GENERALISATIONS DE LA TRANSFORMATION DE SHANKS, DE LA TABLE DE PADE ET DE L'ε-ALGORITHME

C. BREZINSKI [1]

ABSTRACT - This paper deals with a generalization of the Shank's transformation for a sequence of elements of a topological vector space. It is showned how this generalization leads to a generalization of the Padé table. A recursive algorithm for effecting this transformation is given. Its properties are studied and some theorems are proved. This algorithm can be considered as a generalization of the ε-algorithm of Wynn. A second generalization is also studied and a third one which needs less elements of the initial sequence. The paper ends with a discussion on the vector case.

Introduction.

La transformation de Shanks [32] est un procédé d'accélération de la convergence des suites de nombres complexes qui généralise le procédé Δ^2 d'Aitken. Cette transformation met en jeu des détérminants qui, en pratique, sont difficiles à calculer. L'ε-algorithme est un procédé récursif dû à Wynn [40] et qui permet d'éviter le calcul effectif de ces déterminants. Ces dernières années aussi bien la théorie que les applications de l'ε-algorithme se sont développées. Cet algorithme a rendu de nombreux services comme méthode d'accélération de la convergence et a permis d'obtenir un certain nombre de méthodes nouvelles dans des domaines très divers de l'analyse numérique. Une bibliographie complète sur ce sujet serait beaucoup trop longue a donner ici; le lecteur intéressé pourra se reporter à [14,41] pour un exposé général sur cette question. Deux aspects particulier de la théorie de l'ε-algorithme sont cependant fondamentaux pour la suite:

Shanks [32], Wynn [39] et Gragg [24] ont étudié en détail les relations qui existent entre l'ε-algorithme et la méthode d'approximation de Padé [30]

(1) UER d'IEEA - Informatique, BP 36, 59650 - Villeneuve d'Ascq, France.

qui est très largement utilisé en physique [3,25,26]. D'autre part Wynn a proposé un ε-algorithme pour accélérer la convergence de suites de vecteurs [35]

Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E' son dual topologique. Soit $\{S_n\}$ une suite d'éléments de E. Le but que nous nous proposons ici est de définir, pour transformer cette suite, une méthode qui généralise le procédé $e_k(S_n)$ de Shanks. Nous montrerons que cette transformation permet de donner une généralisation de la notion de table de Padé. On sera ainsi amené à définir la notion d'inverse de $(y, y') \in E \times E'$. Cette notion d'inverse nous permettra d'obtenir un algorithme récursif pour mettre en oeuvre la transformation $e_k(S_n)$ Cet algorithme constituera par conséquent une généralisation de l'ε-algorithme de Wynn pour des suites de scalaires. Nous donnerons un certain nombre de propriétés et de résultats sur cet ε algorithme topologique. On étudie ensuite une seconde généralisation de la transformation de Shanks, de la table de Padé et de l'ε-algorithme. Puis on donne une troisième généralisation qui nécéssite moins de termes de la suite initiale que les deux autres généralisations; par contre on ne dispose pas, pour cette méthode, d'algorithme récursif permettant facilement sa mise en oeuvre.

L'article se termine par une discussion sur le cas vectoriel.

Il faut remarquer dés à présent que tous les résultats donnés ici se transposent immédiatement si $\{S_n\}$ est une suite d'éléments de E'.

1. Généralisation de la transformation de Shanks.

Soit donc $\{S_n\}$ une suite d'éléments de E et $S \in E$. Supposons que la suite $\{S_n\}$ vérifie:

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i (S_{n+i} - S) = 0 \qquad \forall n \text{ avec } \sum_{i=0}^{k} a_i \neq 0 \text{ et } a_i \in K$$

on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$. La transformation de Shanks permet de transformer $\{S_n\}$ en une suite constante S.

Considérons le système:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1 \\ &a_0 S_n + a_1 S_{n+1} + \dots + a_k S_{n+k} = S \\ &a_0 S_{n+1} + a_1 S_{n+2} + \dots + a_k S_{n+k+1} = S \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_0 S_{n+k} + a_1 S_{n+k+1} + \dots + a_k S_{n+2k} = S. \end{aligned}$$

Ce système peut s'écrire:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1\\
&a_0\, \Delta S_n + a_1\, \Delta S_{n+1} + \dots + a_k\, \Delta S_{n+k} = 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_0\, \Delta S_{n+k-1} + a_1\, \Delta S_{n+k} + \dots + a_k\, \Delta S_{n+2k-1} = 0\\
&a_0\, S_n + a_1\, S_{n+1} + \dots + a_k\, S_{n+k} = S
\end{aligned}
$$

où l'opérateur Δ est défini par :

$$\Delta^0 S_n = S_n$$

$$\Delta^{k+1} S_n = \Delta^k S_{n+1} - \Delta^k S_n \qquad \text{pour } k = 0, 1, \dots \text{ et pour tout } n.$$

Dans tout ce qui suit quand Δ sera appliqué à des quantités avec deux indices il agira toujours soit sur l'indice n soit sur l'indice placé en position supérieure.

Considérons les $k + 1$ premières équations de ce système et soit $y' \in E'$ on a:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1\\
&a_0 \langle y', \Delta S_n \rangle + \dots + a_k \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle = 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_0 \langle y'\, \Delta S_{n+k-1} \rangle + \dots + a_k \langle y', \Delta S_{n+2k-1} \rangle = 0
\end{aligned}
$$

où $\langle y', y \rangle$ désigne la forme bilinéaire qui met E et E' en dualité.

On peut résoudre ce système linéaire à condition que son déterminant soit différent de zéro. On calculera ensuite S en utilisant la dernière relation du système (3). On a donc symboliquement:

$$
(5)\qquad S = \frac{\begin{vmatrix} S_n & \dots & S_{n+k} \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}} = e_k(S_n)
$$

où le déterminant généralisé qui se trouve au numérateur se développe de façon habituelle et désigne un élément de E. Si la suite $\}S_n\{$ ne vérifie pas une relation du type (1) alors (5) n'est pas égal à S mais à un élément de E que nous noterons $e_k(S_n)$. On transforme ainsi la suite $\}S_n\{$ en un ensemble de suites $\}e_k(S_n)\{$ pour différentes valeurs de k. Cette transformation généralise la transformation de Shanks.

REMARQUE 1 : pour passer du système (3) au système (4) on peut prendre un y' différent pour chaque équation de (3). (4) devient donc alors :

$$a_0 + \dots + a_k = 1$$

$$a_0 \langle y'_1 , \Delta S_n \rangle + \dots + a_k \langle y'_1 , \Delta S_{n+k} \rangle = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_0 \langle y'_k , \Delta S_{n+k-1} \rangle + \dots a_k \langle y'_k , \Delta S_{n+2k-1} \rangle = 0.$$

Il est bien évident que les y'_i peuvent également dépendre de n.

Cependant nous n'envisagerons pas ces deux cas par la suite car l'algorithme récursif de calcul de (5) étudié au paragraphe 4 ne s'applique pas alors. y' sera donc toujours le même pour toutes les équations de (4) ; il ne dépendra ni de k ni de n.

REMARQUE 2 : Contrairement à ce qui se passe lorsque $E = \mathbb{C}$ le fait que (4) soit vérifié n'entraîne pas que (1) soit vérifié. C'est pour cette raison que la condition du théorème 1 est seulement suffisante.

Les propriétés de (5) sont les mêmes que celles de la transformation de Shanks habituelle :

THÉORÈME 1 : *Une condition suffisante pour que* $e_k(S_n) = S \ \forall n > N$ *est que la suite* $\}S_n\{$ *vérifie la relation* $\sum_{i=0}^{k} a_i(S_{n+i} - S) = 0 \ \forall n > N$ *avec* $a_i \in K$ *et* $\sum_{i=0}^{k} a_i \neq 0$.

Cette propriété découle directement de la construction même du procédé. L'équation aux différences $\sum_{i=0}^{k} a_i(S_{n+i} - S) = 0$ peut être résolue dans E de même façon que lorsque $S_n \in \mathbb{R}$. On a donc un résultat analogue à celui démontré dans ce cas [16] :

THÉORÈME 2. *Une condition suffisante pour que* $e_k(S_n) = S \ \forall n > N$ *est que :*

$$S_n = S + \sum_{i=1}^{p} A_i(n)\, r_i^n + \sum_{i=p+1}^{q} [B_i(n) \cos b_i n + c_i(n) \sin b_i n]\, e^{w_i n}$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} c_i \delta_{in} \qquad \forall n > N.$$

r_i, w_i et b_i appartiennent à K et l'on a $r_i \neq 1$ pour $i = 1, \dots, p$ et $w_i \neq 0$ pour $i = p + 1, \dots, q$.

A_i, B_i et C_i sont des polynômes en n dont les coefficients appartiennent à E. Les c_i appartiennent à E et δ_{in} est le symbole de Kronecker.

Si d_i désigne le degré de A_i plus un pour $i = 1, \dots, p$ et le plus grand des degrés de B_i et de C_i pour $i = p + 1, \dots, q$, on doit avoir :

$$m + \sum_{i=1}^{p} d_i + 2 \sum_{i=p+1}^{q} d_i = k - 1$$

avec la convention que $m = -1$ s'il n'y a aucun terme en δ_{in}.

La transformation de Shanks généralisée est une transformation non linéaire de suite à suite ; cependant on a la

PROPRIÉTÉ 1 :
$$e_k(aS_n + b) = a\, e_k(S_n) + \mathrm{b} \qquad \forall\, n, k$$
$\forall\, a \neq 0 \in K$ et $\forall\, b \in E$.

La démonstration est évidente à partir de (5).

PROPRIÉTÉ 2 : *Soit $e_k(S_n)$ l'élément de E obtenu en appliquant* (5) *à $S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+2k}$. Si on applique* (5) *à $u_n = S_{n+2k}$, $u_{n+1} = S_{n+2k-1}, \dots$ $\dots, u_{n+2k} = S_n$ alors on obtient un élément de E généralement différent de $e_k(S_n)$.*

La démonstration est évidente en intervertissant les lignes et les colonnes dans (5). Cette propriété est l'inverse de celle démontrée par Gilewicz [23] dans le cas scalaire où l'élément obtenu est identique.

Donnons maintenant une interprétation barycentrique de la généralisation de la transformation de Shanks que nous venons d'étudier, analogue à celle obtenue dans le cas scalaire [10] :
d'après (2), (4) et (5) on a :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i S_{p+i} = e_k(S_n) \sum_{i=0}^{k} a_i \qquad \text{pour } p = n, \dots, n + k$$

avec $\sum_{i=0}^{k} a_i \neq 0$. $e_k(S_n)$ apparaît donc comme le barycentre des points $S_n, \dots$ $\dots, S_{n+k}$ affectés des masses $a_0, \dots, a_k$. Les masses $a_0, \dots, a_k$ sont choisies de sorte que $e_k(S_n)$ soit également le barycentre de $(S_{n+1}, \dots, S_{n+k+1}), \dots$

$\dots, (S_{n+k}, \dots, S_{n+2k})$ affectés des mêmes masses $a_0, \dots, a_k$ (ces masses peuvent être ici négatives).

