



**TECHNIQUES  
DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : AF85 V1

# Algèbre linéaire

Date de publication :

**10 avril 1998**

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Gérard DEBEAUMARCHÉ, Danièle LINO**

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

Document téléchargé le : **24/05/2017**  
Pour le compte : **7200043660 - centralesupelec // 138.195.79.110**

**Par mail :**  
[infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

# Algèbre linéaire

par **Gérard DEBEAUMARCHÉ**

Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan  
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Clemenceau de Reims

et **Danièle LINO**

Ancienne élève de l'École normale supérieure de Sèvres  
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Clemenceau de Reims

<b>1. Algèbre linéaire en dimension quelconque</b> .....	AF 85	2
1.1 Espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ .....	—	2
1.1.1 Généralités .....	—	2
1.1.2 Produits d'espaces vectoriels .....	—	2
1.1.3 Combinations linéaires .....	—	3
1.1.4 Familles libres, génératrices, bases .....	—	3
1.2 Sous-espaces vectoriels .....	—	4
1.2.1 Définition. Caractérisation .....	—	4
1.2.2 Intersection de sous-espaces, sous-espaces engendrés .....	—	5
1.2.3 Sommes et sommes directes .....	—	5
1.3 Applications linéaires .....	—	6
1.3.1 Définitions .....	—	6
1.3.2 Images et noyaux .....	—	7
1.4 Exemples d'applications linéaires .....	—	9
1.4.1 Projections et projecteurs .....	—	9
1.4.2 Symétries et involutions .....	—	10
1.5 Endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ .....	—	10
1.5.1 Sous-espaces stables .....	—	10
1.5.2 Droites stables et sous-espaces propres .....	—	10
1.5.3 Sous-espaces stables et commutation des endomorphismes .....	—	12
<b>2. Algèbre linéaire en dimension finie</b> .....	—	12
2.1 Espaces vectoriels de dimension finie .....	—	12
2.1.1 Existence de bases .....	—	12
2.1.2 Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie .....	—	13
2.2 Sous-espaces vectoriels de dimension finie .....	—	14
2.3 Formes linéaires et hyperplans .....	—	15
2.3.1 Formes linéaires .....	—	15
2.3.2 Exemples .....	—	16
2.3.3 Hyperplans .....	—	17
2.3.4 Applications des hyperplans à l'étude des sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie .....	—	19

**L**e champ de l'algèbre linéaire s'est longtemps limité à la résolution des systèmes d'équations linéaires  $AX = B$ , c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

C'est en 1750 que Cramer publie à Genève, dans « *L'introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* », ses célèbres formules donnant l'expression

des inconnues  $x_1, \dots, x_n$  dans un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues. Celles-ci préludent à l'introduction des déterminants.

D'autres méthodes de résolution des systèmes sont élaborées au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, notamment par Gauss, qui fut le directeur de l'Observatoire de Göttingen, en vue de la résolution de problèmes astronomiques.

Enfin, à partir de 1840, Cayley inaugure le calcul vectoriel dans  $\mathbb{R}^n$  tandis que Grassmann introduit la notion d'espaces vectoriels abstraits, débouchant sur les idées actuelles de l'algèbre linéaire.

Celles-ci permettent de traiter géométriquement, et indépendamment de toute référence aux bases, les problèmes matriciels qui apparaissent tant en mathématiques (analyse numérique, probabilités, ...) que dans leurs applications aux sciences de l'ingénieur.

## 1. Algèbre linéaire en dimension quelconque

### 1.1 Espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$

#### 1.1.1 Généralités

On rappelle qu'un **corps** est un ensemble muni de deux lois de composition interne, notées  $+$  et  $\times$ , vérifiant un certain nombre de propriétés (voir l'article AF 33 *Langage des ensembles et des structures*). Ainsi  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  pour  $p$  premier sont des corps.

Dans la suite, on désignera par  $\mathbb{K}$  un corps et l'on notera  $0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}$  les éléments neutres de  $\mathbb{K}$  pour les lois  $+$  et  $\times$ .

**Définition 1.** On appelle **espace vectoriel** sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$  tout triplet  $(\mathbf{E}, +, \cdot)$  tel que :

—  $(\mathbf{E}, +)$  est un groupe commutatif : la loi de composition interne  $+$  est commutative, associative, admet un élément neutre  $0_{\mathbf{E}}$  et tout élément  $x$  de  $\mathbf{E}$  admet dans  $\mathbf{E}$  un symétrique ou opposé, noté  $-x$  ;

— l'application ou loi de composition externe

$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbf{E} \mapsto \lambda \cdot x \in \mathbf{E}$$

vérifie les propriétés suivantes : pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  appartenant à  $\mathbb{K}^2$  et pour tout couple  $(x, y)$  appartenant à  $\mathbf{E}^2$  :

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$$

$$1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$$

Les éléments du corps  $\mathbb{K}$  sont appelés scalaires, ceux de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$  vecteurs.

Dans la suite, on précisera, lorsqu'il y aura ambiguïté, le corps  $\mathbb{K}$ . On vérifie la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbf{E} : (\lambda \cdot x = 0_{\mathbf{E}}) \Leftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_{\mathbf{E}}).$$

#### Exemples.

1.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{R}$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{C}$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ; la loi  $+$  est celle du corps et la loi externe est définie par :

$$\lambda \cdot x = \lambda \times x.$$

2. Considérons l'ensemble  $\mathbb{K}^n$  des  $n$ -uplets  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_i \in \mathbb{K}$  pour  $1 \leq i \leq n$  .

On définit dans  $\mathbb{K}^n$  :

— une loi interne  $+$  par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) ;$$

— une loi externe  $\cdot$  par :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{K}.$$

On vérifie que  $\mathbb{K}^n$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

3.  $\mathbb{K}_n[X]$  (l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ ),  $\mathbb{K}[X]$  (l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ) sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

4. Si  $\mathbf{E}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $\Omega$  un ensemble, l'ensemble des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbf{E}$ , noté  $\mathcal{A}(\Omega, \mathbf{E})$  ou  $\mathbf{E}^\Omega$ , est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , lorsqu'on le munit des lois suivantes :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \cdot f(x) ;$$

en particulier, l'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbf{E}$ , noté  $\mathcal{A}(N, \mathbf{E})$  ou  $\mathbf{E}^N$ , est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

Dans la suite, on notera  $\lambda \cdot x$  sous la forme  $\lambda x$ .

#### 1.1.2 Produits d'espaces vectoriels

Soient  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Définissons deux lois sur l'ensemble  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$  des couples  $(x_1, x_2)$  où  $x_1$  est élément de  $\mathbf{E}_1$  et  $x_2$  élément de  $\mathbf{E}_2$  :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

On vérifie que  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On dit que :

$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$  est l'espace vectoriel produit de  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ .

**Généralisation.** Si  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , on définit de la même manière l'espace vectoriel produit  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \dots \times \mathbf{E}_n$  de  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ .

Lorsque  $\mathbf{E}_i = \mathbb{K}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on retrouve le cas particulier  $\mathbb{K}^n$ .

### 1.1.3 Combinaisons linéaires

**Définition 2.** Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . On appelle **combinaison linéaire** de cette famille tout vecteur de la forme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  où  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  est une famille de  $n$  scalaires quelconques.

La notion de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs de  $E$  s'étend de la façon suivante au cas d'une famille quelconque, éventuellement infinie, de vecteurs.

**Définition 3.** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille quelconque (finie ou infinie) de vecteurs de  $E$ .

On appelle combinaison linéaire de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  toute combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** de cette famille, c'est-à-dire tout vecteur de la forme  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  où les scalaires  $\lambda_i$  sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux.

On notera bien qu'en algèbre linéaire toutes les combinaisons linéaires  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  sont en fait des combinaisons linéaires **finies**, c'est-à-dire que tous les scalaires  $\lambda_i$  sont nuls sauf, au plus, un nombre fini d'entre eux.

Cette règle s'applique en particulier à tout ce qui suit dans cet article.

En analyse, on apprend à donner un sens éventuel à  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  lorsque les scalaires  $\lambda_i$  sont quelconques.

### 1.1.4 Familles libres, génératrices, bases

**Définition 4.** On dit qu'une **famille**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$  est **libre** si, pour tout  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  de  $\mathbb{K}^n$ , la relation  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$  implique  $\lambda_i = 0$ , pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Elle est dite **génératrice** si tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

C'est une **base** si elle est libre et génératrice, ce qui équivaut à dire que, pour tout vecteur de  $E$ , il existe un unique  $n$ -uplet

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ;$$

ces scalaires sont appelés les coordonnées de  $x$  dans la base  $(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

La famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est dite liée si elle n'est pas libre, autrement dit s'il existe une famille de scalaires  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , non tous nuls, telle que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 .$$

On vérifie que cela équivaut à dire que l'un au moins des vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est combinaison linéaire des autres.

Les notions précédentes se généralisent à une famille quelconque (éventuellement infinie) par la définition 5.

**Définition 5.** On dit qu'une **famille**  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est **libre** si toute combinaison linéaire nulle des  $(x_i)_{i \in I}$  a tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire si, pour toute famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires nuls sauf un nombre fini d'entre eux, on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0 .$$

Cela équivaut à vérifier que toute sous-famille finie de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre.

Elle est dite **génératrice** si tout vecteur de  $E$  s'exprime comme une combinaison linéaire de cette famille.

C'est une **base** si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire si tout vecteur de  $E$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de cette famille.

On a donc  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  où les scalaires  $\lambda_i$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Les scalaires  $\lambda_i$  ainsi introduits sont les coordonnées du vecteur  $x$  dans la base  $(x_i)_{i \in I}$ .

La **famille**  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **liée** si elle n'est pas libre, autrement dit s'il existe une famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  non tous nuls vérifiant la relation :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 .$$

Dans la suite de cet article on appellera combinaison linéaire non triviale des vecteurs de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  toute relation

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

où l'un au moins des scalaires  $\lambda_i$  n'est pas nul.

On vérifie élémentairement les propriétés suivantes :

- toute sur-famille d'une famille liée est liée et toute sous-famille d'une famille libre est libre ;
- toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

**Exemples.**

1. Une famille réduite à un seul vecteur  $x$  est libre si, et seulement si,  $x$  est non nul.

2. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

3. Le  $n$ -uplet  $(e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1))$  forme une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$ . Celle-ci est appelée base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Par exemple, si  $n = 3$  le vecteur  $(1, 2, 3)$  se décompose sur la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  en  $e_1 + 2e_2 + 3e_3$ .

4. La famille  $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$  constitue une base de l'espace vectoriel des polynômes  $\mathbb{K}[X]$ , appelée base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ .

On vérifie de même que  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base (appelée base canonique) de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

5. Étant donné trois nombres réels ou complexes  $a, b, c$  avec  $a \neq 0$ , les solutions complexes de l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = 0$  forment un espace vectoriel. Une base de celui-ci est constituée des fonctions :

i)  $x \mapsto e^{r_1 x}$  et  $x \mapsto e^{r_2 x}$  où  $r_1, r_2$  désignent les racines réelles ou complexes de l'équation du second degré  $ar^2 + br + c = 0$  dans le cas où  $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ .

ii)  $x \mapsto e^{rx}$  et  $x \mapsto xe^{rx}$  où  $r$  désigne la racine double de l'équation du second degré  $ar^2 + br + c = 0$  dans le cas où  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ .

6. Étant donnés trois nombres réels ou complexes  $a, b, c$  avec  $a \neq 0$ , les suites complexes vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

forment un espace vectoriel.

Une base de celui-ci est constituée des suites :

i)  $(r_1^n)$  et  $(r_2^n)$  où  $r_1, r_2$  désignent les racines réelles ou complexes de l'équation du second degré  $ar^2 + br + c = 0$  dans le cas où  $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ .

ii)  $(r^n)$  et  $(nr^n)$  où  $r$  désigne la racine double de l'équation du second degré  $ar^2 + br + c = 0$  dans le cas où  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ .

### Proposition 1.

*Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

i)  $(x_i)_{i \in I}$  est une base ;  
 ii)  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille libre maximale, autrement dit  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille libre et toute sur-famille la contenant strictement est liée ;

iii)  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice minimale, autrement dit  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice et toute sous-famille strictement incluse dans cette famille ne l'est plus.

