



TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR

Réf. : **AF501 V1**

Date de publication :
10 octobre 2002

Méthode des différences finies pour les EDP d'évolution

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Pierre SPITERI**

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **06/04/2019**
Pour le compte : **7200043660 - centralesupelec // 195.221.160.3**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Méthode des différences finies pour les EDP d'évolution

par **Pierre SPITERI**
*Docteur ès sciences mathématiques
Professeur à l'École nationale supérieure d'électronique, d'électrotechnique,
d'informatique, d'hydraulique et de télécommunication de Toulouse*

1. Problèmes du premier ordre en temps. Équation de la chaleur .	AF 501 - 2
1.1 Position du problème	— 2
1.2 Schémas numériques de discrétisation par différences finies	— 2
1.3 Erreur de troncature, consistance et ordre d'un schéma	— 3
1.4 Stabilité des schémas numériques	— 4
1.5 Convergence des schémas	— 5
2. Problèmes du second ordre en temps. Équation des ondes.....	— 7
2.1 Position du problème	— 7
2.2 Schémas numériques de discrétisation par différences finies	— 8
2.3 Stabilité des schémas numériques	— 8
Références bibliographiques	— 11

Dans l'article [AF 500], nous avons abordé la résolution numérique de problèmes d'équations aux dérivées partielles stationnaires par la méthode des différences finies. Cette méthode peut être étendue à la résolution de problèmes d'évolution. Nous étudierons deux types de problèmes : d'une part les problèmes d'évolution du premier ordre en temps, dénommés également **problèmes paraboliques** [10] et d'autre part les problèmes d'évolution du second ordre en temps, dénommés également **problèmes hyperboliques** [10]. Les équations intervenant dans ces problèmes sont constituées pour partie d'une combinaison de dérivées partielles par rapport à la variable temporelle dont nous détaillerons le traitement numérique et pour partie d'une combinaison de dérivées partielles par rapport à la variable spatiale ; cette dernière partie a été traitée en détail dans l'article [AF 500], le problème pouvant être posé dans un domaine Ω , monodimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel ; pour simplifier l'exposé nous considérerons que le domaine est le segment $[0, 1]$, le cas bi et tridimensionnel ne présentant pas de difficultés majeures.

On rappelle que l'étude sur la méthode des différences finies pour résoudre des équations aux dérivées partielles se décompose en trois articles :

- [AF 500] Méthode des différences finies pour les EDP stationnaires ;
- [AF 501] Méthode des différences finies pour les EDP d'évolution ;
- [AF 502] Algorithmes numériques pour la résolution des grands systèmes.

problème à l'instant t_{m+1} , ce qui permet de définir le θ - schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{k} - a \left((1-\theta) \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2} + \theta \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} \right) \\ \quad = (1-\theta) f_i^m + \theta f_i^{m+1}, \quad 1 \leq i \leq n, m \geq 0 \\ \\ u_0^p = u_{n+1}^p = 0, \quad p = m \quad \text{et} \quad p = m+1 \\ \\ u_i^0 = u_0(ih) \end{array} \right.$$

avec $f_i^p = f(x_i, t_p)$, pour $p = m$ ou $p = m+1$.

Pour $\theta = 0$, le schéma précédent définit un **schéma explicite**, c'est-à-dire que les valeurs u_i^m étant connues (par la condition initiale lorsque $m = 0$, et pour $m > 0$ par le calcul de l'itéré en temps précédent), les valeurs u_i^{m+1} sont déterminées par la récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{m+1} = k f_i^m + u_i^m + \alpha (u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m), \quad 1 \leq i \leq n, m \geq 0 \\ \\ u_0^m = u_{n+1}^m = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(ih) \end{array} \right.$$

avec $\alpha = \frac{ak}{h^2}$.

Si l'on définit les vecteurs de dimension n par :

$$F^m = (k f_1^m, \dots, k f_n^m)^t$$

$$U^m = (u_1^m, \dots, u_n^m)^t$$

et la matrice B de dimension n par :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

le schéma explicite s'écrit matriciellement :

$$U^{m+1} = F^m + (I - \alpha B) U^m$$

Pour $\theta \neq 0$, le schéma précédent définit un **schéma implicite**, c'est-à-dire qu'à chaque pas de temps, en supposant connu le vecteur U^m (toujours par la condition initiale lorsque $m = 0$ et pour $m > 0$ par le calcul de l'itéré en temps précédent), le vecteur U^{m+1} est obtenu en résolvant le système linéaire suivant :

$$(I + \alpha \theta B) U^{m+1} = (1-\theta) F^m + \theta F^{m+1} + (I - \alpha (1-\theta) B) U^m$$

Notons immédiatement que, grâce aux résultats du paragraphe 4 de l'article [AF 500] pour $\theta \in]0, 1[$, la matrice $(I + \alpha \theta B)$ est inversible ; dans le cas du problème monodimensionnel en espace, la résolution de ce système s'effectue par une simple adaptation de la méthode de Gauss (cf. [1] pour l'adaptation de cet algorithme au cas des matrices tridiagonales). Pour des valeurs particulières du paramètre θ , on retrouve des schémas numériques particuliers ;

ainsi pour $\theta = 1$, on obtient le **schéma purement implicite** qui s'écrit matriciellement :

$$(I + \alpha B) U^{m+1} = F^{m+1} + U^m$$

alors que pour $\theta = 0,5$, on obtient le **schéma implicite de Crank-Nicolson** :

$$\left(I + \frac{\alpha}{2} B \right) U^{m+1} = \frac{1}{2} (F^m + F^{m+1}) + \left(I - \frac{\alpha}{2} B \right) U^m$$

Remarque

Il existe d'autres types de schémas numériques pour résoudre le problème modèle, par exemple le **schéma saute-mouton** défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{2k} - a \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2} = f_i^m, \quad 1 \leq i \leq n, m \geq 0 \\ \\ u_0^m = u_{n+1}^m = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(ih) \end{array} \right.$$

C'est un schéma à trois niveaux explicite qui, bien que plus précis que les schémas précédents, n'est pas intéressant sur le plan numérique car il est instable, c'est-à-dire sensible à la propagation des erreurs systématiques d'approximation, de chute ou de troncature. Citons également le **schéma explicite** à trois niveaux proposé par Du Fort et Frankel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{m+1} - u_i^{m-1}}{2k} - a \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2} = f_i^m, \quad 1 \leq i \leq n, m \geq 0 \\ \\ u_0^m = u_{n+1}^m = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(ih) \end{array} \right.$$

ainsi que le **schéma rétrograde implicite**, également à trois niveaux, suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{2} u_i^{m+1} - 2u_i^m + \frac{1}{2} u_i^{m-1} \right) - a \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} \\ \quad = f_i^m, \quad 1 \leq i \leq n, m \geq 0 \\ \\ u_0^{m+1} = u_{n+1}^{m+1} = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(ih) \end{array} \right.$$