La propriété 1 provient tout simplement du fait que toute transformation affine transforme le barycentre en le barycentre des points transformés affectés des mêmes masses. Le fait que l'on puisse remplacer plusieurs points par leur barycentre affecté d'une masse égale à la somme de leurs masses nous fournira une méthode récursive de calcul de $e_k(S_n)$: ce sera l'ε algorithme généralisé dont l'étude fait l'objet du paragraphe 4.

Si $\sum_{i=0}^{k} a_i = 0$ alors tout point de E est barycentre, le déterminant intervenant au dénominateur de (5) est nul et le calcul de $e_k(S_n)$ ne peut pas alors être effectué.

Remarque: on voit que $\langle y', e_k(S_n) \rangle$ n'est autre que le résultat de la transformation habituelle de Shanks appliquée à la suite $\{ \langle y', S_n \rangle \}$.

2. Généralisation de la table de Padé.

Considérons la série de puissances formelle :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x_i$$

avec $x \in K$ et $c_i \in E$.

Prenons comme suite $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles de $f(x)$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i .$$

D'après (5) on a:

$$e_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i x^i & \dots\dots & \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \\ x^{n+1} \langle y', c_{n+1} \rangle & \dots & x^{n+k+1} \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x^{n+k} \langle y', c_{n+k} \rangle & \dots & x^{n+2k} \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots\dots & 1 \\ x^{n+1} \langle y', c_{n+1} \rangle & \dots & x^{n+k+1} \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x^{n+k} \langle y', c_{n+k} \rangle & \dots & x^{n+2k} \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}$$

Multiplions la première colonne du numérateur et du dénominateur par x^k, la seconde par $x^{k-1}, \dots$, la dernière par 1; on obtient :

$$e_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i x^{k+i} & \dots\dots\dots\dots & \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \\ x^{n+k+1}\langle y', c_{n+1}\rangle & \dots & x^{n+k+1}\langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{n+2k}\langle y', c_{n+k}\rangle & \dots & x^{n+2k}\langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^k & \dots\dots\dots\dots & 1 \\ x^{n+k+1}\langle y', c_{n+1}\rangle & \dots & x^{n+k+1}\langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{n+2k}\langle y', c_{n+k}\rangle & \dots & x^{n+2k}\langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix}}$$

divisons maintenant les secondes lignes du numérateur et du dénominateur par x^{n+k+1}, les troisièmes par $x^{n+k+2}, \dots$, les dernières par x^{n+2k}. On trouve :

$$(6) \qquad e_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i x^{k+i} & \dots & \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \\ \langle y', c_{n+1}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', c_{n+k}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^k & \dots\dots\dots & 1 \\ \langle y', c_{n+1}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', c_{n+k}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix}}$$

On a :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i x^{k+i} & \dots & \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \\ \langle y', c_{n+1}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', c_{n+k}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix} - f(x) \begin{vmatrix} x^k & \dots\dots\dots & 1 \\ \langle y', c_{n+1}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', c_{n+k}\rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i x^{k+i} \dots \sum_{i=n+k+1}^{\infty} c_i x^i \\ \langle y', c_{n+1} \rangle \dots \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \langle y', c_{n+k} \rangle \dots \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} = A x^{n+k+1} \quad \text{avec} \quad A \in E.$$

En examinant les relations (6) et (7) on voit que l'on peut considérer (5) comme une généralisation de la table de Padé de $f(x)$ bien que la série située dans le membre de droite de (7) ne commence qu'avec un terme en x^{n+k+1}. Le numérateur de (6) est de degré $n+k$ et son denominateur de degré k. Nous noterons donc symboliquement :

$$e_k(S\ ) = [n + k/k].$$

Pour rappeler que $e_k(S_n)$ est un approximant de la série de puissance $f(x)$, nous le noterons quelques fois :

$$f_{[n+k/k]}(x).$$

Par analogie l'approximant de Padé généralisé sera défini par :

$$(8) \qquad [p/q] = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i x^{q+i} \dots \sum_{i=0}^{p} c_i x^i \\ \langle y', c_{p-q+1} \rangle \dots \langle y', c_{p+1} \rangle \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \langle y', c_p \rangle \dots\dots \langle y', c_{p+q} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^q \dots\dots\dots 1 \\ \langle y', c_{p-q+1} \rangle \dots \langle y', c_{p+1} \rangle \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \langle y', c_p \rangle \dots\dots \langle y', c_{p+q} \rangle \end{vmatrix}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où les c_i avec un indice négatif sont pris égaux à $0 \in E$. $[p/q]$ pourra, dans la suite, être noté $f_{[p/q]}(x)$.

On voit, d'après (8), que l'on a :

$$[p/q] = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x_i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x^i} \quad \text{avec } a_i \in E \text{ et } b_i \in K\,.$$

Le calcul des a_i et des b_i s'effectue comme pour la table de Padé ordinaire en écrivant que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x^i} = A x^k$$

avec $A \in E$ et k le plus grand possible. En d'autres termes on veut déterminer les a_i et les b_i de sorte que :

$$(c_0 + c_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p) = \\ = A x^{p+q+1}$$

ou encore :

$$(c_0 + c_1 x + \dots)(b_0 + \dots + b_q x^q) = a_0 + \dots + a_p x^p + 0\, x^{p+1} + \dots \\ + 0\, x^{p+q} + A x^{p+q+1}.$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré en x on obtient :

$$\begin{array}{l} b_0 c_{p+1} + b_1 c_p + \dots + b_q c_{p-q+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_0 c_{p+q} + b_1 c_{p+q-1} + \dots + b_q c_p = 0 \end{array}$$

avec la convention que $c_i = 0 \in E$ si $i < 0$. En prenant $b_0 = 1$ on trouve donc les b_i comme solution du système suivant de q équations à $q+1$ inconnues :

$$(9) \quad \begin{array}{l} b_0 \langle y', c_{p+1} \rangle + b_1 \langle y', c_p \rangle + \dots + b_q \langle y', c_{p-q+1} \rangle = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_0 \langle y', c_{p+q} \rangle + b_1 \langle y', c_{p+q-1} \rangle + \dots + b_q \langle y', c_p \rangle = 0 \end{array}$$

Puis les $a_i \in E$ sont calculés à partir des $p+1$ relations :

$$(10) \quad \begin{array}{l} c_0 b_0 = a_0 \\ c_1 b_0 + c_0 b_1 = a_1 \\ c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_p b_0 + c_{p-1} b_1 + \dots + c_{p-q} b_q = a_p \end{array}$$

On voit que l'on a :

$$\langle y', [p/q] \rangle - \langle y', f(x) \rangle = 0\,(x^{p+q+1}).$$

Par contre on a seulement :

$$[p/q] - f(x) = A x^{p+1}$$

ceci tient au fait que $\langle y', y \rangle = 0$ n'entraîne pas que $y = 0$. Nous considèrerons cependant (8) comme une généralisation de la table de Padé. (8) possède d'ailleurs les mêmes propriétés que les quotients de Padé ordinaires :

THÉORÈME 3 : *Si P/Q est un approximant de Padé généralisé $[p/q]$ de $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ définir par* (8), (9) *et* (10), *alors on a :*

$$\langle y', f(x) \rangle \, Q(x) - \langle y', P(x) \rangle = \sum_{i=p+q+1}^{\infty} d_i x^i$$

$$\textit{avec} \qquad d_i = \sum_{k=0}^{q} b_k \, \langle y', c_{i-k} \rangle$$

DÉMONSTRATION : Elle est évidente ; c'est une simple identification de coefficients dans des séries de puissance. Ce résultat généralise un résultat classique de la table de Padé ordinaire [18].

THÉORÈME 4 : *Une condition nécessaire et suffisante pour que $[p/q]$ défini par* (8), (9) *et* (10) *existe est que :*

$$H_q^{(p-q+1)}(\langle y', c_{p-q+1} \rangle) \neq 0$$

où $H_k^{(n)}(u_n)$ est le déterminant de Hankel défini par :

$$H_0^{(n)}(u_n) = 1$$

$$H_k^{(n)}(n_n) = \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+k-1} \\ u_{n+1} & \cdots & u_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n+k-1} & \cdots & u_{n+2k-2} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 0, 1, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

avec $u_n \in \mathbb{C} \quad \forall n$.

DÉMONSTRATION : C'est tout simplement la condition nécessaire et suffisante pour que le système (9) donnant les b_i admette une solution. Cette solution est d'ailleurs unique d'où le :

THÉORÈME 5 : *S'il existe,* $[p/q]$, *défini par* (8), (9) *et* (10), *est unique.*

Un certain nombre de propriétés de la table de Padé ordinaire restent encore valables ici :

PROPRIÉTÉ 3 : *Si* $c_0 = 0$ *alors* :

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)_{[p-1/q]} = \frac{f_{[p/q]}(x)}{x} .$$

PROPRIÉTÉ 4 : *Soit* $R_k(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i' x^i$ *avec* $a_i' \in E$ *et* $x \in K$. *Alors si* $p \geq q + k$ *et* $r \leq k$:

$$(f(x) + R_k(x))_{[p/q]} = f_{[p/q]}(x) + R_k(x).$$

La démonstration de la première propriété découle immédiatement de (8). La seconde provient de la définition même des approximants de Padé (7); en effet posons :

$$\{ f(x) + R_k(x) \}_{[p/q]} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x^i} \quad \text{avec } a_i \in E \quad b_i, x \in K .$$

On a donc d'après (7) :

$$\frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x_i} - f(x) - R_k(x) = A x^{p+1} \qquad A \in E$$

ou encore

$$\frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i - R_k(x) \sum_{i=0}^{q} b_i x^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x^i} - f(x) = A x^{p+1}$$

si $p \geq q + k$ alors le numérateur est de degré p. Par conséquent le rapport intervenant dans la relation précédent n'est autre que $f_{[p/q]}(x)$. D'où finalement :

$$\{ f(x) + R_k(x) \}_{[p/q]} - R_k(x) = f_{[p/q]}(x) \quad \text{si} \quad p \geq q + k.$$

REMARQUE : prenons $p = n + k$ et $q = k$. On a $p - q = n$. Appliquons la propriété 4 :

$$(f(x) - R_n(x))_{[n+k/k]} = f_{[n+k/k]}(x) - R_n(x).$$

Prenons

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

on a

$$f(x) - R_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} c_i x^i = x^n \sum_{i=0}^{\infty} c_{n+i} x^i$$

posons

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n+i} x^i .$$

Par conséquent :

$$\{ x^n f_n(x) \}_{[n+k/k]} = f_{[n+k/k]}(x) - R_n(x)$$

d'où, en divisant les deux membres par x^n :

$$\{ f_n(x) \}_{[k/k]} = \frac{f_{[n+k/k]}(x) - R_n(x)}{x^n}$$

où $R_n(x)$ est la somme des n premiers termes de $f(x)$. Cette relation permet donc de relier les approximants de Padé diagonaux $[k/k]$ et les approximants non diagonaux $[n + k/k]$.