#### Preuve. ◇

i)  $\Rightarrow$  ii). La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est une base, donc c'est une famille libre. Prouvons qu'elle est libre maximale.

Soit  $x \in E$ . Comme  $(x_i)_{i \in I}$  est une base,  $x$  s'écrit comme combinaison linéaire des  $(x_i)_{i \in I}$  ; on obtient :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \text{ ou } x - \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0.$$

Donc il existe une combinaison linéaire non triviale des  $(x_i)_{i \in I}$  et de  $x$ . Toute sur-famille de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  obtenue en ajoutant un vecteur est liée et donc toute sur-famille stricte de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est liée.

ii)  $\Rightarrow$  i). Soient  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre maximale et  $x$  un vecteur quelconque de  $E$ .

La famille obtenue en ajoutant le vecteur  $x$  à la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est liée. On peut donc écrire :

$$\lambda x + \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

sachant que l'un au moins des scalaires  $\lambda$  ou  $\lambda_i (i \in I)$  est non nul.

Si  $\lambda = 0$ , la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est liée, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $\lambda \neq 0$  et :

$$x = -\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i.$$

Cela prouve que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est génératrice. C'est donc une base.

i)  $\Rightarrow$  iii). La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est une base, donc elle est génératrice. Il suffit d'en établir le caractère minimal (pour l'inclusion).

A cet effet, supposons qu'une sous-famille stricte  $(x_i)_{i \in J}$ ,  $J \subsetneq I$ , est génératrice.

Pour  $i_0 \in I - J$ , le vecteur  $x_{i_0}$  est combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $(x_i)_{i \in J}$ . Ainsi, la famille  $(x_i)_{i \in J \cup i_0}$  est liée, et a fortiori la sur-famille  $(x_i)_{i \in I}$  est liée, ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse.

iii)  $\Rightarrow$  i). Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille génératrice minimale.

Cette famille étant génératrice, il suffit d'en établir la liberté. Supposons la famille liée et considérons une combinaison linéaire non triviale de la famille :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0,$$

où le scalaire  $\lambda_{i_0}$  est non nul. On écrit :

$$x_{i_0} = \sum_{i \in I - \{i_0\}} \left( -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \right) x_i$$

ce qui assure que la famille  $(x_i)_{i \in I - \{i_0\}}$  est génératrice. On obtient alors une contradiction avec l'hypothèse. ◇

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

### 1.2.1 Définition. Caractérisation

**Définition 6.** Une partie  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  est un sous-espace vectoriel si :

i)  $F$  est stable pour les deux lois  $+$  et  $\cdot$ , autrement dit :

$$\forall (x, y) \in F^2 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K} : x + y \in F \text{ et } \lambda x \in F$$

ii) muni des restrictions des lois  $+$  et  $\cdot$ ,  $F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

On vérifie élémentairement la proposition 2.

#### Proposition 2.

Une partie non vide  $F$  de  $E$  est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, elle est stable par combinaison linéaire, autrement dit si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall (x, y) \in F^2$$

$$\lambda x + \mu y \in F.$$

En pratique, pour établir qu'un ensemble est un espace vectoriel, on vérifie à l'aide de cette proposition qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel le contenant.

#### Exemples.

1.  $\{0_E\}$  et  $E$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

2. On sait que l'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On vérifie que l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

en est un sous-espace vectoriel.

3. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ , est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Le sous-ensemble des fonctions continues sur  $I$  (ou dérivables sur  $I$ ) en constitue un sous-espace vectoriel, puisque toute combinaison linéaire de fonctions continues (dérivables) est continue (dérivable).

## 1.2.2 Intersection de sous-espaces, sous-espaces engendrés

En utilisant la stabilité par combinaison linéaire, on prouve la proposition suivante.

### Proposition 3.

Soit  $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$  une famille non vide de sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{E}$ .

Alors  $\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ .

**Définition 7.** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $\mathbf{E}$ . On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(x_i)_{i \in I}$  le plus petit sous-espace, s'il existe contenant la famille  $(x_i)_{i \in I}$ . On le note :

$$\text{Vect}(x_i)_{i \in I}.$$

### Proposition 4.

L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est un sous-espace vectoriel. C'est le sous-espace engendré par la famille  $(x_i)_{i \in I}$  et c'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Il existe des sous-espaces vectoriels contenant la famille  $(x_i)_{i \in I}$ ,  $\mathbf{E}$  par exemple. L'intersection des sous-espaces vectoriels contenant cette famille  $(x_i)_{i \in I}$  est un sous-espace contenant  $(x_i)_{i \in I}$ , inclus dans tout sous-espace contenant  $(x_i)_{i \in I}$ . C'est donc l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Notons  $C$  l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ . L'ensemble  $C$  est non vide, stable par combinaison linéaire.

Il contient la famille  $(x_i)_{i \in I}$ , donc  $C$  contient  $\text{Vect}(x_i)$ .

Tout sous-espace vectoriel contenant la famille  $(x_i)_{i \in I}$  contient l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille, et par conséquent  $C$ . Ainsi donc  $\text{Vect}(x_i)$  contient  $C$ , d'où l'égalité :

$$\text{Vect}(x_i) = C. \quad \diamond$$

**Exemple :** La famille  $(x \mapsto \sin nx)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(x \mapsto \cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$  engendre un sous-espace vectoriel des fonctions  $2\pi$ -périodiques dont les éléments sont appelés polynômes trigonométriques.

## 1.2.3 Sommes et sommes directes

**Définition 8.** Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel et  $n$  sous-espaces vectoriels  $(\mathbf{F}_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbf{E}$ .

On appelle somme des sous-espaces  $\mathbf{F}_i$   $1 \leq i \leq n$ , l'ensemble

des vecteurs s'écrivant  $\sum_{i=1}^n x_i$  où chacun des  $x_i$  appartient à  $\mathbf{F}_i$ .

C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$  (il est stable par combinaison linéaire) on le note :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \text{ ou } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n.$$

Si  $(\mathbf{F}_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille de  $n$  sous-espaces vectoriels, la

réunion des  $n$  sous-espaces  $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{F}_i$  n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel. On vérifie que le sous-espace engendré par

$$\bigcup_{i=1}^n \mathbf{F}_i \text{ est } \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

**Définition 9.** La somme  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$  est dite directe si tout élément

$x$  de  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\sum_{i=1}^n x_i$ , où chacun des  $x_i$  appartient à  $\mathbf{F}_i$ .

Lorsque la somme  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$  est directe, on la note :

$$\mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{F}_n \text{ ou } \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

### Proposition 5.

La somme de deux sous-espaces vectoriels  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  est directe si, et seulement si :

$$\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\}.$$

### Preuve. $\diamond$

Supposons que la somme est directe et soit  $x$  un élément de  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$ . On peut écrire :

$$0_{\mathbf{E}} = x + (-x) = 0_{\mathbf{E}} + 0_{\mathbf{E}},$$

donc par unicité de l'écriture :

$$x = 0_{\mathbf{E}} \text{ et } \mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\}$$

Supposons  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\}$ . Soit  $z$  un élément de  $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ ; on veut prouver l'unicité de l'écriture de  $z$  sous la forme  $x + y$  où  $x$  est élément de  $\mathbf{F}$  et  $y$  élément de  $\mathbf{G}$ . Supposons donc que :

$$z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

avec  $x_1, x_2$  éléments de  $\mathbf{F}$  et  $y_1, y_2$  éléments de  $\mathbf{G}$ .

On obtient :

$$x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\}.$$

Donc :

$$x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2.$$

La somme est directe.  $\diamond$

**Définition 10.** Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel. On dit que  $n$  sous-espaces vectoriels  $\mathbf{F}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de  $\mathbf{E}$  sont supplémentaires dans  $\mathbf{E}$  si :

$$\mathbf{E} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

**Définition 11.** Soit  $\mathbf{F}$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$ . On appelle supplémentaire de  $\mathbf{F}$  dans  $\mathbf{E}$  tout sous-espace  $\mathbf{G}$  vérifiant :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}.$$

On établit que tout sous-espace  $\mathbf{F}$  admet au moins un supplémentaire dans  $\mathbf{E}$ .

**Exemple :** Considérons l'espace des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$ . Prouvons que le sous-espace des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires.

Soit  $f$  une fonction réelle de variable réelle. Supposons que  $f$  s'écrit :

$$f = p + i$$

où  $p$  est une fonction paire et  $i$  une fonction impaire. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= p(x) + p(-x) + i(x) + i(-x) \\ &= 2p(x) \\ f(x) - f(-x) &= p(x) - p(-x) + i(x) - i(-x) \\ &= 2i(x). \end{aligned}$$

Donc, si la décomposition existe, elle est unique et donnée par :

$$p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et

$$i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Réciproquement, étant donnée une fonction réelle de variable réelle  $f$ , notons  $p$  et  $i$  les fonctions définies par :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et

$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie que  $p$  est paire,  $i$  impaire et  $f = p + i$ , ce qui prouve l'existence de la décomposition  $p + i$  pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ce qui achève la démonstration.

Les notions précédentes de sommes et sommes directes de sous-espaces, de sous-espaces supplémentaires s'étendent à une famille quelconque (éventuellement infinie) de sous-espaces de la manière suivante.

**Définition 12.** Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel et  $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$  une famille non vide (éventuellement infinie) de sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{E}$ . On appelle somme des  $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$  l'ensemble des vecteurs s'écrivant  $\sum_{i \in I} x_i$  où :

- d'une part, chacun des vecteurs  $x_i$  appartient à  $\mathbf{F}_i$ ;
- d'autre part, tous les vecteurs  $x_i$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$  que l'on note :

$$\sum_{i \in I} \mathbf{F}_i \text{ ou } \bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}_i.$$

**Définition 13.** La somme

$$\sum_{i \in I} \mathbf{F}_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}_i$$

est dite directe si tout élément de  $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_i$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\sum_{i \in I} x_i$  où les  $x_i$  appartiennent aux  $\mathbf{F}_i$  et sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux. Dans ce cas, cette somme est notée :

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}_i.$$

**Définition 14.** Les sous-espaces de la famille  $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$  sont dits supplémentaires dans  $\mathbf{E}$  si l'on a :

$$\mathbf{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}_i.$$

## 1.3 Applications linéaires

Étant donnée une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on sait que l'on peut approcher  $f(x)$  au voisinage d'un point  $x_0$  appartenant à  $\mathbb{R}^p$  par l'expression :

$$x \mapsto f(x_0) + J_{f(x_0)}(x - x_0)$$

où  $J_{f(x_0)}$  désigne la matrice jacobienne de  $f$  en  $x_0$ , c'est-à-dire la matrice des dérivées partielles de  $f$  au point  $x_0$  (cf. article AF 55 *Calcul différentiel*). On est alors conduit à étudier l'application linéaire :

$$h \in \mathbb{R}^p \mapsto J_{f(x_0)} h \in \mathbb{R}^n.$$

Nombreux sont en mathématiques et dans leurs applications les problèmes conduisant ainsi à l'étude d'applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre.

C'est cette étude qui est développée dans ce paragraphe.

### 1.3.1 Définitions

**Définition 15.** Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . On dit qu'une application  $f$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  est linéaire si pour tous les couples  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  et  $(x, y) \in \mathbf{E}^2$  :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On vérifie pour tout vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$  que :

$$f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$$

$$\text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ .

Si  $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ , on dit que  $f$  est un endomorphisme ou un opérateur de  $\mathbf{E}$ .

Si  $f$  est bijective, on vérifie que  $f^{-1}$  est linéaire et on dit que  $f$  est un isomorphisme.

Si  $\mathbf{E} = \mathbf{F}$  et si  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un automorphisme.

**Définition 16.** Si  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont deux espaces vectoriels tels qu'il existe un isomorphisme  $f$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ , on dit que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont isomorphes.

**Exemple :** On rappelle que  $\mathbb{K}[X]$  est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

L'application associant au polynôme  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  le polynôme

dérivé  $P' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$  est appelée dérivation.

Cette application est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

Elle est surjective ; en effet tout polynôme  $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$  est la dérivée

de  $P = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$ .

Par contre, elle n'est pas injective, tous les polynômes constants ayant pour polynôme dérivé le polynôme nul.

