fourier**, à propos de laquelle nous faisons quelques brefs **rappels**.

- La transformée de Fourier  $Ff$  d'une fonction sommable  $f$  est définie par :

$$Ff(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp(-2i\pi xy) dy.$$

- La transformée de Fourier conjuguée de la fonction  $Ff$  supposée sommable donne :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(y) \exp(2i\pi xy) dy.$$

- Par un calcul très classique, on établit que la transformée de Fourier de la fonction  $x \rightarrow \exp(-ax^2)$  est la fonction

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{-\pi^2 x^2}{a}\right) \quad (a > 0).$$

■ De plus, nous allons faire des **hypothèses** plus fortes en supposant, d'une part,  $f$  sommable sur  $\mathbb{R}$ , d'autre part, en cherchant des solutions  $u$  sommables sur  $\mathbb{R}$  ainsi que leurs dérivées et telles que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  soit dominée sur  $\mathbb{R}$  par une fonction sommable  $U$  indépendante de  $t$ .

■ En appliquant la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur par rapport à la variable  $x$ , on obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) \exp(-2i\pi xy) dy = \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(y, t) \exp(-2i\pi xy) dy.$$

La condition de domination  $\left| \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) \exp(-2i\pi xy) \right| \leq U(y)$  par la fonction sommable  $U$  permet de justifier, au premier membre, la permutation des symboles d'intégration et de dérivation par rapport à la variable  $t$ , tandis que la sommabilité de  $u$  et de ses deux premières dérivées en  $x$  permet d'appliquer deux fois, au second membre, la formule  $F(f')(x) = 2i\pi x Ff(x)$ , permettant de simplifier la formule précédente qui devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) \exp(-2i\pi xy) dy \\ = -4\pi^2 \omega^2 x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) \exp(-2i\pi xy) dy. \end{aligned}$$

Notant  $v$  la transformée de Fourier de  $u$  par rapport à sa première variable, on a donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + 4\pi^2 \omega^2 x^2 v(x, t) = 0.$$

Cette équation différentielle se résout aisément et donne :

$$v(x, t) = Ff(x) \exp(-4\pi^2 \omega^2 x^2 t)$$

puisque, pour  $t = 0$ , l'expression de droite  $v(x, 0)$  n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction  $x \rightarrow u(x, 0) = f(x)$ .

On note alors que :

— la fonction  $x \rightarrow v(x, t)$  est sommable (pour  $t > 0$ ) comme produit de la fonction bornée  $Ff$  (puisque une transformée de Fourier tend vers 0 en  $\pm\infty$ , donc est bornée) par la fonction sommable

$x \rightarrow \exp(-4\pi^2 \omega^2 x^2 t)$ ; par transformée de Fourier inverse (ou conjuguée), on a donc l'expression de  $u(x, t)$  à partir de celle de  $v(x, t)$  si  $t > 0$  ;

— la fonction  $x \rightarrow \exp(-4\pi^2 \omega^2 x^2 t)$  est, d'après les rappels précédents, la transformée de Fourier de la fonction

$$x \rightarrow \frac{\exp(-x^2/4\omega^2 t)}{\sqrt{4\pi\omega^2 t}}.$$

Dans ces conditions, la transformée de Fourier (directe ou conjuguée) du produit est le produit de convolution des transformées de Fourier (directes ou conjuguées), d'où :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\omega^2 t}\right) dy.$$

On notera que l'application de la transformation de Fourier peut s'effectuer avec bien d'autres équations aux dérivées partielles, mais elle ne trouve son véritable champ d'application que dans le cadre des distributions.

■ La dernière formule ci-dessus définit en fait  $u(x, t)$  pour tout couple  $(x, t)$  de nombres réels tels que  $t > 0$  dès que  $f$  est supposée seulement continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Il s'agit maintenant de savoir, **réciproquement**, si cette fonction  $u$  est de classe  $C^2$  et si elle est solution de l'équation de la chaleur et si, enfin,  $u(x, t)$  tend bien vers  $f(x_0)$  lorsque  $(x, t)$  tend vers  $(x_0, 0)$ .

• Le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre montre que  $u$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et les dérivées de l'intégrale s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral, ce qui permet de vérifier par un simple calcul que  $u$  est solution de l'équation de la chaleur.

• La fonction  $u$  vérifie la condition de Cauchy désirée, car  $u(x, t)$  tend vers  $f(x_0)$  lorsque  $(x, t)$  tend vers  $(x_0, 0)$ .

En posant en effet  $x - y = 2\omega z\sqrt{t}$ , on a :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2\omega z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz.$$

Sous cette dernière forme, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre prouve immédiatement le résultat voulu.

### Unicité des solutions

■ Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions de notre problème, leur différence  $u = u_1 - u_2$  est solution de l'équation de la chaleur avec  $u(x, 0) = 0$ .

■ Si  $u_1$  et  $u_2$  sont sommables sur  $\mathbb{R}$  ainsi que leurs dérivées et telles que  $\frac{\partial u_1}{\partial t}$  et  $\frac{\partial u_2}{\partial t}$  soient dominées sur  $\mathbb{R}$  par des fonctions sommables indépendantes de  $t$ , les calculs menés précédemment montrent que la transformée de Fourier de  $u$  est nulle, donc que  $u$  est nulle, ce qui établit – avec ces hypothèses supplémentaires – l'unicité de la solution du problème posé.

Dans le cas général, on ne peut a priori conclure à l'unicité des solutions. Ainsi, la fonction définie par :

$$u(x, t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\omega^2 t}\right)$$

pour  $t > 0$  est bien solution de l'équation de la chaleur, et on peut vérifier que  $u(x, t)$  se prolonge par continuité pour  $t = 0$  par  $u(x, 0) = 0$ . Mais la fonction nulle est aussi solution de ce même problème de Cauchy, pour lequel il n'y a donc pas a priori unicité de la solution sans hypothèses supplémentaires (portant ici sur la croissance des solutions considérées).

### 3.1.2 Cas d'une barre finie

On suppose la barre finie de longueur  $L$ , et on assimile celle-ci au segment  $[0, L]$ . On se propose ici d'étudier l'équation avec :

— les conditions aux limites :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

pour tout nombre réel positif  $t$ , qui indiquent que les extrémités de la barre sont maintenues à la température 0 ;

— la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x)$$

pour  $0 \leq x \leq L$ , qui indique la température des différents points de la barre à l'instant initial ;

— avec aussi, bien sûr :

$$f(0) = f(L) = 0.$$

On supposera ici cette fonction  $f$  continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, L]$  et, pour simplifier les notations, on posera encore

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{c}.$$

#### 3.1.2.1 Unicité d'une éventuelle solution

Deux méthodes peuvent ici être mises en œuvre, l'une analogue à celle développée dans l'étude des équations hyperboliques (§ 2.1.2.2), l'autre analogue à celle qui sera développée pour les équations elliptiques (§ 4).

On suppose donc que l'on a deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant la même condition initiale et les mêmes conditions aux limites.

On pose alors  $u = u_1 - u_2$  et l'on a donc :

$$u(x, 0) = 0 \text{ et } u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

#### ■ Première méthode

On introduit la fonction suivante, obtenue en multipliant l'équation de la chaleur par  $u$  et en l'intégrant par rapport à  $x$  sur  $[0, L]$  :

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) u(x, t) dx = \omega^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) u(x, t) dx.$$

Le premier membre apparaît comme une dérivée (on peut ici permuter les symboles de dérivation et d'intégration) et l'on peut intégrer par parties le second membre en tenant compte du fait que  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L u^2(x, t) dx = -\omega^2 \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \leq 0.$$

Cela prouve que la fonction  $t \rightarrow \int_0^L u^2(x, t) dx$  est décroissante.

Comme elle est nulle en 0 et visiblement à valeurs positives, elle est donc nulle, ce qui implique la nullité de  $u$  et l'égalité  $u_1 = u_2$ .

#### ■ Seconde méthode

On va utiliser ici le **principe du maximum**.

Considérons un nombre réel strictement positif  $\varepsilon$  et la fonction :

$$u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2,$$

qui vérifie :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - 2\varepsilon\omega^2 = -2\varepsilon\omega^2.$$

Sur le compact  $[0, L] \times [0, T]$  où  $T > 0$ , elle admet un maximum, atteint en un point  $(x_0, t_0)$  dont nous allons montrer qu'il est tel que :

$$x_0 = 0 \text{ ou } L \text{ avec } 0 \leq t_0 \leq T$$

ou tel que :

$$t_0 = 0 \text{ avec } 0 \leq x_0 \leq L.$$

Si tel n'est pas le cas, on a en effet :

$$0 < x_0 < L \text{ et } 0 < t_0 \leq T$$

et :

— la fonction  $x \rightarrow u_\varepsilon(x, t_0)$  atteint son maximum en  $x_0$  sur l'intervalle ouvert  $]0, L[$  de sorte que l'on a les deux relations :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0$$

— la fonction  $t \rightarrow u_\varepsilon(x_0, t)$  atteint son maximum en  $t_0$  sur  $]0, T[$  de sorte que, en considérant sa dérivée en  $t_0$  comme sa dérivée à gauche, on a par définition :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0 .$$

On a alors, en combinant ces deux inégalités :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, t_0) = -2\varepsilon\omega^2 \geq 0 .$$

Cette contradiction prouve le résultat annoncé, à savoir que  $u_\varepsilon$  atteint son maximum nécessairement sur l'un des trois bords inférieurs du rectangle  $[0, L] \times [0, T]$ . Comme on sait que  $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2$  et que  $u$  est nulle sur les trois bords inférieurs de ce rectangle, ce maximum de  $u_\varepsilon$  est donc inférieur ou égal à  $\varepsilon L^2$ .