PROPRIÉTÉ 5 : *Posons* $y = \dfrac{x}{ax + b}$ *et* $g(x) = f(y)$ *alors*

$$f_{[k/k]}(y) = g_{[k/k]}(x) .$$

La démonstration est identique à celle effectuée pour la table de Padé ordinaire.

REMARQUE : Lorsque E est un espace de Hilbert, les résultats de ce paragraphe sont à rapprocher de ceux obtenus par Wynn [46]. On comparera également au calcul d'approximants de Padé pour des matrices effectué par Rissanen [31].

3. Inverse généralisé d'une série de puissances formelle.

Soit $f(x) \in E$ une série de puissances formelle :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad c_i \in E \quad x \in K.$$

Nous voulons, comme pour la table de Padé ordinaire, définir son inverse. Il nous faut définir auparavant ce que l'on entend par inverse d'un élément $a \in E$ ou plutôt par inverse d'un couple $(a, b) \in E \times E'$. Cette notion est fondamentale pour pouvoir généraliser l'ε-algorithme.

3.1. *Inverse d'un couple.*

Soit $a \in E$ et $b \in E'$ tels que $\langle b, a \rangle \neq 0$.

On appelle inverse du couple $(a, b) \in E \times E'$ le couple $(b^{-1}, a^{-1}) \in E \times E'$ défini par :

$$a^{-1} = \frac{b}{\langle b,a \rangle} \quad b^{-1} = \frac{a}{\langle b,a \rangle} \qquad a^{-1} \in E', \quad b^{-1} \in E.$$

On dira également par la suite que a^{-1} est l'inverse de a par rapport à b et réciproquement. Les propriétés de l'inverse de (a, b) sont les suivantes :

PROPRIÉTÉ 6 :

$$\langle a^{-1}, a \rangle = 1$$

$$\langle b, b^{-1} \rangle = 1$$

$$\langle a^{-1}, b^{-1} \rangle = 1/\langle b, a \rangle$$

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{et} \quad (b^{-1})^{-1} = b.$$

EXEMPLE 1 : Soit (y'^{-1}, d^{-1}) l'inverse de $(d, y') \in E \times E'$ où d est quelconque tel que $\langle y', d \rangle \neq 0$.

Soit $b \in E'$ tel que $\langle b, y'^{-1} \rangle \neq 0$; alors l'inverse de (y'^{-1}, b) est $(b^{-1}, (y'^{-1})^{-1})$ défini par :

$$(y'^{-1})^{-1} = \frac{b}{\langle b, y'^{-1} \rangle} \quad b^{-1} = \frac{y'^{-1}}{\langle b, y'^{-1} \rangle}.$$

EXEMPLE 2 : Soit $(a, b) \in E \times E'$ et (b^{-1}, a^{-1}) son inverse. Alors $a^{-1} \in E'$. Considérons l'inverse de $(a, a^{-1}) \in E \times E'$:

$$a^{-1} = \frac{a^{-1}}{\langle a^{-1}, a \rangle} \quad (a^{-1})^{-1} = \frac{a}{\langle a^{-1}, a \rangle}.$$

On voit que la première relation entraîne que $\langle a^{-1}, a \rangle = 1$ et que l'on a, par conséquent, $(a^{-1})^{-1} = a$.

EXEMPLE 3. Soit $(a, b) \in E \times E'$ et (b^{-1}, a^{-1}) son inverse. On a $b^{-1} \in E$.

Considérons l'inverse de $(b^{-1}, b) \in E \times E$:

$$(b^{-1})^{-1} = \frac{b}{\langle b, b^{-1} \rangle} \quad b^{-1} = \frac{b^{-1}}{\langle b, b^{-1} \rangle}.$$

On a $\langle b, b^{-1} \rangle = 1$ et par conséquent $(b^{-1})^{-1} = b$.

REMARQUE: Si E est un espace de Hilbert alors l'inverse du couple $(a, a) \in E \times E$ est (a^{-1}, a^{-1}) avec:

$$a^{-1} = \frac{a}{\langle a, a \rangle}$$

où $\langle a, a \rangle$ est le produit scalaire dans E. On voit que l'on retrouve dans ce cas la définition de l'inverse de $a \in \mathbb{R}^n$ utilisée par Wynn dans l'ε algorithme vectoriel [35].

3.2. *Inverse d'une serie formelle.*

Utilisons les résultats précédents pour obtenir l'inverse du couple $(f(x), y') \in E \times E'$.

$$[f(x)]^{-1} = \frac{y'}{\langle y', f(x) \rangle}.$$

Nous allons chercher les coefficients de $[f(x)]^{-1}$ que nous mettrons sous la forme:

$$[f(x)]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \quad \text{avec } d_i \in E' \quad \text{et} \quad x \in K$$

d'où:

$$[f(x)]^{-1} = \frac{y'}{\langle y', \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \rangle} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i.$$

Posons $d_i = y' e_i$ avec $e_i \in K$. On a donc:

$$\frac{1}{\langle y', \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \rangle} = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^i$$

ce qui donne, comme dans le cas de l'inverse ordinaire d'une série de puissances formelle :

$$\langle y', c_0 \rangle e_0 = 1$$

$$\langle y', c_0 \rangle e_1 + \langle y', c_1 \rangle e_0 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\langle y', c_0 \rangle e_k + \langle y', c_1 \rangle e_{k-1} + \dots + \langle y', c_{k-1} \rangle e_1 + \langle y', c_k \rangle e_0 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et permet de calculer les e_i à condition que $\langle y', c_0 \rangle \neq 0$.

D'après (8) on a :

$$[0/n] = \frac{a_0}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} = \left[\sum_{i=0}^{n} d_i x^i \right]^{-1} = \frac{y'^{-1}}{\langle \sum_{i=0}^{n} d_i x^i, y'^{-1} \rangle}$$

ou encore :

$$[0/n] = \frac{a_0}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} = \frac{y'^{-1}}{\sum_{i=0}^{n} e_i x^i}$$ en utilisant le fait que $< y', y'^{-1} > = 1$.

On obtient donc :

$$a_0 = y'^{-1}$$

$$b_i = e_i \text{ pour } i = 0, \dots, n.$$

On pourra rapprocher l'inverse généralisé d'une série de puissances formelle tel que nous venons de le définir de celui donné par Wynn dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ [36].

L'inverse de $f(x)$ étant défini de la façon précédente nous pouvons maintenant énoncer la :

PROPRIÉTÉ 7. *Si* $\langle y', c_0 \rangle \neq 0$ *alors*

$$\left\} f_{[p/q]}(x) \right\{^{-1} = \left\} f^{-1}(x) \right\{_{[q/p]} .$$

DÉMONSTRATION : On a :

$$\} f_{[p,q]}(x) \{^{-1} = \left\} \frac{\sum\limits_{i=0}^{p} a_i x^i}{\sum\limits_{i=0}^{q} b_i x^i} \right\{^{-1} = \frac{y' \sum\limits_{i=0}^{q} b_i x^i}{\langle y', \sum\limits_{i=0}^{p} a_i x^i \rangle}$$

et

$$f^{-1}(x) = \frac{y'}{\langle y', \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i \rangle}$$

d'autre part:

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{q} b_i x^i}{\langle y', \sum\limits_{i=0}^{p} a_i x^i \rangle} - \frac{1}{\langle y', \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i \rangle} = \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \langle y', c_i \rangle x^i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{q} b_i x^i\right) - \sum\limits_{i=0}^{p} \langle y', a_i \rangle x^i}{\langle y', \sum\limits_{i=0}^{p} a_i x^i \rangle \quad \langle y', \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i \rangle}.$$

Le numérateur de cette expression est égal à:

$$\langle y', c_0 \rangle b_0 + \} \langle y', c_1 \rangle b_0 + \langle y', c_0 \rangle b_1 \{ x + \ldots + \} \langle y', c_p \rangle b_0 + \ldots + \langle y', c_0 \rangle b_p \{ x^p$$
$$+ \} b_0 \langle y', c_{p+1} \rangle + \ldots + b_q \langle y', c_{p-q+1} \rangle \{ x^{p+1} + \ldots + \} b_0 \langle y', c_{p+q} \rangle + \ldots + b_q \langle y', c_p \rangle \{ x^{p+q}$$
$$+ A x^{p+q+1} - \sum_{i=0}^{p} \langle y', a_i \rangle x^i.$$

Or, d'après les relations (10), on a:

$$\begin{aligned}
&\langle y', c_0 \rangle b_0 = \langle y', a_0 \rangle \\
&\langle y', c_1 \rangle b_0 + \langle y', c_0 \rangle b_1 = \langle y', a_1 \rangle \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\langle y', c_p \rangle b_0 + \ldots + \langle y', c_0 \rangle b_p = \langle y', a_p \rangle
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le système (9), on voit que les coefficients de $x^{p+1}, \ldots, x^{p+q}$ sont nuls. Par conséquent on a:

$$\} f_{[p/q]}(x) \{^{-1} - f^{-1}(x) = A' x^{p+q+1} \quad \text{avec } A' \in E'$$

ce qui démontre la propriété par définition des approximants de Padé puisque le numérateur de $\} f_{[p/q]}(x) \{^{-1}$ est de degré q et que son dénominateur est de degré p.

On voit donc que la table de Padé généralisée que nous venons de définir possède les mêmes propriétés que la table de Padé ordinaire.

4. Généralisation de l'ε-algorithme.

Le calcul des déterminants intervenant dans (5) est difficile dès que k devient élevé. Nous allons donc maintenant étudier un procédé récursif pour éviter le calcul de ces déterminants. Ce procédé sera une généralisa. tion de l'ε-algorithme scalaire que l'on retrouve lorsque $E = \mathbb{R}$. Cet algorithme est basé sur le fait que les déterminants qui interviennent dans la relation (5) vérifient un certain nombre de propriétés analogues à celles vérifiées dans le cas scalaire.

4.1. *Les déterminants de Hankel généralisés.*

Soit $\}u_n\{$ une suite d'éléments de E et y' un élément arbitraire de E' Nous poserons :

$$\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(u_n) = \begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+k} \\ \langle y', \Delta u_n \rangle & \dots & \langle y', \Delta u_{n+k} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta u_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta u_{n+2k-2} \rangle \end{vmatrix} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots$$

et nous appelerons $\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(u_n)$ déterminant de Hankel généralisé ; on voit que c'est un élément de E défini par la combinaison linéaire de $u_n, \dots, u_{n+k}$ obtenue en développant ce déterminant à l'aide des règles habituelles de calcul d'un déterminant.