1.3 Erreur de troncature, consistance et ordre d'un schéma

Pour chacun des schémas précédents, on remplace dans le schéma le terme u_i^m par $u(x_i, t_m)$ et l'on définit l'erreur de troncature, notée E_i^m , comme la différence entre le premier et le second membre de ces quantités. Ainsi pour le θ - schéma considéré au paragraphe précédent, on a l'expression suivante de l'erreur de troncature :

$$E_i^m = \frac{u(x_i, t_{m+1}) - u(x_i, t_m)}{k} - a \left((1-\theta) \frac{u(x_{i+1}, t_m) - 2u(x_i, t_m) + u(x_{i-1}, t_m)}{h^2} + \theta \frac{u(x_{i+1}, t_{m+1}) - 2u(x_i, t_{m+1}) + u(x_{i-1}, t_{m+1})}{h^2} \right) - (1-\theta) f(x_i, t_m) - \theta f(x_i, t_{m+1})$$

Remarque

On définit l'erreur de troncature associée au schéma saute-mouton, au schéma rétrograde et au schéma de Du Fort et Frankel de manière analogue.

On adapte à la situation des problèmes d'évolution les notions d'erreur de troncature, de consistance et d'ordre de schéma comme suit :

Définition 1. On appelle erreur de troncature E , la quantité définie par :

$$E = \text{Max} \{ E_i^m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq M \}$$

Définition 2. Un schéma numérique est consistant si $E \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$.

Définition 3. Un schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps, s'il existe une constante C' , indépendante de h et k telle que $E \leq C' (h^p + k^q)$.

On a le résultat suivant facilement vérifiable :

Théorème 1. On suppose que la solution du problème modèle est suffisamment régulière ; alors pour $\theta \in [0, 1]$, $\theta \neq 0,5$, le θ -schéma est d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. Pour $\theta = 0,5$, le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2 en espace et en temps.

Remarque

Il résulte du résultat précédent que le schéma explicite et le schéma purement implicite sont d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps.

Remarque

On vérifie que le saute-mouton et le schéma rétrograde sont d'ordre 2 en espace et en temps. L'étude du schéma de Du Fort et Frankel est plus délicate [2] ; en effet, ce dernier n'est consistant que si le rapport $\frac{k}{h} \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$. De plus, si l'on veut que le schéma de Du Fort et Frankel soit d'ordre 2 en espace, il faut prendre $k = O(h^2)$.

1.4 Stabilité des schémas numériques

La stabilité d'un schéma numérique pour l'approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles est une question importante et, apparemment, nouvelle ; en fait, nous avons vu au paragraphe 4 de l'article [AF 500] que, dans le cas des problèmes stationnaires, lorsque le pas de discrétisation tendait vers zéro, le système linéaire pouvait devenir mal conditionné, c'est-à-dire que la solution calculée du système discret pouvait être dénaturée. Dans le cas des problèmes d'évolution, on peut avoir le même type de comportement ; en effet, la question qui se pose peut être formulée de la façon suivante : compte tenu d'une part des erreurs systématiques introduites lors de la construction du schéma d'approximation et d'autre part compte tenu également de la mauvaise représentation des nombres en machine qui induisent des erreurs d'arrondi ou de troncature, est-ce que l'erreur va rester bornée et tendre vers zéro lorsque les paramètres de discrétisation h et k vont tendre vers zéro ? Sur le plan purement théorique, on vient de voir

que l'erreur de troncature a ce type de comportement lorsque ces paramètres de discrétisation tendent vers zéro et intuitivement on peut subodorer que la norme de l'erreur aura le même type de comportement. On verra dans la suite de ce paragraphe que ce n'est pas toujours vrai.

Il existe de nombreuses méthodes pour étudier la stabilité d'un schéma numérique ; nous en étudierons deux, connues sous le nom de :

- méthode matricielle ;
- méthode de Fourier ou méthode du coefficient d'amplification.

■ La **méthode matricielle** consiste à considérer qu'un schéma est stable si, lorsqu'une erreur est introduite sur les conditions initiales (par exemple, erreur d'arrondi ou de troncature), l'erreur sur la solution calculée à un instant fixé t n'est pas amplifiée ; l'idéal est, bien entendu, qu'elle ne soit pas amplifiée du tout et que :

$$\sup_{i,m} (|u_i^m - u(x_i, t_m)|)$$

reste borné quels que soient h et k . L'étude de la stabilité d'un schéma revient donc en fait à celle de l'amplification d'une perturbation sur la condition initiale U^0 ; on va vérifier que l'erreur sur la solution cherchée satisfait le schéma numérique homogène associé, ce qui va permettre de dégager des critères de stabilité. À ce stade, on peut donc donner la définition intuitive suivante de la stabilité :

Définition 4. Un schéma numérique est stable si la solution du schéma homogène associé est bornée en tout point x_i et t_m quels que soient h et k .

Pour illustrer cette approche intuitive, considérons le θ -schéma dont la formulation est la suivante :

$$(I + \alpha \theta B) U^{m+1} = (1 - \theta) F^m + \theta F^{m+1} + (I - \alpha (1 - \theta) B) U^m$$

et soit U^{m+1} la solution exacte du schéma numérique et V^{m+1} celle du schéma perturbé : on peut traduire l'imprécision par la relation suivante :

$$V^m = U^m + \varepsilon^m, \forall m \geq 0$$

avec ε^m erreur au pas m .

En remplaçant U^{m+1} par V^{m+1} dans le schéma précédent, on obtient :

$$(I + \alpha \theta B) \varepsilon^{m+1} = (I - \alpha (1 - \theta) B) \varepsilon^m$$

et on vérifie ainsi que le terme d'erreur est solution du schéma numérique homogène associé. Cette relation peut encore s'écrire :

$$\varepsilon^{m+1} = (I + \alpha \theta B)^{-1} (I - \alpha (1 - \theta) B) \varepsilon^m = P \varepsilon^m = \dots = P^{m+1} \varepsilon^0$$

avec $P = (I + \alpha \theta B)^{-1} (I - \alpha (1 - \theta) B)$.

