



**TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **AF652 V1**

Équations différentielles

Date de publication :
10 avril 2004

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Bernard RANDÉ**

Résumé Cet article présente les équations différentielles générales, qui offrent le cadre le moins artificiel pour étudier les phénomènes complexes régis par des lois continues. Tout d'abord, le théorème de Cauchy-Lipschitz est expliqué. Il permet de cerner les résultats généraux que l'on peut espérer appliquer à une équation différentielle. Puis des méthodes qualitatives d'étude et notamment des méthodes numériques sont abordées.

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **03/05/2017**

Pour le compte : **7200043660 - centralesupelec // 138.195.79.110**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Équations différentielles

par **Bernard RANDÉ**

Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud
Docteur en mathématiques
Agrégé de mathématiques
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz.....	AF 652 – 2
1.1 Problème de Cauchy.....	— 2
1.1.1 Équations différentielles scalaires d'ordre un	— 2
1.1.2 Cas des équations vectorielles d'ordre un	— 4
1.1.3 Cas des équations d'ordre supérieur	— 5
1.2 Dépendance par rapport aux paramètres.....	— 6
1.2.1 Intervalle de définition des solutions maximales	— 6
1.2.2 Approximation des solutions	— 7
1.2.3 Équations différentielles dépendant d'un paramètre	— 9
2. Méthodes qualitatives d'étude.....	— 9
2.1 Méthodes numériques	— 9
2.1.1 Méthode d'Euler	— 9
2.1.2 Méthode du point milieu.....	— 10
2.1.3 Méthode de Runge-Kutta	— 10
2.2 Localisation des solutions.....	— 10
2.2.1 Utilisation d'un dessin.....	— 10
2.2.2 Utilisation d'inégalités.....	— 11
2.3 Exemple complet	— 11

Dans les applications, les équations différentielles qui s'introduisent le plus naturellement sont les équations différentielles autonomes, qui sont étudiées dans le cadre des systèmes dynamiques ([AF 180]) et les équations différentielles linéaires ([AF 103]), éventuellement non autonomes, qui modélisent des systèmes entretenus simples. Les équations différentielles les plus générales, celles qui font l'objet du présent article, offrent néanmoins le cadre le moins artificiel pour étudier les phénomènes complexes régis par une loi continue. Leur étude permet en outre, sous des hypothèses plus fortes, d'obtenir les résultats théoriques nécessaires à l'analyse des équations autonomes. En outre, les techniques qualitatives qui leur sont dédiées s'appliquent, mutatis mutandis, aux équations différentielles autonomes et linéaires. L'usage de l'ordinateur peut être d'un grand secours, tant dans la résolution exacte et approchée de ces équations que dans leur étude qualitative. Le calcul exact (formel) des solutions de certaines classes d'équations différentielles fera l'objet d'un article séparé.

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de cerner les résultats généraux que l'on peut espérer appliquer à une équation différentielle. Nous présentons tout d'abord le cas des équations scalaires d'ordre un, qui permet une visualisation simple de la situation. Les autres cas n'en sont que des généralisations faciles ou s'y ramenant directement.

1.1 Problème de Cauchy

1.1.1 Équations différentielles scalaires d'ordre un

1.1.1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$. Nous ferons ultérieurement d'autres hypothèses sur f .

Définition 1

Soit $x \in C^1(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de \mathbb{R} .

Nous disons que x est solution de l'équation différentielle scalaire d'ordre un résolue en x' :

$$(E) \quad x' = f(t, x)$$

lorsque :

- (1) le graphe de x est inclus dans Ω ;
- (2) $\forall t \in I \quad x'(t) = f(t, x(t))$.

L'équation différentielle est dite « **résolue en x'** », non parce que l'on peut en espérer une résolution explicite à l'aide de formules, tant s'en faut, mais par opposition à d'autres équations différentielles – que nous n'étudierons pas – où la relation entre t , x et x' est implicite. Ce serait le cas, par exemple, de l'équation $tx^3 + x^2 + txx' = 0$. Nous omettrons désormais ce qualificatif.

Le fait que l'équation est dite « **d'ordre un** » provient de la présence de x' et de l'absence de dérivées d'ordre supérieur. Nous étudions ici des équations « **scalaires** » car la fonction x inconnue est à valeurs scalaires, précisément réelles.

La variable est désignée par t : dans de nombreuses situations, il s'agit de la **variable temporelle**. Bien entendu, cette désignation n'a rien d'absolu.

On notera que l'**intervalle I de définition** n'est pas donné à l'avance. Pour cette raison, la solution sera souvent désignée par le couple (I, x) .

La définition suppose que la fonction inconnue est de classe C^1 sur I . On aurait pu ne la supposer que dérivable, puisque l'égalité $x' = f(t, x)$ conduit de suite à son caractère C^1 . Plus généralement, si $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $x \in C^{k+1}(I, \mathbb{R})$. Posé de cette façon, le problème (E) a, en général, une infinité de solutions. Pour le poser plus sainement, il convient de fixer des **conditions initiales**. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Définition 2

On dit que $x \in C^1(I, \mathbb{R})$ est solution du problème de Cauchy :

$$x' = f(t, x) ; x(t_0) = x_0$$

lorsque (I, x) est solution de (E), lorsque $t_0 \in I$ et lorsque $x(t_0) = x_0$.

On désignera ce problème par la donnée de (E), (t_0, x_0) .

On peut alors espérer que ce **problème de Cauchy** admette une solution et une seule. En réalité, il convient de l'aborder sous l'angle d'abord local, puis global.

1.1.1.2 Problème de Cauchy local

Nous allons, à partir de maintenant, faire une hypothèse supplémentaire sur f . Nous dirons qu'elle est **localement lipschitzienne** par rapport à la seconde variable lorsque, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, on peut trouver un rectangle R centré en (t_0, x_0) et inclus dans Ω tel qu'existe une constante k vérifiant :

$$\forall ((t, x_1), (t, x_2)) \in R^2 \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \quad (1)$$

On notera que k (**constante de Lipschitz** dans R) ne dépend pas de x_1, x_2 , bien sûr, mais pas non plus de t .

Cette condition admet des formes équivalentes qu'il est parfois plus commode de vérifier.

Proposition 1

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable ;
- (2) tout point $(t_0, x_0) \in \Omega$ admet dans Ω un voisinage V tel qu'existe une constante k vérifiant :

$$\forall ((t, x_1), (t, x_2)) \in V^2 \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2| ;$$

- (3) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante l vérifiant :

$$\forall ((t, x_1), (t, x_2)) \in K^2 \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq l|x_1 - x_2|.$$

Preuve ♦

(1) \Rightarrow (2) est évident car le rectangle R est un voisinage convenable.

(3) \Rightarrow (1) est évident car R est lui-même un compact $\subset \Omega$.

(2) \Rightarrow (3). Soit K un compact. Supposons qu'une telle constante l n'existe pas. En particulier, pour tout n , il existe $(t_n, x_{1,n})$ et $(t_n, x_{2,n})$ dans K tels que :

$$|f(t_n, x_{1,n}) - f(t_n, x_{2,n})| > n|x_{1,n} - x_{2,n}| \quad (2)$$

De la suite $((t_n, x_{1,n}, t_n, x_{2,n}))_{n \in \mathbb{N}} \subset K^2$, on peut extraire une suite convergente dans K^2 . Pour la simplicité, on suppose que la suite elle-même converge. Soit :

$$t_n \rightarrow t ; x_{1,n} \rightarrow x_1 ; x_{2,n} \rightarrow x_2$$

Par continuité de f en (t, x_1) et (t, x_2) , le membre de gauche de (2) admet une limite, donc le membre de droite est borné. En particulier, $x_{1,n} - x_{2,n} \rightarrow 0$, donc $x_1 = x_2$.

Appliquons alors l'hypothèse au point $(t, x_1) \in \Omega$. Puisque $(t_n, x_{1,n})$ et $(t_n, x_{2,n})$ appartiennent à V au moins pour n assez grand, on a, pour ces valeurs de n :

$$|f(t_n, x_{1,n}) - f(t_n, x_{2,n})| \leq k|x_{1,n} - x_{2,n}|$$

ce qui contredit (2) pour n assez grand. ♦

Un cas très usuel où f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable est celui où $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur Ω et y est continue. En effet, si l'on considère un rectangle R arbitraire inclus dans Ω , on aura, pour (t, x_1) et $(t, x_2) \in R$,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \sup_{x \in [x_1, x_2]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| |x_1 - x_2|$$

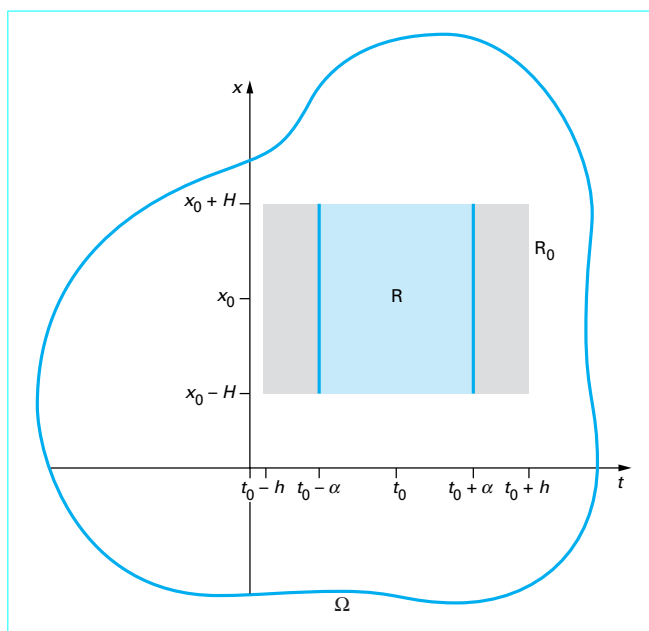


Figure 1 – Problème de Cauchy local

Mais $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant bornée sur le compact R , on peut majorer $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|$ par $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\infty} |x_1 - x_2|$, la norme uniforme étant considérée sur R .