Nous poserons :

$$H_{k+1}^{(n)}(u_n) = \langle y', \widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(u_n) \rangle.$$

On voit que $H_{k+1}^{(n)}(u_n)$ n'est autre que le déterminant de Hankel classique de la suite scalaire $\}\langle y', u_n \rangle\{$.

Avec ces notations on voit que (5) s'écrit :

$$e_k(S_n) = \frac{\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(S_n)}{H_k^{(n)}(\Delta^2 S_n)} .$$

L'identité entre l'ε algorithme scalaire et la transformation de Shanks repose sur le développement de Schweins du quotient de deux déterminants. La condensation d'un déterminant, les identités extentionnelles et le développement de Schweins s'obtiennent par combinaison linéaire des lignes ou des colonnes des déterminants mis en jeu [1]. Ces propriétés s'étendent donc immédiatement aux déterminants de Hankel généralisés que nous venons de définir. En particulier en effectuant un développement de Schweins on obtient la :

PROPRIÉTÉ 8 :

$$e_{k+1}(S_n) - e_k(S_n) = -\frac{H_{k+1}^{(n)}(\Delta S_n)\,\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(\Delta S_n)}{H_{k+1}^{(n)}(\Delta^2 S_n)\,H_k^{(n)}(\Delta^2 S_n)}\,.$$

On voit que cette propriété est une généralisation d'une propriété bien connue dans le cas scalaire et que l'on retrouve immédiatement en écrivant que :

$$\langle y', e_{k+1}(S_n) - e_k(S_n)\rangle = -\frac{[H_{k+1}^{(n)}(\Delta S_n)]^2}{H_{k+1}^{(n)}\,\Delta^2 S_n)\,H_k^{(n)}(\Delta^2 S_n)}\,.$$

De la relation (5) et de la propriété 8 on tire la :

PROPRIÉTÉ 9 :

$$H_k^{(n)}(\Delta^2 S_n)\,\widetilde{H}_{k+2}^{(n)}(S_n) - H_{k+1}^{(n)}(\Delta^2 S_n)\,\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(S_n) = -\,H_{k+1}^{(n)}(\Delta S_n)\,\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}(\Delta S_n)$$

4.2. *Les relations de l'ε-algorithme.*

Les quantités avec un indice inférieur pair sont des éléments de E; celles avec un indice inférieur impair appartiennent à E' :

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \in E' \qquad \varepsilon_0^{(n)} = S_n \in E \qquad n = 0, 1, \ldots$$

(11′) $$\varepsilon_{2k+1}^{(n)} = \varepsilon_{2k-1}^{(n+1)} + [\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1} \qquad n, k = 0, 1, \ldots$$

avec

$$[\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1} = \frac{y'}{\langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}\rangle} \quad \text{et} \quad y'^{-1} = \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}{\langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}\rangle} \quad \text{où} \quad y' \in E'$$

(11″) $$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + [\Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}]^{-1} \qquad n, k = 0, 1, \ldots$$

avec

$$[\Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}]^{-1} = \frac{y'^{-1}}{\langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, y'^{-1} \rangle} = \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}{\langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle} .$$

Appelons (11) l'ensemble des relations (11') et (11'') qui définissent l'ε-algorithme généralisé. D'après la définition de l'inverse d'un couple de $E \times E'$ donnée précédemment on voit que $\{[\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1}\}^{-1} = \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}$. D'après le premier exemple de l'inverse d'un couple on a également $\{[\Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}]^{-1}\}^{-1} = \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}$. Les exemple 2 et 3 montrent que:

$$\langle [\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1}, \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle = 1$$

$$\langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, [\Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}]^{-1} \rangle = 1 .$$

Dans ce qui suit l'inverse de y'^{-1} sera toujours pris par rapport au couple $(y'^{-1}, [\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1}) \in E \times E'$ afin d'avoir $(y'^{-1})^{-1} = y'$.

Nous allont maintenant relier l'algorithme (11) avec la généralisation de la transformation de Shanks que nous avons exposée précédemment. Le résultat fondamental est le suivant:

THÉORÈME 6:

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = e_k(S_n) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2k+1}^{(n)} = [e_k(\Delta S_n)]^{-1} = \frac{y'}{\langle y', e_k(\Delta S_n) \rangle} \quad \text{pour} \quad n, k = 0, 1 \ldots$$

DÉMONSTRATION: On a $\varepsilon_0^{(n)} = e_0(S_n) = S_n$ et d'après (11'):

$$\varepsilon_1^{(n)} = \frac{y'}{\langle y', \Delta S_n \rangle} = \frac{y'}{\langle y', e_0(\Delta S_n) \rangle} = [e_0(\Delta S_n)]^{-1} .$$

Supposons avoir démontré les relations du théorème jusqu'à $\varepsilon_{2k-1}^{(n)}$ et $\varepsilon_{2k}^{(n)}$; nous allons montrer qu'elles restent encore vraies pour $\varepsilon_{2k+1}^{(n)}$ et $\varepsilon_{2k+2}^{(n)}$ $\forall n$. D'après (11') on a:

$$\varepsilon_{2k+1}^{(n)} = \frac{y'}{\langle y', e_k(\Delta S_n) \rangle} = \frac{y'}{\langle y', e_{k-1}(\Delta S_{n+1}) \rangle} + \frac{y'}{\langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle} .$$

En utilisant (5) on voit que cette relation n'est autre que celle de l'ε-algorithme scalaire multipliée par $y' \in E'$. Elle est donc vérifiée si (11'') est satisfaite. Démontrons donc maintenant (11''): (la démonstration est calquée sur celle de l'ε-algorithme scalaire [40] et nous n'en donnerons que les grandes lignes):

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)} = \frac{\widetilde{H}_{k+2}^{(n+1)}(S_n)}{H_{k+1}^{(n)}(\Delta^2 S_n)} - \frac{\widetilde{H}_{k+1}^{(n+1)}(S_{n+1})}{H_k^{(n+1)}(\Delta^2 S_{n+1})}$$

ou encore:

$$= \frac{\begin{vmatrix} S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} & S_n \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \langle y', \Delta S_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \langle y', \Delta S_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \end{vmatrix}} -$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}$$

En utilisant un développement de Schweins on obtient:

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)} =$$

$$
= \frac{\begin{vmatrix} S_n & \cdots & S_{n+k+1} \\ 1 & \cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y, \Delta S_{n+k+1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}} .
$$

Dautre part, en posant $y = y'^{-1}$ et en utilisant $\langle y', y \rangle = 1$, on trouve que :

$$
\frac{1}{\langle \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)}, y \rangle} = \frac{N}{D} \text{ avec}
$$

$$
N = \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \langle y', \Delta^2 S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}
$$

$$
D = - \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta^2 S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix} .
$$

On voit que le dénominateur de $\varepsilon_{2k+2}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)}$ est égal à $-D$ et que le second déterminant de son numérateur est égal au premier déterminant de N. Il nous reste donc à montrer que :

$$\begin{vmatrix} S_n & \cdots\cdots & S_{n+k+1} \\ 1 & & 1 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} = -y'^{-1} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}.$$

Le déterminant situé dans le membre de gauche de cette relation peut encore s'écrire:

$$\begin{vmatrix} S_n & \Delta S_n & \cdots\cdots & \Delta S_{n+k} \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \langle y', \Delta^2 S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \Delta S_n & \cdots\cdots & \Delta S_{n+k} \\ \langle y', \Delta^2 S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}.$$

D'autre part on sait que $y'^{-1} = \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} / \langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle$. En utilisant, pour calculer $\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}$, une identité extentionnelle dérivée de $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \big|\, |a_1|\ |b_2| - |b_1|\ |a_2| \,\big|$ on trouve après quelques calculs:

$$y'^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta S_n & \cdots\cdots & \Delta S_{n+k} \\ \langle y', \Delta^2 S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots\cdots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \cdots\cdots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 6.

REMARQUE : On voit que seules sont intéressantes les quantités avec un indice inférieur pair ; les quantités avec un indice inférieur impair ne représentent que des calculs intermédiaires.

4.3. *Propriété de l'ε-algorithme généralisé.*

Utilisons les résultats du théorème 6 et les relations de l'algorithme ; on obtient immédiatement la :

PROPRIÉTÉ 10 :

$$e_{k+1}(S_n) = e_k(S_{n+1}) - \frac{\langle y', e_k(\Delta S_n)\rangle \ \langle y', e_k(\Delta S_{n+1})\rangle}{\langle y', \Delta e_k(S_n)\rangle \ \langle y', \Delta e_k(\Delta S_n)\rangle} \Delta e_k(S_n)$$

où l'opérateur Δ porte toujours sur l'indice n.

PROPRIÉTÉ 11 :

$$[\varepsilon_{k+2}^{(n-1)} - \varepsilon_k^{(n)}]^{-1} - [\varepsilon_k^{(n)} - \varepsilon_{k-2}^{(n+1)}]^{-1} = [\Delta\varepsilon_k^{(n)}]^{-1} - [\Delta\varepsilon_k^{(n-1)}]^{-1} .$$

La démontration de cette propriété est analogue à celle effectuée par Wynn dans le cas de l'ε-algorithme scalaire [38]. Elle résulte du fait que l'inverse de l'inverse d'un élément de E ou de E' est l'élément lui-même.

Lorsque k est pair cette relation devient :

$$\langle y', \varepsilon_{2k+2}^{(n-1)} - \varepsilon_{2k}^{(n)}\rangle^{-1} - \langle y', \varepsilon_{2k}^{(n)} - \varepsilon_{2k-2}^{(n+1)}\rangle^{-1} = \langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}\rangle^{-1} - \langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n-1)}\rangle^{-1} .$$

Comme on le voit cette relation ne fait intervenir que des colonnes paires du tableau de l'ε-algorithme. Nous avons vu que l'ε-algorithme permettait de construire la moitié supérieure de la table de Padé. L'autre moitié peut être construire à l'aide de cette relation en partant des conditions aux limites :

$$[-1/q] = 0$$

$$\langle y', [p/-1]\rangle = \infty$$

$$[p/0] = \sum_{i=0}^{p} c_i x^i$$

$$[0/q] = \left(\sum_{i=0}^{q} d_i x^i\right)^{-1}$$

où $$\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i = \left[\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right]^{-1} \quad \text{où} \quad c_i \in E,\ d_i \in E' \text{ et } x \in K.$$

En termes de table de Padé, cette relation s'écrit:

$$([p/q+1]-[p/q])^{-1}-([p/q]-[p/q-1])^{-1}=$$

$$=([p+1/q]-[p/q])^{-1}-([p/q]-[p-1/q])^{-1}$$

où l'inverse est pris par rapport à y'.