#### Proposition 6.

L'ensemble des applications linéaires de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  noté  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ . En effet l'application constante nulle est une application linéaire et toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

#### Proposition 7.

Soient  $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  trois espaces vectoriels,  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  et  $g$  une application linéaire de  $\mathbf{F}$  dans  $\mathbf{G}$ , ou encore :

$$f \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \text{ et } g \in \mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

L'application  $g \circ f$  est linéaire. C'est un élément de  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$ .

#### Proposition 8.

On note  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$  l'ensemble des endomorphismes de  $\mathbf{E}$ , autrement dit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{E}) = \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E}).$$

L'ensemble  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$  muni des deux lois internes  $+$  et  $\circ$  et de la loi externe  $\cdot$  est une algèbre.

Autrement dit,  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$  muni des deux lois  $+$  et  $\cdot$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$  muni des deux lois  $+$  et  $\circ$  est un anneau. Les deux lois  $\circ$  et  $\cdot$  vérifient de plus la propriété suivante :

$$\lambda \cdot (f \circ g) = (\lambda \cdot f) \circ g = f \circ (\lambda \cdot g)$$

pour tout scalaire  $\lambda$  et pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ .

#### Proposition 9.

L'ensemble des automorphismes de  $\mathbf{E}$  muni de la loi interne  $\circ$  est un groupe appelé groupe linéaire de  $\mathbf{E}$  et noté  $GL(\mathbf{E})$ .

### 1.3.2 Images et noyaux

#### Proposition 10.

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ .

Si  $\mathbf{E}'$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ , l'image directe de  $\mathbf{E}'$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}$ .

Si  $\mathbf{F}'$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}$ , l'image réciproque de  $\mathbf{F}'$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ .

On rappelle que l'image directe de  $\mathbf{E}'$  par  $f$ , notée  $f(\mathbf{E}')$ , est l'ensemble des images par  $f$  des éléments de  $\mathbf{E}'$ . Autrement dit :

$$f(\mathbf{E}') = \{f(x) / x \in \mathbf{E}'\}.$$

L'image réciproque de  $\mathbf{F}'$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(\mathbf{F}')$ , est l'ensemble des antécédents par  $f$  des éléments de  $\mathbf{F}'$ . Autrement dit :

$$f^{-1}(\mathbf{F}') = \{x \in \mathbf{E} / f(x) \in \mathbf{F}'\}.$$

#### Preuve. $\diamond$

■ Nous allons prouver que l'ensemble  $f(\mathbf{E}')$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}$ .

Il est non vide car,  $\mathbf{E}'$  contenant  $0_{\mathbf{E}}$ ,  $f(\mathbf{E}')$  contient  $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$ .

Il est stable par combinaison linéaire. En effet, si  $f(x)$  et  $f(y)$  sont deux éléments de  $f(\mathbf{E}')$ , avec  $x, y \in \mathbf{E}'$ , et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux éléments de  $\mathbb{K}$ , on a :

$$\lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y).$$

Or,  $x$  et  $y$  étant deux éléments du sous-espace vectoriel  $\mathbf{E}'$ ,  $\lambda x + \mu y$  appartient à  $\mathbf{E}'$ , et donc  $f(\lambda x + \mu y)$  appartient bien à  $f(\mathbf{E}')$ .

■ Prouvons maintenant que  $f^{-1}(\mathbf{F}')$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ .

Il est non vide, puisqu'il contient  $0_{\mathbf{E}}$ , en effet  $\mathbf{F}'$  contient  $0_{\mathbf{F}} = f(0_{\mathbf{E}})$ .

Il est stable par combinaison linéaire. En effet, si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $f^{-1}(\mathbf{F}')$ , ce qui signifie que  $f(x)$  et  $f(y)$  appartiennent à  $\mathbf{F}'$  et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux scalaires,  $\lambda x + \mu y$  appartient à  $f^{-1}(\mathbf{F}')$  puisque  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$  est un élément du sous-espace  $\mathbf{F}'$ .  $\diamond$

#### Définition 17.

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ .  
On appelle image de  $\mathbf{E}$  par  $f$ , et on note  $\text{Im}f$ , le sous-espace  $f(\mathbf{E})$ .

On appelle noyau de  $f$ , et on note  $\text{Ker}f$ , le sous-espace  $f^{-1}(\{0_{\mathbf{F}}\})$ .

#### Proposition 11.

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ .

Alors :

1.  $f$  est injective si, et seulement si :

$$\text{Ker}f = \{0_{\mathbf{E}}\}.$$

2.  $f$  est surjective si, et seulement si :

$$\text{Im}f = \mathbf{F}.$$

#### Preuve. $\diamond$

1. Supposons  $f$  injective. On veut établir que cette propriété implique :

$$\text{Ker}f = \{0_{\mathbf{E}}\}.$$

On a toujours  $\{0_{\mathbf{E}}\} \subset \text{Ker}f$  puisque  $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$ .

Soit  $x$  un élément de  $\text{Ker}f$ , ce qui équivaut à  $f(x) = 0_{\mathbf{F}}$ . Comme  $f(x) = f(0_{\mathbf{E}})$  et  $f$  est injective :  $x = 0_{\mathbf{E}}$ . D'où :  $\text{Ker}f \subset \{0_{\mathbf{E}}\}$  et l'égalité  $\text{Ker}f = \{0_{\mathbf{E}}\}$  est établie.

Supposons que  $\text{Ker}f = \{0_{\mathbf{E}}\}$ . On veut établir que l'application  $f$  est injective. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\mathbf{E}$  vérifiant  $f(x) = f(y)$ , alors :

$$f(x) - f(y) = 0_{\mathbf{F}} \text{ donc } f(x - y) = 0_{\mathbf{F}}$$

et  $x - y$  appartient à  $\text{Ker}f$ .

D'après l'hypothèse :

$$x - y = 0_{\mathbf{E}} \text{ soit } x = y$$

ce qui établit l'injectivité de  $f$ .

2. On sait que  $f$  est surjective si, et seulement si, tout élément de  $\mathbf{F}$  a un antécédent par  $f$  dans  $\mathbf{E}$ , ce qui se traduit par  $f(\mathbf{E}) = \mathbf{F}$ .  $\diamond$

La proposition suivante liant l'image d'une application linéaire à tout supplémentaire du noyau sera reprise lors de l'étude des espaces vectoriels de dimension finie sous la forme du théorème du rang.

### Proposition 12.

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ . Alors tout supplémentaire de  $\text{Ker } f$  est isomorphe à  $\text{Im } f$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Soit  $\mathbf{G}$  tel que :

$$\text{Ker } f \oplus \mathbf{G} = \mathbf{E}.$$

Démontrons que la restriction de  $f$  à  $\mathbf{G}$ , notée  $\tilde{f}$ , est un isomorphisme de  $\mathbf{G}$  sur  $\text{Im } f$ .

■ Prouvons l'injectivité de  $\tilde{f}$ .

Le noyau de  $\tilde{f}$  est l'ensemble des éléments  $x$  de  $\mathbf{G}$  vérifiant  $\tilde{f}(x) = f(x) = 0$ . Il s'agit donc de l'intersection  $\mathbf{G} \cap \text{Ker } f$  qui est réduite au vecteur nul par hypothèse. Ainsi,  $\tilde{f}$  est injective.

■ Prouvons maintenant la surjectivité de  $\tilde{f}$ .

Soit  $y = f(x)$  un élément de  $\text{Im } f$ . Tout élément  $x$  de  $\mathbf{E}$  s'écrit  $x' + x''$  où  $x'$  est élément de  $\text{Ker } f$  et  $x''$  élément de  $\mathbf{G}$ . Cela implique l'égalité :

$$f(x) = \tilde{f}(x'').$$

On a donc :

$$\text{Im } \tilde{f} = \text{Im } f.$$

L'application  $\tilde{f}$  est donc un isomorphisme.  $\diamond$

Nous allons maintenant montrer que lorsqu'une base de  $\mathbf{E}$  est choisie, la donnée d'une application linéaire équivaut à la donnée des images des vecteurs de cette base.

### Proposition 13.

Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux espaces vectoriels,  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $\mathbf{E}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $\mathbf{F}$ . Alors, il existe une, et une seule, application linéaire  $f$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  telle que, pour tout  $i$  élément de  $I$  :

$$f(e_i) = v_i.$$

De plus, on a :

- 1)  $f$  est injective si, et seulement si, la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est libre.
- 2)  $f$  est surjective si, et seulement si, la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est génératrice.

- 3)  $f$  est bijective si, et seulement si, la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est une base.

**Preuve.**  $\diamond$

■ Supposons qu'une telle application linéaire existe. Comme la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est une base, tout vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$  s'écrit  $\sum_{i \in I} x_i e_i$ , les scalaires  $x_i$  étant les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$ . On a donc nécessairement :  $f(x) = \sum_{i \in I} x_i v_i$ . Donc, si l'application linéaire  $f$  existe, elle est unique et déterminée par cette formule.

Réiproquement, définissons une application  $f$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ . Pour un vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$  s'écritant  $\sum_{i \in I} x_i e_i$ , posons :

$$f(x) = \sum_{i \in I} x_i v_i.$$

Prouvons maintenant la linéarité de cette application.

Si  $x$  et  $y$  s'écrivent respectivement  $\sum_{i \in I} x_i e_i$  et  $\sum_{i \in I} y_i e_i$ ,  $\lambda x + \mu y$  s'écrit  $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) v_i \\ &= \lambda \sum_{i \in I} x_i v_i + \mu \sum_{i \in I} y_i v_i \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

ce qui assure la linéarité de  $f$ .

■ Supposons  $f$  injective et montrons que la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est libre.

Si  $\sum \lambda_i v_i = 0$ , cette égalité s'écrit :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0$$

$$\text{ou encore } f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0.$$

Le vecteur  $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$  appartient à  $\text{Ker } f$ , donc est nul. Cela assure, puisque la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est libre, la nullité de tous les scalaires  $\lambda_i$ . La famille  $(v_i)_{i \in I}$  est donc libre.

Réiproquement, supposons que la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est libre. On veut prouver que le noyau de  $f$  est réduit au vecteur nul.

Soit  $x$  un vecteur de  $\text{Ker } f$ ; il s'écrit  $\sum_{i \in I} x_i e_i$ .

Comme  $f(x) = 0$  et  $f(x) = \sum_{i \in I} x_i v_i$ , on obtient :

$$\sum_{i \in I} x_i v_i = 0.$$

La famille  $(v_i)_{i \in I}$  est libre, donc tous les scalaires  $x_i$  sont nuls,  $x$  est nul et  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbf{E}}\}$ .

L'application  $f$  est bien injective.

■ Pour prouver la deuxième propriété,  $f$  est surjective si, et seulement si, la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est génératrice, nous allons établir l'égalité :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_i)_{i \in I}).$$

Soit  $x$  un élément de  $\mathbf{E}$  de coordonnées  $(x_i)_{i \in I}$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$ , alors :

$$f(x) = \sum_{i \in I} x_i f(e_i)$$

donc  $\text{Im } f$  est inclus dans  $\text{Vect}(f(e_i)_{i \in I})$ .

Soit  $y$  un élément de  $\text{Vect}(f(e_i)_{i \in I})$ ;  $y$  s'écrit comme combinaison linéaire de la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$ , c'est-à-dire :

$$y = \sum_{i \in I} x_i f(e_i) \text{ soit encore } y = f\left(\sum_{i \in I} x_i e_i\right).$$

Donc  $y$  est l'image de l'élément  $\sum_{i \in I} x_i e_i$ . On a prouvé que

$\text{Vect}(f(e_i)_{i \in I})$  est inclus dans  $\text{Im } f$ . Cela donne l'égalité :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_i)_{i \in I}).$$

De l'égalité  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_i)_{i \in I})$  ou encore  $\text{Im } f = \text{Vect}((v_i)_{i \in I})$  on déduit immédiatement la propriété :  $f$  est surjective si, et seulement si, la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est génératrice, puisque  $f$  est surjective si, et seulement si,  $\text{Im } f = E$ .  $\diamond$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

On démontre que toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est définie de manière unique par sa restriction à  $E_1$  et sa restriction à  $E_2$ .