Il en résulte que le maximum de  $u$  sur ce même rectangle, qui est inférieur ou égal à celui de  $u_\varepsilon$  est lui-même inférieur à  $\varepsilon L^2$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, ce maximum de  $u$  est donc négatif et  $u$  est donc à valeurs négatives sur le rectangle  $[0, L] \times [0, T]$ .

Par le même raisonnement, quitte à remplacer  $u$  par  $-u$ , on voit que  $-u$  est aussi à valeurs négatives, et donc  $u$  à valeurs positives, sur ce même rectangle.

En conclusion, pour tout  $T \geq 0$ ,  $u$  est nulle sur  $[0, L] \times [0, T]$ , donc sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$  et l'on a bien l'égalité  $u_1 = u_2$ .

#### 3.1.2.2 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

L'idée de la méthode est la même que pour les équations hyperboliques (§ 2.1.2.3).

■ On commence par rechercher des solutions multiplicatives non nulles de la forme

$$(x, t) \rightarrow u(x) v(t)$$

vérifiant les conditions aux limites vues au début du paragraphe 3.1.2.

Ici, de telles solutions vérifient donc :

$$u(x) v'(t) = \omega^2 u''(x) v(t).$$

Puisque l'on recherche des solutions non nulles, il existe a priori des nombres réels  $x_0$  et  $t_0$  pour lesquels :

$$u(x_0) \neq 0 \text{ et } v(t_0) \neq 0 .$$

On en déduit, quitte à fixer  $x = x_0$ , puis  $t = t_0$ , l'existence de constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que l'on ait pour  $t \geq 0$  et  $0 \leq x \leq L$  :

$$u''(x) = \lambda u(x);$$

$$\nu'(t) = \mu \nu(t).$$

En reportant réciproquement dans l'équation, on voit que, en fait :

$$\mu = \omega^2 \lambda$$

et pour tenir compte des conditions aux limites, il faut enfin bien sûr que :

$$u(0) = u(L) = 0.$$

(On est encore amené à résoudre un problème, très simple, de Sturm-Liouville). Cette dernière condition ne peut être évidemment réalisée (ainsi qu'on l'a déjà détaillé dans le paragraphe 2.1.2.3) que si, et seulement si :

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

où  $n$  désigne un nombre entier quelconque supérieur ou égal à 1, et l'on obtient alors les solutions suivantes :

$$u(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right);$$

$$\nu(t) = B_n \exp\left(-\frac{\omega^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}\right).$$

■ L'équation étant linéaire, les combinaisons linéaires des solutions précédentes sont encore solutions de l'équation. L'idée est à nouveau de ne pas se borner à des « combinaisons linéaires finies » pour obtenir une solution.

Posons donc, de façon purement formelle (on peut faire  $A_n = 1$ ) :

$$u(x, t) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\omega^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}\right).$$

La condition de Cauchy portant sur  $u(x, 0)$  sera formellement vérifiée en choisissant les coefficients  $B_n$  tels que :

$$f(x) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Un tel développement est celui d'une fonction impaire et  $2L$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , que l'on obtient en prolongeant la fonction  $f$  par impaire sur  $[-L, L]$ , puis par  $2L$ -périodicité. La fonction  $f$  ainsi prolongée est clairement continue, de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit qu'elle est développable en série de Fourier et que sa série de Fourier converge normalement vers  $f$ .

Si l'on pose donc :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\omega^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}\right),$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy,$$

on voit que la série définissant  $u$  est normalement convergente sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$ , donc continue, et l'on vérifie aisément, à l'aide des théorèmes sur les séries de fonctions, qu'une telle fonction est de classe  $C^2$  sur  $[0, L] \times [0, +\infty]$ , les dérivations s'effectuant terme à terme, ce qui permet de vérifier que la fonction obtenue, qui vérifie les conditions initiale et aux limites, est solution de l'équation de la chaleur.

On notera que la convergence normale de la série, figurant ci-dessus sous le signe intégral, autorise la permutation des symboles de sommation et d'intégration, de sorte qu'en utilisant les formules

de trigonométrie usuelle, on obtient (la fonction  $f$  étant toujours supposée prolongée sur  $\mathbb{R}$  par impaire et  $2L$ -périodicité) les égalités suivantes :

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(y) \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \omega^2 t}{L^2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i n\pi(x-y)}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \omega^2 t}{L^2}\right) dy.$$

(Pour  $n = 0$ , l'intégrale de la fonction impaire  $f$  sur  $[-L, L]$  est nulle.

Cela s'écrit également avec la formule sommatoire de Poisson (cf. encadré) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}} \int_{-L}^{+L} f(y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y-2nL)^2}{4\omega^2 t}\right) dy.$$

Ici encore, la convergence normale de la série figurant sous le signe intégral justifie la permutation des symboles d'intégration et de sommation.

En effectuant alors, dans chaque intégrale, le changement de variables

$$z = y - 2nL$$

puis en prenant en compte la  $2L$ -périodicité de  $f$  (dont on rappelle qu'elle a été convenablement prolongée sur  $\mathbb{R}$  auparavant), on obtient enfin la formule suivante :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\omega^2 t}\right) dz.$$

On remarquera qu'elle est très exactement l'analogue de celle obtenue dans le cas d'une barre infinie (§ 3.1.1).

**1. La formule sommatoire de Poisson que l'on vient d'utiliser s'obtient facilement par développement en série de Fourier de la fonction indéfiniment dérivable et  $2L$ -périodique définie avec  $a > 0$  par :**

$$\phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(u-2nL)^2).$$

Le calcul de son coefficient de Fourier  $c_k$  donne en effet :

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \exp\left(-\frac{ik\pi u}{L}\right) \phi(u) du$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(u-2nL)^2) \exp\left(-\frac{ik\pi u}{L}\right) du.$$

Par convergence uniforme, il est possible de permute les symboles d'intégration et de sommation, ce qui donne alors :

$$c_k = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-L}^{+L} \exp(-a(u-2nL)^2) \exp\left(-\frac{ik\pi u}{L}\right) du.$$

En effectuant le changement de variable  $v = u - 2nL$ , on obtient (en tenant compte de la périodicité de l'exponentielle complexe) :

$$c_k = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-(2n+1)L}^{+(2n+1)L} \exp(-av^2) \exp\left(-\frac{ik\pi v}{L}\right) dv$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-av^2) \exp\left(-\frac{ik\pi v}{L}\right) dv.$$

Quitte à intégrer la forme différentielle (clairement exacte)  $\exp(-az^2)dz$  sur le bord du rectangle dont les quatre sommets sont  $(-A, 0)$ ,  $(A, 0)$ ,  $(A, ik\pi/2aL)$  et  $(-A, ik\pi/2aL)$ , puis à faire tendre  $A$  vers  $+\infty$  (les deux intégrales sur les bords verticaux du rectangle ont alors pour limite 0), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a\left(v + \frac{ik\pi}{2aL}\right)^2\right) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-av^2) dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Il en résulte que la valeur du coefficient de Fourier  $c_k$  est égale à :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2L} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{4aL^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a\left(v + \frac{ik\pi}{2aL}\right)^2\right) dv \\ &= \frac{1}{2L} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{4aL^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction  $\phi$  est développable en série de Fourier d'après le théorème de Dirichlet, on obtient la version suivante de la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(u - 2nL)^2) = \sqrt{\frac{\pi}{4aL^2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{4aL^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{ik\pi u}{L}\right)$$

et la forme utilisée dans le calcul mené plus haut en résulte en faisant  $u = x - y$  et  $a = 1/4\omega^2 t$ .

2. Contrairement à la situation qui prévalait avec l'équation des ondes (de type hyperbolique), on notera qu'avec l'équation de la chaleur (de type parabolique), il est hors de question de vouloir « remonter le temps » en attribuant à  $t$  des valeurs négatives, car les résultats obtenus perdent alors tout sens.