PROPRIÉTÉ 12: *Si l'application de l'ε-algorithme* (11) *aux suites* $\}S_n\{$ *et* $\}aS_n+b\{$ *avec* $a\neq 0\in K$ *et* $b\in E$ *fournit respectivement les éléments* $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ *et* $\overline{\varepsilon}_k^{(n)}$ *alors on a :*

$$\overline{\varepsilon}_{2k}^{(n)}=a\varepsilon_{2k}^{(n)}+b \quad \text{et} \quad \overline{\varepsilon}_{2k+1}^{(n)}=\varepsilon_{2k+1}^{(n)}/a.$$

DÉMONSTRATION: La relation sur les colonnes paires n'est autre que la propriété 1. La relation sur les colonnes impaires provient du théorème 6 et de la propriété 1.

PROPRIÉTÉ 13: *Si on applique l'ε-algorithme généralisé* (11) *à une suite* $\{S_n\}$ *d'éléments de* E *qui vérifie*:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i S_{n+i}=0 \qquad \forall\, n>N$$

avec $\sum_{i=0}^{k} a_i\neq 0$, *alors :*

$$\langle \varepsilon_1^{(n)},\varepsilon_0^{(n)}\rangle-\langle \varepsilon_1^{(n)},\varepsilon_2^{(n)}\rangle+\langle \varepsilon_3^{(n)},\varepsilon_2^{(n)}\rangle-\ldots+\langle \varepsilon_{2k-1}^{(n)},\varepsilon_{2k-2}^{(n)}\rangle=-\sum_{i=1}^{k} ia_i\Big/\sum_{i=0}^{k} a_i$$

$$\forall\, n>N.$$

DÉMONSTRATION: on a, d'après (11):

$$\langle \varepsilon_{2i+1}^{(n)}-\varepsilon_{2i-1}^{(n+1)},\Delta\varepsilon_{2i}^{(n)}\rangle=1$$

$$\langle \Delta\varepsilon_{2i+1}^{(n)},\varepsilon_{2i+2}^{(n)}-\varepsilon_{2i}^{(n+1)}\rangle=1\,.$$

On a donc la même propriété que dans le cas de l'ε-algorithme scalaire mais où le produit ordinaire est remplacé par le produit de dualité. La démonstration reste donc la même que celle effectuée par Bauer [4] pour l'invariance de la somme quelque soit n et que celle de Wynn [42] pour la valeur numérique de la constante.

REMARQUE: Les relations (11) n'englobent pas les relations de l'ε-algorithme vectoriel défini par Wynn [35]. En effet d'après cet algorithme on a :

$$\varepsilon_2^{(n)} = \{ S_{n+2} (\Delta S_n , \Delta S_n) - 2S_{n+1} (\Delta S_{n+1}, \Delta S_n) + S_n (\Delta S_{n+1}, \Delta S_{n+1}) \} / (\Delta^2 S_n , \Delta^2 S_n).$$

D'après (5) on voit ici que $e_1 (S_n)$ est une combinaison de S_n et de S_{n+1} seulement.

Dans cet ε-algorithme vectoriel Wynn utilise comme définition de l'inverse y^{-1} de $y \in \mathbb{C}^p$: $y^{-1} = \bar{y}/(y, y)$. Dans [37], Wynn a émis la conjecture que l'on pouvait également utiliser la définition $y^{-1} = \bar{y}/(y, Dy)$ où D est une matrice symétrique et que la propriété du théorème 1 restait vraie Greville [27] a montré que cette conjecture était fausse. On voit, à l'aide de l'étude précédente, que cela tient au fait que $(y, y^{-1}) \neq 1$ et au fait que $(y, y)\ (y^{-1}, y^{-1}) \neq 1$. C'est pour la même raison que la généralisation de l'ε-algorithme aux suites d'éléments d'un espace de Banach, proposée par Brezinski [8], ne vérifie pas la propriété du théorème 1 pour $k > 1$.

5. Etude de la convergence.

D'après (11″) on a :

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + \frac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{\langle \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)} , \Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle}$$

$$= \varepsilon_{2k}^{(n+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{\langle \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)} , \Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle} \right\} - \frac{\varepsilon_{2k}^{(n)}}{\langle \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)} , \Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle}$$

d'où immédiatement le :

THÉORÈME 7 : *Supposons que* $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_{2k}^{(n)} = S$ *Si* $\exists\, \alpha' < 0 < \beta'$ *tels que*

$$\langle \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)} , \Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle \notin [\alpha', \beta'] \qquad \forall\, n > N$$

alors $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_{2k+2}^{(n)} = S$.

REMARQUE 1 : Prenons $k = 0$ dans le théorème 7. Alors la condition devient :

$$\langle \Delta \varepsilon_1^{(n)}, \Delta S_n \rangle = \frac{\langle y', \Delta S_n \rangle}{\langle y', \Delta S_{n+1} \rangle} - 1 \notin [\alpha', \beta']$$

ou, en d'autres, termes, si $\exists\, \alpha < 1 < \beta$ tels que:

$$\frac{\langle y', \Delta S_{n+1} \rangle}{\langle y', \Delta S_n \rangle} \notin [\alpha, \beta] \qquad \forall\, n > N$$

alors $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_2^{(n)} = S$.

On retrouve ainsi un résultat analogue à ceux obtenus dans le cas de l'ε algorithme ordinaire [6] et dans le cas de sa généralisation à un espace de Banach [8].

THÉORÈME 8: *Si* $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_{2k}^{(n)} = S$, *si* $\lim\limits_{n \to \infty} \langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle = a \neq 0$ *et si* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n)} - S \rangle}{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - S \rangle} = 1 + a$ *avec* $z' \in E'$ *alors* $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_{2k+2}^{(n)} = S$ *et de plus:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\langle z', \varepsilon_{2k+2}^{(n)} - S \rangle}{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - S \rangle} = 0.$$

DÉMONSTRATION: Il est évident, d'après le théorème 7, que $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_{2k+2}^{(n)} = S$.

D'autre part on a:

$$\langle z', \varepsilon_{2k+2}^{(n)} - S \rangle = \langle z', \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - S \rangle + \frac{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - S \rangle - \langle z', \varepsilon_{2k}^{(n)} - S \rangle}{\langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle}$$

d'où:

$$\frac{\langle z', \varepsilon_{2k+2}^{(n)} - S \rangle}{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - S \rangle} = 1 + \frac{1 - \dfrac{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n)} - S \rangle}{\langle z', \varepsilon_{2k}^{(n+1)} - S \rangle}}{\langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle}.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

REMARQUE 2. Pour $k = 0$ le théorème précédent nous donne:

si $$\lim_{n \to \infty} \frac{\langle z', S_{n+1} - S \rangle}{\langle z', S_n - S \rangle} = \lim_{n \to \infty} \frac{\langle y', \Delta S_{n+1} \rangle}{\langle y', \Delta S_n \rangle} = b \neq 1$$

alors $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_2^{(n)} = S$ et, de plus:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\langle z', \varepsilon_2^{(n)} - S \rangle}{\langle z', S_{n+1} - S \rangle} = 0.$$

On pourra de nouveau comparer avec les résultats de [8].

Si la suite $\}\langle y', S_n \rangle\{$ est totalement monotone ou totalement oscillante [48] alors les quantités $\langle y', \varepsilon_k^{(n)} \rangle$ vérifient les inégalités qui ont été démontrées dans le cas scalaire et l'on a les résultats de convergence suivants [5,9]:

DÉFINITION 1 : *On dit que la suite $\}u_n\{$ de nombres réels est totalement monotone si :*

$$(-1)^k \Delta^k u_n \geq 0 \quad pour \quad n, k = 0, 1, \dots .$$

DÉFINITION 2 : *On dit que la suite $\}u_n\{$ est totalement oscillante si la suite $\}(-1)^n u_n\{$ est totalement monotone.*

THÉORÈME 9 : *S'il existe $a \neq 0$* et *b tels que la suite $\}\langle y', aS_n + b \rangle\{$ soit totalement oscillante ou totalement monotone et si $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ alors :*

$$\lim_{n \to \infty} \langle y', \varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle = \langle y', S \rangle \quad pour \quad k = 0, 1, \dots$$

THÉORÈME 10 : *S'il existe $a \neq 0$ et b tels que la suite $\}\langle y', aS_n + b \rangle\{$ soit totalement monotone ou totalement oscillante et si $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ alors*

$$\lim_{k \to \infty} \langle y', \varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle = \langle y', S \rangle \quad pour \quad n = 0, 1, \dots$$

La démonstration de ce dernier théorème dans le cas d'une suite totalement oscillante est basée sur les séries de Stieltjes et les fractions continues associées et correspondantes [44].

Si la condition du théorème 8 n'est pas satisfaite alors on peut, comme dans le cas de l'ε-algorithme scalaire [5], introduire un paramètre d'accélaration dans les règles de l'algorithme et caractériser sa valeur optimale afin que la suite $\}\varepsilon_{2k+2}^{(n)}\{$ converge vers S plus vite que la suite $\}\varepsilon_{2k}^{(n+1)}\{$ par rapport à $z' \in E'$.

Posons $D_k^{(n)} = [\Delta \varepsilon_k^{(n)}]^{-1}$ et considérons l'algorithme

$$\begin{aligned} \theta_{-1}^{(n)} &= 0 \in E' \qquad \theta_0^{(n)} = S_n \in E \\ \theta_{2k+1}^{(n)} &= \theta_{2k-1}^{(n+1)} + D_{2k}^{(n)} \qquad\qquad n, k = 0, 1, \dots \\ \theta_{2k+2}^{(n)} &= \theta_{2k}^{(n+1)} + \omega_k D_{2k+1}^{(n)} \end{aligned}$$

avec

$$D_k^{(n)} = [\Delta \theta_k^{(n)}]^{-1} .$$

THÉORÈME 11 : *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} \theta_{2k}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \theta_{2k+2}^{(n)}$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle z', \Delta\theta_{2k+2}^{(n)} \rangle}{\langle z', \Delta\theta_{2k}^{(n+1)} \rangle} = 0$$

est de prendre :

$$\omega_k = - \lim_{n\to\infty} \frac{\langle z', \Delta\theta_{2k}^{(n+1)} \rangle}{\langle z', \Delta D_{2k+1}^{(n)} \rangle}.$$

DÉMONSTRATION :

$$\langle z', \Delta\theta_{2k+2}^{(n)} \rangle = \langle z', \Delta\theta_{2k}^{(n+1)} \rangle + \omega_k \langle z', \Delta D_{2k+1}^{(n)} \rangle$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle z', \Delta\theta_{2k+2}^{(n)} \rangle}{\langle z', \Delta\theta_{2k}^{(n+1)} \rangle} = 0 = 1 + \omega_k \lim_{n\to\infty} \frac{\langle z', \Delta D_{2k+1}^{(n)} \rangle}{\langle z', \Delta\theta_{2k}^{(n+1)} \rangle}$$

d'où le résultat du théorème.