## 1.4 Exemples d'applications linéaires

### 1.4.1 Projections et projecteurs

**Définition 18.** Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit de façon unique :

$$x = y + z$$

où  $y$  appartient à  $F$  et  $z$  à  $G$ .

L'application  $p : x \mapsto p(x) = y$  s'appelle projection sur  $F$  dans la direction de  $G$  (figure 1).

**Définition 19.** Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle projecteur, tout endomorphisme  $p$  de  $E$  vérifiant :

$$p^2 = p.$$

**Proposition 14.** Toute projection est un projecteur.

Réiproquement, si  $p$  est un projecteur, on a :

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$

et  $p$  est la projection sur  $\text{Im } p$  dans la direction  $\text{Ker } p$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Soient  $E = F \oplus G$  et  $p$  la projection sur  $F$  dans la direction  $G$ .

■ Prouvons que  $p$  est un endomorphisme de  $E$ .

Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $E$  s'écrivant :

$$x = y + z \text{ et } x' = y' + z'$$

où  $y$  et  $y'$  appartiennent à  $F$ ,  $z$  et  $z'$  à  $G$  et soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires.

On sait que  $p(x) = y$  et  $p(x') = y'$ .

- Calculons  $p(\lambda x + \mu x')$ .

Comme :

$$\lambda x + \mu x' = (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')$$

où  $\lambda y + \mu y'$  appartient à  $F$  et  $\lambda z + \mu z'$  appartient à  $G$ , on a :

$$p(\lambda x + \mu x') = \lambda y + \mu y' \text{ soit encore } p(\lambda x + \mu x') = \lambda p(x) + \mu p(x').$$

Cela établit la linéarité de  $p$ .

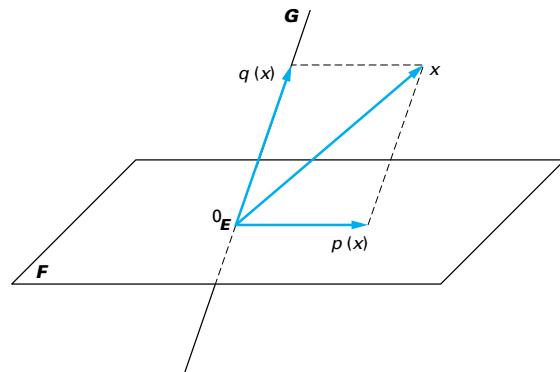
- Calculons maintenant  $p \circ p$ .

Soit  $x$  un élément de  $E$  avec  $x = y + z$  où  $y \in F$  et  $z \in G$  ; on a :

$$p(x) = y, \quad p \circ p(x) = p(y) \text{ et } p(y) = y$$

puisque  $y = y + 0$  où  $y \in F$  et  $0 \in G$ .

On a donc établi que  $p \circ p = p$  et que  $p$  est bien un projecteur.



Le vecteur  $p(x)$  est le projeté de  $x$  sur  $F$  dans la direction de  $G$  et le vecteur  $q(x)$  le projeté de  $x$  sur  $G$  dans la direction de  $F$

Figure 1 – Projection sur  $F$  dans la direction de  $G$

■ Soit  $p$  un projecteur. On veut établir que  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ .

Supposons que  $x = p(y) + z$  avec  $z \in \text{Ker } p$ , alors :

$$p(x) = p(y)$$

puisque  $p^2(y) = p(y)$  et  $p(z) = 0$ .

On a prouvé que, si la décomposition de  $x$  existe, elle est unique et donnée par :

$$p(y) = p(x) \text{ et } z = x - p(x).$$

De plus, comme  $p(x - p(x)) = 0$  (en effet,  $p(x) = p^2(x)$ ),  $x - p(x)$  est un élément de  $\text{Ker } p$ .

La décomposition de  $x$  existe :

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

avec  $p(x) \in \text{Im } p$  et  $x - p(x) \in \text{Ker } p$ , et est unique.

On a donc prouvé que :

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p.$$

De l'écriture  $x = p(x) + (x - p(x))$ , on déduit que  $p$  est la projection sur  $\text{Im } p$  dans la direction de  $\text{Ker } p$ .

Si  $E = F \oplus G$  et si  $p$  est la projection sur  $F$  dans la direction de  $G$ , il est clair que la projection  $q$  sur  $G$  dans la direction de  $F$  vaut  $\text{Id}_E - p$ . On a de plus :

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

On peut généraliser cette situation à  $n$  sous-espaces supplémentaires  $E_1, E_2, \dots, E_n$  vérifiant :

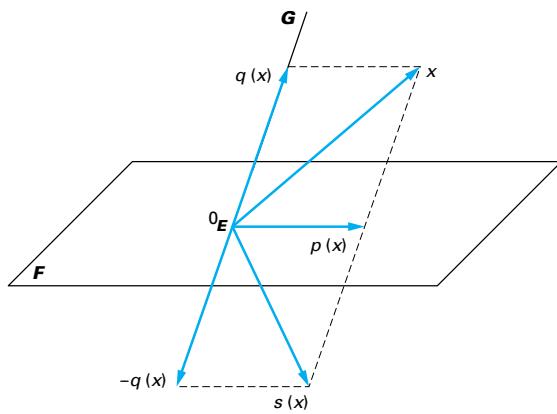
$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n.$$

Notons  $p_i$  la projection sur  $E_i$  dans la direction

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \oplus \dots \oplus E_n.$$

On a :  $\text{Id}_E = p_1 + p_2 + \dots + p_n$  et  $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$  pour  $i \neq j$  et l'on dit que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont les projecteurs associés à la décomposition

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n.$$



Le vecteur  $s(x)$  est le symétrique de  $x$  dans la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction de  $G$  et l'on a :

$$\begin{aligned} x &= p(x) + q(x) \\ s(x) &= p(x) - q(x) \end{aligned}$$

Figure 2 – Symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $G$

## Symétries et involutions

**Définition 20.** Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit de façon unique  $x = y + z$  où  $y$  appartient à  $F$  et  $z$  appartient à  $G$ .

L'application  $s : x \mapsto s(x) = y - z$  s'appelle symétrie par rapport à  $F$  de direction  $G$  (figure 2).

**Définition 21.** On appelle involution de  $E$  tout endomorphisme  $s$  de  $E$  tel que  $s^2 = \text{Id}$ .

### Proposition 15.

Toute symétrie est une involution.

Réiproquement, si  $s$  est une involution, on a :

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Im}(s - \text{Id})$$

et  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{Id})$  dans la direction de  $\text{Im}(s - \text{Id})$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$ .

On note  $p$  la projection sur  $F$  dans la direction de  $G$ ,  $q = \text{Id} - p$  la projection sur  $G$  dans la direction de  $F$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $G$  dans la direction de  $F$ .

De la définition de  $s$  on déduit  $s = p - q$  donc que  $s$  est un endomorphisme de  $E$ .

De plus :

$$s^2 = (p - q) \circ (p - q).$$

Or  $p^2 = p$ ,  $q^2 = q$ ,  $p \circ q = 0$  et  $q \circ p = 0$

donc  $s^2 = s$  et  $s$  est une involution.

On peut remarquer que  $s = \text{Id} - 2q$  ou encore  $q = \frac{1}{2}(\text{Id} - s)$ .

■ Soit  $s$  une involution de  $E$ . On se propose de démontrer que  $s$  est une symétrie.

Posons  $q = \frac{1}{2}(\text{Id} - s)$ . On obtient immédiatement que  $q$  est un projecteur ( $q^2 = q$ ), d'où l'on déduit que :

$$E = \text{Ker } q \oplus \text{Im } q$$

ou encore :

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Im}(s - \text{Id}).$$

■ Nous allons maintenant prouver que  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{Id})$  dans la direction de  $\text{Im}(s - \text{Id})$ .

Un vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit  $y + z$  où  $y \in \text{Ker}(s - \text{Id})$  (donc :  $s(y) = y$ ) et  $z \in \text{Im}(s - \text{Id})$  (donc :  $z = s(t) - t$  pour un  $t$  élément de  $E$  et l'on a  $s(z) = -z$ ).

On obtient :

$$s(x) = s(y) + s(z) \text{ soit encore } s(x) = y - z$$

ce qui prouve le résultat.  $\diamond$

## 1.5 Endomorphismes d'un espace vectoriel $E$

### 1.5.1 Sous-espaces stables

**Définition 22.** Soient  $F$  un sous-espace de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $f$  si l'image par  $f$  de tout élément de  $F$  est un élément de  $F$  ou encore si  $f(F) \subset F$ . Alors l'application qui à  $x$ , élément de  $F$ , associe  $f(x)$ , élément de  $F$ , est un endomorphisme de  $F$ .

On dit que c'est l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ .

L'intérêt de cette notion réside dans le fait qu'il est plus simple d'étudier l'endomorphisme induit sur  $F$  qui est *a priori* plus « petit » que  $E$ . Cette notion prend tout son intérêt quand  $E$  est somme directe de sous-espaces stables par  $F$ .

En effet, il suffit alors, pour connaître  $f$ , d'étudier l'endomorphisme qu'il induit sur chacun des sous-espaces stables de cette somme directe.

Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe concernant la réduction des matrices de l'article AF 86. On donne maintenant deux exemples fondamentaux de sous-espaces stables :

- les droites stables qui nous conduiront à la notion de sous-espaces propres ;
- les noyaux et les images d'endomorphismes commutant avec  $f$ .

### 1.5.2 Droites stables et sous-espaces propres

Rappelons qu'une **droite vectorielle** est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul  $v$ . C'est donc le sous-espace constitué des vecteurs  $kv$  où  $k$  appartient à  $\mathbb{K}$  ; cette droite est notée  $\mathbb{K}v$ .

Une telle droite est stable par un endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $E$  si, et seulement si,  $f(v)$  appartient à  $\mathbb{K}v$  c'est-à-dire si, et

seulement si, il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $f(v) = \lambda v$ , ce qui conduit aux définitions suivantes.

**Définition 23.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On dit qu'un scalaire  $\lambda$  est **valeur propre** de  $f$  s'il existe un vecteur  $v$  non nul de  $E$  vérifiant :

$$f(v) = \lambda v.$$

On dit qu'un vecteur  $v$  non nul de  $E$  est **vecteur propre** de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si :

$$f(v) = \lambda v.$$

On notera la propriété suivante.

#### Proposition 16.

*Les droites stables par  $f$  sont les droites dirigées par les vecteurs propres de  $f$ .*

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre donnée  $\lambda$  (auquel on adjoint le vecteur nul).

Il s'agit donc de l'ensemble des vecteurs  $x$  appartenant à  $E$ , vérifiant la relation :

$$f(x) = \lambda x$$

autrement dit du noyau de l'endomorphisme  $f - \lambda \text{Id}_E$  qui est donc un sous-espace vectoriel, évidemment stable par  $f$ .

**Définition 24.** On appelle **sous-espace propre** associé à une valeur propre  $\lambda$  de l'endomorphisme  $f$ , le noyau  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$  de l'endomorphisme  $f - \lambda \text{Id}$ .

1. Un scalaire  $\mu$  est valeur propre de  $f$  si, et seulement si, le noyau  $\text{Ker}(f - \mu \text{Id})$  est non réduit à zéro, autrement dit si, et seulement si, l'endomorphisme  $f - \mu \text{Id}$  n'est pas injectif.

2. Il est clair que l'endomorphisme induit par  $f$  sur le sous-espace propre  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$  n'est autre que l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

3. Si tous les sous-espaces propres d'un endomorphisme  $f$  sont stables par  $f$ , il n'en va pas de même pour la réciproque : il existe, en général, des sous-espaces stables qui ne sont pas des sous-espaces propres.

#### Proposition 17.

*Une somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est nécessairement directe et constitue un sous-espace stable par  $f$ .*

**Preuve.**  $\diamond$  Établissons ce résultat lorsque le nombre des sous-espaces propres est fini et vaut  $n$ .

Ce résultat est évident pour  $n = 1$ . Supposons-le vrai lorsqu'il s'agit d'une famille de  $(n - 1)$  sous-espaces propres.

Considérons maintenant  $n$  vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , éléments de  $n$  sous-espaces propres ( $E_1, E_2, \dots, E_n$ ).

On veut prouver que si  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  alors chacun des vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est nul.