3. La solution  $u$  ainsi obtenue dépend continûment de la donnée initiale  $f$ . En effet, on remarque facilement que l'on a :

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Comme on l'a déjà indiqué dans le cadre de l'équation des cordes vibrantes, supposons que la donnée initiale  $f$  ne soit connue que par une approximation  $\underline{f}$ . Notons alors  $u$  et  $\underline{u}$  les solutions associées à ces données initiales exactes et approchées  $f$  et  $\underline{f}$

$$\Delta u = u - \underline{u} \text{ et } \Delta f = f - \underline{f}$$

les erreurs. On a par différence :

$$\Delta u(x, t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta f(z) \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\omega^2 t}\right) dz.$$

Et donc de même

$$\|\Delta u\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq L} |u(x) - \underline{u}(x)| \leq \|\Delta f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq L} |f(x) - \underline{f}(x)|.$$

## 3.2 Généralisation : équation de la chaleur en dimension $n$

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right).$$

■ Ainsi, pour une **plaqué rectangulaire** que l'on identifie au rectangle  $R = [0, a] \times [0, b]$ , le problème est par exemple d'étudier l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

où  $u(x, y, t)$  désigne la température au point des coordonnées  $(x, y)$  de la plaque à l'instant  $t$  avec :

— les **conditions aux limites** suivantes, réalisées pour tout nombre réel positif  $t$  :

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$$

$$(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

qui signifient que les bords de la plaque sont maintenues à la température 0.

— la **condition initiale** suivante, réalisée pour tout couple  $(x, y)$  de nombres réels tels que  $0 \leq x \leq a$  et  $0 \leq y \leq b$  :

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

qui indique la température des différents points de la plaque à l'instant initial ;

— avec aussi, bien sûr :

$$f(x, 0) = f(x, b) = f(0, y) = f(a, y) = 0.$$

On supposera ici cette fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour simplifier les notations, on posera encore  $\omega^2 = \frac{\gamma}{c}$ .

■ **L'unicité des solutions** de ce problème se traite exactement comme au paragraphe 3.1.2.1. Supposons que l'on dispose de deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant la même condition initiale et les mêmes conditions aux limites.

On pose  $u = u_1 - u_2$  et l'on a donc :

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$$

et

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b).$$

On peut alors utiliser l'une des deux méthodes déjà indiquées.

a) On considère la fonction définie pour  $t \geq 0$  par :

$$\begin{aligned} &\iint_R \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) u(x, y, t) dx dy \\ &= \omega^2 \iint_R \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) u(x, y, t) dx dy. \end{aligned}$$

Le premier membre apparaît comme une dérivée (on peut permute les symboles de dérivation et d'intégration) et l'on peut intégrer par parties le second membre en tenant compte du fait que  $u$  s'annule sur le bord du rectangle ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_R u^2(x, y, t) dx dy \\ &= -\omega^2 \iint_R \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 \right) dx dy \leq 0. \end{aligned}$$

Cela prouve que la fonction  $t \mapsto \iint_R u^2(x, y, t) dx dy$  est décroissante. Comme elle est nulle en 0 et à valeurs positives, elle est donc nulle, ce qui implique la nullité de  $u$  et l'égalité  $u_1 = u_2$ .

b) On utilise le principe du maximum en considérant un nombre réel strictement positif  $\varepsilon$  et la fonction

$$u_\varepsilon(x, y, t) = u(x, y, t) + \varepsilon(x^2 + y^2)$$

qui vérifie :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, y, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x, y, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y, t) = -4\varepsilon\omega^2.$$

Sur le compact  $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$  où  $T > 0$ , elle admet un maximum, atteint en un point  $(x_0, y_0, t_0)$ . On se propose d'établir qu'il est tel que :

$$x_0 = 0 \text{ ou } a \text{ ou } y_0 = 0 \text{ ou } b \text{ avec } 0 \leq t_0 \leq T$$

ou tel que :

$$t_0 = 0 \text{ avec } 0 \leq x_0 \leq a \text{ et } 0 \leq y_0 \leq b.$$

Sinon, on a en effet  $0 < x_0 < a$  et  $0 < y_0 < b$  et  $0 < t_0 \leq T$  et :

— la fonction  $x \rightarrow u_\varepsilon(x, y_0, t_0)$  atteint son maximum en  $x_0$  sur l'intervalle ouvert  $]0, a[$ , la fonction  $y \rightarrow u_\varepsilon(x_0, y, t_0)$  atteint son maximum en  $y_0$  sur l'intervalle ouvert  $]0, b[$ , de sorte que l'on a les relations :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x_0, y_0, t_0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0, t_0) \leq 0;$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x_0, y_0, t_0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0, y_0, t_0) \leq 0;$$

— la fonction  $t \rightarrow u_\varepsilon(x_0, y_0, t)$  atteint son maximum en  $t_0$  sur l'intervalle  $]0, T[$  de sorte que, en considérant sa dérivée en  $t_0$  comme sa dérivée à gauche, on a par définition :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) \geq 0.$$

On obtient alors en combinant ces deux inégalités :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0, t_0) \\ - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0, y_0, t_0) = -4\varepsilon\omega^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette contradiction prouve le résultat annoncé, à savoir que  $u_\varepsilon$  atteint son maximum sur l'un des cinq côtés inférieurs du parallélépipède  $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$ . Comme on sait que :

$$u_\varepsilon(x, y, t) = u(x, y, t) + \varepsilon(x^2 + y^2)$$

et que  $u$  est nulle sur les cinq côtés inférieurs de ce parallélépipède, ce maximum de  $u_\varepsilon$  est inférieur ou égal à  $\varepsilon(a^2 + b^2)$ .

Il en résulte que le maximum de  $u$  sur ce même parallélépipède, qui est inférieur ou égal à celui de  $u_\varepsilon$  est lui-même inférieur à  $\varepsilon(a^2 + b^2)$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, ce maximum de  $u$  est donc négatif et  $u$  est donc à valeurs négatives sur  $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$ .

Par le même raisonnement, quitte à remplacer  $u$  par  $-u$ , on voit que  $-u$  est aussi à valeurs négatives, et donc  $u$  à valeurs positives, sur ce même parallélépipède.

En conclusion, pour tout  $T \geq 0$ ,  $u$  est nulle sur le parallélépipède  $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$  donc sur  $[0, a] \times [0, b] \times [0, +\infty]$  et l'on a bien l'égalité  $u_1 = u_2$ .

De même, la **méthode de séparation des variables** permet d'obtenir la solution  $u$  du problème lorsque la fonction  $f$  est supposée suffisamment régulière. La résolution du problème de Sturm-Liouville conduit à nouveau aux fonctions trigonométriques, alors qu'avec une plaque circulaire, elle conduirait aux fonctions de BesSEL.

## 4. Une équation elliptique : l'équation de Laplace

### 4.1 Présentation

Reprendons l'équation de diffusion de la chaleur dans une plaque, que l'on a étudiée paragraphe 3.2. Si l'on parvient à un état d'équilibre, on voit que la température asymptotique d'équilibre  $u(x, y)$  au point de coordonnées  $(x, y)$  de la plaque vérifie l'équation elliptique suivante, dite **équation de Laplace** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ou

Comme on le voit sur cet exemple, cette équation elliptique est indépendante du temps et décrit un phénomène stationnaire.

■ De façon générale, en dimension  $n$ , l'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Dans un premier temps (§ 4.2), on étudiera simplement cette équation dans un ouvert  $U$  (tout en se limitant, pour les démonstrations, au cas  $n = 2$  du plan). Ses solutions sont, par définition, les fonctions harmoniques dans l'ouvert  $U$  et elles jouissent de nombreuses propriétés particulièrement intéressantes.

Dans un second temps (§ 4.3) et (§ 4.4), on étudiera l'équation de Laplace en ajoutant des conditions aux limites à la frontière de l'ouvert  $U$  (problèmes de Dirichlet ou de Neumann).

#### ■ Exemples de fonctions harmoniques

Cherchons les fonctions  $u$  harmoniques dans  $\mathbb{R}^n$  sauf à l'origine et ne dépendant que de la distance  $r$  à l'origine. Celles-ci vérifient

$$\Delta(u(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2})) = 0,$$

soit :

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0.$$

Pour  $n = 2$ , on obtient :

$$u(r) = \ln r;$$

et pour  $n \geq 3$  :

$$u(r) = -\frac{1}{(n-2)r^{n-2}}.$$

### 4.2 L'équation de Laplace et les fonctions harmoniques dans un ouvert $U$

Les solutions de l'équation de Laplace dans  $U$ , c'est-à-dire les fonctions harmoniques dans  $U$ , satisfont plusieurs propriétés remarquables, parmi lesquelles les suivantes.

**Proposition 3.**

On désigne par  $U$  un ouvert borné.

a) Une fonction  $u$  est supposée harmonique dans  $U$  et se prolongeant par continuité sur l'adhérence  $\bar{U}$  de  $U$ , c'est-à-dire sur  $U$  et sa frontière, vérifie le principe du maximum : autrement dit, la fonction  $u$  atteint son maximum et son minimum sur la frontière de  $U$ .

b) Deux fonctions harmoniques (ou plus généralement vérifiant le principe du maximum) dans  $U$  et se prolongeant par continuité sur l'adhérence  $\bar{U}$  de  $U$  sont égales dans  $U$  si, et seulement si, elles sont égales sur la frontière de  $U$ .