Le schéma numérique sera donc stable si la norme de la matrice P^m reste bornée lorsque $m \rightarrow \infty$. La matrice B étant symétrique, on vérifie aisément que la matrice P est normale (c'est-à-dire que $P^t P = P P^t$) ; on peut alors exprimer la relation précédente dans la base des vecteurs propres de la matrice P ; soit Δ la matrice des valeurs propres de la matrice P . La relation $\varepsilon^{m+1} = P^{m+1} \varepsilon^0$, s'écrit alors $\bar{\varepsilon}^{m+1} = \Delta^{m+1} \varepsilon^0$, où $\bar{\varepsilon}^{m+1}$ est l'écriture de ε^{m+1} dans la base des vecteurs propres, et une condition suffisante de stabilité est donc :

$$|\mu_k(P)| \leq 1, \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

avec $\mu_k(P)$ valeurs propres de la matrice P , c'est-à-dire les coefficients diagonaux de la matrice Δ .

On vérifie facilement que :

$$\mu_k(P) = \frac{1 - \alpha(1 - \theta) \lambda_k(B)}{1 + \alpha \theta \lambda_k(B)}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

avec $\lambda_k(B)$ valeurs propres de la matrice B données par le résultat du lemme 5 de l'article [AF 500] ; on vérifie alors que la condition $-1 \leq \mu_k(P) \leq 1, \forall k \in \{1, \dots, n\}$, se traduit par la condition suivante :

$$\alpha = \frac{ak}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}, \theta \in [0, 1]$$

qui représente donc la condition de stabilité. On peut résumer l'étude précédente par le théorème suivant :

Théorème 2. Le θ -schéma est inconditionnellement stable si $\theta \geq 0,5$; si $\theta < 0,5$, ce schéma est stable si $\alpha = \frac{ak}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$.

Corollaire 1. Le schéma purement implicite ($\theta = 1$) et le schéma de Crank-Nicolson ($\theta = 0,5$) sont inconditionnellement stables. Le schéma purement explicite ($\theta = 0$) est stable à condition que $\alpha = \frac{ak}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Remarque

Le schéma saute-mouton est instable ; le schéma de Du Fort et Frankel et le schéma rétrograde sont inconditionnellement stables.

■ La méthode matricielle présentée ci-dessus est applicable dans le cas où la matrice B est symétrique. Or il existe des situations où cette matrice ne vérifie pas cette condition ; c'est le cas par exemple du problème de convection-diffusion d'évolution. Dans ce cas, le calcul du **coefficient d'amplification** permet de s'affranchir de cette contrainte et fournit une méthode d'analyse plus générale de la stabilité. La définition de la stabilité étant inchangée, considérons toujours le θ -schéma homogène :

$$u_i^{m+1} - u_i^m - \alpha \left[(1 - \theta) (u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m) + \theta (u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}) \right] = 0, \quad 1 \leq i \leq n, m \geq 0$$

que l'on peut encore formellement écrire en repassant à la variable d'espace continue x et en mettant dans le premier membre les termes à l'instant discret $(m+1)$ et dans le second membre ceux à l'instant discret m :

$$u^{m+1}(x) - \alpha \theta (u^{m+1}(x+h) - 2u^{m+1}(x) + u^{m+1}(x-h)) = u^m(x) + \alpha(1 - \theta) (u^m(x+h) - 2u^m(x) + u^m(x-h)), m \geq 0$$

Considérons la transformée de Fourier du schéma ainsi écrit ; on rappelle que cette transformation est définie par :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(-j\xi x) dx, j^2 = -1$$

On vérifie aisément par un calcul direct que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x \pm h) \exp(-j\xi x) dx = \hat{u}(\xi) \exp(\pm j\xi h)$$

et le schéma discret en temps s'écrit alors :

$$\hat{u}^{m+1}(\xi) = c(\xi) \hat{u}^m(\xi)$$

où $c(\xi)$ est le coefficient d'amplification défini par :

$$c(\xi) = \frac{1 + 2\alpha(1 - \theta)(\cos(\xi h) - 1)}{1 - 2\alpha\theta(\cos(\xi h) - 1)} = \frac{1 - 4\alpha(1 - \theta)\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}{1 + 4\alpha\theta\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}$$

$$= 1 - \frac{4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}{1 + 4\alpha\theta\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}$$

Comme précédemment, une condition suffisante de stabilité est donnée par $-1 \leq c(\xi) \leq 1$; or on a évidemment $c(\xi) < 1$; la vérification de la seconde inégalité conduit à la condition suivante :

$$\alpha = \frac{ak}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}, \theta \in [0, 1]$$

qui correspond à la condition obtenue par la méthode matricielle ; on retrouve donc les résultats obtenus et énoncés dans le théorème 2 et le corollaire 1.

1.5 Convergence des schémas

Soit e^m , le vecteur erreur au temps discret m et défini par :

$$e^m = (e_1^m, \dots, e_i^m, \dots, e_n^m)^t$$

avec :

$$e_i^m = u_i^m - u(x_i, t_m), 1 \leq i \leq n, m \geq 0$$

Définition 5. Un schéma numérique est convergent si :

$$|u_i^m - u(x_i, t_m)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall m \geq 0$$

Considérons le θ -schéma ; en considérant d'une part l'écriture du schéma et d'autre part celle de l'erreur de troncature et en soustrayant membre à membre, on vérifie aisément que les composantes de l'erreur satisfont le schéma numérique, avec un second membre égal à $-E_i^m$, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e_i^{m+1} - e_i^m}{k} - a \left((1 - \theta) \frac{e_{i+1}^m - 2e_i^m + e_{i-1}^m}{h^2} + \theta \frac{e_{i+1}^{m+1} - 2e_i^{m+1} + e_{i-1}^{m+1}}{h^2} \right) = -E_i^m, 1 \leq i \leq n, m \geq 0 \\ e_0^p = e_{n+1}^p = 0, p = m \text{ et } p = m+1 \\ e_i^0 = 0 \end{array} \right.$$

soit matriciellement :

$$(I + \alpha \theta B) e^{m+1} = E^m + (I - \alpha(1 - \theta)B) e^m$$

où les composantes du vecteur E^m sont égales à l'erreur de troncature, au signe près ; en multipliant scalairement par e^{m+1} , il vient :

$$\begin{aligned} \langle (I + \alpha\theta B) e^{m+1}, e^{m+1} \rangle &= \langle E^m, e^{m+1} \rangle \\ &+ \langle (I - \alpha(1-\theta)B) e^m, e^{m+1} \rangle, \quad \forall m \geq 0 \end{aligned}$$

Or, la matrice $(I + \alpha\theta B)$ étant symétrique définie positive, on peut minorer le second membre conformément aux résultats de la proposition 2 de l'article [AF 500] ; si, de plus, on note par ρ , la norme matricielle de $(I - \alpha(1-\theta)B)$, on obtient finalement :

$$\|e^{m+1}\|_2 \leq \beta \|E^m\|_2 + \rho \|e^m\|_2, \quad \forall m \geq 0$$

avec β inverse de la plus petite valeur propre de la matrice $(I + \alpha\theta B)$.