En appliquant  $f$ , il vient :

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = 0 \text{ donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0.$$

Retranchons à cette dernière égalité la précédente multipliée par  $\lambda_n$ . On obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) x_i = 0.$$

Il s'agit de la somme de  $(n - 1)$  vecteurs appartenant aux sous-espaces propres  $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ .

D'après l'hypothèse de récurrence, il en résulte que, pour  $1 \leq i \leq n - 1$  :

$$(\lambda_i - \lambda_n) x_i = 0$$

Les valeurs propres étant distinctes, on a donc, pour  $1 \leq i \leq n - 1$  :

$$x_i = 0.$$

En revenant à l'égalité initiale on a :

$$x_n = 0.$$

Tous les  $x_i$  sont nuls ce qui achève la démonstration.  $\diamond$

Un cas tout particulièrement intéressant est celui où cette somme directe des sous-espaces propres de  $f$  est égale à l'espace  $E$  tout entier. On dit alors que  $f$  est **diagonalisable**.

#### Exemples.

##### 1. Un endomorphisme admettant pour valeurs propres tous les scalaires du corps.

Considérons l'espace vectoriel  $E$  des fonctions indéfiniment dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La dérivation  $D$  associant à tout élément  $f$  de  $E$  sa dérivée  $f'$ , qui est aussi un élément de  $E$ , est un endomorphisme de  $E$  admettant tout scalaire de  $\mathbb{R}$  comme valeur propre.

En effet, le noyau  $\text{Ker}(D - \lambda \text{Id})$  se compose des éléments  $y$  de  $E$  tels que  $y' - \lambda y = 0$ , autrement dit des fonctions  $y$  de  $E$  définies par  $y = C e^{\lambda x}$  où  $C \in \mathbb{R}$ . Ce noyau est donc non réduit à zéro et tout réel  $\lambda$  est valeur propre de  $D$ .

##### 2. Un endomorphisme n'admettant aucune valeur propre.

Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. L'application  $\Pi$  associant à tout polynôme  $P$  de  $E$  le polynôme  $\int_0^x P(t) dt$ , c'est-à-dire la primitive de  $P$  vérifiant  $P(0) = 0$ , est un endomorphisme de  $E$  n'admettant aucune valeur propre.

En effet, si  $\lambda$  est un nombre réel, le noyau de  $\text{Ker}(\Pi - \lambda \text{Id})$  se réduit

toujours au polynôme nul, car l'égalité :  $\int_0^x P(t) dt = \lambda P$

impose, si  $P$  n'est pas nul et pour des raisons de degré  $\lambda = 0$  et  $\int_0^x P(t) dt = 0$ .

Donc  $P = 0$  par dérivation.

#### 3. Les projecteurs et les symétries.

On rappelle qu'un projecteur de  $E$  est un endomorphisme  $p$  vérifiant  $p \circ p = p$ .

On se propose tout d'abord d'en déterminer les valeurs propres.

Considérons une valeur propre  $\lambda$  de ce projecteur  $p$ .

Il existe donc un vecteur non nul  $x$  tel que  $p(x) = \lambda x$ , ce qui implique  $p^2(x) = \lambda^2 x$ .

Comme  $p^2(x) - p(x) = 0$ , il en résulte que :

$$(\lambda^2 - \lambda)x = 0$$

et comme  $x$  est non nul  $\lambda^2 - \lambda = 0$  c'est-à-dire  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$  nécessairement.

Les valeurs propres éventuelles d'un projecteur sont donc 0 ou 1.

Prouvons maintenant que l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$  est somme directe des sous-espaces  $\text{Ker}p$  et  $\text{Ker}(p - \text{Id})$  ce qui impliquera qu'un projecteur est diagonalisable.

Tout vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$  peut s'écrire :

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

où  $(x - p(x))$  est élément de  $\text{Ker}p$  et  $p(x)$  élément de  $\text{Ker}(p - \text{Id})$ , ce qui assure l'égalité :

$$\mathbf{E} = \text{Ker}p + \text{Ker}(p - \text{Id}).$$

On vérifie élémentairement que :

$$\text{Ker}p \cap \text{Ker}(p - \text{Id}) = \{0\}$$

ce qui assure :  $\mathbf{E} = \text{Ker}p \oplus \text{Ker}(p - \text{Id})$ .

Si  $p = \text{Id}$  on a :  $\mathbf{E} = \text{Ker}(p - \text{Id})$  et  $p$  est diagonalisable.

Si  $p = 0$  on a :  $\mathbf{E} = \text{Ker}p$  et  $p$  est diagonalisable.

Sinon  $\text{Ker}p$  et  $\text{Ker}(p - \text{Id})$  ne sont pas réduits au vecteur nul et sont donc tous les deux des sous-espaces propres de  $p$ ;  $p$  est encore diagonalisable.

De même, on prouve que les valeurs propres d'une symétrie, différentes de  $+ \text{Id}$  ou  $- \text{Id}$ , sont 1 et  $-1$  et que le sous-espace vectoriel  $\mathbf{E}$  est somme directe de  $\text{Ker}(s - \text{Id})$  et de  $\text{Ker}(s + \text{Id})$ . Cela établit que  $s$  est diagonalisable.

### 1.5.3 Sous-espaces stables et commutation des endomorphismes

Le résultat suivant est fondamental.

#### Proposition 18.

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $\mathbf{E}$ . Si  $f$  et  $g$  commutent, c'est-à-dire si  $f \circ g = g \circ f$ , alors  $f$  laisse stable le noyau et l'image de  $g$ .

**Preuve.** ◇

■ Prouvons que  $\text{Ker}g$  est stable par  $f$ .

Soit  $x$  un élément de  $\text{Ker}g$ , on a :  $g(x) = 0$  donc  $f \circ g(x) = 0$ .

Comme  $g \circ f(x) = f \circ g(x)$ , on voit que  $f(x)$  appartient à  $\text{Ker}g$ , ce qui prouve que  $\text{Ker}g$  est stable par  $f$ .

■ Prouvons maintenant que  $\text{Im}g$  est stable par  $f$ .

Soit  $x = g(y)$  un élément de  $\text{Im}g$ . On a donc  $f(x) = f \circ g(y)$ . Comme  $f \circ g(y) = g \circ f(y)$ , on obtient :

$$f(x) = g \circ f(y)$$

ce qui prouve que  $f(x) \in \text{Im}g$  et que  $\text{Im}g$  est stable par  $f$ . ◇

En particulier, lorsque  $g$  est une combinaison linéaire des puissances de  $f$ , c'est-à-dire si :

$$g = \sum_{k=0}^d p_k f^k$$

où  $d$  est un entier naturel, et où  $p_0, p_1, \dots, p_d$  sont des scalaires, alors  $f$  commute avec  $g$ . On rappelle que  $f^0 = \text{Id}$  et que  $f^k = f \circ \dots \circ f$   $k$  fois.

Cela nous conduit à introduire la définition 25 :

**Définition 25.** Soit  $f$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$ .

On appelle **polynôme en l'endomorphisme**  $f$ , tout endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^d p_k f^k,$$

$$\text{où } P(X) = \sum_{k=0}^d p_k X^k \text{ appartient à } \mathbb{K}[X].$$

On vérifie aisément que si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  et  $\lambda$  un scalaire, alors :

i)  $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$

ii)  $(\lambda \cdot P)(f) = \lambda \cdot P(f)$

iii)  $(P \circ Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$

et comme  $PQ = QP$ , c'est aussi égal à  $Q(f) \circ P(f)$ ,

ce qui s'exprime par la proposition 19.

#### Proposition 19.

Étant donné un endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$ , l'application :

$$P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(f) \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$$

est un homomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{K}[X]$  dans l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ .

Cet homomorphisme n'est en général ni injectif, ni surjectif.

En effet, si  $f = \text{Id}$ , on a :  $P(\text{Id}) = 0$  si  $P = X - 1$  et cet homomorphisme n'est alors pas injectif.

Il n'est pas surjectif, sinon tout endomorphisme de  $\mathbf{E}$  serait de la forme  $P(f)$ , et comme :

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f),$$

tous les endomorphismes de  $\mathbf{E}$  commuteraient entre eux, ce qui est évidemment faux.

La proposition 20 résulte de la proposition 18.

**Proposition 20.** Soit  $f$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$ . Pour tout polynôme  $P$  appartenant à  $\mathbb{K}[X]$ ,  $f$  laisse stable  $\text{Ker}P(f)$  et  $\text{Im}P(f)$ .

En particulier si  $\lambda$  est valeur propre de l'endomorphisme  $f$  on voit, en prenant  $P(X) = X - \lambda$ , que  $f$  laisse stable  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$  et, plus généralement en prenant  $P(X) = (X - \lambda)^r$  que  $f$  laisse stable  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^r$  ( $r$  étant un entier naturel).

Ce dernier point sera approfondi dans le cadre de la dimension finie, dans l'article portant sur la réduction des endomorphismes et des matrices.

## 2. Algèbre linéaire en dimension finie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux espaces vectoriels de dimension finie. Ceux-ci sont définis de la manière suivante.

**Définition 26.** On appelle espace vectoriel de **dimension finie** tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.

Entrent dans cette catégorie les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  dont la base canonique constitue, évidemment, une famille génératrice finie.

Dans ce cadre, on se propose d'étudier le problème de l'existence des bases, des sous-espaces supplémentaires, etc.

### 2.1 Espaces vectoriels de dimension finie

#### 2.1.1 Existence de bases

##### Proposition 21.

Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base.

On peut obtenir une base de  $\mathbf{E}$  au moins de deux manières :

- soit par extraction d'une famille libre maximale à partir d'une famille génératrice finie ;
- soit par complétion d'une famille libre ; c'est ce qu'il est convenu d'appeler le **théorème de la base incomplète**.

**Preuve.**  $\diamond$  Nous démontrons l'existence d'une base en utilisant la première méthode proposée ci-dessus.

Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille génératrice finie de  $\mathbf{E}$ . Considérons l'ensemble des familles libres extraites de la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Parmi celles-ci existe au moins une famille libre de cardinal maximal  $p$ . Quitte à réindexer la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , on peut supposer que cette famille est constituée des vecteurs  $(e_1, \dots, e_p)$ . Soit  $k$  un entier compris entre  $p+1$  et  $n$ . La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_k)$  est une famille extraite de  $p+1$  éléments, donc elle est liée.

Ainsi, il existe une combinaison linéaire nulle non triviale :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \lambda_k e_k = 0$$

Le scalaire  $\lambda_k$  est non nul, sinon la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  serait liée. On obtient ainsi que, pour tout  $k$ ,  $p+1 \leq k \leq n$ ,  $e_k$  s'exprime comme combinaison linéaire des  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Tout vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$  s'exprime comme combinaison linéaire de la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  et donc de la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ , qui est à la fois génératrice et libre.

On a donc démontré l'existence d'une base de  $\mathbf{E}$ .  $\diamond$

**Lemme.** Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbf{E}$ .

Alors, toute famille de  $n+1$  vecteurs et, *a fortiori*, de plus de  $n+1$  vecteurs, obtenus par combinaison linéaire des  $n$  vecteurs  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , est liée.

**Preuve.**  $\diamond$  Soit  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille de  $n+1$  vecteurs s'exprimant comme suit :

$$\begin{aligned} v_0 &= \alpha_{0,1} e_1 + \alpha_{0,2} e_2 + \dots + \alpha_{0,n} e_n \\ v_1 &= \alpha_{1,1} e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \dots + \alpha_{1,n} e_n \\ &\vdots \\ v_n &= \alpha_{n,1} e_1 + \alpha_{n,2} e_2 + \dots + \alpha_{n,n} e_n \end{aligned}$$

On se propose de démontrer le résultat par récurrence sur  $n$ .

Si  $n=1$ , la propriété est clairement vérifiée.

Supposons-la vérifiée à l'ordre  $n-1$  et établissons-la à l'ordre  $n$ .

Si  $\alpha_{0,n} = \alpha_{1,n} = \dots = \alpha_{n,n} = 0$ , les vecteurs  $v_0, v_1, \dots, v_n$  sont combinaisons linéaires de  $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ , donc constituent une famille liée d'après l'hypothèse de récurrence.