**Démonstration.** ◊

Le principe du maximum s'établit comme on l'a fait paragraphe 3.1.2.1. On considère un nombre réel strictement positif  $\varepsilon$  et la fonction :

$$u_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2).$$

Puisque  $u$  est harmonique, on a :

$$\Delta u_\varepsilon = 4\varepsilon.$$

a) Sur le compact  $\bar{U}$  constitué de  $U$  et de sa frontière, la fonction continue  $u_\varepsilon$  admet un maximum, atteint en un point  $M_0(x_0, y_0)$  qui appartient nécessairement à la frontière de  $U$ . Sinon,  $(x_0, y_0)$  appartient à l'ouvert  $U$  et :

— la fonction  $x \rightarrow u_\varepsilon(x, y_0)$  atteint son maximum en  $x_0$  sur un intervalle ouvert centré en  $x_0$  ;

— la fonction  $y \rightarrow u_\varepsilon(x_0, y)$  atteint son maximum en  $y_0$  sur un intervalle ouvert centré en  $y_0$ , de sorte que l'on a les relations :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0;$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

On en déduit que  $\Delta u_\varepsilon = 4\varepsilon \leq 0$ , ce qui est contradictoire et prouve donc que la fonction  $u_\varepsilon$  atteint son maximum en un point  $M_0(x_0, y_0)$  qui appartient comme annoncé à la frontière de  $U$ . On a donc pour tout point  $M$  appartenant à  $\bar{U}$  :

$$u(M) \leq u_\varepsilon(M) \leq u_\varepsilon(M_0) = u(M_0) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2) \leq u(M_0) + \varepsilon D^2$$

où  $D^2$  est la borne supérieure de l'ensemble des carrés des distances  $x^2 + y^2$  de l'origine O aux points de l'ouvert borné  $U$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient :

$$u(M) \leq u(M_0),$$

ce qui établit que  $u$  atteint son maximum sur la frontière de  $U$  (on procède de même pour le minimum).

b) Passons au second point. Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux fonctions harmoniques (ou vérifiant le principe du maximum) sur  $U$  qui se prolongent par continuité sur  $\bar{U}$ . L'égalité de ces deux fonctions sur la frontière de  $U$  implique que la différence  $u = u_1 - u_2$  est harmonique dans  $U$  et nulle sur la frontière de  $U$  : comme  $u$  atteint son maximum et son minimum sur la frontière de  $U$  (principe du maximum) on en déduit que  $u$  est nulle sur  $U$ , et donc que  $u_1 = u_2$ .

La réciproque est évidente. ◊

Avant d'établir d'autres résultats, on démontre maintenant deux formules de Green.

**Formules de Green :**

$$\iint_D \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx dy + \iint_D u \Delta v \, dx dy = \oint_{\partial D^+} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds.$$

$$\iint_D u \Delta v \, dx dy - \iint_D v \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial D^+} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Dans ces formules, on désigne :

- par  $D$  un compact connexe du plan dont le bord est supposé « suffisamment régulier » ;
- par  $\partial D^+$  et le bord orienté de  $D$  ;
- par  $\vec{n}$  la normale unitaire à  $\partial D^+$  orientée vers l'extérieur de  $D$  ;
- par  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^2$  sur l'intérieur de  $D$  et se prolongeant par continuité sur  $D$ .

**Démonstration.** ◊

Ces deux formules résultent directement de la formule de Green-Riemann que, selon l'habitude, on écrit sous la forme :

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D^+} P dx + Q dy.$$

La première formule s'obtient en posant ci-dessus :

$$P = -u \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } Q = u \frac{\partial v}{\partial x}$$

puis, en permutant les rôles de  $u$  et  $v$  et en soustrayant les deux égalités obtenues, on a la seconde formule. ◊

En prenant, dans la première formule de Green,  $u = 1$  et  $v$  harmonique, on obtient :

$$\oint_{\partial D^+} \frac{\partial v}{\partial n} \, ds = \oint_{\partial D^+} \vec{\nabla} v \cdot \vec{n} \, ds = 0.$$

Cette égalité signifie que le flux du gradient d'une fonction harmonique au travers d'un contour (ou d'une surface) fermé est nul.

**Proposition 4.**

Une fonction harmonique  $u$  dans un ouvert  $U$  vérifie le principe de la moyenne. Autrement dit, pour tout point  $M_0(x_0, y_0)$  de  $U$  et pour tout nombre  $r > 0$  tel que la boule fermée de centre  $M_0$  et de rayon  $r$  soit incluse dans l'ouvert  $U$ , le nombre  $u(x_0, y_0)$  est la moyenne des valeurs prises par  $u$  sur la sphère (et aussi sur la boule) de centre  $M_0$  et de rayon  $r$ , ce qui, en dimension 2, s'écrit :

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) r d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(M_0, r)} u(x, y) \, dx dy.$$

Réciiproquement, on peut établir que toute fonction continue dans  $U$  qui vérifie le principe de la moyenne est harmonique dans  $U$ .

**Démonstration.** ◊

Dans la seconde formule de Green, convenons de choisir :

- pour compact  $D$ , la couronne  $\left\{ \frac{M}{\varepsilon} \leq M_0 M \leq r \right\}$  avec  $0 < \varepsilon < r$ ,

dont le bord est composé, d'une part du cercle  $C(M_0, r)$  parcourue

dans le sens direct, et, d'autre part, du cercle  $C(M_0, \varepsilon)$  parcourue dans le sens indirect ;

- pour  $u$ , la fonction harmonique de l'énoncé ;
- pour  $v$ , la fonction (dont on sait qu'elle est harmonique dans  $D$ ) définie par

$$v(x, y) = \ln r \text{ où } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La seconde formule de Green donne dans ce contexte :

$$\oint_{\partial D^+} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \oint_{C(M_0, r)^+} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

$$- \oint_{C(M_0, \varepsilon)^+} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0.$$

La dérivée de  $v$  suivant la normale extérieure à la couronne  $D$  en un point  $(x, y)$  du cercle de centre  $M_0$  et de rayon  $r$  (resp.  $\varepsilon$ ) est :

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \text{ (resp. } 1/\varepsilon\text{),}$$

ce qui conduit à l'égalité suivante :

$$\frac{1}{r} \oint_{C(M_0, r)^+} u ds - \ln r \oint_{C(M_0, r)^+} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \oint_{C(M_0, \varepsilon)^+} u ds + \ln \varepsilon \oint_{C(M_0, \varepsilon)^+} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Comme le flux du gradient d'une fonction harmonique au travers d'un contour fermé est nul (cf. encadré précédent), le premier et le troisième des termes figurant dans cette dernière formule sont nuls et l'on a enfin :

$$\frac{1}{r} \oint_{C(M_0, r)^+} u ds - \frac{1}{\varepsilon} \oint_{C(M_0, \varepsilon)^+} u ds = 0.$$

En paramétrant les deux cercles de rayons  $\varepsilon$  et  $r$  par l'angle polaire  $\theta$ , il vient :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + \varepsilon \cos \theta, y_0 + \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

Faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et tenant compte de la continuité de  $u$  en  $M_0$ , le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre donne enfin :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta = 2\pi u(x_0, y_0).$$

Pour obtenir la seconde égalité, il suffit de changer  $r$  en  $\rho$  dans l'égalité ci-dessus, de multiplier celle-ci par  $\rho$  et d'intégrer de 0 à  $r$ , ce qui donne :

$$\int_0^r \int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) \rho d\theta d\rho = 2\pi \int_0^r \rho u(x_0, y_0) d\rho.$$

Passant de coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes, on a bien :

$$\iint_{B(M_0, r)} u(x, y) dx dy = \pi r^2 u(x_0, y_0). \quad \diamond$$

**1. Le principe de la moyenne** apparaît physiquement très naturel si l'on se souvient que l'équation de Laplace représente des phénomènes stationnaires.

**2. Le principe de la moyenne implique le principe du maximum.**

Supposons en effet que la fonction  $u$ , harmonique dans un ouvert connexe borné  $U$  et se prolongeant par continuité sur  $\bar{U}$ , atteigne son maximum  $\mu$  dans  $U$ .

Si  $M_0$  est un point appartenant à  $U$  où  $u$  atteint son maximum, on a :

$$u(M) \leq u(M_0)$$

sur un voisinage de ce point  $M_0$ . Choisissant un nombre réel strictement positif  $r$  assez petit, on a alors :

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(M_0, r)} u(x, y) dx dy \leq u(x_0, y_0).$$

Mais cette inégalité est en fait une égalité d'après le principe de la moyenne, et cela implique que, dans cette boule de centre  $M_0$  et de rayon  $r$ , on a :

$$u(M) = u(M_0).$$

Ainsi, l'ensemble des points  $M$  appartenant à  $U$  tels que  $u(M) = \mu$  est à la fois ouvert (d'après ce qui précède) et fermé (d'après la continuité de  $u$ ).

Puisque  $U$  est connexe, l'ensemble de ces points  $M$  tels que  $u(M) = \mu$  est à la fois ouvert et fermé (par continuité de  $u$ ). Ainsi, dans ce cas,  $u$  est constante. Il en résulte que si  $u$  n'est pas constante, elle atteint bien son maximum (et son minimum) sur la frontière de  $U$ .