En posant $\bar{e}^m = \|e^m\|_2, \forall m \geq 0$, on obtient finalement :

$$\bar{e}^{m+1} \leq \beta \|E^m\|_2 + \rho \bar{e}^m, \quad \forall m \geq 0$$

Supposons, de plus, que le schéma vérifie la condition de stabilité, ce qui a pour conséquence que la quantité $\bar{e}^m = \|e^m\|_2, \forall m \geq 0$, est bornée. Pour pouvoir obtenir une majoration de la norme de l'erreur, on utilise le lemme suivant dont le résultat s'obtient par récurrence :

Lemme 1. Si l'on a une suite qui vérifie la relation de récurrence :

$$\bar{e}^{m+1} \leq \rho \bar{e}^m + \delta, \quad \bar{e}^m \geq 0, \quad \forall m \geq 0, \quad \rho \neq 1$$

alors :

$$\bar{e}^m \leq \rho^m \bar{e}^0 + \delta \frac{\rho^m - 1}{\rho - 1}, \quad \forall m \geq 0$$

En appliquant ce résultat à notre situation, compte tenu du fait que $\bar{e}^0 = 0$, on obtient :

$$\bar{e}^m = \|e^m\|_2 \leq \beta \frac{\rho^m - 1}{\rho - 1} \|E^m\|_2, \quad \forall m \geq 0$$

Si, de plus, le schéma numérique est consistant, l'inégalité précédente nous permet de vérifier qu'il est convergent. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème 3. Si le θ -schéma est stable et consistant alors il est convergent.

Le résultat précédent exprime que la stabilité et la consistance constituent une condition suffisante pour la convergence. En fait le théorème de Lax, que nous admettons [2], nous donne le résultat suivant :

Théorème 4. La stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un schéma numérique soit convergent vers la solution du problème, si ce dernier est discrétisé par un schéma consistant.

Remarque

Par application du théorème de Lax, on obtient un résultat de convergence pour le schéma de Du Fort et Frankel et pour le schéma rétrograde.

Exemple : à titre illustratif, on considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dont la solution exacte est donnée par :

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

On a étudié expérimentalement la stabilité et la précision du θ -schéma, pour $\theta = 0$, $\theta = 0,5$ et $\theta = 1$; les résultats des simulations sont représentés sur les figures 1, 2, 3, 4 et 5 où, sur ces dernières, chaque courbe représente la valeur de $u(x, t)$, pour $0 \leq x \leq 1$ et à un instant $t_m = m k$ donné. Dans la mesure où le terme source de l'équation de la chaleur [c'est-à-dire le second membre $f(x, t)$] à intégrer est nul, la solution $u(x, t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, ce que l'on vérifie expérimentalement. De plus, la donnée initiale $u_0(x)$, pour $0 \leq x \leq 1$, correspond à la courbe ayant la plus grande amplitude. La figure 1 représente la solution exacte, les figures 2 et 3 représentent la solution obtenue en mettant en œuvre le schéma explicite respectivement dans le cas où la condition de stabilité est vérifiée et dans celui où elle n'est pas vérifiée, les figures 4 et 5 respectivement dans le cas de l'utilisation du schéma de Crank-Nicolson et du schéma implicite. On constate expérimentalement que l'utilisation du schéma explicite nécessite le choix de pas de discrétisation en temps relativement petit (cf. figure 2 où $m = 900$) pour satisfaire la condition de stabilité ; dans le cas où $m = 500$ (cf. figure 3), cette condition de stabilité n'est pas vérifiée, ce qui se traduit par des oscillations de forte amplitude. Par contre, l'utilisation de schémas implicites inconditionnellement stables permet le choix de pas de temps k beaucoup plus grands ($m = 500$ dans les figures 4 et 5). On peut ainsi visualiser l'effet des instabilités lorsque celles-ci se produisent et constater que le schéma de Crank-Nicolson est le plus précis, conformément au résultat du théorème 1.

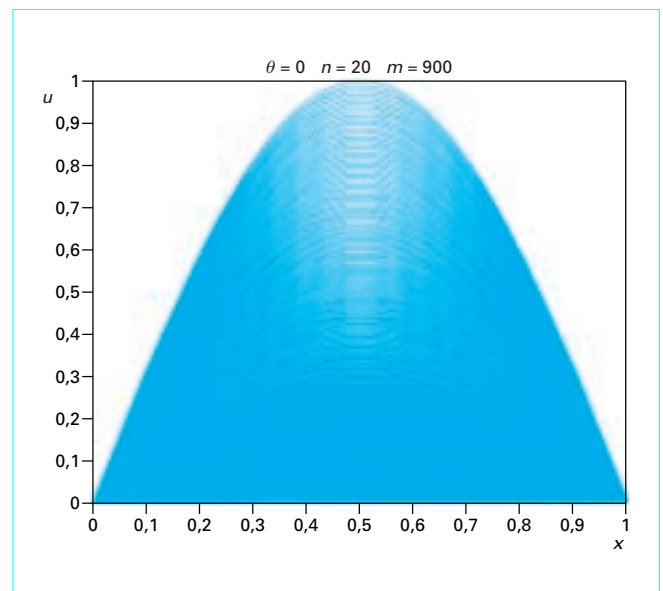


Figure 1 - Solution exacte

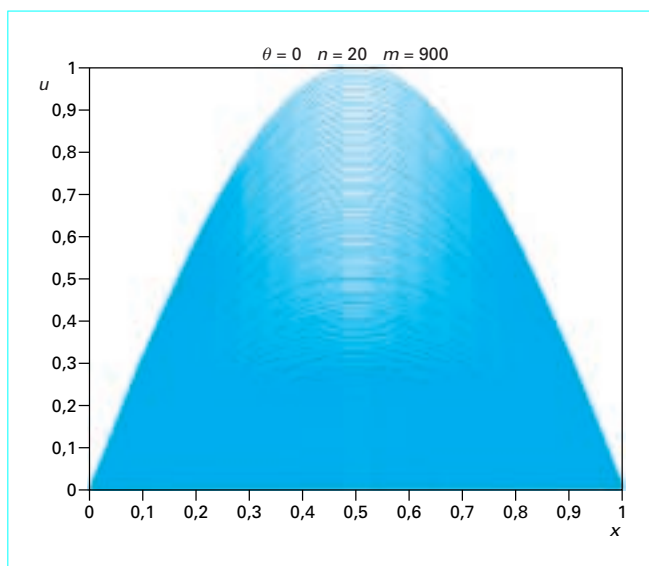


Figure 2 – Schéma explicite (stabilité)