Pour étudier l'existence d'une solution au problème :
(E), (t_0, x_0)

au moins sur un intervalle I centré en t_0 , nous allons nous donner un rectangle R_0 centré en (t_0, x_0) et inclus dans Ω . Ce rectangle est donc de la forme $[t_0 - h, t_0 + h] \times [x_0 - H, x_0 + H]$. On va devoir réduire l'intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$ pour en faire un intervalle I convenable.

Soit k une constante de Lipschitz pour f sur R_0 , et $\|f\|_{\infty}$ la norme uniforme de f sur ce rectangle. Choisissons α vérifiant les conditions suivantes :

$$0 < \alpha \leq h ; \alpha k < 1 ; \frac{H}{\alpha} \geq \|f\|_{\infty}$$

Par exemple, $\alpha = \min\left(h, \frac{1}{2k}, \frac{H}{\|f\|_{\infty}}\right)$ convient.

Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $J = [x_0 - H, x_0 + H]$ et $R = I \times J$.

R est donc un rectangle inclus dans R_0 , mais de base beaucoup plus étroite (figure 1).

Considérons à présent l'ensemble V des fonctions continues sur I et à valeurs dans J ; V est inclus dans $C^0(I, \mathbb{R})$ qui, muni de la norme uniforme $\| \cdot \|_{\infty}$, est un **espace de Banach**. D'autre part, puisque J est fermé, il est évident que V est fermé dans $C^0(I, \mathbb{R})$. Donc V est un **espace complet** lorsqu'on le munit de la distance associée à la norme uniforme.

Transformons à présent le problème :

$$x \in C^1(I, J) ; x' = f(t, x) ; x(t_0) = x_0$$

en le **problème intégral** suivant :

$$x \in C^1(I, J) ; \forall t \in I \quad x(t) = \int_{t_0}^t f(u, x(u)) \, du + x_0$$

On peut aussi remarquer que $x \in C^1(I, J)$, compte tenu de la seconde égalité, s'écrit aussi $x \in C^0(I, J)$, puisque l'intégrale dépendant de la borne est alors nécessairement C^1 .

Si l'on définit sur V l'application

$$\Theta : V \rightarrow C^1(I, \mathbb{R})$$

$$x \mapsto \Theta(x) \text{ telle que } \Theta(x)(t) = \int_{t_0}^t f(u, x(u)) \, du + x_0$$

on constate que le problème initial équivaut à la recherche des $x \in V$ tels que $\Theta(x) = x$.

Remarquons alors deux choses.

La première, c'est que si $x \in V$, alors $\Theta(x) \in V$. En effet :

$$\forall t \in I \quad |\Theta(x)(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(u, x(u)) \, du \right|$$

Or, puisque $x \in V$, $(u, x(u)) \in I \times J = R \subset R_0$. Donc $|f(u, x(u))| \leq \|f\|_{\infty}$ et :

$$\forall t \in I \quad |\Theta(x)(t) - x_0| \leq |t - t_0| \|f\|_{\infty} \leq \alpha \|f\|_{\infty} \leq H$$

La seconde, c'est que si x et y sont deux éléments de V , alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad |\Theta(x)(t) - \Theta(y)(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(u, x(u)) - f(u, y(u))) \, du \right| \\ &\leq k\alpha \|x - y\|_{\infty} \end{aligned}$$

Par passage au supremum :

$$\|\Theta(x) - \Theta(y)\|_{\infty} \leq k\alpha \|x - y\|_{\infty}$$

Il en résulte que Θ est une application $k\alpha$ -lipschitzienne de l'espace complet V dans lui-même. Elle admet donc un unique point fixe x , ce qui prouve le **théorème de Cauchy-Lipschitz local**.

Théorème 1

Soit $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ une application localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et $(t_0, x_0) \in \Omega$. Il existe un intervalle $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ tel que le problème :

$$x \in C^1(I, \mathbb{R}) ; x' = f(t, x) ; x(t_0) = x_0$$

admette une unique solution.

La seule chose que nous n'ayons pas véritablement prouvée, c'est que si $x \in C^1(I, \mathbb{R})$, $x(I)$ soit inclus dans J . En réalité, ce n'est pas obligatoire. Cependant, cela ne change pas le résultat précédent puisque l'on peut imposer la recherche des solutions telles que $x(I)$ soit inclus dans $[x_0 - H, x_0 + H]$ – puisque $x(t_0) = x_0$ – et alors, il est facile de voir que $x(I) \subset J$.

La méthode précédente donne une minoration explicite de la largeur de I . La recherche d'un rectangle R_0 optimal par le biais de cette méthode peut être illusoire. D'autre part, la recherche du point fixe de Θ par la méthode des approximations successives est explicite, mais coûteuse en calculs et peu utilisée, sauf peut-être dans le cas des équations linéaires.

Exemple 1

Considérons le problème de Cauchy :

$$x' = x^2 + t^2 ; x(0) = 0$$

Cherchons un intervalle I convenable. Prenons pour rectangle initial

$$R_0 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \text{ On a alors } \|f\|_{\infty} = 1. \text{ De plus,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2x, \text{ donc } k = \sqrt{2} \text{ convient. On veut donc que } \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Ainsi, la solution au problème de Cauchy est}$$

définie sur un intervalle $[-\alpha, \alpha]$, avec $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous constatons sur la

figure 2 que la solution réelle est définie sur un intervalle beaucoup plus grand que ce que laisse prévoir l'estimation précédente.

1.1.1.3 Problème de Cauchy global

Si l'on dispose d'une solution (I, x) au problème de Cauchy

$$x' = f(t, x) ; x(t_0) = x_0$$

on peut la restreindre artificiellement à un intervalle J , strictement inclus dans I et contenant t_0 . On dispose encore d'une solution au problème précédent. Il convient donc de se contenter de considérer les **plus grandes solutions, au sens du prolongement**. On dira précisément que $(J, y) \leq (I, x)$ lorsque $J \subset I$ et lorsque y est la restriction de x à J ou, en termes équivalents, lorsque x prolonge y à I . On dispose ainsi d'une relation d'ordre, évidemment pas totale.

Définition 3

On dit que (I, x) est plus grande solution au problème de Cauchy lorsque c est une plus grande solution de ce problème pour la relation \leq .

Cette situation exprime le fait que toute solution (J, y) au problème de Cauchy peut être prolongée en la solution (I, x) . Elle a pour corollaire que la solution (I, x) ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle strictement plus grand que I . Puisque \leq est une relation d'ordre, il est clair que le problème de Cauchy admet au plus une plus grande solution. D'autre part, soit (I, x) et (I, y) deux solutions de ce problème, lorsque l'on suppose f localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. L'unicité locale montre que x et y coïncident sur un intervalle $[x_0, a]$ inclus dans I , avec $a > x_0$. Soit b le supremum de ces a . Si, par l'absurde, il existe des points de I strictement à droite de b , on remarque d'abord que $x = y$ sur $[x_0, b]$ par continuité de $x - y$ sur I , puis que $x = y$ sur un intervalle $[b - \alpha, b + \alpha]$ grâce à nouveau l'unicité locale, appliquée au problème de Cauchy aux conditions initiales $(b, x(b))$: cela contredit la définition de b .

En appliquant le même raisonnement à gauche de x_0 , on voit donc que $x = y$ sur I .

Dans ces conditions, considérons la réunion I de tous les intervalles J sur lesquels existe une solution au problème de Cauchy. C'est encore un intervalle. De plus, puisque deux solutions coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition, il est clair que l'on obtient une solution sur I tout entier. On obtient ainsi une solution (I, x) du problème de Cauchy, qui est la plus grande pour la relation \leq .

Théorème 2

Soit $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Il existe une unique plus grande solution (I, x) au problème de Cauchy :

$$x' = f(t, x) ; x(t_0) = x_0$$

De plus, l'intervalle I est ouvert.