En pratique on ne peut que rarement calculer ω_k. Comme on le fait dans le cas de l'ε-algorithme scalaire [6], on remplacera donc ω_k par :

$$\omega_k^{(n)} = - \frac{\langle z', \Delta\theta_{2k}^{(n+1)} \rangle}{\langle z', \Delta D_{2k+1}^{(n)} \rangle}$$

avec

$$D_{2k+1}^{(n)} = \frac{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}{\langle \Delta\theta_{2k+1}^{(n)}, \Delta\theta_{2k}^{(n)} \rangle}.$$

Nous appelerons cet algorithme le θ-algorithme généralisé. Concernant cet algorithme on a les résultats évidents suivants :

THÉORÈME 12 : *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} \theta_{2k}^{(n)} = S$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim_{n\to\infty} \theta_{2k+2}^{(n)} = S$ *est que* :

$$\lim_{n\to\infty} \omega_k^{(n)} D_{2k+1}^{(n)} = 0 \in E'.$$

THÉORÈME 13 : *Si la condition du théorème* 12 *est vérifiée et si, de plus,* $-\lim_{n\to\infty} \omega_k^{(n)}$ *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{\langle z', \theta_{2k}^{(n+1)} - S \rangle}{\langle z', D_{2k+1}^{(n)} \rangle}$ *existent et sont égales, alors* :

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{2k+2}^{(n)} = S \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\langle z', \theta_{2k+2}^{(n)} - S \rangle}{\langle z', \theta_{2k}^{(n+1)} - S \rangle} = 0.$$

Dans l'application des régles (11) de l'ε-algorithme généralisé il se peut que pour une certaine valeur de k et de n on ait $\Delta\varepsilon_k^{(n)} = 0$. Il est alors impossible de continuer à construire le tableau ε en utilisant les régles (11) car il y aurait alors une division par zéro. Les théorèmes de convergence qui précèdent devront donc toujours être compris avec la restriction énoncée par Wynn [43]: « bien que des conditions spéciales puissent être imposées à la suite $\{S_n\}$ pour éviter cette division par zéro, dans l'exposition d'une théorie générale où l'on impose aucune condition sur la suite initiale, les résultats énoncés ne concernent que les quantités qui peuvent être calculées ».

Pour l'ε-algorithme scalaire Wynn a proposé des règles particulières [47] qui permettent de poursuivre la construction du tableau ε lorsque $\Delta\varepsilon_k^{(n)} = 0$. D'autre part la structure en blocs carrés de la table de Padé est bien connue [24, 34]. Récemment Cordellier [20] a montré qu'une telle structure en blocs existait pour le tableau de l'ε algorithme vectoriel et il a également donné des règles particulières pour éviter les divisions par zéro et continuer la construction du tableau ε. Il ne semble cependant pas que ces règles puissent se généraliser au cas de l'algorithme (11) lorsque E est un espace de dimension infinie.

6. Une seconde généralisation.

6.1. *La transformation de Shanks.*

Dans la première généralisation de la transformation de Shanks que nous venons d'étudier $e_k(S_n)$ était calculé en résolvant le système (4) puis par $e_k(S_n) = a_0 S_n + \ldots + a_k S_{n+k}$. Il est évident, qu'au lieu d'utiliser la seconde des équations du système (2), on peut utiliser n'importe laquelle des autres équations et, en particulier, la dernière ; on obtiendra ainsi :

$$e_k(S_n) = a_0 S_{n+k} + \ldots + a_k S_{n+2k}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\tilde{e}_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k} & \cdots\cdots & S_{n+2k} \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \cdots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}} . \tag{12}$$

Pour cette seconde généralisation de la trasformation de Shanks, le théorème 1 ainsi que les propriétés 1 et 2 sont vérifiées. Il est bien évident que (5) et (11) ne sont pas indépendants; on a:

PROPRIÉTÉ 14:

$$\langle y', e_k(S_n) \rangle = \langle y', \tilde{e}_k(S_n) \rangle = e_k(\langle y', S_n \rangle).$$

La démonstration est évidente par combinaison linéaire des lignes du numérateur de (12). Le dernier terme de cette double égalité représente la transformation habituelle de Shanks appliquée à la suite de scalaires $\langle y', S_n \rangle$. Cette propriété montre que l'on retrouve la transformation de Shanks ordinaire lorsque $E = \mathbb{R}$. On a également le résultat suivant qui est l'équivalent du résultat de Gilewicz déjà cité [23].

PROPRIÉTÉ 15: *Soient* $e_k(S_n)$ *et* $\tilde{e}_k(S_n)$ *les éléments de* E *obtenus en appliquant respectivement* (5) *et* (12) *aux* $2k+1$ *éléments successifs* $S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+2k}$. *Soient* $e_k(u_n)$ *et* $\tilde{e}_k(u_n)$ *les éléments de* E *obtenus en appliquant respectivement* (5) *et* (12) *aux* $2k+1$ *éléments successifs* $u_n = S_{n+2k}$, $u_{n+1} = S_{n+2k-1}, \ldots, u_{n+2k} = S_n$. *Alors on a*:

$$e_k(S_n) = \tilde{e}_k(u_n)$$

et

$$e_k(u_n) = \tilde{e}_k(S_n)$$

La démonstration de cette propriété est évidente à partir de (5) et (12).

6.2. *La table de Padé.*

Si on applique (12) aux sommes partielles de la série formelle $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ avec $x \in K$ et $c_i \in E$ alors (12) nous fournit une seconde généralisation de la table de Padé. En effet en remplaçant S_n par sa valeur et en effectuant les mêmes transformations que précédemment, on obtient:

$$(13) \qquad \tilde{e}_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^{k+i} & \ldots & \sum_{i=0}^{n+2k} c_i x^i \\ \langle y', c_{n+1} \rangle & \ldots & \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^k & \ldots & 1 \\ \langle y', c_{n+1} \rangle & \ldots & \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}.$$

On voit que l'on a :

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^{k+i} & \dots & \sum_{i=0}^{n+2k} c_i x^i \\ \langle y', c_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} - f(x) \begin{vmatrix} x^k & \dots\dots & 1 \\ \langle y', c_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=n+k+1}^{\infty} c_i x^{k+i} & \dots & \sum_{i=n+2k+1}^{\infty} c_i x^i \\ \langle y', c_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', c_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', c_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} = A x^{n+2k+1} \quad \text{avec} \quad A \in E.$$

D'après la relation (13) on voit que le numérateur de $\tilde{e}_k(S_n)$ est de degré $n + 2k$ par rapport à x et que son dénominateur est degré k. On voit d'autre part, d'après (14), que l'on peut considérer (12) comme une généralisation de la table de Padé de $f(x)$; on notera symboliquement :

$$\tilde{e}_k(S_n) = [n + 2k/k].$$

On voit que l'on a, d'après (14) et la propriété :

$$\langle y', \tilde{e}_k(S_n) \rangle - \langle y', f(x) \rangle = 0\,(x^{n+2k+1}).$$

Par analogie l'approximant de Padé généralisé sera défini par :

$$(15)\qquad [p/q] = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i x^{q+i} & \dots & \sum_{i=0}^{p} c_i x^i \\ \langle y', c_{p-2q+1} \rangle & \dots & \langle y', c_{p-q+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{p-q} \rangle & \dots\dots & \langle y', c_p \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^q & \dots\dots & 1 \\ \langle y', c_{p-2q+1} \rangle & \dots & \langle y', c_{p-q+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', c_{p-q} \rangle & \dots\dots & \langle y', c_p \rangle \end{vmatrix}}$$

avec $c_i = 0 \in E$ si $i < 0$.

REMARQUE: D'après (15) on voit que $[p/q]$ n'est défini que pour $p - q + 1 \geq 0$. On ne peut donc ainsi construire que la moitié de la table de Padé généralisée. Cette restriction sera toujours sous entendue dans la suite du paragraphe.

Les approximants sont de la forme:

$$[p/q] = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x^i} \quad \text{avec } a_i \in E \text{ et } b_i \in \mathbb{C}.$$

Le calcul des b_i s'effectue comme précédemment en résolvant le système:

$$(16) \qquad \begin{array}{l} b_0 \langle y', c_{p-q+1} \rangle + b_1 \langle y', c_{p-q} \rangle + \ldots + b_q \langle y', c_{p-2q+1} \rangle = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 \langle y', c_p \rangle \qquad + b_1 \langle y', c_{p-1} \rangle + \ldots + b_q \langle y', c_{p-q+1} \rangle = 0 \end{array}$$

avec $b_0 = 1$. Puis les $a_i \in E$ sont calculés à l'aide des relations (10).

Comme pour la généralisation de la table de Padé étudiée au second paragraphe, on voit que l'on a pour la même raison:

$$\langle y', [p/q] \rangle - \langle y', f(x) \rangle = 0\,(x^{p+q+1})$$

et

$$[p/q] - f(x) = Ax^{p+1}.$$

On a les résultats suivants:

THÉORÈME 14: *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $[p/q]$ *défini par* (16) *et* (10) *existe est que*:

$$H_q^{(p-2q+1)}(\langle y', c_{p-2q+1} \rangle) \neq 0.$$

THÉORÈME 15: *S'il existe,* $[p/q]$ *défini par* (16) *et* (10), *est unique.*

6.3. *L'ε-algorithme.*

On peut calculer (12) au moyen d'un procédé récursif analogue à la généralisation (11) de l'ε-algorithme:

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \qquad \varepsilon_0^{(n)} = S_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$(17') \qquad \varepsilon_{2k+1}^{(n)} = \varepsilon_{2k-1}^{(n+1)} + \frac{y'}{\langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \rangle} \qquad n, k = 0, 1, \ldots$$

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}{\langle \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}, \Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)} \rangle} \qquad n, k = 0, 1, \ldots \tag{17''}$$

où y'^{-1} qui intervient dans le calcul de $\varepsilon_{2k+2}^{(n)}$ est défini par:

$$y'^{-1} = \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}{\langle y', \Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)} \rangle}.$$

On a le résultat fondamental suivant:

THÉORÈME 16:

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = \tilde{e}_k(S_n) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2k+1}^{(n)} = [\tilde{e}_k(\Delta S_n)]^{-1} = \frac{y'}{\langle y', \tilde{e}_k(\Delta S_n) \rangle}.$$

DÉMONSTRATION: La propriété est vraie pour $k = 0$. Supposons qu'elle est vérifiée jusqu'à l'indice k et démontrons la pour $k + 1$. La démonstration est analogue à celle du théorème 6. La première des relations (17) n'est autre que la relation de l'ε-algorithme scalaire multipliée par y'. Il ne reste donc qu'à démontrer (17''). On a:

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k+1} & \ldots & S_{n+2k+2} \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+2} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+2} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k+1} & \ldots & S_{n+2k+1} \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}.$$

En utilisant un développement de Schweins on obtient:

$$\varepsilon_{2k+2}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)} = \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k+1} & \cdots\cdots & S_{n+2k+2} \\ 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+2} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \\ \langle y', \Delta S_{n} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+2} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta S_{n} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}.$$