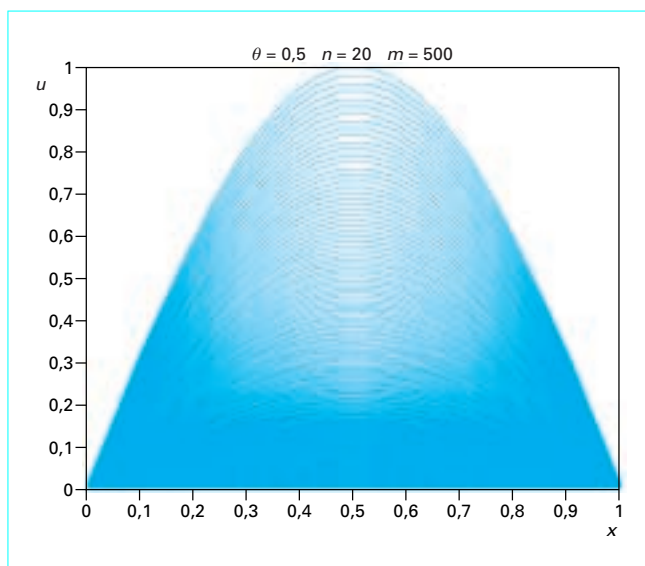


Figure 4 – Schéma implicite (Crank-Nicolson)

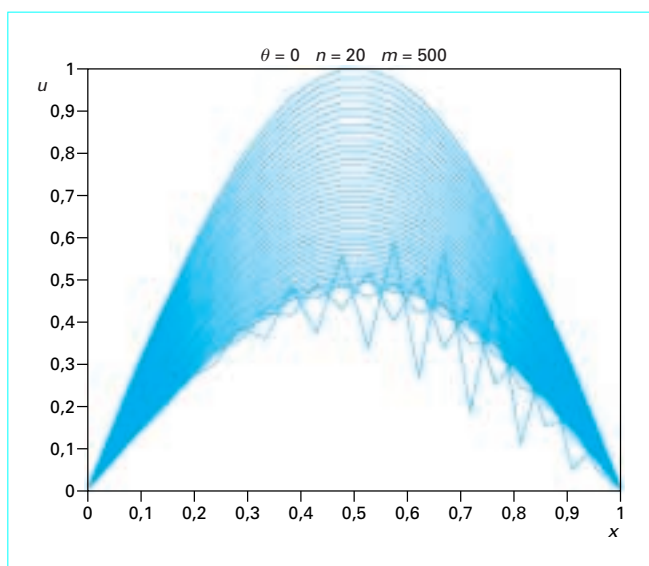


Figure 3 – Schéma explicite (instabilité)

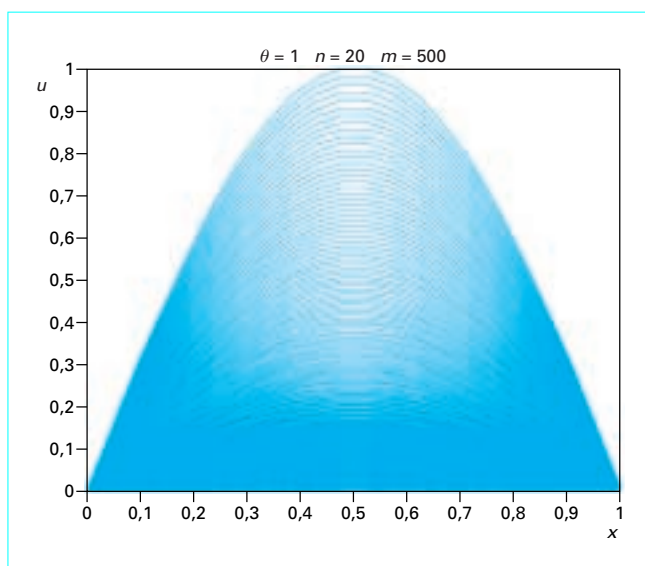


Figure 5 – Schéma implicite

2. Problèmes du second ordre en temps. Équation des ondes

Nous abordons rapidement dans ce paragraphe la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles linéaire hyperbolique du second ordre ; bien que le problème abordé ici présente certaines difficultés, les techniques de résolution numérique sont analogues à celles que nous avons abordées dans les paragraphes précédents, moyennant toutefois certaines adaptations ; en particulier, les notions d'ordre, de consistance, de stabilité et de convergence sont identiques à celles introduites dans le cadre des

problèmes paraboliques. C'est pourquoi, dans le présent paragraphe, nous nous limiterons à la présentation des principaux résultats nécessaires à la résolution numérique de l'équation des ondes.

2.1 Position du problème

On considère une corde de longueur unité attachée en chacune de ses extrémités. Soit $u(x, t)$ le déplacement de la corde au point $x \in [0, 1]$ et à tout instant $t > 0$. On suppose connus le déplacement initial $u_0(x)$ de la corde ainsi que sa vitesse initiale

$u_1(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$, où $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des fonctions continues données sur $[0, 1]$. On suppose, de plus, que la corde est excitée en tout point x du segment $[0, 1]$ et à tout instant $t > 0$ par une force $f(x, t)$. On se propose de déterminer le déplacement de la corde en tout point $x \in [0, 1]$ et à tout instant $t > 0$. La mise en équation de ce problème conduit à résoudre l'équation aux dérivées partielles du second ordre en temps suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[\\ u(0, t) = u(1, t), \quad t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in [0, 1] \end{array} \right.$$

avec $a > 0$ vitesse des ondes.

2.2 Schémas numériques de discrétisation par différences finies

Comme pour les problèmes précédents, on définit un pas de discrétisation spatial $h = \frac{1}{n+1}$ et $x_i = ih$ les points de l'intervalle $[0, 1]$ où l'on souhaite obtenir une approximation de la solution. Soit également $t_m = mk$, $m = 1, \dots, M$ les points de discrétisation de l'intervalle $[0, T]$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$, on considère les problèmes suivants :

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_m)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_m)}{\partial x^2} = f(x_i, t_m), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq m \leq M$$

que l'on peut approcher par différences finies par :

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{m+1}) - 2u(x_i, t_m) + u(x_i, t_{m-1}))}{k^2} \\ & - a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_m) - 2u(x_i, t_m) + u(x_{i-1}, t_m))}{h^2} + O(h^2, k^2) \\ & \equiv f(x_i, t_m), \quad 1 \leq i \leq n, \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

À partir de cette écriture, on définit deux grandes classes de schémas : le **schéma centré** et le **schéma implicite non centré**.