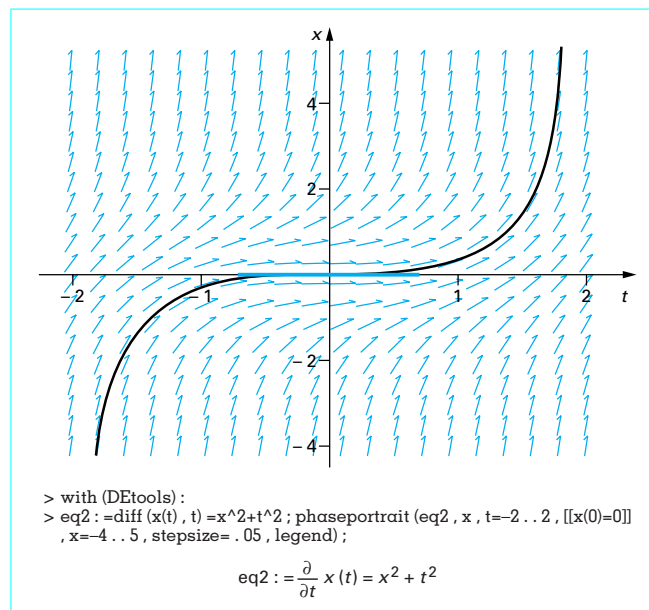


Figure 2 – Solution du problème de Cauchy local : $x' = x^2 + t^2$

Le fait que I soit ouvert résulte d'une simple remarque. Si, par exemple, $a = \sup I$ est un élément de I , on peut grâce à l'existence locale et au caractère ouvert de Ω trouver un intervalle $[a - h, a + h]$ sur lequel existe une solution y au problème de Cauchy aux conditions initiales $y(a) = x(a)$. On constate alors que, si l'on prolonge x par y sur $[a, a + h]$, on obtient une solution \tilde{x} au problème initial sur un intervalle contenant I strictement, ce qui est absurde. Donc $\sup I \notin I$, et de même $\inf I \notin I$. Ainsi, I est ouvert.

Remarquons qu'une plus grande solution à un problème de Cauchy donné n'est pas une plus grande solution de l'équation différentielle, puisque ces deux solutions ne coïncident peut-être en aucun point. En revanche, c'est une **solution maximale** de l'équation différentielle, en ceci qu'elle ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle strictement plus grand : sinon, cela contredirait le fait que c'est une plus grande solution pour un problème de Cauchy relatif à une valeur t_0 arbitraire de l'intersection des intervalles de définition.

1.1.1.4 Interprétation géométrique

Appelons **courbe intégrale** d'une équation différentielle le graphe d'une solution maximale. Nous savons que, par chaque point (t_0, x_0) de Ω , il passe une courbe intégrale et une seule. Autrement dit, Ω est partitionné par les courbes intégrales. Le dessin correspondant interdit à deux courbes intégrales distinctes de se rencontrer. Lorsque l'on fait ce dessin, il est commode de visualiser f en plaçant, en différents points (t_0, x_0) de Ω , non pas la valeur $f(t_0, x_0)$, mais un petit segment éventuellement fléché de pente $f(t_0, x_0)$. Si $x' = f(t, x)$, cette pente représente la dérivée $x'(t_0)$, et la courbe intégrale passant par (t_0, x_0) est donc tangente au petit segment.

Exemple 2

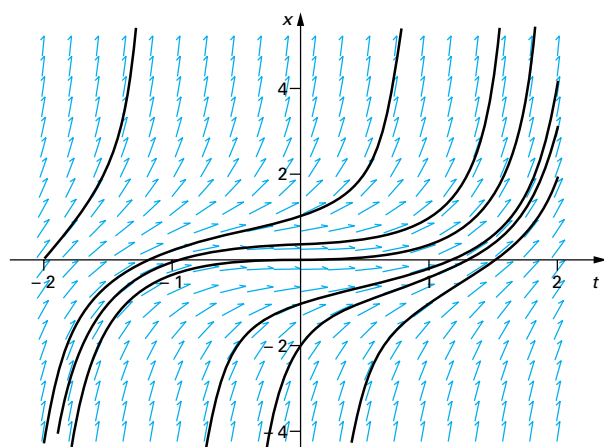
On reprend l'équation différentielle : $x' = x^2 + t^2$

On a tracé sur la figure 3 les courbes intégrales correspondant aux conditions initiales :

$$x(-2) = 0 ; x(0) = -2 ; x(0) = -1 ; x(0) = 0 ; x(0) = 1 ; x(1) = -1 ; x(1) = 1.$$

1.1.2 Cas des équations vectorielles d'ordre un

Lorsque l'on cherche à résoudre un problème différentiel d'ordre un où la fonction inconnue est à valeurs vectorielles, par exemple à



> with (DEtools) :
 > eq2 := diff (x(t), t) = x^2 + t^2; phaseportrait (eq2, x, t = -2 .. 2, [[x(0) = -2],
 [x(0) = -1], [x(0) = 0], [x(0) = 1], [x(1) = 1], [x(1) = -1], [x(-2) = 0]], x = -4 .. 5,
 stepsize = .05, title = 'figure 3', linecolor = [black, black, black, black,
 black, black, black]);

$$\text{eq2} := \frac{d}{dt} x(t) = x^2 + t^2$$

Figure 3 – Tracé des courbes intégrales suivant conditions initiales données

valeurs dans \mathbb{R}^p , on est conduit à examiner une équation différentielle d'ordre un et vectorielle. L'étude est entièrement parallèle à celle menée dans le paragraphe 1.1.1. Aussi nous contenterons-nous d'une simple relecture des résultats de ce paragraphe.

On se donne une application $f \in C^0(\Omega, E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, E étant lui-même un espace vectoriel normé, que nous supposons au minimum complet. Dans la pratique, E sera souvent un espace \mathbb{R}^p . La norme sur E est notée $|\cdot|$. Lorsque E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. L'essence des résultats qui suivent est donc, dans ce cas, indépendante de la norme. Cependant, les calculs eux-mêmes peuvent être simplifiés par le choix d'une norme adaptée.

Définition 4

Soit $x \in C^1(I, E)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . Nous disons que x est solution de l'équation différentielle d'ordre un résolue en x' :

$$(E) \quad x' = f(t, x)$$

lorsque :

- (1) le graphe de x est inclus dans Ω ;
- (2) $\forall t \in I \quad x'(t) = f(t, x(t))$.

Si, en outre, $(t_0, x_0) \in \Omega$, on dit que x est solution du problème de Cauchy aux conditions initiales (t_0, x_0) lorsque $t_0 \in I$ et que $x(t_0) = x_0$.

Les méthodes utilisées dans le paragraphe 1.1.1.2 s'appliquent sans changement. On peut donc énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

Théorème 3 : théorème de Cauchy-Lipschitz local

Soit $f \in C^0(\Omega, E)$ une application localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et $(t_0, x_0) \in \Omega$. Il existe un intervalle $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ tel que le problème :

$$x \in C^1(I, E); \quad x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0$$

admette une unique solution.

Il convient de remarquer que la méthode employée fournit, là encore, une minoration de la longueur de I , c'est-à-dire une valeur explicite de α qui convient.

Les notions de solution maximale de l'équation différentielle et de plus grande solution au problème de Cauchy sont naturellement les mêmes que dans le cas scalaire. On peut alors énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz général.

Théorème 4 : théorème de Cauchy-Lipschitz général

Soit $f \in C^0(\Omega, E)$ une application localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Il existe une unique plus grande solution (I, x) au problème de Cauchy

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0$$

De plus, l'intervalle I est ouvert.

Exemple 3

Considérons le système différentiel :
$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + tx_2^2 \\ x_2' = tx_1 \end{cases}$$

On peut toujours considérer un tel système différentiel comme une

équation différentielle, en introduisant la fonction inconnue $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

et en réécrivant le système sous la forme :

$$x' = f(t, x)$$

avec $f(t, x_1, x_2) = (x_1^2 + tx_2^2, tx_1)$.

Pour des questions de présentation, on identifie souvent le vecteur

colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ au couple (x_1, x_2) .

Ici, $E = \mathbb{R}^2$, et $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Notons que, f étant de classe C^1 , elle est en particulier localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (x_1, x_2) .

Exemple 4

Considérons l'équation différentielle : $x' = |t|x^2$

où x , fonction inconnue, appartient à $C^1(I, M_n(\mathbb{R}))$. Ici, $E = M_n(\mathbb{R})$ et

$f(t, x) = |t|x^2$. À nouveau, f est de classe C^1 par rapport à x , donc localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Elle n'est pas de classe C^1 par rapport au couple (t, x) , mais elle est bien sûr continue. On pourra donc appliquer à cette équation matricielle le théorème de Cauchy-Lipschitz.

1.1.3 Cas des équations d'ordre supérieur

Considérons de façon tout à fait générale une équation du type :

$$x^{(p)} = f(t, x, x', \dots, x^{(p-1)})$$

Ici, $f \in C^0(\Omega, E)$, où E est un espace de Banach et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E^p$.

Définition 5

Soit $x \in C^p(I, E)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On dit que x est solution de l'équation différentielle d'ordre p résolue en $x^{(p)}$:

$$(E) \quad x^{(p)} = f(t, x, \dots, x^{(p-1)})$$

lorsque :

- (1) l'image de I par $t \mapsto (t, x(t), \dots, x^{(p-1)}(t))$ est incluse dans Ω ;
- (2) $\forall t \in I \quad x^{(p)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(p-1)}(t))$.

