Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique

J. C. Miellou

Algorithmes de relaxation chaotique à retards

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 9, n° R1 (1975), p. 55-82

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1975__9_1_55_0>

R.A.I.R.O.
(9^{e} année, R-1, 1975, p. 55 à 82)

ALGORITHMES DE RELAXATION CHAOTIQUE A RETARDS

par J.C. MIELLOU [1]

Communiqué par F. ROBERT

Résumé. – *On adapte une classe d'algorithmes de relaxation, appelés de "relaxation chaotique" dans CHAZAN-MIRANKER* [5], *au problème de l'approximation du point fixe d'une application non linéaire, qui est une contraction généralisée (dans le cas des normes vectorielles). On donne les résultats correspondants de convergence et on étend à ces algorithmes une procédure du contrôle des erreurs due à G. SCHROEDER* [25], *et F. ROBERT* [20]. *On donne une interprétation de l'utilisation de ces algorithmes sur un type de multiprocesseurs. Les résultats des* § *I, II du présent article ont été résumés dans* [15].

INTRODUCTION

Les méthodes de relaxation peuvent être abordées de deux points de vue principaux :

i) Celui de la résolution d'un problème d'optimisation, pour lequel nous renvoyons à : Auslander A. [1], Auslander A. – Martinet B. [2], Cea J. – Glowinski R. [3], Glowinski R. [7], ainsi qu'à la bibliographie de ces articles.

ii) Celui de la résolution d'un système d'équations linéaires, ou non linéaires.

Les ouvrages classiques sur ce sujet étant ceux de :

– Varga S. [27], Young D. [28] dans le cas linéaire.

– Ortega J.M. – Rheinboldt W.C. [18], dans le cas non linéaire.

Nous adoptons ici le point de vue ii) en nous plaçant dans le cadre de la notion d'opérateur contractant en norme vectorielle. En se limitant aux articles et travaux faisant explicitement référence à la méthode de relaxation, on peut citer sur ce

(1) Laboratoire d'Informatique – Faculté des Sciences et des Techniques
La Bouloie – BESANÇON

sujet : Charnay M. – Musy F. – Robert F. [4], Chazan D. – Miranker W. [5], Makek I. [11], Miellou J.-C. [12], [13], [14], Ortega J.-M. – Rheinboldt W.-C. [18], Chap. 13. § 13.1, Ostrowski A. [18], [19], Robert F. [20] et la bibliographie de ces articles.

Nous nous intéressons ici plus spécialement à une classe d'algorithmes de relaxation, fournissant un modèle, aussi réaliste que possible, de ce qui se passe lorsque l'on utilise certains multiprocesseurs dont nous préciserons le type de conception.

Sur ce plan les références de base semblent être Rosenfeld J. [21], Chazan D. – Miranker W. [5], Donnelly J. DP. [6], dont les études portent sur le cas de l'approximation du point fixe d'une application affine sur R^{α}.

L'objet du présent travail est d'étendre certains aspects de l'étude de Chazan D. – Miranker W. [5] à l'approximation du point fixe d'une application non linéaire de domaine inclus dans un espace produit d'espaces de Banach, contractante pour la norme vectorielle canonique sur cet espace.

Le formalisme considéré permet également une généralisation des résultats de Charnay M. – Musy F. – Robert F. [4].

TERMINOLOGIE

Le terme de "conduite libre" (Free steering) a été utilisé par Schechter [24], [25] (Cf. également Ostrowskii [19]) pour le fait de choisir librement pour chaque itération le groupe de composantes qui sont relaxées.

Chazan D. – Miranker W. [5] ont introduit le terme "itérations chaotiques", qui implique dans leur article à la fois une "conduite libre" pour le choix de la composante relaxée, et un retard dans l'accès aux itérés "précédemmant calculés"(*).

Charnay M. – Musy F. – Robert F. [4] ont utilisé le terme "itérations chaotiques série-parallèle" pour des algorithmes "à conduite libre", selon Shechter [23].