D'autre part, en posant $y = y'^{-1}$, en utilisant $\langle y', y \rangle = 1$ ainsi qu'une identité extentionelle, on trouve que:

$$\frac{1}{\langle \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)}, y \rangle} = \frac{N}{D} \quad \text{avec}$$

$$N = \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k} \rangle \\ \langle y', \Delta^2 S_{n} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}$$

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \\ \langle y', \Delta^2 S_{n} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k-1} \rangle \end{vmatrix}.$$

On voit que le dénominateur de $\varepsilon_{2k+2}^{(n)} - \varepsilon_{2k}^{(n+1)}$ est égal à $-D$ et que le second déterminant de son numérateur est égal au second déetrminant de N. Il nous reste donc à montrer que :

$$\begin{vmatrix} S_{n+k+1} & \dots & S_{n+2k+2} \\ 1 & \dots & 1 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+2} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \end{vmatrix} = -\, y'^{-1} \begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \end{vmatrix}.$$

Le déterminant situé dans le membre de gauche de cette relation peut encore s'écrire :

$$\begin{vmatrix} S_{n+k+1} & \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}.$$

D'autre part on a $y'^{-1} = \Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)} / \langle y', \Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)} \rangle$. En utilisant une identité extentionnelle on trouve finalement que :

$$y'^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta S_{n+k+1} & \dots & \Delta S_{n+2k+1} \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta^2 S_{n+k} \rangle & \dots & \langle y', \Delta^2 S_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y', \Delta S_{n+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y', \Delta S_{n+k+1} \rangle & \dots & \langle y', \Delta S_{n+2k+1} \rangle \end{vmatrix}}$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

6.4. *Propriétés et résultats de convergence.*

Cette seconde généralisation de l'ε-algorithme possède des propriétés analogues à celles de la première généralisation (11); nous ne le retranscrirons pas ici.

Il faut remarquer que, dans le cas où $E = \mathbb{C}^p$, les relations (17) n'englobent pas les relations de l'ε-algorithme vectoriel. Cet algorithme ne semble pas devoir rentrer dans le cadre des généralisations que nous avons étudiées et ceci même en effectuant des combinaisons linéaires entre les diverses généralisations que l'on peut obtenir en utitisant les différentes équations du système (2) pour calculer $e_k(S_n)$.

On peut, pour cette seconde généralisation de l'ε-algorithme, démontrer des résultats de convergence analogues à ceux du paragraphe 5. Les théorèmes sur les suites totalement monotones ou totalement oscillantes sont encore vrais. Il est également possible d'introduire dans l'algorithme (17) un paramètre d'accélération de la convergence et de caractériser sa valeur optimale; on peut aussi définir un θ-algorithme en remplaçant la valeur optimale de ce paramètre d'accélération par son approximation. L'établissement de ces résultats est laissé au lecteur car les démarches des démonstrations sont rigoureusement semblables à celles utilisées pour les théorèmes du paragraphe 5.

7. Une troisieme généralisation.

Supposons que la suite $\{S_n\}$ vérifie encore la relation (1). Comme précédemment on veut calculer S.

Soient $y_1', \dots, y_k' \in E'$. Alors on a:

$$(18) \qquad \begin{aligned} &a_0 + a_1 + \dots + a_k = 1 \\ &a_0 \langle y_1', \Delta S_n \rangle + \dots + a_k \langle y_1', \Delta S_{n+k} \rangle = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_0 \langle y_k', \Delta S_n \rangle + \dots + a_k \langle y_k', \Delta S_{n+k} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, si le déterminant de ce système est différent de zéro, on obtient:

$$
(19) \qquad S = \frac{\begin{vmatrix} S_n & \dots & S_{n+k} \\ \langle y'_1, \Delta S_n \rangle & \dots & \langle y'_1, \Delta S_{n+k} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y'_k, \Delta S_n \rangle & \dots & \langle y'_k, \Delta S_{n+k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \langle y'_1, \Delta S_n \rangle & \dots & \langle y'_1, \Delta S_{n+k} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle y'_k, \Delta S_n \rangle & \dots & \langle y'_k, \Delta S_{n+k} \rangle \end{vmatrix}} = \bar{e}_k(S_n).
$$

On voit que l'on a immédiatement le :

THÉORÈME 17 : *Une condition nécessaire pour que le déterminant situé au dénominateur de* (19) *soit différent de zéro est que* $y'_1, \dots, y'_k$ *soient linéairement indépendants.*

REMARQUE 1 : Si E est de dimension p et si $k > p$ alors la condition du théorème précédent n'est pas satisfaite. Dans ce cas on doit utiliser les généralisations (5) ou (12) étudiées dans les paragraphes précédents ; ceci est en particulier vrai lorsque $E = \mathbb{R}$: (19) est impossible à utiliser si $k > 1$; (5) et (12) se réduisent alors à la transformation de Shanks habituelle. On voit que cette remarque restreint singulièrement les possibilités d'utilisation de cette généralisation dans le cas vectoriel.

REMARQUE 2 : Dans le cas où (19) est applicable (c'est-à-dire lorsque son dénominateur est différent de zéro) on voit que seuls sont nécessaires les éléments $S_n, \dots, S_{n+k+1}$ alors que l'utilisation de (5) demande la connaissance de $S_n, \dots, S_{n+2k}$.

Pous cette troisième généralisation $\bar{e}_k(S_n)$ de la trasformation de Shanks le théorème 1 ainsi que les propriétés 1 et 2 restent vérifiées.

Considérons de nouveau la série formelle :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

avec $x \in K$ et $c_i \in E$. Si l'on prend comme suite $\} S_n \{$ les sommes partielles de $f(x)$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

alors (19) nous fournit une troisième généralisation de la table de Padé. En effet en remplaçant S_n par sa valeur dans (19) puis en multipliant la première colonne du numérateur et du dénominateur par x^k, les secondes colonnes par $x^{k-1}, \ldots,$ les dernières par 1, on obtient immédiatement :

$$(20) \qquad \bar{e}_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i x^{k+i} & \ldots\ldots & \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \\ \langle y_1', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_1', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y_k', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_k', c_{n+k+1}\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^k & \ldots\ldots & 1 \\ \langle y_1', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_1', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_k', c_{n+k+1}\rangle \end{vmatrix}}.$$

D'où :

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i x^{k+i} & \ldots & \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \\ \langle y_1', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_k', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y_k', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_k', c_{n+k+1}\rangle \end{vmatrix} - f(x) \begin{vmatrix} x^k & \ldots\ldots & 1 \\ \langle y_1', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_1', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y_k', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_k', c_{n+k+1}\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i x^{k+i} & \ldots & \sum_{i=n+k+1}^{\infty} c_i x^i \\ \langle y_1', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_1', c_{n+k+1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle y_k', c_{n+1}\rangle & \ldots & \langle y_k', c_{n+k+1}\rangle \end{vmatrix} = Bx^{n+k+1} \quad \text{avec} \quad B \in E.$$

D'après (20) et (21) on voit que l'on peut considérer (19) comme une autre généralisation de la table de Padé. Son numérateur est également de degré $n+k$ et son dénominateur de degré k. Nous noterons donc symboliquement :

$$\bar{e}_k(S_n) = [n+k/k].$$

Par analogie la troisième généralisation des approximants de Padé sera donc définie par :

$$[p/q] = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i x^{q+i} & \dots\dots & \sum_{i=0}^{p} c_i x^i \\ \langle y'_1, c_{p-q+1} \rangle & \dots & \langle y'_1, c_{p+1} \rangle \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \langle y'_k, c_{p-q+1} \rangle & \dots & \langle y'_k, c_{p+1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^p & \dots\dots & 1 \\ \langle y'_1, c_{p-q+1} \rangle & \dots & \langle y'_1, c_{p+1} \rangle \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \langle y'_k, c_{p-q+1} \rangle & \dots & \langle y'_k, c_{p+1} \rangle \end{vmatrix}}$$

avec la convention que $c_i = 0 \in E$ si $i < 0$. Pour que ces approximants soient définis il faut donc que : $p \geq q - 1$; cette restriction sera par conséquent toujours sous entendue par la suite.

Les approximants sont de la forme :

$$[p/q] = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i x^i} \quad \text{avec } a_i \in E \text{ et } b_i \in \mathbb{C}.$$

Le calcul des a_i et des b_i s'effectue comme pour la première généralisation de la table de Padé étudiée au second paragraphe. En prenant $b_0 = 1$ on trouve les b_i comme solution du système :

$$b_0 \langle y'_1, c_{p+1} \rangle + b_1 \langle y'_1, c_p \rangle + \dots + b_q \langle y'_1, c_{p-q+1} \rangle = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_0 \langle y'_q, c_{p+1} \rangle + b_1 \langle y'_q, c_p \rangle + \dots + b_q \langle y'_q, c_{p-q+1} \rangle = 0.$$

Puis les a_i sont calculés à partir des relations (10).

On a les mêmes résultats théoriques que pour les première et seconde généralisations de la table de Padé : théorèmes 2, 3 et 4, propriétés 3, 4 et 5.

Remarque : Puisque l'on doit avoir $p \geq q - 1$ seule la moité de cette table de Padé est définie. Il est par conséquent inutile d'étudier dans ce cas la série inverse de $f(x)$.

Le calcul effectif de $\overline{e}_k(S_n)$ à partir de (19) est difficile dès que k vaut 4 ou 5. Il est donc nécessaire d'éviter ce calcul à l'aide d'un algorithme analogue aux généralisations (11) et (17) de l'ε algorithme. Un tel algorithme n'a pas encore été obtenu. Il est cependant toujours possible de calculer numériquement $\overline{e}_k(S_n)$ en résolvant le système (18) dont les inconnues sont $a_0, \dots, a_k$ puis en écrivant que:

$$\overline{e}_k(S_n) = a_0 S_n + a_1 S_{n+1} + \dots + a_k S_{n+k} .$$

Cette façon de procéder est à rapprocher d'une méthode utilisée par Henrici [28, paragraphe 5-9 page 115] pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires par un procédé qui étend à plusieurs dimensions la formule de Steffensen (dans ce cas il faut prendre comme y'_i dans (19) le $i^{ème}$ vecteur de base de $\mathbb{R}^k$). On pourra également comparer la méthode d'Henrici avec celle proposée par Brezinski [12, 13] et Gekeler [21] qui est basée sur l'utilisation de l'ε-algorithme vectoriel.

L'utilisation d'une relation du type (19) est liée à la méthode des moments [33]. La connexion qui existe entre cette méthode et les procédés d'accélération de la convergence a été mise en évidence par Germain-Bonne [22]; ce nouvel aspect de ces méthodes semble d'ailleurs devoir se développer. On voit également la liaison qui existe entre (19) et le procédé d'orthogonalisation de Schmidt lorsque E est un espace de Hilbert et que $y'_1 = \Delta S_n, \dots, y'_k = \Delta S_{n+k-1}$.