Si l'un des  $\alpha_{i,n}$  est non nul, par exemple  $\alpha_{0,n}$ , on obtient que, pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $v_k - \frac{\alpha_{k,n}}{\alpha_{0,n}} v_0$  est combinaison linéaire des vecteurs  $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$  et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de ces vecteurs :

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \left( v_k - \frac{\alpha_{k,n}}{\alpha_{0,n}} v_0 \right) = 0,$$

soit encore :

$$-\left( \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{\alpha_{k,n}}{\alpha_{0,n}} \right) v_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k v_k = 0$$

qui est une combinaison linéaire nulle non triviale de ces vecteurs  $v_0, v_1, \dots, v_n$ .

Les vecteurs  $v_0, v_1, \dots, v_n$  sont liés et la propriété est vérifiée à l'ordre  $n$ .  $\diamond$

### Proposition 22.

Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie ; toutes les bases de  $\mathbf{E}$  ont même cardinal et ce nombre est appelé **dimension de  $\mathbf{E}$** .

**Preuve.**  $\diamond$  Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , deux bases de  $\mathbf{E}$ , constituées respectivement de  $p$  et  $q$  vecteurs. On veut prouver que  $p=q$ .

Comme la base  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $p$  vecteurs combinains linéaires des  $q$  vecteurs de  $\mathcal{B}'$ , on obtient l'inégalité  $p \leq q$  (sinon  $\mathcal{B}$  serait liée d'après le lemme précédent) et, en inversant les rôles de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , on obtient l'inégalité inverse  $q \leq p$ .

Ce qui établit l'égalité :

$$p = q$$

Dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , toute **famille libre** a donc, au plus,  $n$  éléments et toute **famille génératrice** a, au moins,  $n$  éléments.

### Proposition 23.

Soient  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$  de dimension  $n$ .

Il y a équivalence entre les trois propriétés :

- i)  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base ;
- ii)  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille libre ;
- iii)  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille génératrice.

**Preuve.**  $\diamond$  Il est clair que i)  $\Rightarrow$  ii) et i)  $\Rightarrow$  iii).

Prouvons que ii)  $\Rightarrow$  i). La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille libre maximale, donc c'est une base (cf. proposition 23).

Prouvons que iii)  $\Rightarrow$  i). La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille génératrice minimale. C'est donc une base (cf. proposition 23).  $\diamond$

## 2.1.2 Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie

Pour démontrer qu'un espace vectoriel est de dimension  $n$ , on dispose d'au moins deux méthodes :

- soit en exhiber une base ayant  $n$  éléments ;
- soit vérifier qu'il est isomorphe à un espace de dimension  $n$  ; ce qui est justifié par la proposition 24.

### Proposition 24.

Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $\mathbf{E}$  est de dimension  $n$ . Alors  $\mathbf{F}$  est de dimension  $n$  si, et seulement si, il existe un isomorphisme de  $\mathbf{E}$  sur  $\mathbf{F}$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Supposons que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme  $f$  de  $\mathbf{E}$  sur  $\mathbf{F}$ . Comme l'image par un isomorphisme d'une base de  $\mathbf{E}$  est une base de  $\mathbf{F}$ , l'espace  $\mathbf{F}$  admet une base ayant  $n$  vecteurs et sa dimension vaut  $n$ .

Supposons maintenant que les deux espaces vectoriels sont de dimension  $n$ , et soient  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbf{E}$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de  $\mathbf{F}$ . On sait qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  vérifiant pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  :

$$f(e_i) = v_i.$$

Cette application est un isomorphisme puisqu'elle transforme une base de  $\mathbf{E}$  en une base de  $\mathbf{F}$ .  $\diamond$

**Proposition 25.**

Soient  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ ,  $n$  espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \dots \times \mathbf{E}_n$  est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \dots \times \mathbf{E}_n) = \sum_{i=1}^n \dim \mathbf{E}_i.$$

En particulier :

$$\dim \mathbf{E}^n = n \dim \mathbf{E}$$

**Preuve.**  $\diamond$  Démontrons le résultat pour  $n = 2$ .

Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une base de  $\mathbf{E}_1$  et  $(v_1, \dots, v_p)$  une base de  $\mathbf{E}_2$ . Il est clair que tout vecteur de  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$  s'écrit :

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^p y_j v_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (u_i, 0) + \sum_{j=1}^p y_j (0, v_j).$$

La famille des vecteurs  $(u_1, 0), (u_2, 0), (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_p)$  est clairement génératrice.

On vérifie immédiatement que c'est une famille libre. C'est donc une base et l'on a démontré que la dimension de  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$  est  $\dim \mathbf{E}_1 + \dim \mathbf{E}_2$ .

La démonstration se généralise de façon immédiate au cas où  $n \geq 2$ .  $\diamond$

**Proposition 26.**

Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  est de dimension finie et sa dimension vaut  $\dim \mathbf{E} \times \dim \mathbf{F}$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Soit  $\mathbf{E}$  un espace de dimension  $p$ . Établissons le résultat en exhibant un isomorphisme de  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  sur  $\mathbf{F}^p = \mathbf{F} \times \mathbf{F} \times \dots \times \mathbf{F}$  ( $p$  fois).

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $\mathbf{E}$ . Considérons l'application associant à tout élément  $f$  de  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  le  $p$ -uplet  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ . Cette application est clairement linéaire et bijective, car la donnée de tout  $p$ -uplet  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  de  $\mathbf{F}^p$  détermine de manière unique une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ .

L'application  $\phi$  est donc un isomorphisme, ce qui établit que :

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \dim(\mathbf{F}^p)$$

c'est-à-dire, puisque  $p = \dim \mathbf{E}$ , que :

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \dim \mathbf{E} \times \dim \mathbf{F}. \quad \diamond$$

## 2.2 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Nous étudions maintenant la question de la dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Observons tout d'abord que l'on ne peut pas nécessairement obtenir une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel par restriction d'une famille génératrice de l'espace tout entier. Ainsi, dans  $\mathbb{R}^2$  la famille  $((1,0), (0,1))$  est génératrice, mais ni  $(1,0)$  ni  $(0,1)$  n'engendre la droite vectorielle  $\mathbb{R}(1,1)$ .

**Proposition 27.**

Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Alors tout sous-espace  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  est de dimension finie et la dimension de  $\mathbf{F}$  est inférieure ou égale à celle de  $\mathbf{E}$  avec égalité si, et seulement si :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}$$

**Preuve.**  $\diamond$  Les familles libres de  $\mathbf{F}$  sont des familles libres de  $\mathbf{E}$  et compétent, au plus,  $n$  vecteurs. Il existe donc dans  $\mathbf{F}$  des familles

libres de cardinal maximal. Ce sont des bases de  $\mathbf{F}$ ; leur cardinal est inférieur ou égal à la dimension de  $\mathbf{F}$ , ce qui établit :

$$\dim \mathbf{F} \leq \dim \mathbf{E}.$$

Soit  $\mathbf{F}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$  dont la dimension est égale à  $n = \dim \mathbf{E}$ . Une base de  $\mathbf{F}$  est une famille libre de  $\mathbf{E}$  de cardinal  $n$ . C'est une base de  $\mathbf{E}$ , ce qui établit l'égalité de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{E}$ .  $\diamond$

**Proposition 28.**

Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathbf{F}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ , alors  $\mathbf{F}$  admet un supplémentaire dans  $\mathbf{E}$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $\mathbf{F}$ ; complétons celle-ci en une base  $(e_1, e_2, \dots, e_p, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$  et notons  $\mathbf{G}$  le sous-espace de  $\mathbf{E}$  engendré par les vecteurs  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ . On vérifie que  $\mathbf{G}$  est un supplémentaire de  $\mathbf{F}$  dans  $\mathbf{E}$  autrement dit que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G} \quad \diamond$$

**Proposition 29.**

Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie ou non. Si un sous-espace  $\mathbf{F}$  admet un supplémentaire de dimension finie  $p$ , tous ses supplémentaires sont de dimension finie  $p$  et  $p$  s'appelle la codimension de  $\mathbf{F}$ .

**Preuve.**  $\diamond$  Supposons :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G} \text{ et } \mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{H}$$

avec  $\dim \mathbf{G} = p$ .

On veut prouver que  $\mathbf{H}$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie  $p$ .

Soit  $p$  la projection sur  $\mathbf{G}$  dans la direction de  $\mathbf{F}$ . Montrons que  $p$  induit un isomorphisme de  $\mathbf{H}$  sur  $\mathbf{G}$ , ce qui prouvera bien que :

$$\dim \mathbf{H} = \dim \mathbf{G}$$

Le noyau de l'application induite est  $\mathbf{H} \cap \text{Ker } p$  c'est-à-dire  $\mathbf{H} \cap \mathbf{F} = \{0\}$ . Celle-ci est donc injective.

L'application induite est surjective de  $\mathbf{H}$  sur  $\mathbf{G}$ , car, pour tout vecteur  $g$  appartenant à  $\mathbf{G}$ , on peut écrire  $g = f + h$  avec  $f \in \mathbf{F}$  et  $h \in \mathbf{H}$  ce qui établit, puisque  $p(g) = g$ , l'égalité :

$$g = p(f) + p(h) = p(h). \quad \diamond$$

D'où le résultat.  $\diamond$

**Proposition 30.**

i) Soient  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_p$   $p$  sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $\mathbf{E}$ . On suppose que la somme  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_p$  est directe.

Alors la dimension de  $\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{F}_i$  est égale à la somme des dimensions des  $\mathbf{F}_i$  c'est-à-dire à  $\sum_{i=1}^p \dim \mathbf{F}_i$ .

ii) Soient  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $\mathbf{E}$ . Alors :

$$\dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G})$$

**Preuve.**  $\diamond$

i) Si l'on choisit une base dans chacun des sous-espaces  $\mathbf{F}_i$ , la famille de vecteurs obtenue par concaténation de ces  $p$  bases est clairement une base de la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{F}_i$  et l'égalité des dimensions :

$$\sum_{i=1}^p \dim \mathbf{F}_i = \dim \left( \bigoplus_{i=1}^p \mathbf{F}_i \right)$$

s'en déduit immédiatement.

ii) Si  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont deux sous-espaces vectoriels, soient  $\mathbf{F}'$  un supplémentaire de  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$  dans  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}'$  un supplémentaire de  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$  dans  $\mathbf{G}$ . On a donc :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \oplus \mathbf{F} \cap \mathbf{G} \text{ et } \mathbf{G} = \mathbf{G}' \oplus \mathbf{F} \cap \mathbf{G}.$$

On établit élémentairement que :

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{F}' \oplus \mathbf{F} \cap \mathbf{G} \oplus \mathbf{G}'$$

ce qui donne :

$$\dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \dim \mathbf{F}' + \dim \mathbf{F} \cap \mathbf{G} + \dim \mathbf{G}'.$$

Comme

$$\dim \mathbf{F} = \dim \mathbf{F}' + \dim \mathbf{F} \cap \mathbf{G} \text{ et } \dim \mathbf{G} = \dim \mathbf{G}' + \dim \mathbf{F} \cap \mathbf{G},$$

on obtient bien :

$$\dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{F} \cap \mathbf{G} \quad \diamond$$

**Définition 27.** Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ .

Si  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}$  de dimension finie  $p$ , on dit que le rang de  $f$  vaut  $p$ . On note  $\text{rg } f$  le rang de  $f$ .

Si  $f(\mathbf{E}) = \text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}$  qui n'est pas de dimension finie, on dit que le rang de  $f$  est infini.

### Théorème du rang.

Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathbf{F}$  un espace vectoriel et  $f$  une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$ .

Alors, on a l'égalité suivante :

$$\dim \mathbf{E} = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$$

**Preuve.**  $\diamond$  Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\text{Ker } f$ . On la complète en une base  $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$ .

Puisque  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_p) = 0$ , on vérifie que la famille  $(f(e_{p+1}), f(e_{p+2}), \dots, f(e_n))$  est une base de  $\text{Im } f$ . Par conséquent :

$$\dim \text{Im } f = n - p = \dim \mathbf{E} - \dim \text{Ker } f \quad \diamond$$

Rappelons que les automorphismes de  $\mathbf{E}$  sont les endomorphismes bijectifs de  $\mathbf{E}$ . Ceux-ci forment un groupe pour la loi  $\circ$ , noté  $GL(\mathbf{E})$ , appelé **groupe linéaire** de l'espace vectoriel  $\mathbf{E}$ .