■ Soit $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$, un nombre réel donné ; pour $1 \leq i \leq n$, $m \geq 0$, on définit le **schéma centré** comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{m+1} - 2u_i^m + u_i^{m-1}}{k^2} - a^2 \left(\theta \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2} \right) \\ \quad = \theta f_i^{m+1} + (1-\theta) f_i^m \\ u_0^p = u_{n+1}^p = 0, \quad p = m, \quad p = m \pm 1 \\ u_i^0 = u_0(ih), \quad 0 \leq i \leq n+1 \\ \frac{u_i^1 - u_i^0}{k} = u_1(ih), \quad 0 \leq i \leq n+1 \end{array} \right.$$

qui pour $\theta \neq 0$ est un schéma implicite avec $f_i^p = f(x_i, t_p)$, $p = m, m \pm 1$; le cas $\theta = 0$ correspond au **schéma explicite classique** ou **schéma classique des ondes** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{m+1} - 2u_i^m + u_i^{m-1}}{k^2} - a^2 \left(\frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2} \right) = f_i^m, \\ \quad 1 \leq i \leq n, \quad m \geq 0 \\ u_0^m = u_{n+1}^m = 0 \\ u_i^0 = u_0(ih), \quad 0 \leq i \leq n+1 \\ \frac{u_i^1 - u_i^0}{k} = u_1(ih), \quad 0 \leq i \leq n+1 \end{array} \right.$$

On peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 5. Le schéma centré est précis à l'ordre 2 en espace et en temps.

■ Le **schéma implicite non centré** se définit sans difficulté, comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{m+1} - 2u_i^m + u_i^{m-1}}{k^2} - a^2 \left(\frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} \right) = f_i^{m+1}, \\ \quad 1 \leq i \leq n, \quad m \geq 0 \\ u_0^{m+1} = u_{n+1}^{m+1} = 0 \\ u_i^0 = u_0(ih), \quad 0 \leq i \leq n+1 \\ \frac{u_i^1 - u_i^0}{k} = u_1(ih), \quad 0 \leq i \leq n+1 \end{array} \right.$$

Théorème 6. Le schéma implicite non centré est précis à l'ordre 2 en temps et à l'ordre 1 en espace.

Remarque

Cependant, la discrétisation de $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ implique que, dans les deux cas précédents, on a un schéma précis à l'ordre 1 en temps.

Remarque

Le schéma centré est invariant si l'on inverse le sens du temps, ce qui est conforme aux propriétés de l'équation des ondes, invariante par changement du sens du temps ; cela n'est plus vrai pour le schéma implicite non centré, qui, dans la pratique, n'est pas très utilisé dans la mesure où il n'est pas physiquement adapté.

2.3 Stabilité des schémas numériques

On remarque que les schémas numériques définis au paragraphe 2.2 font intervenir les valeurs de la solution approchée aux niveaux de temps $m-1$, m et $m+1$: on a défini un schéma à trois niveaux. Pour étudier la stabilité des schémas, on utilise la méthode de Fourier ; cependant, compte tenu du fait que les schémas sont à trois niveaux, on va définir non plus un coefficient d'amplification, mais une matrice d'amplification.

Posons $\alpha = \frac{ak}{h}$. Considérons le schéma centré homogène, qui s'écrit en repassant à la variable d'espace continue pour $1 \leq i \leq n$, $m \geq 0$:

$$u^{m+1}(x_i) - 2u^m(x_i) + u^{m-1}(x_i) - \alpha^2 [\theta (u^{m+1}(x_{i+1}) - 2u^{m+1}(x_i) + u^{m+1}(x_{i-1})) + (1-2\theta)(u^m(x_{i+1}) - 2u^m(x_i) + u^m(x_{i-1})))] = 0$$

et, par transformation de Fourier de la relation précédente, on obtient tous calculs faits :

$$(1 + \theta \sigma^2(\xi)) \hat{u}^{m+1}(\xi) + (\sigma^2(\xi)(1-2\theta) - 2) \hat{u}^m(\xi) + (1 + \theta \sigma^2(\xi)) \hat{u}^{m-1}(\xi) = 0$$

avec : $\sigma(\xi) = 2 \frac{ak}{h} \sin\left(\frac{\xi h}{2}\right) = 2\alpha \sin\left(\frac{\xi h}{2}\right)$

On a évidemment $\hat{u}^m(\xi) = \hat{u}^m(\xi)$; compte tenu de cette dernière relation, on peut écrire l'égalité issue de la transformation de Fourier sous forme d'un schéma à deux niveaux :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^m \\ \hat{u}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{2 - \sigma^2(1-2\theta)}{1 + \sigma^2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{m-1} \\ \hat{u}^m \end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice 2×2 qui intervient dans l'écriture du schéma vectoriel à deux niveaux est une matrice d'amplification.

On admettra le résultat suivant qui constitue une extension de l'analyse de la stabilité vue au paragraphe 1 dans le cas scalaire :

Théorème 7. Un schéma numérique à trois niveaux est stable si le rayon spectral de la matrice d'amplification est inférieur ou égal à l'unité.

Théorème 8. Le schéma centré est inconditionnellement stable si $\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$; il est stable si $0 \leq \theta < \frac{1}{4}$ à condition que $\alpha = \frac{ak}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}}$; en particulier, le schéma explicite centré correspondant à la valeur de θ nulle est stable à condition que $\alpha = \frac{ak}{h} \leq 1$.

En effet, les valeurs propres λ de la matrice d'amplification associée au schéma centré sont solutions de l'équation du second degré :

$$\lambda^2 - \frac{2 - \sigma^2(1-2\theta)}{1 + \sigma^2\theta} \lambda + 1$$

Leur produit est égal à 1 et elles seront toutes deux de module inférieur ou égal à l'unité si et seulement si elles sont complexes conjuguées, auquel cas elles seront de module unité ; on doit donc vérifier la condition suivante :

$$(2 - \sigma^2(1-2\theta))^2 - 4(1 + \sigma^2\theta)^2 \leq 0$$

soit encore :

$$\sigma^2 \leq \frac{4}{1-4\theta}, \quad \sigma = \sigma(\xi) = 2 \frac{ak}{h} \sin\left(\frac{\xi h}{2}\right) = 2\alpha \sin\left(\frac{\xi h}{2}\right)$$

On remarque immédiatement que cette inégalité est vérifiée quel que soit ξ , si $\theta \geq \frac{1}{4}$, sans restriction sur le paramètre k ; si $\theta < \frac{1}{4}$, la condition $\alpha = \frac{ak}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}}$ doit être vérifiée.