Si, en outre, $(t_0, x_0, \dots, x_{p-1}) \in \Omega$, on dit que x est solution du problème de Cauchy aux conditions initiales $(t_0, x_0, \dots, x_{p-1})$ lorsque $t_0 \in I$ et que :

$$x(t_0) = x_0; \dots; x^{(p-1)}(t_0) = x_{p-1}$$

La condition (2) exprime simplement que l'on peut donner un sens à l'expression $f(t, x(t), \dots, x^{(p-1)}(t))$ pour t dans I .

On remarquera d'autre part que le problème de Cauchy porte sur un p -uplet de conditions initiales, car il fixe la valeur de $(x(t_0), \dots, x^{(p-1)}(t_0))$.

Pour ramener cette équation (vectorielle) d'ordre p à une équation d'ordre un, nous posons :

$$X(t) = (x(t), \dots, x^{(p-1)}(t))$$

Ainsi, X est à valeurs dans E^p . Si, par exemple, $\dim E = n$, auquel cas on peut dire que l'équation (E) est de **taille** n , nous pouvons transformer l'équation (E) en une équation (E_1) , d'ordre un mais de taille np :

$$(E_1) \quad X'(t) = F(t, X(t))$$

avec $F(t, x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_1, \dots, x_{p-1}, f(t, x_0, \dots, x_{p-1}))$.

En effet, l'équation (E_1) équivaut à :

$$\begin{aligned} & (x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t), x^{(p)}(t)) \\ &= (x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t), f(t, x(t), \dots, x^{(p-1)}(t))) \end{aligned}$$

Autrement dit, en augmentant la taille de l'équation (cette taille étant mesurée par l'espace d'arrivée, qui est passé de E à E^p), on a pu ramener l'ordre à un.

Cette transformation est assez systématique, tant du point de vue théorique que du point de vue de la modélisation. Elle ne s'effectue néanmoins pas lorsqu'une étude directe de l'équation d'ordre p est plus commode.

Pour être tout à fait précis, la nouvelle fonction F ainsi définie est à présent une application continue sur Ω , ouvert de $\mathbb{R} \times E^p$, et à valeurs dans E^p . Elle a donc même domaine de définition que f , mais arrive dans E^p et non plus dans E .

Étudions à présent le problème de Cauchy lui-même. La condition :

$$x(t_0) = x_0 ; \dots ; x^{(p-1)}(t_0) = x_{p-1}$$

s'exprime par l'égalité :

$$X(t_0) = X_0 \text{ avec } X_0 = (x_0, \dots, x_{p-1})$$

Ainsi, x est solution du problème de Cauchy donné exactement lorsque :

$$X' = F(t, X) ; X(t_0) = X_0$$

Nous nous sommes ainsi ramenés à une équation d'ordre un et à un problème de Cauchy relatif à cette équation. Le théorème de Cauchy-Lipschitz a pour conséquence immédiate le théorème suivant.

Théorème 5

Soit $f \in C^0(\Omega, E)$, où E est un espace de Banach et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E^p$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, x_0, \dots, x_{p-1}) \in \Omega$.

Il existe une unique plus grande solution (I, x) au problème de Cauchy :

$$x^{(p)} = f(t, x, \dots, x^{(p-1)}) ; x(t_0) = x_0 ; \dots ; x^{(p-1)}(t_0) = x_{p-1}$$

De plus, l'intervalle I est ouvert.

Exemple 5

Considérons l'équation différentielle : $x'' + x = f(t)$

où f est continue sur I , à valeurs réelles. La méthode précédente conduit à introduire $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, qui vérifie l'équation $X' = F(t, X)$ avec

$$F(t, x_0, x_1) = (x_1, -x_0 + f(t)).$$

On notera que l'équation initiale est linéaire (avec un second membre). On lui appliquera donc les techniques répertoriées dans l'article [AF 103].

Exemple 6

Considérons l'équation différentielle matricielle : $x'' = tx^2 + x^*x$ où x^* est l'adjointe (transposée) de la matrice $x \in M_n(\mathbb{R})$. Posant à nouveau $X = (x, x')$, on obtient l'équation :

$$X' = F(t, X) \text{ avec } F(t, x_0, x_1) = (x_1, tx_0^2 + x_0^*x_0)$$

1.2 Dépendance par rapport aux paramètres

1.2.1 Intervalle de définition des solutions maximales

Considérons l'équation d'ordre un et vectorielle :

$$x' = f(t, x)$$

où f satisfait au minimum les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz ; f est donc définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times E$, où E est un espace de Banach.

Si l'on se donne $(t_0, x_0) \in \Omega$, on sait qu'il existe une unique plus grande solution au problème de Cauchy correspondant. Il importe de constater que, non seulement x , bien sûr, mais l'intervalle ouvert de définition I , dépendent de ces conditions initiales. Pour marquer cette dépendance, nous pouvons être conduits à noter $I = I(t_0, x_0)$ et $x(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Pour visualiser la situation, il est commode de considérer le cas de l'équation scalaire.

Pour chaque $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$, définie sur $I(t_0, x_0)$, au problème de Cauchy. Le graphe de cette application est donc une courbe, incluse dans Ω , passant par le point (t_0, x_0) . L'existence et l'unicité se traduisent précisément par le fait que, par chaque point de Ω , il passe un tel graphe et un seul, ou encore que Ω est **partitionné** par ces graphes. Ces graphes sont souvent appelés **courbes intégrales**. Elles sont toutes tangentes aux « **éléments de contact** », c'est-à-dire aux petits segments de pente $f(t, x)$.

On peut à présent préciser un peu ce qu'est $I(t_0, x_0)$. Soit K un compact de Ω contenant le point (t_0, x_0) . Supposons par l'absurde que le graphe de x , limité aux $t \geq t_0$, soit inclus dans K . Soit $\alpha = \sup I$, qui appartient nécessairement à \mathbb{R} car il appartient à la projection de K sur l'axe des t . Puisque, sur K , f est bornée, l'intégrale

$\int_t^\alpha f(u, x(u)) du$ est convergente. Donc $\int_{t_0}^t x'(u) du$ admet

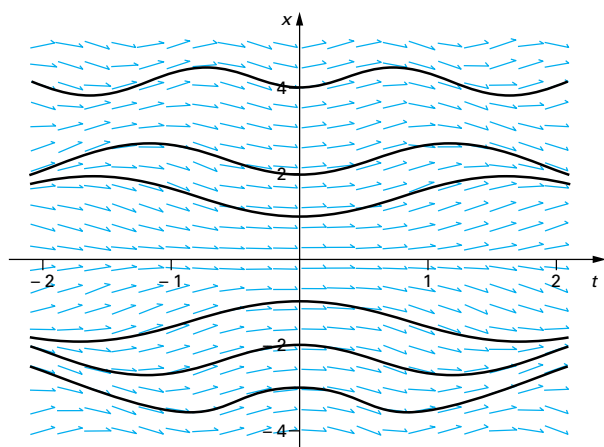
une limite en α , ou encore $x(t) \rightarrow \ell$ quand $t \rightarrow \alpha$. De plus, (α, ℓ) est un élément de K , donc de Ω . On peut alors prolonger x en α en posant :

$$x(\alpha) = \ell$$

On a défini, sur $I \cup \{\alpha\}$, une fonction manifestement C^1 , solution de l'équation différentielle initiale, et qui prolonge x strictement. C'est une contradiction.

On peut ainsi affirmer que le **graphe de x quitte, dans l'avenir de t_0 , tout compact inclus dans Ω** .

Sur le dessin, cela se traduit par certaines contraintes. Il peut se faire que I contienne $[t_0, +\infty[$, auquel cas on ne peut rien dire de plus. En revanche, si $\sup I = \alpha < +\infty$, le graphe de x quitte tout compact de Ω au voisinage de α . Si par exemple $\Omega = \mathbb{R}^2$, cela se traduira par le fait que x ne peut être bornée au voisinage de α . En réalité, les conséquences que l'on peut tirer de ce qui précède



```
> with (DEtools):
> eq2 := diff(x(t), t) = sin(t*x(t)); phaseportrait(eq2, x, t=-2..2, [[x(0)=-2],
[x(0)=-1], [x(0)=0], [x(0)=1], [x(0)=2], [x(0)=3], [x(0)=4]], x=-4..5,
stepsize=.05, title='figure 4', linecolor=[black, black, black, black,
black, black, black]);
```

$$\text{eq2} := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = \sin(t x(t))$$

Figure 4 – Tracé des courbes intégrales de l'équation différentielle $x' = \sin(tx)$

dépendent de la géométrie du domaine Ω . D'autre part, l'examen de f elle-même peut conduire à des conditions supplémentaires.

Exemple 7

Considérons l'équation différentielle : $x' = \sin(tx)$

Ici, $f(t, x) = \sin(tx)$ définit une fonction bornée sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ tout entier. Le raisonnement tenu précédemment montre que, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ (figure 4).

Exemple 8

Considérons l'équation différentielle : $x' = x^2$

Cette équation peut être résolue par formules. Remarquons d'abord que, si $x(t_0) = 0$, la fonction nulle sur \mathbb{R} convient manifestement. On dispose donc déjà d'une courbe intégrale, l'axe des t .