**3. Les fonctions harmoniques dans  $U$  possèdent d'autres propriétés.** En particulier, toute fonction harmonique dans  $U$  est nécessairement indéfiniment dérivable (et ses dérivées sont bien sûr harmoniques) et analytique dans  $U$ .

## 4.3 L'équation de Laplace et le problème de Dirichlet dans un cercle

On se propose de résoudre le problème suivant : trouver les fonctions harmoniques  $U$  (c'est-à-dire solutions de l'équation de Laplace) dans le disque de centre  $O$  de rayon  $R$  qui se prolongent par continuité sur la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $R$  et vérifient :

$$U(R \cos \theta, R \sin \theta) = f(\theta)$$

où  $f$  est une fonction continue  $2\pi$ -périodique.

Autrement dit, on cherche les fonctions harmoniques  $U$  prenant des valeurs données sur la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

### 4.3.1 Unicité d'une éventuelle solution par le principe du maximum

Supposons que l'on dispose de deux solutions  $U_1$  et  $U_2$  de ce problème de Dirichlet. Celles-ci sont harmoniques dans le disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ , se prolongent par continuité à la circonference de centre  $O$  et de rayon  $R$  où elles sont égales.

D'après la proposition 3, elles sont égales.

### 4.3.2 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

Puisque l'on travaille sur un cercle, nous allons utiliser des coordonnées polaires de centre O. Au lieu de chercher directement une fonction harmonique  $(x, y) \rightarrow U(x, y)$  solution du problème, nous allons poser

$$U(x, y) = U(r \cos \theta, r \sin \theta) = u(r, \theta)$$

et déterminer d'abord  $u$ .

Vu l'expression du laplacien en coordonnées polaires, on sait que  $U$  vérifie  $\Delta U = 0$  si, et seulement si,  $u$  vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

De plus, cette fonction  $u$  devra vérifier la condition au bord  $u(R, \theta) = f(\theta)$ .

■ On commence, comme d'habitude, par chercher les solutions sous forme multiplicative

$$(r, \theta) \rightarrow u(r)v(\theta),$$

ce qui conduit à résoudre deux équations de la forme :

$$r^2 u''(r) + ru'(r) + \lambda u(r) = 0;$$

$$v''(\theta) - \lambda v(\theta) = 0$$

où  $\lambda$  désigne un nombre réel.

Pour tenir compte du fait que la fonction obtenue doit être de classe  $C^2$  sur le disque de centre O et de rayon  $R$ , il faut bien sûr que :

$$\begin{aligned} v(0) &= v(2\pi), \\ v'(0) &= v'(2\pi), \\ v''(0) &= v''(2\pi) \end{aligned}$$

(ce qui conduit encore à un problème de Sturm-Liouville). Ces dernières conditions ne peuvent être réalisées que si, et seulement si,  $\lambda$  est de la forme  $-n^2$  où  $n$  désigne un nombre entier naturel non nul.

L'équation en  $u$  est une équation d'Euler, dont on cherche des solutions dépendantes sur  $[0, +\infty[$  sous la forme  $r \rightarrow r^n$ , de sorte que les solutions obtenues pour les deux équations précédentes sont, avec  $r > 0$  :

$$v(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta);$$

$$u(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

Pour que  $u$  se prolonge par continuité sur  $[0, R]$ , il faut de plus que  $D_n = 0$ .

■ L'équation étant linéaire, on cherche donc, de façon formelle, des solutions de la forme suivante :

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum \left( \frac{r}{R} \right)^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

Pour que la condition au bord du cercle soit vérifiée, il faut enfin que, pour  $r = R$  :

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

On choisira donc pour nombres  $A_n$  et  $B_n$  les coefficients de Fourier de  $f$  et l'on est finalement conduit à envisager pour solution de notre problème la fonction :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt \cos n\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \sin(n\theta) \right). \end{aligned}$$

Cette expression peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta - t) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos nt \right) dt. \end{aligned}$$

En effet, la fonction  $f$  étant continue et  $2\pi$ -périodique est bornée, et il est clair que, pour  $0 \leq r < R$ , la série figurant ci-dessus sous le signe intégral est uniformément convergente sur  $[0, 2\pi]$ , ce qui justifie la permutation des symboles de sommation et d'intégration. La seconde expression obtenue résulte alors de la première à l'aide du changement de variable  $t' = \theta - t$ .

■ On s'intéresse maintenant à la fonction  $P$  suivante, définie pour tout couple  $(x, t)$  de nombres réels tels que  $-1 < x < 1$  et appelée **noyau de Poisson** du problème de Dirichlet relatif au cercle :

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nt.$$

On remarque d'abord que cette fonction est paire en la variable  $t$  et que son intégrale sur  $[0, 2\pi]$  est égale à 1 (on peut en effet intégrer terme à terme en  $t$  par convergence uniforme de la série). De plus, on a l'expression plus simple :

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nt = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} (xe^{it})^n \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{xe^{it}}{1 - xe^{it}} = \frac{1 - x^2}{2\pi(x^2 - 2x \cos t + 1)} \end{aligned}$$

Finalement, on dispose des deux formes suivantes pour  $u(r, \theta)$  :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} f(\theta - t) P\left(\frac{r}{R}, t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR \cos t + R^2)} dt. \\ u(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} f(t) P\left(\frac{r}{R}, \theta - t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR \cos(\theta - t) + R^2)} dt. \end{aligned}$$

Revenant en coordonnées cartésiennes, cette formule s'écrit aussi :

$$U(x, y) = \int_0^{2\pi} f(t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi(x^2 + y^2 - 2R(x \cos t + y \sin t) + R^2)} dt.$$

Il reste maintenant à voir si cette fonction est bien solution du problème de Dirichlet que l'on s'était donné au départ.

- Cette fonction est continue, de classe  $C^2$  et peut se dériver sous le signe intégral pour :

$$0 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

d'après les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégral. En effectuant le calcul, on vérifie, de plus, facilement que :

$$\Delta U(x, y) = \int_0^{2\pi} f(t) \Delta \left( \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi(x^2 + y^2 - 2R(x \cos t + y \sin t) + R^2)} \right) dt = 0$$

- Cette fonction se prolonge par continuité sur la circonférence de centre O et de rayon R, et  $u(r, \theta)$  tend bien vers  $f(\theta_0)$  lorsque  $(r, \theta)$  tend vers  $(R, \theta_0)$ . En effet, puisque l'intégrale du noyau de Poisson vaut 1, on a :

$$u(r, \theta) - f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} (f(\theta - t) - f(\theta_0)) \frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR \cos t + R^2)} dt.$$

La fonction  $f$  étant continue et  $2\pi$ -périodique est évidemment bornée sur  $\mathbb{R}$  (par un nombre  $M$ ) et uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe donc un nombre  $\alpha > 0$  tel que :

$$|x - y| \leq 2\alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Supposons donc  $|\theta - \theta_0| \leq \alpha$  et  $R \sin \alpha \leq r < R$  et montrons que  $u(r, \theta) - f(\theta)$  est alors inférieur en valeur absolue à  $3\varepsilon$ .

A cet effet, on découpe l'intervalle d'intégration  $[0, 2\pi]$  en trois intervalles, allant de 0 à  $\alpha$ , de  $\alpha$  à  $2\pi - \alpha$  et de  $2\pi - \alpha$  à  $2\pi$ . On a clairement :

$$|f(\theta - t) - f(\theta_0)| \leq \varepsilon$$

sur le premier et le dernier de ces trois intervalles et, le noyau de Poisson étant positif et d'intégrale égale à 1 sur  $[0, 2\pi]$ , on peut donc majorer par  $\varepsilon$  les intégrales sur ces premier et dernier intervalles, de sorte que l'on a :

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)|$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\varepsilon + \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} |f(\theta - t) - f(\theta_0)| \frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR \cos t + R^2)} dt \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{2M(R^2 - r^2)}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} \frac{dt}{(r - R \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} \end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que le dénominateur dans cette dernière intégrale est supérieur ou égal à  $R^2 \sin^2 \alpha$  (c'est évident pour  $\alpha \leq t \leq \pi/2$  et  $3\pi/2 \leq t \leq 2\pi - \alpha$  en minorant par 0 le premier terme situé au dénominateur ; c'est également vrai pour  $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$  car  $r - R \cos t \geq r \geq R \sin \alpha$ ). Finalement, on voit que, quitte à choisir  $r$  encore plus proche de  $R$ , on a bien le résultat voulu, c'est-à-dire :

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| \leq 2\varepsilon + \frac{2M(R^2 - r^2)}{R^2 \sin^2 \alpha} \leq 3\varepsilon.$$

Le problème de Dirichlet est ainsi résolu sur le cercle.

On laisse enfin au lecteur le soin de vérifier qu'ici encore la solution  $u$  obtenue pour le problème de Dirichlet sur le cercle dépend continûment de la donnée initiale  $f$  et de tirer les conséquences de ce résultat.

### Principe de la moyenne et harmonicité sur un ouvert.

On est maintenant en mesure de prouver (en restant dans le cas de deux variables, mais la démonstration se généralise sans grande modification au cas général) que toute fonction  $u$  continue sur un ouvert  $U$  et  $y$  vérifiant le principe de la moyenne est harmonique (réciproque de la proposition 4).