Pour le schéma implicite décentré, on opère de façon analogue ; le schéma homogène s'écrit :

$$u^{m+1}(x_i) - 2u^m(x_i) + u^{m-1}(x_i) - \alpha^2 [u^{m+1}(x_{i+1}) - 2u^{m+1}(x_i) + u^{m+1}(x_{i-1})] = 0$$

d'où, après transformation de Fourier :

$$(1 + 4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)) \hat{u}^{m+1}(\xi) - 2\hat{u}^m(\xi) + \hat{u}^{m-1}(\xi) = 0$$

que l'on peut encore écrire sous la forme d'un schéma vectoriel à deux niveaux :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^m \\ \hat{u}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{2}{1 + \sigma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{m-1} \\ \hat{u}^m \end{pmatrix}$$

Théorème 9. Le schéma implicite décentré est inconditionnellement stable.

En effet, les valeurs propres λ de la matrice d'amplification associée au schéma implicite décentré sont solutions de l'équation du second degré :

$$(1 + \sigma^2) \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Elles valent $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm j\sigma}{1 + \sigma^2}$ et leur module vaut $|\lambda_{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}}$,

qui est strictement inférieur à 1 dès que $\sigma \neq 0$.

Exemple : à titre illustratif, on considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dont la solution exacte est donnée par :

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$$

Comme au paragraphe précédent, on a étudié expérimentalement la stabilité et la précision du schéma centré, pour $\theta = 0$, $\theta = 0,25$ et $\theta = 0,5$ ainsi que pour le schéma implicite non centré ; les résultats des simulations sont représentés sur les figures **6**, **7**, **8**, **9**, **10** et **11**. De façon analogue au cas de l'équation parabolique, les courbes représentées sur ces figures visualisent la solution $u(x, t)$, pour $0 \leq x \leq 1$, de l'équation des ondes homogènes, à des instants $t_m = m k$ fixés. Comme précédemment et dans la mesure où l'on considère l'équation homogène, la limite de $u(x, t)$ est nulle lorsque la variable t tend vers l'infini. La figure **6** représente la solution exacte, les figures **7** et **8** représentent la simulation obtenue en mettant en œuvre le schéma explicite respectivement dans le cas où la condition de stabilité est vérifiée et dans celle où elle n'est pas vérifiée, les figures **9** et **10** respectivement dans le cas où $\theta = 0,25$ et $\theta = 0,5$. La figure **11** représente le résultat de la simulation pour l'utilisation du schéma implicite non centré. On constate ici aussi que, pour satisfaire les conditions de stabilité, le schéma explicite nécessite l'utilisation de pas de temps k relativement petits, alors que les schémas implicites, inconditionnellement stables, permettent le choix de pas de temps relativement plus importants. Enfin on remarque, sur la figure **11**, que les solutions obtenues par le schéma implicite décentré ne sont pas symétriques par rapport à l'axe horizontal, contrairement aux autres solutions numériques et à la solution exacte ; cette observation illustre le fait que le schéma implicite décentré est inadapté dans la mesure où il ne respecte pas la physique. On peut ainsi visualiser l'effet des instabilités lorsque celles-ci se produisent et observer la précision des différents schémas, conformément aux résultats des théorèmes **5** et **6**.

Pour de plus amples renseignements concernant la méthode des différences finies pour les EDP d'évolution, le lecteur pourra consulter les références [3] [4] [5] [6] [7] [8] et [9].

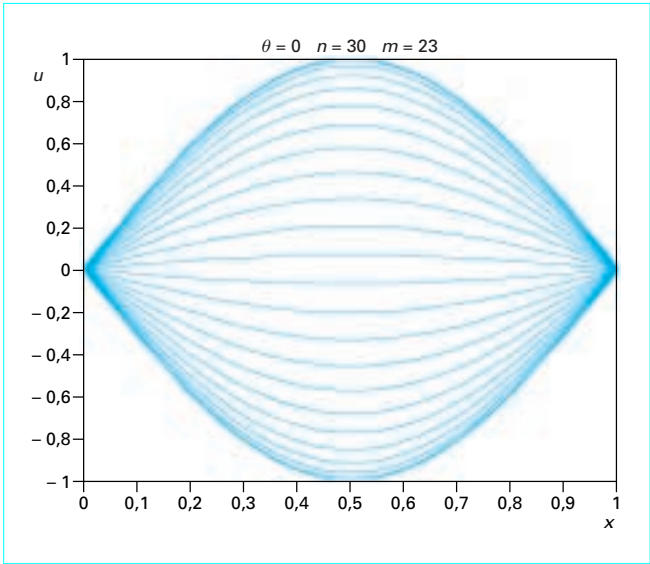


Figure 6 – Solution exacte

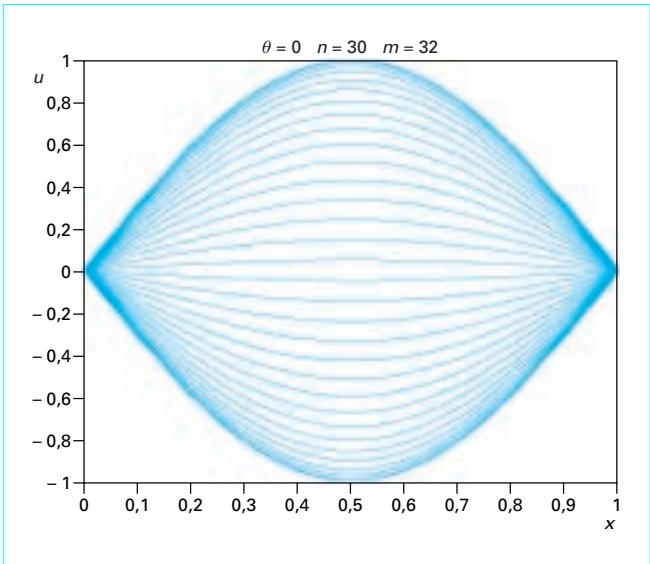


Figure 7 – Schéma explicite (stabilité)