Supposons à présent que $x_0 \neq 0$. Alors x ne s'annule pas sur $I(t_0, x_0)$, puisque sinon, d'après ce qui précède, x serait identiquement nulle

sur I . On peut donc écrire $\frac{x'}{x^2} = 1$, puis $\left(\frac{1}{x}\right)' = -1$, soit $\frac{1}{x} = -t + C$.

La constante C s'obtient grâce à la condition initiale (t_0, x_0) , et vaut

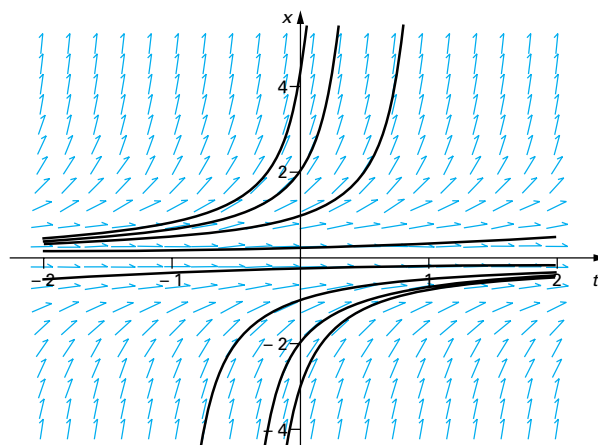
$$\frac{1}{x_0} + t_0. \text{ Finalement, sur } I : x = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t} = \frac{x_0}{1 + t_0 x_0 - t x_0}$$

On obtient alors aisément I . C'est un intervalle contenant t_0 et ne

contenant pas la valeur $\frac{1 + t_0 x_0}{x_0}$, qui annule le dénominateur. Il y a donc deux cas :

(i) si $x_0 > 0$, $I =]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[$;

(ii) si $x_0 < 0$, $I =]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[$.



```
> with (DEtools):
> eq2 := diff(x(t), t) = x(t)^2; phaseportrait(eq2, x, t=-2..2, [[x(0)=-2],
[x(0)=-1], [x(0)=0], [x(0)=1], [x(0)=2], [x(0)=3], [x(0)=4], [x(0)=0.25]],
[x(0)=-0.25], x=-4..5, stepsize=.05, title='figure 5', linecolor=
[black, black, black, black, black, black, black, black, black]);
```

$$\text{eq2} := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = x(t)^2$$

Figure 5 – Tracé des courbes intégrales de l'équation différentielle $x' = x^2$

Le tracé des courbes intégrales s'en déduit facilement (figure 5).

On voit que certaines solutions sont définies sur des demi-droites limitées à gauche, d'autres limitées à droite, et qu'une seule solution est définie sur \mathbb{R} . Les solutions qui ne sont pas définies sur \mathbb{R} sont, comme prévues, non bornées au voisinage de la borne de l'intervalle. Il y a, plus précisément, une asymptote verticale. On constate sur cet exemple qu'il y a une certaine « continuité » de l'intervalle $I(t_0, x_0)$ vis-à-vis de la condition initiale. Nous disposons d'ailleurs de la propriété générale suivante.

Proposition 2

Posons

$$I(t_0, x_0) =]\beta(t_0, x_0), \alpha(t_0, x_0)[$$

$$\text{où } -\infty \leq \beta(t_0, x_0) < t_0 < \alpha(t_0, x_0) \leq +\infty$$

Alors :

$$\lim_{(t_1, x_1) \rightarrow (t_0, x_0)} \beta(t_1, x_1) = \beta(t_0, x_0) ;$$

$$\lim_{(t_1, x_1) \rightarrow (t_0, x_0)} \alpha(t_1, x_1) = \alpha(t_0, x_0)$$

1.2.2 Approximation des solutions

Pour étudier la dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales, nous allons énoncer quelques résultats qui permettent aussi d'estimer la dépendance des solutions vis-à-vis de l'équation différentielle elle-même.

Proposition 3 (Gronwall)

Soit $\delta_1, \delta_3 \geq 0$ et $a > 0$. On considère φ et ψ deux fonctions continues et positives sur le segment $[t_0, t_0 + a]$. On suppose que, sur ce segment, on dispose de l'inégalité :

$$\varphi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(u) \varphi(u) \, du + \delta_3$$

Alors :

$$\varphi(t) \leq \delta_3 \exp \left(\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(u) \, du \right)$$

Preuve ♦

Posons $\theta(t) = \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(u) \varphi(u) \, du$ et

$$\rho(t) = \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(u) \, du, \text{ de sorte que } \theta'(t) = \delta_1 \psi(t) \varphi(t) \text{ et}$$

$$\rho'(t) = \delta_1 \psi(t). \text{ L'hypothèse s'écrit :}$$

$$\varphi(t) \leq \theta(t) + \delta_3$$

Multiplions cette inégalité par $\delta_1 \psi(t)$. Il vient :

$$\theta'(t) \leq \rho'(t) \theta(t) + \delta_3 \rho'(t)$$

soit

$$(\theta(t) e^{-\rho(t)} + \delta_3 e^{-\rho(t)})' \leq 0$$

La fonction $\theta(t) e^{-\rho(t)} + \delta_3 e^{-\rho(t)}$ décroît, vaut δ_3 en t_0 , donc vérifie sur $[t_0, t_0 + a]$:

$$\theta(t) e^{-\rho(t)} + \delta_3 e^{-\rho(t)} \leq \delta_3$$

Par conséquent, $\theta(t) + \delta_3 \leq \delta_3 e^{\rho(t)}$, inégalité qui entraîne :

$$\varphi(t) \leq \delta_3 e^{\rho(t)}$$

ce que l'on voulait prouver. ♦

Remarquons que, dans ce résultat, la continuité de φ et de ψ n'est pas indispensable. Il suffit que ces fonctions soient, par exemple, continues par morceaux. En effet, les fonctions θ et ρ introduites dans la démonstration seront alors C^1 par morceaux et continues, ce qui suffit pour conduire le raisonnement à l'identique.

Proposition 4

Supposons que φ soit une fonction continue et positive sur $[t_0, t_0 + a]$ telle que, sur ce segment :

$$\varphi(t) \leq \delta_2 (t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \varphi(u) \, du + \delta_3$$

où $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois constantes positives ou nulles, et δ_1 strictement positive.

Alors, sur $[t_0, t_0 + a]$, $\varphi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}$

Preuve ♦ Si l'on pose : $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1}$

on obtient :

$$\varphi_1(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \varphi(u) \, du + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3$$

On applique alors le théorème de Gronwall lorsque $\psi = 1$. On obtient :

$$\varphi_1(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) \exp(\delta_1(t - t_0))$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée. ♦

Voyons comment ces inégalités permettent d'estimer la dépendance des solutions vis-à-vis des conditions initiales.

Fixons-nous deux conditions initiales (t_0, x_0) et (t_0, x_1) dans Ω , et supposons que y_0 et y_1 sont les solutions des problèmes de Cauchy correspondants, l'équation différentielle étant :

$$y' = f(t, y)$$

On considère un segment $[t_0, t_0 + a]$ inclus dans $I(t_0, x_0) \cap I(t_0, x_1)$. Soit k une constante de Lipschitz pour f sur un rectangle R_0 inclus dans Ω , de base $[t_0, t_0 + a]$, contenant les graphes de y_0 et y_1 correspondant à ces valeurs de t .

On traduit le problème sous sa forme intégrale :

$$y_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, y_0(u)) \, du ; y_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^t f(u, y_1(u)) \, du$$

Par conséquent :

$$|y_0(t) - y_1(t)| \leq |x_0 - x_1| + k \int_{t_0}^t |y_0(u) - y_1(u)| \, du$$

Si l'on applique la proposition 4 à $\varphi(t) = |y_0(t) - y_1(t)|$, $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = k$ et $\delta_3 = |x_0 - x_1|$, on obtient :

$$|y_0(t) - y_1(t)| \leq |x_0 - x_1| e^{k(t-t_0)}$$

Il y a donc continuité de la solution par rapport à la valeur initiale au point x_0 .

Ces méthodes peuvent être considérablement renforcées, et conduisent au théorème suivant.

Théorème 6 (Dépendance par rapport aux conditions initiales)

Soit $f \in C^k(\Omega, E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $k \geq 1$. Soit $\omega = \{(t, t_0, x_0) ; t \in I(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in \Omega\}$. Alors ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \Omega$. De plus, sur ω , l'application :

$$(t, t_0, x_0) \mapsto x(t, t_0, x_0)$$

est de classe C^k .

Le théorème précédent s'applique aussi lorsque $k = \infty$.

Exemple 9

Reprenons l'exemple 8 et déterminons ω .

Pour $x_0 > 0$, on obtient la condition $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$, qui s'écrit encore $(t - t_0)x_0 < 1$. Dans l'espace \mathbb{R}^3 des (t, t_0, x_0) , la surface $(t - t_0)x_0 = 1$ est un cylindre à base hyperbolique, limité aux $x_0 > 0$, et la partie correspondante de ω est l'extérieur géométrique de ce cylindre. Pour $x_0 < 0$, on constate à nouveau que $(t - t_0)x_0 < 1$. Si l'on y ajoute le plan $x_0 = 0$, on constate que ω est la portion de l'espace limitée par le cylindre hyperbolique contenant l'origine.