Considérons un point  $M_0$  appartenant à  $U$ . Comme  $U$  est ouvert, il existe un nombre réel  $R > 0$  tel que la boule fermée de centre  $M_0$  et de rayon  $R$  est incluse dans  $U$ . Introduisons alors, sur cette boule fermée, la fonction  $v$  définie par :

$$v(x, y) =$$

$$\int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi(x^2 + y^2 - 2R(x \cos t + y \sin t) + R^2)} dt$$

(On a repris la formule précédente en changeant  $f(t)$  en  $u(x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t)$ ).

D'après ce qui précède, cette fonction  $v$  est continue sur la boule fermée de centre  $M_0$  et de rayon  $R$ ; elle coïncide avec  $u$  sur la circonférence de centre  $M_0$  et de rayon  $R$  et elle est harmonique dans le disque de centre  $M_0$  et de rayon  $R$ , donc elle y vérifie le principe de la moyenne d'après la proposition 4.

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont donc égales sur la circonférence de centre  $M_0$  et de rayon  $R$  et vérifient le principe de la moyenne dans le disque de centre  $M_0$  et de rayon  $R$ , donc le principe du maximum (cf. encadré du paragraphe 4.2). Il résulte alors de la proposition 3 que  $u = v$  sur la boule fermée de centre  $M_0$  et de rayon  $R$  et  $u$ , comme  $v$ , est donc harmonique dans le disque de centre  $M_0$  et de rayon  $R$ , et par conséquent dans  $U$  puisque  $M_0$  est un point quelconque de  $U$ .

## 4.4 L'équation de Laplace et le problème de Neumann dans un cercle

### 4.4.1 Généralités

On se propose de résoudre le problème suivant : trouver les fonctions harmoniques  $U$  (c'est-à-dire solutions de l'équation de Laplace) dans le disque de centre O de rayon  $R$  qui se prolongent par continuité sur la circonférence de centre O et de rayon  $R$  et y admettent en tout point M ( $R \cos \theta, R \sin \theta$ ) un vecteur dérivé suivant le vecteur unitaire normal  $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta)$  vérifiant la condition dite de Neumann :

$$\frac{\partial U}{\partial n}(R \cos \theta, R \sin \theta) = f(\theta)$$

où  $f$  est une fonction continue  $2\pi$ -périodique.

Autrement dit, on cherche les fonctions harmoniques  $U$  dont la dérivée normale suivant la circonférence de centre O et de rayon  $R$  est donnée.

**Remarque préliminaire.** Rappelons que le flux du gradient d'une fonction harmonique au travers d'un contour (ou d'une surface) fermé est nul. En effet, la première formule de Green (§ 4.2) s'écrit :

$$\iint_D \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx dy + \iint_D u \Delta v \, dx dy = \oint_{\partial D^+} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds.$$

Appliquée avec  $u = 1$  et  $v = U$ , où  $U$  désigne une solution du problème de Neumann envisagé ci-dessus, on en déduit que la fonction  $f$  vérifie nécessairement la condition :

$$\oint_{C(0, R)} \frac{\partial U}{\partial n} \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n}(R \cos \theta, R \sin \theta) R \, d\theta = R \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = 0.$$

On verra que cette condition nécessaire d'existence des solutions est, en fait, suffisante.

#### 4.4.2 Unicité à une constante additive près d'une éventuelle solution

Supposons que l'on dispose de deux solutions  $U_1$  et  $U_2$  de ce problème de Neumann. Celles-ci sont harmoniques dans le disque de centre O et de rayon  $R$ , se prolongent par continuité à la circonference de centre O de rayon  $R$  où elles vérifient pour tout  $\theta$  :

$$\frac{\partial U_1}{\partial n}(R \cos \theta, R \sin \theta) = \frac{\partial U_2}{\partial n}(R \cos \theta, R \sin \theta).$$

D'après la formule de Green que l'on vient de rappeler, appliquée avec  $u = v = U_1 - U_2$ , on a :

$$\iint_{B(0, R)} \vec{\nabla}^2(U_1 - U_2)(x, y) \, dx dy = 0.$$

Comme  $U_1 - U_2$  est de classe  $C^2$ , son gradient est nul sur la boule de centre O et de rayon  $R$ , et  $U_1 - U_2$  y est constante.

Réiproquement, on vérifie que si  $U$  est solution du problème de Neumann précédent, alors  $U + Cte$  l'est également.

#### 4.4.3 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

Puisque l'on travaille sur un cercle, on utilise des coordonnées polaires de centre O. Au lieu de chercher directement une fonction harmonique  $(x, y) \rightarrow U(x, y)$  solution du problème, on pose :

$$U(x, y) = U(r \cos \theta, r \sin \theta) = u(r, \theta).$$

et on détermine d'abord  $u$ .

Les calculs conduits au paragraphe 4.3.2 amènent encore à considérer (au moins formellement) à une constante additive près :

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum \left( \frac{r}{R} \right)^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

Tenant compte de la relation immédiate :

$$\frac{\partial U}{\partial n}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta)$$

on voit qu'il faut enfin, pour que la condition de Neumann soit vérifiée, que :

$$f(\theta) = \sum \frac{n}{R} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

On choisira donc pour nombres  $nA_n/R$  et  $nB_n/R$  les coefficients de Fourier de  $f$  (on a  $A_0 = 0$  à cause de la condition nécessaire sur  $f$  obtenue initialement) et l'on est finalement conduit à envisager pour solution de notre problème la fonction :

$$u(r, \theta) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \left( \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt \cos n\theta + \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \sin n\theta \right).$$

Cette expression précédente peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \frac{R}{n\pi} \cos n(\theta - t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \frac{R}{n\pi} \cos nt dt. \end{aligned}$$

En effet, la fonction  $f$  étant continue et  $2\pi$ -périodique est bornée, et il est clair que, pour  $0 \leq r \leq R$ , la série figurant ci-dessus sous le signe intégral est uniformément convergente sur  $[0, 2\pi]$ , ce qui justifie la permutation des symboles de sommation et d'intégration. La seconde expression obtenue résulte alors de la première à l'aide du changement de variable  $t' = \theta - t$ .

■ On s'intéresse maintenant à la fonction  $P$  suivante, définie pour tout couple  $(x, t)$  de nombres réels tels que  $-1 < x < 1$  et appelée **noyau de Poisson** du problème de Neumann relatif au cercle :

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\pi} \cos nt.$$

Par dérivation terme à terme de cette série entière en  $x$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \cos nt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{it} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{it})^n \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{it}}{1 - xe^{it}} = \frac{\cos t - x}{\pi(x^2 - 2x \cos t + 1)}. \end{aligned}$$

Par intégration, on obtient alors :

$$P(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1).$$

Finalement, on dispose de la formule suivante pour  $u(r, \theta)$  :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= R \int_0^{2\pi} f(\theta - t) P\left(\frac{r}{R}, t\right) dt \\ &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \ln\left(\frac{r^2 - 2rR \cos t + R^2}{R^2}\right) dt. \end{aligned}$$

ou, en coupant le logarithme et en utilisant la nullité, l'intégrale de f sur  $[0, 2\pi]$  :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \ln(r^2 - 2rR \cos t + R^2) dt \\ u(r, \theta) &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \ln(r^2 - 2rR \cos(\theta - t) + R^2) dt. \end{aligned}$$

Revenant en coordonnées cartésiennes, cette dernière formule s'écrit aussi :

$$U(x, y) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \ln(x^2 + y^2 - 2R(x \cos t + y \sin t) + R^2) dt.$$

Comme pour le problème de Dirichlet, il resterait maintenant à voir si cette fonction est bien solution du problème de Neumann que l'on s'est donné au départ.

## 4.5 Le potentiel newtonien et l'équation de Poisson

On sait, en mécanique, que les forces de gravitation exercées sur un point quelconque par un corps de volume  $V$  et de masse volumique  $\rho$  proviennent d'un champ de gravitation  $g$  dérivant d'un potentiel de gravitation  $\Phi$ . En un point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  de l'espace, le **potentiel de gravitation** exercé par ce corps  $D$  est égal à :

$$\begin{aligned}\Phi(M_0) &= -G \iiint_D \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \\ &= -G \iiint_D \frac{\rho dV}{M_0 M}\end{aligned}$$

où  $G$  désigne la constante de la gravitation (égale à  $6,67 \cdot 10^{-11}$  S.I.) et où la fonction de masse volumique  $\rho$ , évidemment nulle à l'extérieur du corps considéré, sera supposée continue sur celui-ci et de classe  $C^1$  à l'intérieur de celui-ci.

On établit alors en mécanique les relations suivantes :

$$\begin{aligned}g &= -\vec{\nabla} \Phi, \\ \operatorname{div} g &= -4\pi G\rho.\end{aligned}$$

Puisque la divergence du gradient d'une fonction numérique de plusieurs variables n'est autre que son laplacien, on déduit de ces deux relations que :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho.$$

On dit alors que  $\Phi$  est solution de l'équation de Poisson et puisque  $\rho = 0$  à l'extérieur du corps considéré, on a  $\Delta\Phi = 0$  en tout point extérieur de celui-ci, ce qui signifie que le potentiel de gravitation  $\Phi$  créé par un corps est harmonique à l'extérieur de celui-ci.