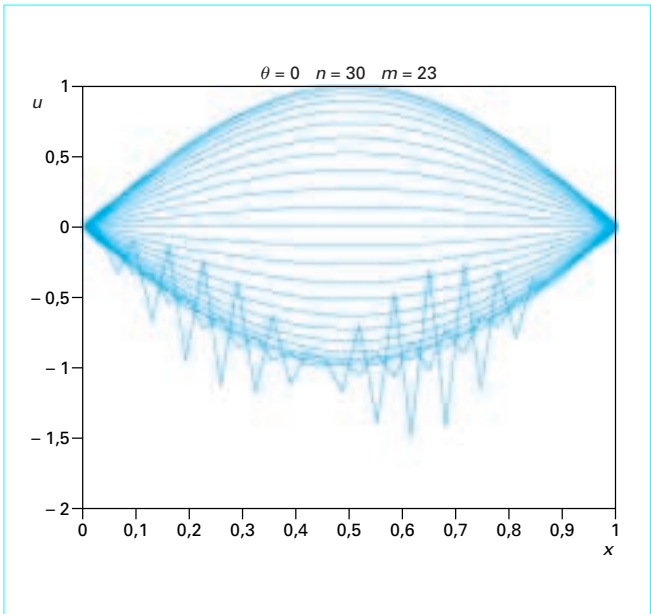


Figure 8 – Schéma explicite (instabilité)

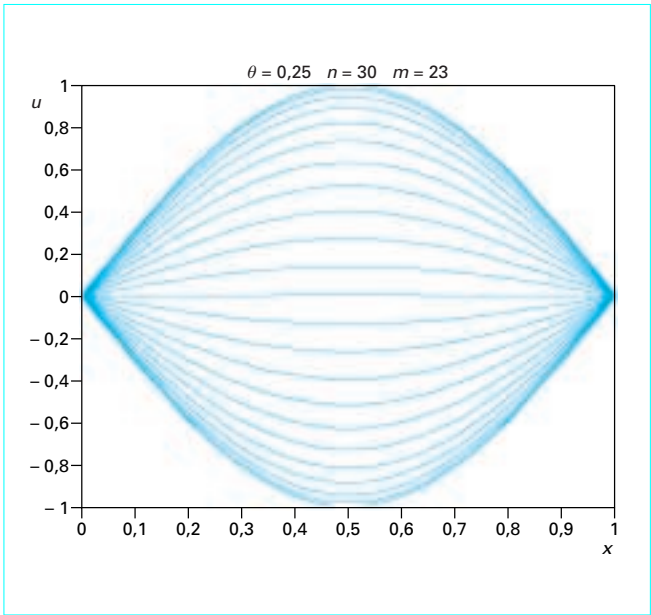


Figure 9 – Schéma implicite centré ($\theta = 0,25$)

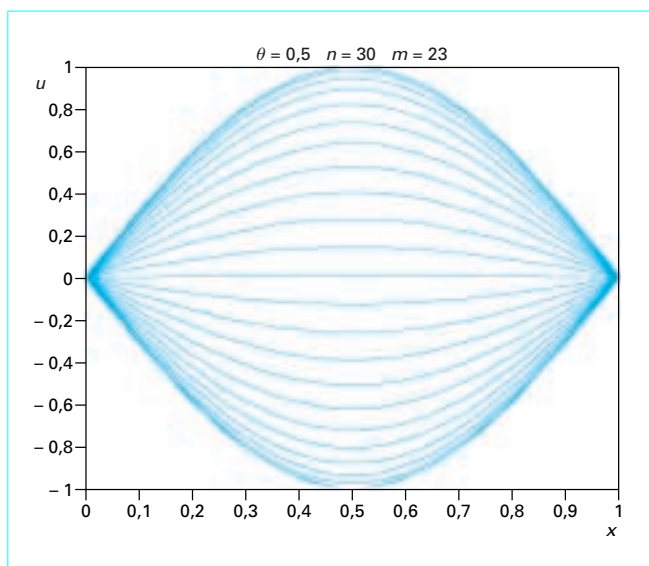
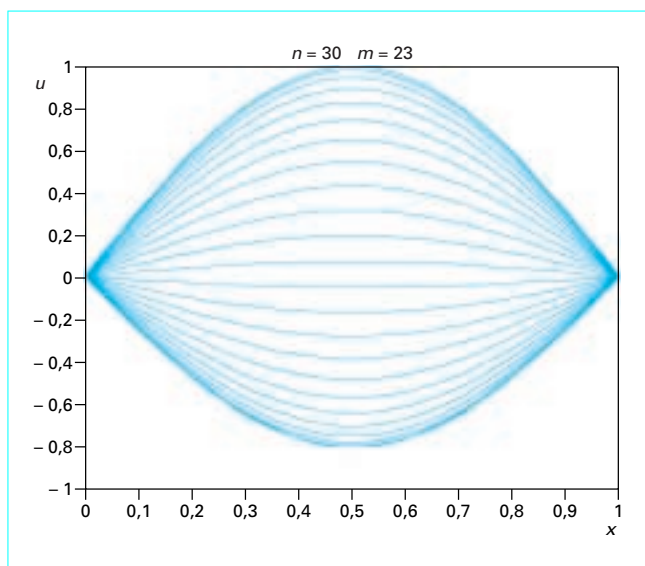
Figure 10 – Schéma implicite centré ($\theta = 0,5$)

Figure 11 – Schéma implicite décentré

Références bibliographiques

- [1] LASCAUX (P.) et THEODOR (R.). – *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Tomes 1 et 2, Masson (1986).
- [2] RICHTMYER (R.D.) et MORTON (K.W.). – *Difference methods for initial value problems*. John Wiley and Sons (1967).
- [3] CUVELIER (C.), DESCLOUX (J.) et RAPPAZ (J.). – *Éléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs*. Tomes 1 et 2, Presses Polytechniques Romandes (1988).
- [4] EUVRARD (D.). – *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur*. Masson (1988).
- [5] LE POURHIET (A.). – *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : une première approche*. Cépadués Édition (1988).
- [6] MITCHELL (A.R.). – *Computational methods in partial differential equations*. John Wiley and Sons (1977).
- [7] RAPPAZ (J.) et PICASSO (M.). – *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes (1998).
- [8] SIBONY (M.) et MARDON (J.C.). – *Approximations et équations différentielles*. Hermann (1982).
- [9] SAINSAULIEU (L.). – *Calcul scientifique*. Masson (1996).

Dans ce traité des Techniques de l'Ingénieur

- [10] DEBEAUMARCHÉ (G.). – *Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires*. AF 162 p. 1-21 (1999).