On vérifie que, sur ω , l'application $(t, t_0, x_0) \mapsto \frac{x_0}{1 + t_0 x_0 - t x_0}$ est bien de classe C^∞ .

1.2.3 Équations différentielles dépendant d'un paramètre

Considérons l'équation différentielle : $x' = x^2 + \lambda^2$

Une solution dépendra, non seulement des conditions initiales, mais du paramètre λ . Une utilisation adéquate du lemme de Gronwall permet d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 5

Soit E et F des espaces de Banach, O un ouvert de $E \times \mathbb{R} \times F$, $k \geq 1$ et $f \in C^k(O, F)$. Pour tout $(\lambda, t_0, x_0) \in O$, on note $t \mapsto x_\lambda(t, t_0, x_0)$ l'unique solution au problème de Cauchy :

$$x' = f(\lambda, t, x) ; x(t_0) = x_0$$

On note $I_\lambda(t_0, x_0)$ son intervalle de définition.

L'ensemble $\omega = \{(\lambda, t, t_0, x_0) ; t \in I_\lambda(t_0, x_0)\}_{(\lambda, t_0, x_0) \in O}$ est alors un ouvert. De plus, l'application :

$$(\lambda, t, t_0, x_0) \mapsto x_\lambda(t, t_0, x_0)$$

est de classe C^k sur ω .

Bien entendu, ce résultat s'applique aussi lorsque $k = \infty$.

Exemple 10

Reprenons l'exemple de : $x' = x^2 + \lambda^2$

lorsque $O = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Là encore, nous pouvons calculer explicitement la solution x_λ telle que $x_\lambda(t_0) = x_0$. En effet :

$$\frac{x'}{x^2 + \lambda^2} = 1$$

s'écrit $\left(\frac{1}{\lambda} \arctan \frac{x}{\lambda}\right)' = 1$, soit $\frac{1}{\lambda} \arctan \frac{x}{\lambda} = t + C$, avec

$C = \frac{1}{\lambda} \arctan \frac{x_0}{\lambda} - t_0$. L'intervalle $I(t_0, x_0)$ est alors défini par la condition

$t \in \left] -C - \frac{\pi}{2\lambda}, -C + \frac{\pi}{2\lambda} \right]$. Sur cet intervalle, on dispose de l'égalité :

$$x(t) = \lambda \tan[\lambda(t + C)]$$

Compte tenu de l'expression de C , on voit que :

$$(\lambda, t, t_0, x_0) \mapsto \lambda \tan[\lambda(t + C)]$$

est bien de classe C^∞ sur O .

La figure 6 donne la déformation de la solution du problème de Cauchy $x' = x^2 + \lambda^2$; $x(0) = 0$ lorsque λ varie.

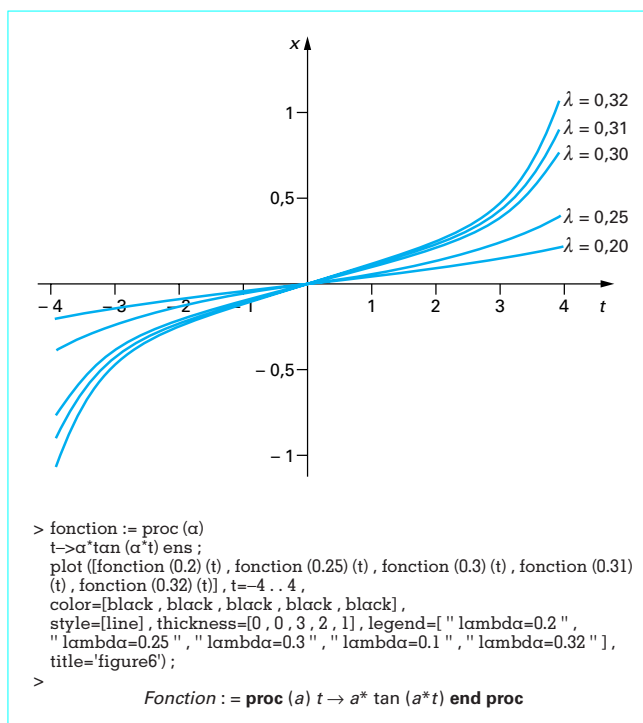


Figure 6 – Déformation du problème de Cauchy $x' = x^2 + \lambda^2$; $x(0) = 0$ lorsque λ varie

Fixons-nous un pas $h > 0$. Pour approcher x sur l'intervalle $[t_0, t_0 + h]$, il est raisonnable de le remplacer par une fonction affine passant par (t_0, x_0) et de pente $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$, fonction dont l'expression est :

$$\bar{x}(t) = x_0 + (t - t_0)x'(t_0)$$

Si l'on veut continuer sur l'intervalle $[t_0 + h, t_0 + 2h]$, on partira cette fois de la condition initiale $(t_0 + h, \bar{x}(t_0 + h))$, et on recommencera ainsi. L'algorithme peut s'écrire ainsi :

```

t ← t0;
x ← x0;
L ← séquence-vide;
Pour i = 1 à n+1 faire
  L ← L, x;
  x ← x + h*f(t,x);
  t ← t + h;
Finfaire;
L;;

```

Le résultat final est la séquence L des valeurs approchées aux points $t + ih$, $i = 0, \dots, n-1$. On les relie alors par des fonctions affines sur les intervalles de la subdivision ainsi construite.

Bien entendu, cette méthode s'applique aussi bien à gauche de t_0 , grâce à une incrémentation négative.

Il s'agit à présent d'estimer l'erreur commise ε_i , majorant de $|x(t_i) - \bar{x}(t_i)|$, où $t_i = t_0 + ih$ et \bar{x} est l'application affine par morceaux construite précédemment. Sur $[t_i, t_{i+1}]$, on a :

$$\bar{x}'(t) = f(t_i, \bar{x}(t_i))$$

2. Méthodes qualitatives d'étude

2.1 Méthodes numériques

2.1.1 Méthode d'Euler

Considérons le problème de Cauchy : $x' = f(t, x)$; $x(t_0) = x_0$

avec f de classe C^1 .

On voit donc que l'erreur sera due à la fois à l'erreur sur la condition initiale ($\bar{x}(t_i)$ au lieu de $x(t_i)$) et au fait que l'équation différentielle vérifiée par \bar{x} sur $[t_i, t_{i+1}]$ n'est pas l'équation initiale.

Pour majorer l'erreur commise, il convient de remarquer que, sur un rectangle R inclus dans Ω , et en supposant f de classe C^1 , on dispose de majorations pour f et ses dérivées partielles. On note :

$$\|f\|_{\infty} = A ; \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{\infty} = B ; \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\infty} = C$$

Majorons d'abord $|f(t_i, \bar{x}(t_i)) - f(t, \bar{x}(t))|$.

Grâce à l'inégalité des accroissements finis, si $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$|f(t_i, \bar{x}(t_i)) - f(t, \bar{x}(t))| \leq Bh + Ach$$

On a donc, pour $t \in [t_0, t_n]$, et en posant $D = B + AC$,

$$|\bar{x}'(t) - f(t, \bar{x}(t))| \leq Dh$$

On dit alors que \bar{x} est une solution approchée à Dh près de l'équation différentielle initiale. Remarquons qu'en réalité l'inégalité n'est vraie qu'en dehors des points t_i .

D'autre part, $x'(t) = f(t, x(t))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |\bar{x}'(t) - x'(t)| &\leq |f(t, \bar{x}(t)) - f(t, x(t))| + Dh \\ &\leq C|\bar{x}(t) - x(t)| + Dh \end{aligned}$$

Posons $\varphi(t) = |\bar{x}(t) - x(t)|$. En intégrant l'inégalité précédente entre t_0 et t , on obtient :

$$\varphi(t) \leq Dh(t - t_0) + C \int_{t_0}^t \varphi(u) du$$

La proposition 4 fournit alors :

$$\varphi(t) \leq \frac{Dh}{C} (e^{C(t-t_0)} - 1)$$

Sur l'intervalle $[t_0, t_n]$, de longueur ℓ , on obtient donc une majoration du type :

$$\|x - \bar{x}\|_{\infty} \leq Kh\ell$$

Cette estimation laisse penser que l'approximation est un $O(h)$, et s'améliore avec la diminution de h . Il faut tout de même noter que le rectangle R n'a pas été spécifié, et que rien ne dit que le graphe de \bar{x} ne va pas s'en échapper prématurément. Il est facile de trouver un rectangle R pour lequel on peut s'assurer qu'il n'en est rien, mais la base de ce rectangle de sécurité est beaucoup plus petite que l'intervalle de définition de x .

D'autre part, la majoration est tout de même exponentielle, et la constante K grande pour ℓ grand. Autrement dit, la majoration précédente n'est guère rassurante.

Enfin, l'influence des erreurs d'arrondi n'a pas été prise en compte.