8. Le cas vectoriel.

Le cas vectoriel est très important dans les applications. L'ε-algorithme vectoriel a été utilisé avec succès pour accélérer la convergence d'une suite de vecteurs obtenus par les méthodes itératives habituelles de résolution des systèmes d'équations linéaires [35].

Partant de l'ε-algorithme vectoriel Gekeler [21] et Brezinski [12, 13] ont également obtenu une méthode itérative d'ordre deux pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires. Cette méthode, qui ne nécessite aucun calcul de dérivées, a trouvé des applications intéressantes pour les méthodes d'intégration de Runge-Kutta implicites et A-stables [2] ainsi que pour résoudre des problèmes aux limites en plusieurs points pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires [17].

Le résultat fondamental sur lequel est batie toute la théorie de l'ε algorithme vectoriel est analogue au théorème 1. Ce résultat a été conjecturé par Wynn [37] et démontré par McLeod [29] mais uniquement dans le cas où les $a_i \in \mathbb{R}$ et où les vecteurs sont complexes. Il n'a pas encore été possible, pour l'ε-algorithme vectoriel, de démontrer le résultat du théorème 1 avec des $a_i \in \mathbb{C}$ comme c'est le cas pour la première généralisation (5,11) étudiée ici et la généralisation (12, 17). A partir du théorème de McLeod et pour l'ε-algorithme vectoriel, Brezinski [7] a démontré un certain nombre de résultats. Ces résultats sont bien évidemment valables pour les algorithmes (11) et (17) mais ils restent encore vrais dans le cas où les a_i sont complexes c'est-à-dire pour toutes les matrices avec des coefficients complexes.

Pour le cas vectoriel, l'avantage de la généralisation (5, 11) proposée ici par rapport à l'ε-algorithme est que l'on connait $e_k(S_n)$ sous forme d'un rapport de deux déterminants. Cela nous a permis d'obtenir un certain nombre de résultats qui restent encore à démontrer dans le cas de l'ε-algorithme vectoriel.

Remarque : Dans l'ε algorithme vectoriel utilisé par Wynn [35] l'inverse d'un vecteur $y \in \mathbb{C}^p$ est définit par $y^{-1} = \bar{y}/(y, y)$. Dans cet algorithme, si l'on remplace, dans y^{-1}, $\bar{y}$ par y alors les vecteurs d'indice inférieur pair restent inchangés alors que les vecteurs d'indice inférieur impair sont remplacés par leurs conjugués. On remarquera, que dans les algorithmes que nous venons d'étudier, le conjugué d'un élément de E n'apparait jamais.

L'ε algorithme vectoriel a été récemment utilisé pour donner une généralisation de la méthode de la puissance afin de pouvoir calculer toutes les valeurs propres d'une matrice ainsi que les vecteurs propres [15]. On peut évidemment utiliser, à la place de l'ε-algorithme vectoriel, l'une des deux généralisations (11) ou (17) que nous venons d'étudier. Les algorithmes (11) et (17) peuvent être utilisés de façon similaire à celle décrite dans [15] pour calculer les valeurs propres d'un endomorphisme de E lorsque celui-ci est normal et compact. Les algorithmes (11) et (17) peuvent également être utilisés pour résoudre des équations de point fixe de la forme $x = Ax + b$ où A est un endomorphisme de E normal, compact et de rang fini. Une telle métode est à rapprocher de l'utilisation par Chisholm [19] de la table de Padé ordinaire pour résoudre certaines équations intégrales provenant de problèmes de mécanique quantique.

Conclusion.

Les résultats présentés ici montrent que l'on peut généraliser de cette façon tous les algorithmes d'accélération de la convergence. Il n'y a en particulier aucune difficulté pour donner les règles des procédés p et q ainsi que des première et seconde généralisations de l'ε-algorithme [11] et du ϱ-

algoritme [45]. La suite auxiliaire $\}x_n\{$ qui intervient dans ces algorithmes est toujours une suite d'éléments de K.

Les procédés linéaires de sommation et, en particulier, l'extrapolation polynômiale de Richardson se généralisent immédiatement puisque la notion d'inverse d'un élément n'y intervient pas. On voit d'ailleurs que la base de la définition de l'ε algorithme généralisé que nous avons donnée ici est la notion d'inverse d'un couple d'éléments l'un appartenant à E et l'autre à E'. On remarquera aussi que l'ensemble des généralisations que nous venons d'exposer dépend d'un élément arbitraire $y' \in E$ (ou d'une suite de tels éléments); il se pose donc le problème du choix optimal de cet élément y' (ou de cette suite d'éléments).

Les développements auxquels peuvent conduire les généralisations exposées dans cet article seront étudiés ultérieurement.

REFERENCES

[1] A. C. AITKEN, *Determinants and matrices* (1951), Oliver and Boyd.

[2] R. ALT, *Méthodes A-stables pour l'intégration des systèmes différentiels mal conditionnés*, Thèse 3ème cycle, Paris (1971).

[3] G. A. BAKER, J. L. GAMMEL ed., *The Padé approximant in theoretical physics* (1970), Academic Press.

[4] F. L. BAUER, *The g-algorithm*, SIAM J. 8 (1960), 1-17.

[5] C. BREZINSKI, *Etude sur les ε-et ρ-algorithmes*, Numer. Math. **17** (1971), 153-162.

[6] C. BREZINSKI, *Accélération de suites à convergence logarithmique*, C. R. Acad. Sc. Paris 273 A (1971), 727-730.

[7] C. BREZINSKI, *Some results in the theory of the vector ε-algorithm*, Linear Algebra 8 (1974), 77-86.

[8] C. BREZINSKI, *Accélération de la convergence de suites dans un espace de Banach*. C. R. Acad. Sc. Paris 278 A (1974), 351-354.

[9] C. BREZINSKI, *L'ε-algorithme et les suites totalement monotones et oscillantes*, C. R. Acad. Sc. Paris 276 A (1973), 305-308.

[10] C. BREZINSKI, *Résultats sur les procédés de sommation et l'ε-algorithme*, RIRO R 3 (1970), 147-153.

[11] C. BREZINSKI, *Conditions d'application et de convergence de procédés d'extrapolation*, Numer. Math. **20** (1972), 64-79.

[12] C. BREZINSKI, *Applications de ε-algorithme à la résolution des systèmes non linéaires* C. R. Acad. Sc. Paris 271 A (1970), 1174-1177.

[13] C. BREZINSKI, *Sur un algorithme de résolution des systèmes non linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris 272 A (1971), 145-148.

[14] C. BREZINSKI, *Accélération de la convergence en analyse numérique*, Publication 41, Laboratoire de Calcul, Université de Lille (1973).

[15] C. BREZINSKI, *Computation of the eigenelements of a matrix by the ε-algorithm*, Linear Algebra, **11** (1975), 7-20.

[16] C. BREZINSKI, M. CROUZEIX, *Remarques sur le procédé Δ^2 d'Aitken*, C. R. Acad. Sc. Paris 270 A (1970), 896-898.

[17] C. BREZINSKI, A. C. RIEU, *The solution of systems of equations using the ε-algorithm and application to boundary value problems*, Math. Comp. **28** (1974), 731-741.

[18] E. W CHENEY, *Introduction to approximation theory* (1966), McGraw-Hill.

[19] J. S. R. CHISHOLM, *Padé approximants and linear integral equations*, in « The Padé approximant in theoretical physics » (1970), G. A. Baker Jr and J. L. Gammel eds, Academic Press.

[20] F. CORDELLIER, *Singular rules for the vector ε-algorithm*, a paraître.

[21] E. GEKELER, *On the solution of system of equations by the epsilon algorithm of Wynn*, Math. of Comp. **26** (1972), 427-436.

[22] B. GERMAIN - BONNE, *Transformation de suites*, Séminaire d'analyse numerique, Grenoble, (1974).

[23] J. GILEWICZ Thèse, à paraître.

[24] W. B. GRAGG, *The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis*, SIAM Rev. **14** (1972), 1-62.

[25] P. R. GRAVES-MORRIS ed., *Padé approximants* (1973), The institute of Physics, London and Bristol.

[26] P. R. GRAVES-MORRIS ed., *Padé approximants and their applications* (1973), Academic Press.

[27] T. N. E. GREVILLE, *On some conjecture of P. Wynn concerning the ε-algorithm*, MRC technical summary report 877 (1968).

[28] P. HENRICI, *Elements of numerical analysis* (1964), Wiley.

[29] J. B. MCLEOD, *A note on the ε-algorithm*, Computing **7** (1971), 17-24.

[30] H. PADE, *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*, Ann. Ec. Norm. Sup. **9** (1892), 1-93.

[31] J. RISSANEN, *Recursive evaluation of Padé approximants for matrix sequences*, IBM J. Res. develop. July (1972), 401-406.

[32] D. SHANKS, *Non linear transformations of divergent and slowly convergent series*, J. Math. Phys. **34** (1955), 1-42.

[33] YU. V. VOROBYEV, *Method of moments in applied mathematics* (1965), Gordon and Breach.

[34] H. S. WALL, *Analytic theory of continued fractions* (1967), Chelsea publ. comp., New-York.

[35] P. WYNN, *Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems,* Math. Comp. **16** (1962), 301-322.

[36] P. WYNN, *Upon the generalized inverse of a formal power series with vector valued coefficients,* Compositio mathematica **23** (1971), 460-463.

[37] P. WYNN, *Upon a conjecture concerning a method for solving linear equations, and certain other matters.* MRC technical summary report 626 (1966).

[38] P. WYNN, *Upon systems of recursions which obtain among the quotients of the Padé table,* Numer. Math. **8** (1966), 264-269.

[39] P. WYNN, *L'ε-algoritmo e la tavola di Padé,* Rend. di Mat. Roma **20** (1961), 403-408.

[40] P. WYNN, *On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation,* MTAC **10** (1956), 91-96.

[41] P. WYNN, *Some recent developments in the theories of continued fractions and the Padé table,* Rocky Mountains J. Math. **4** (1974), 297-324.

[42] P. WYNN, *Upon an invariant associated with the epsilon algorithm,* MRC technical summary report 675 (1966).

[43] P WYNN, *Hierarchies of arrays and functions sequences associated with the epsilon algorithm and its first confluent form,* Rend. di Mat. Roma (4) 5 sér. VI (1972), 1-34.

[44] P. WYNN, *Upon the Padé table derived from a Stieltjes series,* SIAM J. Numer. Anal. **5** (1968), 805-834.

[45] P. WYNN, *On a procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series,* Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 663-671.

[46] P. WYNN, *Vector continued fractions,* Linear algebra and its appl. **1** (1968), 357-395.

[47] P. WYNN, *Singular rules for certain nonlinear algorithms,* BIT **3** (1963), 175-195.

[48] P. WYNN, *On the convergence and stability of the epsilon algorithm,* SIAM J. Numer. Anal. **3** (1966), 91-122.