### Exemple : potentiel newtonien créé par une boule lorsque $\rho$ ne dépend que de $r$ .

On considère la boule  $B$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  et l'on suppose que sa masse volumique  $\rho(x, y, z) = \rho(r)$  ne dépend que de  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Pour évaluer le potentiel newtonien qu'elle crée en un point  $M_0$ , nous allons supposer (ce qui ne change rien vu la symétrie du problème) que celui-ci appartient à l'axe  $Oz$  et qu'il a donc pour coordonnées  $(0, 0, r_0)$ . On calcule alors l'intégrale précédente, mais en passant en coordonnées sphériques, ce qui revient à poser :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Le jacobien de cette transformation étant égal à  $r^2 \sin \theta$ , on obtient donc :

$$\begin{aligned}\Phi(M_0) &= -G \iiint_B \frac{\rho(r) dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-r_0)^2}} \\ &= -G \int_0^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{r^2 \rho(r) \sin \theta d\phi d\theta dr}{\sqrt{r^2 - 2r_0 r \cos \theta + r_0^2}}.\end{aligned}$$

On intègre d'abord en  $\phi$ , puis un simple calcul conduit à :

$$\begin{aligned}\Phi(M_0) &= -\frac{2\pi G}{r_0} \int_0^R r \rho(r) [\sqrt{r^2 - 2r_0 r \cos \theta + r_0^2}]_0^\pi dr \\ &= -\frac{2\pi G}{r_0} \int_0^R r \rho(r) [|r+r_0| - |r-r_0|] dr.\end{aligned}$$

Il convient alors de distinguer suivant que  $M_0$  est extérieur ou intérieur à la boule  $B$ .

- Si  $M_0$  est extérieur à la boule, c'est-à-dire si  $r_0 \geq R$ , on a en notant  $m$  la masse de la boule :

$$\Phi(M_0) = -\frac{4\pi G}{r_0} \int_0^R r^2 \rho(r) dr = -\frac{mG}{r_0}.$$

On remarque que ce potentiel est égal à celui que créerait la même masse  $m$  située ponctuellement au centre  $O$  de la boule  $B$  considérée.

- Si  $M_0$  est intérieur à la boule, c'est-à-dire si  $r_0 \leq R$ , on a :

$$\Phi(M_0) = -\frac{4\pi G}{r_0} \int_0^R r^2 \rho(r) dr - 4\pi G \int_0^R r \rho(r) dr.$$

On vérifie que  $\Phi$  est continue sur l'espace, y compris sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  et l'on vérifie par un simple calcul de dérivées que :

—  $\Delta\Phi = 0$  à l'extérieur à la boule ( $\Phi$  est harmonique à l'extérieur de la boule),

—  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$  à l'intérieur de la boule, et en fait partout puisque  $\rho = 0$  à l'extérieur de la boule ( $\Phi$  vérifie donc l'équation de Poisson).

## 5. Théorie spectrale et séparation des variables

Pour de nombreuses équations aux dérivées partielles abordées précédemment, c'est la méthode de séparation des variables (consistant à rechercher d'éventuelles solutions de la forme :

$$(x, y) \rightarrow u(x)v(y),$$

puis à en former des combinaisons linéaires éventuellement infinies (en un sens à préciser) qui a souvent permis de déterminer les solutions recherchées.

Le succès théorique (et également pratique pour de nombreux cas particuliers simples) de cette méthode repose sur les fondements que nous exposons maintenant. On a vu, dans les paragraphes précédents, que la recherche de solutions de la forme

$$(x, y) \rightarrow u(x)v(y)$$

vérifiant des conditions aux limites imposées conduisait en général à la résolution d'équations différentielles, l'une d'inconnue  $u$ , l'autre d'inconnue  $v$ , l'une de ces deux fonctions au moins étant de plus astreinte à vérifier des conditions aux limites. Comme on l'a déjà indiqué, il s'agit en fait de résoudre ce qu'il est convenu d'appeler un problème de Sturm-Liouville, que nous définissons ci-dessous de façon plus précise.

**Définition 2.**

Soient  $p, q, r$  trois fonctions à valeurs réelles continues sur un segment  $[a, b]$ , la fonction  $p$  étant de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et les fonctions  $p$  et  $r$  étant à valeurs strictement positives sur  $[a, b]$ .

Soient  $(A, B)$  et  $(C, D)$  deux couples de nombres réels distincts de  $(0, 0)$ .

On appelle alors **problème de Sturm-Liouville** régulier associé à ces données la recherche des nombres réels  $\lambda$  et des solutions non nulles  $y$  de l'équation différentielle du second ordre :

$$(p(t)y')' + q(t)y + \lambda r(t)y = 0$$

qui vérifient de plus les conditions

$$Ay(a) + By'(a) = 0$$

et

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0.$$

**Exemple :** Le plus simple des problèmes de Sturm-Liouville déjà abordés est le suivant :

$$y'' + \lambda y = 0$$

avec  $y(0) = 0$  et  $y(\pi) = 0$ ,

dont les solutions sont les nombres

$$\lambda = n^2$$

et les fonctions associées

$$y(t) = C_n \sin nt$$

où  $n$  désigne un nombre entier naturel non nul et  $C_n$  une constante réelle.

De plus, toute fonction  $f$ , continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, \pi]$  qui vérifie de plus les deux conditions aux limites  $f(0) = f(\pi) = 0$ , peut être développée en série normalement convergente sous la forme :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \sin nx.$$

Cela n'est ici qu'une conséquence du théorème de convergence normale de Dirichlet sur les séries de Fourier, appliqué à la fonction  $f$  supposée prolongée sur  $\mathbb{R}$  de façon impaire et  $2\pi$ -périodique.

Nous verrons plus loin que les résultats de ce problème particulier se généralisent en fait aux problèmes de Sturm-Liouville réguliers.

Auparavant, donnons une interprétation de notre problème de Sturm-Liouville en termes de valeurs propres et de fonctions propres. A cet effet, on désignera par :

- $S$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^2$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant de plus les deux conditions aux limites :

$$Ay(a) + By'(a) = 0$$

et

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0.$$

- $L$  l'application linéaire définie de l'espace vectoriel  $S$  défini ci-dessus dans l'espace vectoriel  $C([a, b], \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  par la formule :

$$Ly(t) = \frac{-1}{r(t)} [(p(t)y'(t))' + q(t)y(t)].$$

Le problème est alors de rechercher les nombres réels  $\lambda$  pour lesquels existent des solutions non nulles  $y$  appartenant à  $S$  de l'équation  $Ly = \lambda y$ .

Si l'on met de côté le fait que  $L$  n'est pas un endomorphisme d'espaces vectoriels, mais une application linéaire de  $S$  dans  $C([a, b], \mathbb{R})$ , on voit qu'il s'agit de rechercher les valeurs propres  $\lambda$  et les fonctions propres associées  $y$  de  $L$ .

**Proposition 5.**

Dans le contexte introduit dans ce paragraphe 5, les sous-espaces propres de l'application linéaire  $L$  sont tous de dimension 1.

**Démonstration.** ◇

Un sous-espace propre  $E(\lambda)$  est par définition de dimension au moins 1 et il est ici de dimension au plus 2, car l'égalité :

$$Ly = \lambda y$$

implique que  $y$  est solution de l'équation différentielle :

$$py'' + p'y' + (q + \lambda r)y = 0,$$

et l'on sait par le théorème de Cauchy-Lipschitz que les solutions de cette équation différentielle homogène du second ordre forment un espace vectoriel de dimension 2.

Enfin, la dimension d'un sous-espace propre  $E(\lambda)$  est exactement égale à 1 ici car, si elle était égale à 2, les éléments de  $E(\lambda)$  seraient exactement (par égalité des dimensions) les solutions de l'équation différentielle

$$py'' + p'y' + (q + \lambda r)y = 0;$$

autrement dit, toute solution de cette équation appartiendrait à  $S$  et vérifierait les deux conditions aux limites :

$$Ay(a) + By'(a) = 0$$

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0.$$

Cela est impossible car la solution vérifiant les conditions initiales

$$y(a) = A$$

et

$$y'(a) = B$$

ne vérifie pas la première relation puisque  $(A, B) \neq 0$ . ◇

**Proposition 6.**

Dans le contexte introduit dans ce paragraphe 5, l'application linéaire  $L$  est autoadjointe pour le produit scalaire défini sur  $S$  par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) r(t) dt.$$

**Démonstration.** ◇

L'énoncé signifie simplement que, pour tout couple  $(f, g)$  de  $S$ , on a l'égalité :

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle.$$

Celle-ci se vérifie par intégration par parties. On a en effet :

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= - \int_a^b [(p(t)f'(t))' + q(t)f(t)g(t)] dt \\ &= [-p(t)f'(t)g(t)]_a^b + \int_a^b p(t)f'(t)g'(t)dt - \int_a^b q(t)f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

et, si l'on suppose les constantes  $A$  et  $C$  non nulles (on étudie plus simplement encore le cas où  $A$  ou  $C$  est nulle), il vient :

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \frac{C}{D} p(b) fg(b) - \frac{A}{B} p(a) fg(a) \\ &\quad + \int_a^b p(t)f'g'(t) - q(t)fg(t)dt. \end{aligned}$$

On voit maintenant que  $f$  et  $g$  jouent des rôles symétriques et, en permutant  $f$  et  $g$  puis en remontant les calculs, on a bien l'égalité voulue.  $\diamond$

Ce résultat est intéressant car on connaît déjà, au moins dans le contexte des espaces euclidiens (il s'agit des espaces de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  munis d'un produit scalaire), le **théorème spectral classique** concernant les opérateurs autoadjoints :

- les valeurs propres sont réelles ;
- les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux ;
- la somme directe des sous-espaces propres est égale à l'espace entier.