Pratiquement, la méthode d'Euler conduit à de meilleurs résultats que ne le feraient craindre les précédentes remarques, mais ces résultats restent modestes quant à la précision obtenue. Nous donnons ci-après deux autres méthodes.

2.1.2 Méthode du point milieu

Au lieu de prendre, sur $[t_i, t_{i+1}]$, une fonction affine de pente $f(t_i, \bar{x}_i)$, on prend pour pente la valeur au point milieu du segment qui joint (t_i, \bar{x}_i) à $(t_{i+1}, t_i + hf(t_i, \bar{x}_i))$.

Autrement dit, on commence à calculer la valeur que donnerait la méthode d'Euler, à savoir :

$$y_i = t_i + hf(t_i, \bar{x}_i)$$

puis on prend pour pente finale la valeur $f\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{\bar{x}_i + y_i}{2}\right)$. On pose alors :

$$\bar{x}_{i+1} = t_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{\bar{x}_i + y_i}{2}\right)$$

2.1.3 Méthode de Runge-Kutta

Cette méthode repose sur le même principe que la méthode d'Euler et que celle du point milieu, en considérant une pente obtenue par pondération de pentes en différents points. On pose successivement :

$$m_1 = f(t_i, \bar{x}_i) \text{ (pente au départ)}$$

$$m_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, \bar{x}_i + \frac{h}{2} m_1\right) \text{ (pente au point milieu)}$$

$$m_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, \bar{x}_i + \frac{h}{2} m_2\right)$$

$$m_4 = f(t_i + h, \bar{x}_i + hm_3)$$

La valeur finale pour la pente est alors :

$$m_5 = \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$\text{et } \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + m_5 h.$$

Cette pondération peut sembler compliquée, mais c'est celle qui, appliquée à l'équation différentielle $x' = f(t)$, dont la résolution fournit les primitives de f , conduit à la **méthode de Simpson**.

2.2 Localisation des solutions

2.2.1 Utilisation d'un dessin

Considérons l'équation scalaire d'ordre un $x' = f(t, x)$. On peut figurer sur un dessin les pentes des courbes intégrales par de petits segments centrés en (t, x) , de pente $f(t, x)$.

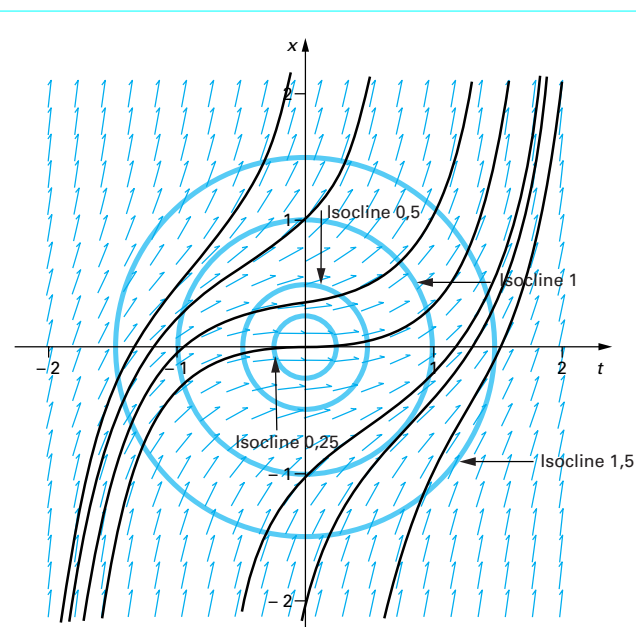
Une courbe, lien des points (t, x) tels que $f(t, x) = m$, m étant une constante donnée, est appelée **isocline** de pente m . Une isocline n'a aucune raison d'être une solution. Le tracé des isoclines simplifie parfois l'étude des courbes intégrales. Celles-ci couperont par exemple l'isocline de pente 0 en des points en lesquels elles auront une tangente horizontale. On constate que le tracé à la main des courbes intégrales, une fois tracées un certain nombre d'isoclines, est relativement facile.

Exemple 11

Considérons l'équation :

$$x' = x^2 + t^2$$

Les isoclines sont des cercles centrés en l'origine (figure 7).



```
> with (DEtools) : with (plots) :
Warning, the name changecoords has been redefined

> eq2 := diff (x(t), t) = x^2 + t^2; dessin2 := phaseportrait (eq2, x, t = -2..2,
[[x(0)=-2], [x(0)=-1], [x(0)=0], [x(0)=1], [x(1)=1], [x(1)=-1], [x(-1)=0.5]],
x=-2..2, stepsize=.05, title='figure 7', linecolor=[black, black,
black, black, black, black], thickness=0);

eq2 := \frac{d}{dt} x(t) = x^2 + t^2

> dessin1 := plot ([0.5*cos(u), 0.5*sin(u), u=0..2*Pi], [0.025*cos(u), 0.25*
sin(u), u=0..2*Pi], [cos(u), sin(u), u=0..2*Pi], [1.5*cos(u), 1.5*sin(u)
, u=0..2*Pi], -1..1, color='green');
> display ([dessin1, dessin2], scaling=constrained);
```

Figure 7 – Isoclines de l'équation différentielle $x' = x^2 + t^2$

2.2.2 Utilisation d'inégalités

Considérons toujours l'équation scalaire d'ordre un $x' = f(t, x)$, et une fonction y vérifiant l'inéquation différentielle $y' \leq f(t, y)$.

Si, en outre, $y(t_0) \leq x(t_0)$, on peut espérer que l'on aura toujours, pour $t \geq t_0$, $y(t) \leq x(t)$, ce qui permettra de localiser le graphe de x .

Théorème 7

Soit $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On suppose f localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit (I, x) la solution du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$. Soit d'autre part (J, y) une application de classe C^1 sur un intervalle J inclus dans I . On suppose que sur J , y vérifie :

$$y' \leq f(t, y)$$

et que $y(t_0) \leq x_0$.

Alors, sur $J \cap [t_0, +\infty[$, $y(t) \leq x(t)$.

Preuve ♦ (i) Supposons tout d'abord que y vérifie l'inégalité différentielle stricte :

$$y'(t) < f(t, y(t))$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, tel que $y(t_1) > x(t_1)$, et soit t_2 l'infimum de ces réels t_1 . Il est clair, par continuité de x et de y , qu'alors $y(t_2) \geq x(t_2)$. D'autre part, sur $[t_0, t_2]$, $y(t) \leq x(t)$, ce qui entraîne que $y(t_2) = x(t_2)$. Il en résulte que $y'(t_2) < f(t_2, y(t_2)) = f(t_2, x(t_2)) = x'(t_2)$.

Ainsi, $x - y$ croît au voisinage à droite de t_2 , ce qui entraîne que $y(t) < x(t)$ pour les points de ce voisinage. Cela contredit la définition de t_2 .

(ii) Plaçons-nous à présent dans le cas général et posons, pour $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(t, x) = f(t, x) + \varepsilon$. Soit $(I_\varepsilon, x_\varepsilon)$ la solution maximale de l'équation différentielle :

$$x'_\varepsilon = f_\varepsilon(t, x_\varepsilon)$$

à la condition initiale $x_\varepsilon(t_0) = x_0$. Puisque $y' < f_\varepsilon(t, y)$, le premier cas nous montre que sur $I_\varepsilon \cap J \cap [t_0, +\infty[$, on a l'inégalité :

$$y(t) \leq x_\varepsilon(t)$$

Plaçons-nous sur un segment $[t_0, t_0 + a]$ inclus dans $I_\varepsilon \cap J$. Puisque f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur un rectangle de base $[t_0, t_0 + a]$ contenant les graphes de x et de x_ε , on a :

$$|x'(t) - x'_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon + |f(t, x(t)) - f(t, x_\varepsilon(t))| \leq \varepsilon + K |x(t) - x_\varepsilon(t)|$$

Par intégration :

$$|x(t) - x_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) + K \int_{t_0}^t |x(u) - x_\varepsilon(u)| du$$

On peut alors appliquer le théorème de Gronwall, qui fournit :

$$|x(t) - x_\varepsilon(t)| \leq \frac{\varepsilon}{K} (e^{K(t-t_0)} - 1) \leq \frac{\varepsilon}{K} (e^{Ka} - 1)$$

Il y a donc convergence uniforme de $(x_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ vers x lorsque ε tend vers 0. Cela a deux conséquences. La première, c'est que $y(t) \leq x(t)$ pour $t \in [t_0, t_0 + a]$. La seconde, c'est que $\bigcup_{\varepsilon > 0} I_\varepsilon$ contient I , donc que l'inégalité précédente est réalisée pour tout t dans $J \cap [t_0, +\infty[$. Bien entendu, on dispose d'un résultat analogue à gauche de t_0 . ♦

Exemple 12

Considérons la solution du problème de Cauchy :

$$x' = x^2 + t^2$$

Résolvons $y' = y^2 + 1$, $y(1) = 0$. On obtient aisément :

$$y(t) = \tan(t - 1)$$

Sur $[1, +\infty[$, $y'(t) \leq y(t)^2 + t^2$. Donc $x(t) \geq y(t)$, soit $x(t) \geq \tan(t - 1)$. Il en résulte qu'à droite de 1, x est définie sur un intervalle inclus dans $\left[1, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

2.3 Exemple complet

Considérons l'équation différentielle : $x' = x^2 - t$

Nous pouvons bien sûr lui appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. La figure 8 fournit les éléments de contact, un certain nombre de courbes intégrales et certaines isoclines, dont l'isocline 0, qui joue ici un rôle particulier.