### Proposition 31.

Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $\mathbf{E}$ .

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i)  $f$  est bijective ;

ii)  $f$  est injective ;

iii)  $f$  est surjective.

**Preuve.**  $\diamond$  Il est clair que la propriété i) implique les propriétés ii) et iii).

On sait que :  $\dim \mathbf{E} = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$ .

Si  $f$  est injective :

$$\text{Ker } f = \{0\} \text{ et } \text{rg } f = \dim \mathbf{E},$$

ce qui donne :

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbf{E} \text{ soit } \text{Im } f = \mathbf{E}.$$

Cela assure la surjectivité de  $f$ .

Si  $f$  est surjective, on a

$$\text{Im } f = \mathbf{E}, \text{ donc } \dim \mathbf{E} = \text{rg } f,$$

et par le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker } f = 0$$

ainsi,  $\text{Ker } f = \{0\}$  et  $f$  est injective.

L'équivalence entre i), ii) et iii) est établie.  $\diamond$

Dans le cas où  $f$  est une application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  dont les dimensions sont égales, une démonstration calquée sur la précédente établit l'équivalence des trois propriétés i), ii), iii).

## 2.3 Formes linéaires et hyperplans

Dans ce paragraphe, on se propose de définir les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné à l'aide d'**« équations »**. C'est ainsi, par exemple, qu'une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  a une équation de la forme  $ax + by = 0$ .

### 2.3.1 Formes linéaires

**Définition 28.** On appelle **forme linéaire** sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbf{E}$  toute application linéaire de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble des formes linéaires sur  $\mathbf{E}$  est l'espace dual  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbb{K})$  que l'on note  $\mathbf{E}^*$ .

Une forme linéaire  $\varphi$  est soit nulle soit surjective. En effet,  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel de dimension 1 ; ses seuls sous-espaces étant de dimension 0 ou 1, ce sont  $\{0\}$  ou  $\mathbb{K}$  et donc :

$$\text{Im } \varphi = \{0\} \text{ ou } \text{Im } \varphi = \mathbb{K}.$$

### Proposition 32.

Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , rapporté à une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Alors, pour tout vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$ , il existe une unique famille de scalaires  $e_1^*(x), e_2^*(x), \dots, e_n^*(x)$  telle que :

$$x = \sum_{k=1}^n e_k^*(x) e_k$$

On dit que  $e_1^*(x), e_2^*(x), \dots, e_n^*(x)$  sont les composantes ou coordonnées du vecteur  $x$  dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

**Preuve.**  $\diamond$  On sait, en effet, que l'existence d'une telle famille est assurée par le caractère générateur de la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  son unicité résultant de l'indépendance linéaire des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .  $\diamond$

### Proposition 33.

Les applications  $e_k^* : x \in \mathbf{E} \rightarrow e_k^*(x) \in \mathbb{K}$  sont des formes linéaires sur  $\mathbf{E}$  (appelées **formes linéaires coordonnées de la base**  $(e_1, \dots, e_n)$ ).

La famille  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  forme une base de l'espace dual  $\mathbf{E}^*$ , dite **base duale de la base**  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$ .

On a, en particulier, puisque  $e_j = 0 \cdot e_1 + \dots + 1 \cdot e_j + \dots + 0 \cdot e_n \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette propriété caractérise les formes linéaires  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  puisqu'elle les définit sur la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$ .

**Preuve.** ◇

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $\mathbf{E}$  s'exprimant respectivement :

$$\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i \text{ et } \sum_{i=1}^n e_i^*(y) e_i.$$

Le vecteur  $\lambda x + \mu y$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux scalaires s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i e_i^*(x) + \mu_i e_i^*(y)) e_i,$$

ce qui prouve, par unicité de la décomposition dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , que :

$$e_i^*(\lambda x + \mu y) = \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y), 1 \leq i \leq n,$$

la linéarité des  $e_i^*$  est bien prouvée.

■ Prouvons maintenant que la famille  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $\mathbf{E}^*$ .

C'est une famille libre. En effet, si,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0$ , on a pour  $1 \leq k \leq n$  :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_k) = 0$$

ce qui implique  $\lambda_k = 0$ .

■ De plus, la dimension de  $\mathbf{E}^* = \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbb{K})$  vaut :

$$\dim \mathbf{E} \times \dim \mathbb{K} = n$$

La famille  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  est donc une base de  $\mathbf{E}^*$ . ◇

Donnons, maintenant, l'expression d'une forme linéaire  $\varphi$  dans cette base duale  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ .

**Proposition 34.**

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbf{E}$ ,  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  sa base dual et  $\varphi$  un élément de  $\mathbf{E}^*$ .

On a l'écriture suivante :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*.$$

**Preuve.** ◇ Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbf{E}$ ; il s'exprime sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$$

Son image par  $\varphi$  s'écrit donc :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) \varphi(e_i)$$

ou encore :

$$\varphi(x) = \left( \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \right)(x)$$

ce qui établit l'égalité :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \quad \diamond$$

**Proposition 35.**

Soit  $\mathbf{E}$  un espace de dimension finie  $n$ . Toute base de  $\mathbf{E}^*$  est la base dual d'une base de  $\mathbf{E}$ .

**Preuve.** ◇ Soit  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  une base de  $\mathbf{E}^*$ .

On se propose de déterminer une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$  telle que, pour  $1 \leq k \leq n$  :

$$\varphi_k = e_k^*,$$

c'est-à-dire telle que :

$$\varphi_i(e_j) = 1 \text{ et } \varphi_i(e_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

pour tout  $i$  et tout  $j$  compris entre 1 et  $n$ .

On définit à cet effet l'application  $\phi$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbb{K}^n$  associant à tout vecteur  $x \in \mathbf{E}$  le  $n$ -uplet  $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$ . Cette application  $\phi$  est clairement linéaire et l'on va prouver qu'elle est injective ce qui, compte tenu du fait que  $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbb{K}^n = n$ , assurera la surjectivité de  $\phi$ .

Soient  $x$  un vecteur non nul de  $\text{Ker } \phi$  et  $\mathbf{F}$  un supplémentaire de la droite vectorielle  $\mathbb{K}x$  dans  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbb{K}x$ ).

Considérons la forme linéaire  $\varphi$  nulle sur  $\mathbf{F}$  et telle que  $\varphi(x) = 1$ . Comme  $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n$ , on obtient :

$$1 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

puisque  $x$  appartient à  $\text{Ker } \phi$ . Cette contradiction établit que  $\text{Ker } \phi = \{0\}$ .

L'application  $\phi$  est injective, donc bijective, et il existe, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , un unique vecteur  $e_i$  dont l'image par  $\phi$  ( $\varphi_1(e_i), \varphi_2(e_i), \dots, \varphi_n(e_i)$ ) vaut  $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (le 1 étant en  $i$ ème position). La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  vérifie donc pour tout  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$ :

$$\varphi_i(e_j) = 1 \text{ et } \varphi_i(e_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

De plus, cette famille est libre. En effet, si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ , on a, en composant par  $\varphi_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) l'égalité :  $\lambda_k = 0$ .

Cette famille est libre dans  $\mathbf{E}$ ; son cardinal  $n$  est la dimension de  $\mathbf{E}$ .

C'est donc une base de  $\mathbf{E}$ .

Soit  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  la base dual de  $\mathbf{E}$ ; elle vérifie, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $n$ :

$$e_i^*(e_j) = \varphi_i(e_j), \text{ c'est-à-dire } e_i^* = \varphi_i \text{ si } 1 \leq i \leq n.$$

On a établi que  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  est la base dual d'une base de  $\mathbf{E}$  ( $e_1, \dots, e_n$ ), donc que toute base de  $\mathbf{E}^*$  est la base dual d'une base de  $\mathbf{E}$ . ◇

**2.3.2 Exemples****2.3.2.1 Exemples de formes linéaires**

① **Les formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension  $n$  rapporté à une base**

Les formes linéaires sont les applications associant à tout vecteur

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  un scalaire de la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n u_i x_i$$

En effet, si  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) \cdot e_i^*$  (cf. proposition 34), on a :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) x_i$$

ce qui donne la forme précédente en posant  $u_i = \varphi(e_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Réiproquement, l'application  $x \mapsto \sum_{i=1}^n u_i x_i$  est clairement une forme linéaire sur  $E$ .

## ② Les formes linéaires d'évaluation et leur application aux problèmes d'interpolation

Considérons l'espace vectoriel des applications définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $f$  un élément de cet espace et  $x$  un nombre réel appartenant à  $I$ .

L'application  $\delta_x : f \mapsto f(x)$  est la forme linéaire d'évaluation en  $x$ .

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Si  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  scalaires distincts de  $\mathbb{K}$ , alors la connaissance des  $n+1$  formes linéaires  $\delta_{x_i}$  pour  $1 \leq i \leq n$  détermine  $f$ .

En effet, notons  $L_i$  le polynôme  $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ .

Ces polynômes  $L_0, L_1, \dots, L_n$  forment une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ , dans laquelle on a pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  :

$$P(X) = \sum_0^n P(x_i) L_i(X)$$

Ces polynômes  $(L_i)$  sont appelés **polynômes de Lagrange**.

## ③ L'intégrale comme forme linéaire

Considérons l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment  $[\alpha, \beta]$ .

L'application  $f \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  est une forme linéaire. Pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur à 3, on a l'égalité :

$$\int_{\alpha}^{\beta} P dt = \frac{\beta - \alpha}{6} \left( P(\alpha) + P(\beta) + 4P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\int_{\alpha}^{\beta} P dt = \frac{\beta - \alpha}{6} \left( \delta_{\alpha}(P) + \delta_{\beta}(P) + 4\delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(P) \right)$$

### 2.3.2.2 Exemples de bases duales

#### ① Base duale de la base de Lagrange

Soient  $\mathbb{K}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $n$  scalaires distincts de  $\mathbb{K}$ .

Notons  $L_i$  le polynôme  $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ .

Tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  s'écrit :

$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i(X)$$

On retrouve que la famille  $(\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$  est la base duale de la base  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ .

On rappelle que  $\delta_{x_i}$  est l'application qui à  $P$  fait correspondre  $P(x_i)$ .

#### ② Base duale de la base de Taylor

Soit  $\mathbb{K}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  rapporté à la base  $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$  où  $a$  est un scalaire.

Tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

On a établi que les  $n+1$  formes linéaires

$$P \mapsto P(a), P \mapsto \frac{P'(a)}{1!}, \dots, P \mapsto \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

constituent la base duale de la base  $(1, (X - a), \dots, (X - a)^n)$ .

## Hyperplans

**Définition 29.** On appelle **hyperplan** d'un espace vectoriel de  $E$  tout sous-espace de codimension 1, c'est-à-dire admettant pour supplémentaire une droite.

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , les hyperplans de  $E$  sont les sous-espaces vectoriels de dimension  $n-1$ ; en particulier, les droites vectorielles sont les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension deux; les plans vectoriels sont les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension trois.

## Proposition 36.

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Tout vecteur n'appartenant pas à  $H$  engendre un supplémentaire de  $H$  dans  $E$ .

De plus, tout sous-espace vectoriel de  $E$  contenant strictement  $H$  est l'espace  $E$  tout entier.

**Preuve.**  $\diamond$  On veut prouver qu'un vecteur  $y$  n'appartenant pas à  $H$  engendre une droite vectorielle supplémentaire de  $H$  dans  $E$ , c'est-à-dire telle que  $E = H \oplus \mathbb{K}y$ .