On démontre ici de la même façon les deux premiers points, de façon élémentaire, mais le troisième point doit, par contre, être précisé, et sa démonstration est beaucoup plus difficile : c'est le **théorème spectral d'Hilbert-Schmidt**, dont on donne l'énoncé.

#### Proposition 7.

*Dans le contexte introduit dans ce paragraphe 5, les valeurs propres de l'application linéaire  $L$  définies sont simples et peuvent être rangées en une suite croissante*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

tendant vers  $+\infty$ .

Si l'on désigne par  $e_n$  une fonction propre unitaire (autrement dit de norme 1 au sens de la norme dérivant du produit scalaire précédent) appartenant à  $S$  et associée à la valeur propre  $\lambda_n$  de  $L$ , la suite  $(e_n)$  est orthonormale et l'on a alors pour toute fonction  $f$  appartenant à  $S$  (et, plus généralement, pour toute fonction continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[a, b]$ ) vérifiant les deux conditions aux limites :

$$Af(a) + Bf'(a) = 0$$

et

$$Cf(b) + Df'(b) = 0$$

l'égalité suivante, où  $a \leq x \leq b$  :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, f \rangle e_n(x).$$

De plus, la convergence de cette série est absolue et uniforme sur  $[a, b]$ .

Dans les exemples étudiés dans les paragraphes précédents (§ 2 à § 4), c'est en fait ce théorème que l'on a démontré élémentairement à chaque fois, étant entendu que celui-ci est susceptible de généralisations (théorème dit de **Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira**) permettant l'étude des problèmes singuliers de Sturm-Liouville qui apparaissent lorsque le segment d'étude  $[a, b]$  est remplacé par un intervalle réel quelconque  $I$ , non nécessairement fermé ou non nécessairement borné.

Les suites des fonctions  $(e_n)$  qui s'introduisent ainsi conduisent à ce qu'il est convenu d'appeler en mathématiques les fonctions spéciales, et qui comprennent notamment toutes les familles de polynômes orthogonaux usuelles (Legendre, Hermite, Laguerre, Tchebychev, etc.) et les fonctions de Bessel qui s'introduisent avec le problème de Sturm-Liouville singulier associé à l'équation suivante (où  $v$  désigne un nombre réel arbitrairement donné) :

$$(xy')' - \frac{v^2}{x} y + \lambda xy = 0.$$

On donne maintenant, pour finir, l'exemple d'un problème de Sturm-Liouville singulier conduisant à l'utilisation de ces fonctions de Bessel.

#### Exemple : membrane vibrante d'un tambour circulaire

Considérons la vibration de la membrane d'un tambour circulaire que nous assimilerons au repos au disque de centre O et de rayon  $R$  du plan. La cote  $U(x, y, t)$  de cette membrane au point de coordonnées  $(x, y)$  à l'instant  $t$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

— avec la **condition aux limites** :

$$U(R \cos \theta, R \sin \theta, t) = 0$$

pour  $\theta$  quelconque et  $t \geq 0$ ,

— avec les **conditions initiales** :

$$U(x, y, 0) = f(x, y)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = 0$$

où la fonction  $f$  est supposée suffisamment régulière et nulle sur la circonference de centre O de rayon  $R$ .

Nous allons rechercher les solutions en passant en coordonnées polaires, en prenant la nouvelle fonction inconnue définie par :

$$u(r, \theta, t) = U(r \cos \theta, r \sin \theta, t).$$

Celle-ci vérifie donc, outre la condition aux limites  $u(R, \theta, t) = 0$  et des conditions initiales faciles à préciser, l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

Pour simplifier, nous en chercherons seulement les solutions possédant la symétrie de révolution : le dernier terme de l'équation ci-dessus est alors identiquement nul et on applique dans ce contexte la **méthode de séparation des variables**.

On recherche donc des solutions de la forme :

$$(r, t) \rightarrow u(r) v(t)$$

et telles que :

$$u(R) = 0.$$

Il est facile de voir qu'une telle fonction est solution si, et seulement si,  $u$  et  $v$  vérifient les équations :

$$\begin{aligned} ru'' + u' + \lambda ru &= 0 \\ v'' &= \mu v \end{aligned}$$

avec les conditions  $\mu = -\lambda v^2$  et  $u(R) = 0$ .

On voit facilement que la fonction  $u$  s'obtient par résolution d'un problème de Sturm-Liouville singulier sur le segment  $[0, R]$  puisque la fonction  $r$  s'annule en 0.

La condition aux limites est simplement  $u(R) = 0$  (la condition en 0 se limitant à exiger la continuité de  $u$  en ce point singulier pour le problème).

Ce problème de Sturm-Liouville est en fait bien connu et on peut le résoudre explicitement. On vérifie tout d'abord que le nombre réel  $\lambda$  est nécessairement positif. En multipliant la première de ces équations différentielles par  $u$ , on obtient en effet en intégrant sur  $[0, R]$  :

$$\int_0^R (ru(r)u''(r) + u(r)u'(r) + \lambda ru^2(r)) dr = 0.$$

Par intégration par parties sur les deux premiers termes, il vient alors :

$$[ru(r)u'(r)]_0^R - \int_0^R r u'^2(r) dr + \lambda \int_0^R r u^2(r) dr = 0.$$

Et comme le crochet est nul, la positivité de  $\lambda$  en résulte.

On posera donc  $\lambda = \omega^2$  et on constate que la fonction  $r \rightarrow u(r/\omega)$  est solution de l'équation de Bessel :

$$ry'' + y' + ry = 0.$$

Les seules solutions continues en 0 de cette équation de Bessel d'indice 0 sont de la forme

$$r \rightarrow CJ_0(r)$$

où  $C$  est une constante réelle arbitraire. Ainsi, on a :

$$u(r) = CJ_0(\omega r)$$

et comme  $u$  doit s'annuler en  $r = R$ , on voit que les nombres  $\omega R$  sont des zéros de  $J_0$ . Comme on sait que les zéros des fonctions de Bessel (et de  $J_0$  en particulier) forment une suite, que nous notons ici  $(x_n)$ , de nombres réels strictement positifs, on voit que  $\omega$  est nécessairement de la forme  $x_n/R$ .

Par conséquent, les solutions multiplicatives de l'équation

$$(r, t) \rightarrow u(r) v(t)$$

vérifiant  $u(R) = 0$  sont de la forme

$$(r, t) \rightarrow J_0(rx_n/R)(A_n \cos(vtx_n/R) + B_n \sin(vtx_n/R)).$$

■ Pour achever le problème, il reste à chercher des **solutions par superposition**, donc de la forme :

$$u(r, t) = \sum J_0\left(\frac{rx_n}{R}\right)\left(A_n \cos\frac{vtx_n}{R} + B_n \sin\frac{vtx_n}{R}\right)$$

et vérifiant les conditions initiales requises.

On choisit à cet effet  $B_n = 0$  et il reste à savoir si l'on peut déterminer des nombres  $A_n$  tels que l'on ait pour  $0 \leq r \leq R$  :

$$\phi(r) = \sum A_n J_0\left(\frac{rx_n}{R}\right).$$

Un tel choix des  $A_n$  est effectivement possible lorsque  $\phi$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, R]$  (mais il suffirait en fait qu'elle soit continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, R]$ ) et nulle en  $R$ , d'après l'extension signalée plus haut du théorème de Hilbert-Schmidt au cas de notre problème singulier de Sturm-Liouville.

## Références bibliographiques

- |  |  |  |
|--|--|--|
| <p>[1] REINHARD (H.). – <i>Équations différentielles</i>, Gauthier-Villars.</p> <p>[2] REINHARD (H.). – <i>Équations aux dérivées partielles</i>, Dunod.</p> | <p>[3] YOSIDA (K.). – <i>Équations différentielles et intégrales</i>, Dunod.</p> <p>[4] SCHWARTZ (L.). – <i>Méthodes mathématiques pour les sciences physiques</i>, Hermann.</p> | <p>[5] COURANT-HILBERT. – <i>Methods of mathematical physics</i>, Interscience Publishers.</p> |
|--|--|--|