On observe alors plusieurs phénomènes. Tout d'abord, si une courbe intégrale passe par un point de l'intérieur géométrique de l'isocline 0, qui est une parabole P , elle y demeure dans l'avenir de cet instant. En particulier, son domaine de définition contient une demi-droite positive. Il semble plus précisément que l'isocline 0 soit une courbe asymptote à ces courbes intégrales.

Celles qui ne rencontrent pas l'intérieur de P , quant à elles, semblent admettre une asymptote verticale. Justifions tout cela.

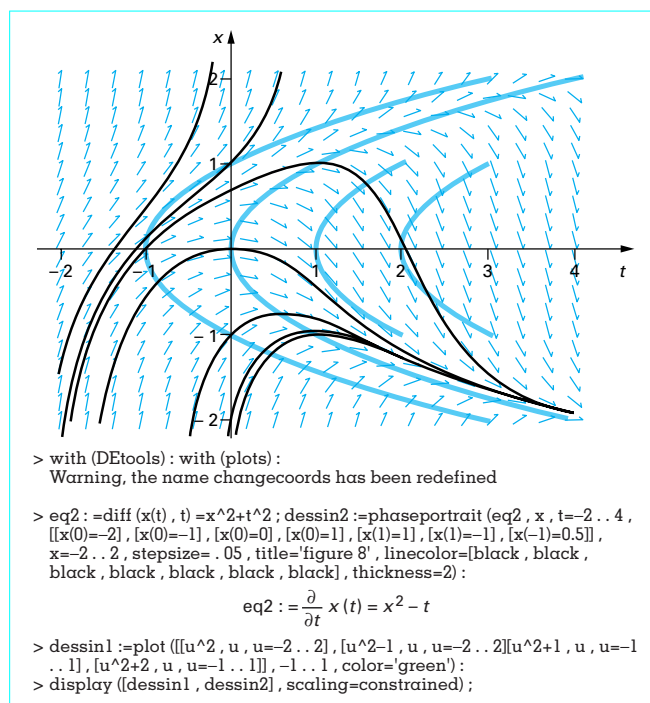


Figure 8 – Tracé des courbes intégrales et des isoclines de l'équation différentielle $x' = x^2 - t$

(1) Étudions la borne inférieure α d'un intervalle de définition d'une solution maximale. Supposons par l'absurde que $\alpha = -\infty$. Comme $x' \geq -t$, $x'(t) \rightarrow +\infty$, donc $x(t) \rightarrow -\infty$. De plus, par intégration,

$$\int_t^a x'(u) du \geq -\int_t^a u du, \text{ soit } -x(t) \geq \frac{t^2}{2} + C. \text{ Donc } x(t) >> t,$$

et $x'(t) = x(t)^2 - t \sim x(t)^2$. Il en résulte que $\frac{x'(t)}{x(t)^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, donc que $-\frac{1}{x(t)} \rightarrow +\infty$. Cela contredit le fait que $x(t) \rightarrow -\infty$.

Ainsi, toute solution maximale est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, avec $-\infty < \alpha$.

Montrons d'autre part que, si $t_0 \in]\alpha, \beta[$ et $x(t_0)^2 \geq t_0$, alors $x(t)^2 \geq t$ pour tout $t \in]\alpha, t_0[$. On peut bien sûr supposer $t > 0$. Soit

$y(t) = \sqrt{t}$. Alors $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \geq y(t)^2 - t$. De plus $y(t_0) \leq x(t_0)$. Le théorème 7 (appliqué ici à gauche de t_0) montre que $y(t) \leq x(t)$ pour $t \in]0, t_0[$.

Or, un tel point t_0 existe nécessairement, faute de quoi on aurait $x(t)^2 \leq t$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, ce qui contredit le fait que le graphe de x quitte tout compact de \mathbb{R}^2 dans le passé.

On a donc $x(t)^2 - t \geq 0$ au voisinage de α , donc $x'(t) \geq 0$. Puisque x est croissante, elle admet une limite en α , nécessairement égale à $-\infty$. Cela prouve que toutes les solutions admettent une asymptote verticale en la borne inférieure de leur intervalle de définition.

Précisément, si a est un point de $]\alpha, \beta[$ tel que x ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$, puisque $x'(t) \sim x(t)^2$, on peut écrire :

$$\forall t \in]\alpha, a] \quad \int_{\alpha}^t \frac{x'(u)}{x^2(u)} du \sim t - \alpha$$

Donc $-\frac{1}{x(t)} \sim t - \alpha$, soit $x(t) \sim \frac{1}{\alpha - t}$.

(2) Étudions maintenant la borne supérieure β de l'intervalle de définition d'une solution maximale. Nous avons vu ci-dessus qu'il existe toujours une valeur t telle que $x(t)^2 > t$. Nous distinguons deux cas.

(i) Pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $x(t)^2 > t$. Alors x croît, donc admet une limite en β . Supposons par l'absurde que $\beta = +\infty$.

Puisque $|x(t)| > \sqrt{t}$ pour $t > 0$, $|x(t)| \rightarrow +\infty$ et, comme x croît, $x(t) \rightarrow +\infty$. Donc $x'(t) \sim x^2(t)$, ce qui entraîne que $\frac{x'(t)}{x^2(t)} \rightarrow 1$ donc, par intégration, que $-\frac{1}{x(t)} \rightarrow +\infty$, ce qui est certainement contradictoire.

Ainsi, $\beta < +\infty$ et x admet la limite $+\infty$ en β : il y a une asymptote verticale. L'équivalent de x au voisinage de β est obtenu comme ci-dessus.

(ii) Il existe $t_0 \in]\alpha, \beta[$ tel que $x(t_0)^2 \leq t_0$. Considérons, pour $t \geq t_0$, l'application constante définie par $z(t) = x(t_0)$. Alors :

$$z'(t) = 0 \geq z(t)^2 - t = x(t_0)^2 - t \text{ car } x(t_0)^2 - t \leq t_0 - t \leq 0.$$

De plus, $z(t) = x(t_0)$. Donc, pour $t \geq t_0$, $z(t) \geq x(t)$, soit $x(t_0) \geq x(t)$. En particulier, $x(t) \leq \sqrt{t_0} \leq \sqrt{t}$.

Considérons d'autre part l'application définie par $u(t) = -\sqrt{t}$.

Alors $u'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \leq u(t)^2 - t = 0$. Comme $x(t_0) \geq -\sqrt{t_0} = u(t_0)$, on a $x(t) \geq u(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

Ainsi, pour $t \geq t_0$, $x(t)^2 \leq t$. Autrement dit, dans l'avenir de t_0 , la courbe intégrale reste dans l'intérieur de P . Cela entraîne que $x'(t) = x(t)^2 - t \leq 0$, donc que x décroît. Comme $x(t) \geq -\sqrt{t}$, et que la courbe intégrale quitte tout compact de \mathbb{R}^2 , $\beta = +\infty$.

Remarquons que x ne peut rester positive au voisinage de $+\infty$, car sinon elle admettrait une limite finie en $+\infty$, et l'on aurait donc $x'(t) \sim -t$, soit $x(t) \rightarrow -\infty$. Donc x prend une valeur négative et, étant décroissante, reste négative.

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$. On ne peut avoir, au voisinage de $+\infty$, $x(t) \geq -\sqrt{t} - \varepsilon$, car sinon $x'(t) \leq -\varepsilon$, donc $x(t) \leq -\varepsilon t + K$, ce qui contredit la minoration de $x(t)$. Ainsi, il existe des t_1 , arbitrairement grands, tels que $x(t_1) \leq -\sqrt{t_1} - \varepsilon$. Posons $v(t) = -\sqrt{t} - \varepsilon$. On a

$v'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t} - \varepsilon} \geq v(t)^2 - t = -\varepsilon$ pour t assez grand, puisque $-\frac{1}{2\sqrt{t} - \varepsilon} \rightarrow 0$. Par conséquent, puisque $v(t_1) = -\sqrt{t_1} - \varepsilon \geq x(t_1)$, on a, pour $t \geq t_1$:

$$x(t) \leq -\sqrt{t} - \varepsilon$$

Comme, d'autre part, $x(t) \geq -\sqrt{t}$, on voit que $x(t) \xrightarrow{+\infty} -\sqrt{t}$ et, plus précisément, que :

$$0 \leq x(t) + \sqrt{t} \leq \sqrt{t} - \sqrt{t} - \varepsilon$$

pour t assez grand. Il en résulte que $x(t) + \sqrt{t} = \sqrt{t} - \sqrt{t} + o(1)$, ce qui, après calcul, fournit $x(t) = -\sqrt{t} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

En particulier, $x(t) + \sqrt{t} \xrightarrow{+\infty} 0$. Donc la branche inférieure de P est une courbe asymptote à ces courbes intégrales.