Comme  $H$  est un hyperplan, il admet pour supplémentaire une droite vectorielle  $\mathbb{K}x$ . On a donc :

$$E = H \oplus \mathbb{K}x$$

et le vecteur  $y$  s'écrit sous la forme  $k + \lambda x$  où  $k$  est élément de  $H$  et où le scalaire  $\lambda$  est non nul puisque  $y$  n'appartient pas à  $H$ . Il en résulte que :

$$x = \frac{1}{\lambda}y - \frac{1}{\lambda}k.$$

Ainsi, tout vecteur  $v = k_v + \lambda_v x$  de l'espace  $E$  s'écrit :

$$\left( k_v - \frac{\lambda_v}{\lambda} k \right) + \frac{\lambda_v}{\lambda} y$$

et, puisque  $k_v - \frac{\lambda_v}{\lambda} k$  appartient à  $H$ ,  $v$  appartient à  $H \oplus \mathbb{K}y$ , ce qui établit que :

$$E \subset H + \mathbb{K}y$$

ou encore que :

$$E = H + \mathbb{K}y.$$

Enfin, il est clair que :

$$\mathbf{H} \cap \mathbb{K}y = \{0\}$$

On a établi l'égalité :

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \oplus \mathbb{K}y$$

Soient  $\mathbf{F}$  un sous-espace vectoriel contenant strictement  $\mathbf{H}$  et  $y$  un vecteur de  $\mathbf{F}$  n'appartenant pas à  $\mathbf{H}$ . On a :

$$\mathbf{H} \oplus \mathbb{K}y = \mathbf{E} \subset \mathbf{F},$$

ce qui implique l'égalité :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}$$

◊

### Proposition 37.

- i) Tout hyperplan de  $\mathbf{E}$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- ii) Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.
- iii) Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si, et seulement si, elles ont pour noyau le même hyperplan.

**Preuve.** ◊ Soit  $\mathbf{H}$  un hyperplan de  $\mathbf{E}$ . Il existe une droite vectorielle  $\mathbb{K}v$  supplémentaire de  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \oplus \mathbb{K}v.$$

Pour tout vecteur  $x$  appartenant à  $\mathbf{E}$ , il existe donc un unique vecteur  $k_x$  appartenant à  $\mathbf{H}$  et un unique scalaire  $\lambda(x)$  tels que :

$$x = k_x + \lambda(x)v.$$

L'application  $x \mapsto \lambda(x)$  est clairement une forme linéaire dont le noyau est égal à  $\mathbf{H}$ .

■ Soient  $\varphi$  une forme linéaire non nulle et  $v$  un vecteur de  $\mathbf{E}$  tel que  $\varphi(v) \neq 0$  ; On établit maintenant que :

$$\mathbf{E} = \text{Ker } \varphi \oplus \mathbb{K}v.$$

Si l'égalité  $\mathbf{E} = \text{Ker } \varphi \oplus \mathbb{K}v$  est vérifiée, tout vecteur  $x$  de  $\mathbf{E}$  peut s'écrire  $k + \lambda v$  où  $k$  appartient à  $\text{Ker } \varphi$  et l'on a nécessairement :

$$\varphi(x) = \lambda \varphi(v)$$

et

$$k = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$$

Si la décomposition d'un vecteur  $x$  existe, elle est donc unique et déterminée par ces formules.

Inversement, posons :

$$x = \left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v.$$

On constate que  $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$  appartient à  $\text{Ker } \varphi$  puisque :

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v\right) = 0$$

et que :

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v \in \mathbb{K}v.$$

Ainsi  $\mathbf{E} = \text{Ker } \varphi \oplus \mathbb{K}v$ .  $\text{Ker } \varphi$ , admettant pour supplémentaire la droite  $\mathbb{K}v$ , est donc un hyperplan.

■ Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires non nulles admettant pour noyau le même hyperplan  $\mathbf{H}$ .

Il existe une droite vectorielle  $\mathbb{K}v$  telle que  $\mathbf{E} = \mathbf{H} \oplus \mathbb{K}v$ .

Pour tout vecteur  $x$  appartenant à  $\mathbf{E}$ , il existe un unique vecteur  $k_x$  appartenant à  $\mathbf{H}$  et un unique scalaire  $\lambda_x$  tel que :

$$x = k_x + \lambda_x v.$$

On a :

$$\varphi(x) = \lambda_x \varphi(v)$$

et

$$\psi(x) = \lambda_x \psi(v).$$

Comme  $\varphi(v)$  n'est pas nul puisque  $v$  n'appartient pas à  $\mathbf{H}$ , il est clair que :

$$\psi(x) = \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}\varphi(x)$$

c'est-à-dire :

$$\psi = \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}\varphi.$$

Les formes linéaires  $\varphi$  et  $\psi$  sont bien proportionnelles.

La réciproque est immédiate. ◊

### Proposition 38.

Soient  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension  $n$  rapporté à une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les composantes d'un vecteur  $x$  dans cette base.

i) Les hyperplans de  $\mathbf{E}$  sont les ensembles d'équation :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n = 0$$

où  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est un  $n$ -uplet de scalaires non tous nuls.

ii) Tout ensemble d'équation :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n = 0$$

où  $(u_1, \dots, u_n)$  est un  $n$ -uplet de scalaires non tous nuls est un hyperplan de  $\mathbf{E}$ .

iii) Les équations  $u_1x_1 + \dots + u_nx_n = 0$  et  $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 0$  représentent un même hyperplan si, et seulement si :

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \dots = \frac{u_n}{v_n}$$

(avec la convention que  $u_i = 0$  lorsque  $v_i = 0$ ).

**Preuve.** ◊

i) Soit  $\mathbf{H}$  un hyperplan de  $\mathbf{E}$ . On sait qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  dont  $\mathbf{H}$  est le noyau. Dans la base duale de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  celle-ci s'exprime sous la forme :

$$\varphi = u_1e_1^* + \dots + u_ne_n^*$$

où le  $n$ -uplet  $(u_1, \dots, u_n)$  n'est pas nul puisque  $\varphi$  n'est pas nulle.

Un vecteur  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  appartient à  $\mathbf{H} = \text{Ker } \varphi$  si, et seulement si :

$$\varphi(x) = 0$$

c'est-à-dire si :

$$u_1x_1 + \dots + u_nx_n = 0.$$

ii) Soit  $\mathbf{H}$  l'ensemble d'équation :

$$u_1x_1 + \dots + u_nx_n = 0$$

où  $(u_1, \dots, u_n)$  n'est pas nul. Désignant par  $\varphi$  la forme linéaire  $u_1e_1^* + \dots + u_ne_n^*$ , il est clair que la relation :

$$u_1x_1 + \dots + u_nx_n = 0 \text{ équivaut à la relation } \varphi(x) = 0.$$

Ainsi,  $\mathbf{H}$  est le noyau de la forme linéaire  $\varphi$  et c'est donc un hyperplan de  $\mathbf{E}$ .

iii) Le troisième point résulte du fait que deux formes linéaires non nulles admettent pour noyau le même hyperplan si, et seulement si, elles sont proportionnelles. ◊

### 2.3.3 Applications des hyperplans à l'étude des sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans un souci de simplification, nous conviendrons désormais d'appeler **hyperplans indépendants** des hyperplans obtenus comme noyaux de formes linéaires indépendantes.

Dans tout ce qui suit, on désigne par  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

#### Proposition 39.

i) L'intersection de  $p$  hyperplans indépendants est un espace vectoriel de dimension  $n - p$ .

ii) Inversement, tout sous-espace de dimension  $n - p$  est l'intersection de  $p$  hyperplans indépendants.

iii) Un sous-espace intersection de  $p$  hyperplans indépendants  $\text{Ker}\varphi_1, \text{Ker}\varphi_2, \dots, \text{Ker}\varphi_p$  est aussi intersection de  $p$  hyperplans indépendants  $\text{Ker}\psi_1, \text{Ker}\psi_2, \dots, \text{Ker}\psi_p$ , si, et seulement si :

$$\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p).$$

**Preuve.** ◇ Soient  $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p$   $p$  hyperplans indépendants, donc noyaux de  $p$  formes linéaires indépendantes  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ .

Complétons la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  en une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots, \varphi_n)$  de  $\mathbf{E}^*$ . Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base de  $\mathbf{E}$  dont  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est la base duale.

Un vecteur  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  appartient au sous-espace  $\mathbf{H}_i$  si, et seulement si,  $x$  est un élément de  $\text{Ker}\varphi_i$ , c'est-à-dire si :

$$\varphi_i(x) = 0 \text{ ou encore } x_i = 0.$$

Le vecteur  $x$  appartient donc à  $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \dots \cap \mathbf{H}_p$  si, et seulement si :

$$x_i = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

c'est-à-dire si, et seulement si,  $x$  appartient à  $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ .

Le sous-espace  $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \dots \cap \mathbf{H}_p$  est engendré par les  $n - p$  vecteurs  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ , et c'est donc un sous-espace de dimension  $n - p$ .

ii) Inversement, soient  $\mathbf{G}$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n - p$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbf{G}$ . Complétons celle-ci en une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$ . La base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$  est notée  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  et  $\mathbf{G}$  est clairement obtenu comme intersection des  $p$  hyperplans indépendants  $\text{Ker}e_1^*, \text{Ker}e_2^*, \text{Ker}e_p^*$ .

iii) Soit  $\mathbf{G} = \text{Ker}\varphi_1 \cap \dots \cap \text{Ker}\varphi_p$ , où  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  sont  $p$  formes linéaires indépendantes.

Supposons que  $\mathbf{G} = \text{Ker}\psi_1 \cap \text{Ker}\psi_2 \cap \dots \cap \text{Ker}\psi_p$  où  $\psi_1, \dots, \psi_p$  sont  $p$  formes linéaires indépendantes.

On veut prouver que les  $p$  formes linéaires  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  et les  $p$  formes linéaires  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$  engendrent le même sous-espace. Complétons  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  en une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $\mathbf{E}^*$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base dont elle est duale.

On a prouvé que l'intersection des hyperplans  $\text{Ker}\varphi_1, \dots, \text{Ker}\varphi_p$  est le sous-espace engendré par  $e_{p+1}, \dots, e_n$ , et donc :

$$\mathbf{G} = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Considérons alors l'une des formes linéaires  $\psi_j$ , où  $1 \leq j \leq p$ . On a :

$$\psi_j = \sum_{i=1}^n \psi_j(e_i) \varphi_i.$$

Comme  $e_{p+1}, \dots, e_n$  appartiennent à  $\mathbf{G} = \text{Ker}\psi_1 \cap \text{Ker}\psi_2 \cap \dots \cap \text{Ker}\psi_p$ , on a, en fait, pour  $1 \leq j \leq p$  :

$$\psi_j = \sum_{i=1}^p \psi_j(e_i) \cdot \varphi_i,$$

ce qui établit que  $\text{Vect}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$  est inclus dans  $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ .

L'égalité des dimensions des sous-espaces vectoriels (les formes linéaires étant indépendantes, ils sont tous les deux de dimension  $p$ ) implique l'égalité :

$$\text{Vect}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p) = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p).$$

Si  $\text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p)$ , il est clair que tout vecteur  $x$  appartenant à  $\text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2 \cap \dots \cap \text{Ker}\varphi_p$  vérifie :

$$\varphi_1(x) = \dots = \varphi_p(x) = 0 \text{ et donc } \psi_1(x) = \dots = \psi_p(x) = 0$$

puisque  $\psi_1, \dots, \psi_p$  sont combinaisons linéaires de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ .

Il en résulte que  $\text{Ker}\varphi_1 \cap \dots \cap \text{Ker}\varphi_p$  est inclus dans  $\text{Ker}\psi_1 \cap \dots \cap \text{Ker}\psi_p$  et, par symétrie, l'inclusion inverse et donc l'égalité. ◇

Ainsi tout sous-espace de dimension  $n - p$  d'un espace de dimension  $n$  est défini à l'aide de  $p$  équations linéaires indépendantes, et réciproquement.

C'est ainsi que dans  $\mathbb{R}^3$  les sous-espaces non triviaux sont :

— soit des **plans vectoriels** : ce sont alors des hyperplans de  $\mathbb{R}^3$  et donc des ensembles d'équation :

$$ux + vy + wz = 0 \text{ avec le triplet } (u, v, w) \neq (0, 0, 0);$$

— soit des **droites vectorielles** : ce sont alors des intersections de deux hyperplans indépendants et donc des ensembles d'équations :

$$\begin{cases} ux + vy + wz = 0 \\ u'x + v'y + w'z = 0 \end{cases}$$

où  $(u, v, w), (u', v', w')$  sont deux triplets non proportionnels de  $\mathbb{K}^3$ .

Bien entendu, une telle droite peut-être définie par l'un de ses vecteurs directeurs, en l'occurrence ici  $(vw' - wv', vu' - uw', vv' - wv')$ .