Suivant une remarque de Donnelly J.D.P. [6], qui a introduit le terme "delayed relaxation", nous utiliserons pour les algorithmes présentés ici le terme de relaxation chaotique à retards (R.C.R.), qui implique à la fois le libre choix du groupe de composantes relaxées au cours d'une itération, et l'accès retardé aux itérés "précédemment calculés" (*) (notons que le terme d'algorithme de relaxation à "conduite libre et retards" serait aussi logique que celui que nous choisissons, mais il serait dommage de renoncer maintenant à un terme aussi imagé que : relaxation "chaotique").

(*) En fait ces itérés "précédemment calculés" sont en cours de calcul par les autres processeurs du multiprocesseur utilisé.

Nous commentons brièvement, ci-dessous, l'orientation de chacun des paragraphes du présent travail :

Au § I.2 on rappelle les définitions classiques sur la contraction en norme vectorielle, et on introduit la notion d'application contractante en norme vectorielle en un point (et non plus sur tout le domaine de l'application), ceci en vue de l'étude d'algorithmes mixtes.

Au § I.2 on introduit la norme $\| \|_{v,T}$ qui, dans le cas particulier de la norme vectorielle type sur R^{α}, est la fonctionnelle de Minkowskii d'un convexe utilisé dans Chazan D. – Miranker W. [5], § 5 (début de la démonstration *page 217*).

On donne une propriété de contraction en la norme $\| \|_{v,T}$ d'une application contractante en norme vectorielle. Pour le même type de propriété pour une autre classe de normes, Cf. Kranoselskii et Al. [8] , Chap. 2 § 6.4.

Au § I.3 on introduit une classe d'application contractante en leur point fixe (selon la définition introduite au § I.1). On donne un résultat sur l'introduction d'un paramètre ω de (sur/sous) relaxation pour cette classe d'application : on obtient à ce propos une majoration du rayon spectral de la matrice de contraction, en fonction de ω . Lorsque l'application est contractante sur tout le domaine, cette majoration est classique (Cf. [21] [11] , [9] dans le cas d'application affines, [4] , [13] , [14] , pour des situations non linéaires).

§ II –

Au § II.1 et II.2, on introduit les algorithmes de relaxation chaotique à retards (R.C.R.) dans le cadre de l'approximation du point fixe d'une application non linéaire de domaine contenu dans un espace produit d'espaces de Banach.

Le formalisme utilisé inclu à la fois celui de Chazan D. – Miranker W. [5], et celui de Charnay M. – Musy F. – Robert F. [4].

Au § II.3, on étudie la convergence des algorithmes R.C.R. On obtient en fait une extension commode, grâce à la propriété de contraction en la norme $\| \|_{v,T}$ obtenue au § 1.2, de la démonstration du théorème du §5 partie condition suffisante de Chazan D. – Miranker W. [5].

Le résultat obtenu généralise également le théorème principal de Charnay M. – Musy F. – Robert F. [4] , donné avec une démonstration d'un principe différent.

On donne de plus un résultat complémentaire sur la vitesse de convergence asymptotique de ces algorithmes.

§ III –

L'une des possibilités importantes qu'offre la méthode de relaxation appliquée à la recherche du point fixe d'une application F contractante en norme vectorielle est le fait que l'on peut contrôler les erreurs en norme vectorielle par un algorithme analogue, appelé "algorithme secondaire", appliqué à l'approximation dans R^{α} du point fixe de la matrice de contraction de F à partir d'une donnée initiale convenable. (l'algorithme correspondant de recherche du point fixe de F, étant alors appelé "algorithme principal").

Cette notion due à J. Schroeder [25] dans le cas des opérateurs affines sur R^{α} muni de la norme vectorielle type a été étendue par F. Robert [20] au cas des opérateurs affines, dont la matrice associée est une Blocmatrice.

On retrouve ensuite cette notion appliquée à une situation d'opérateurs non linéaire, définie sur un espace produit d'espace de Hilbert dans Miellou J.-C. [13], puis, pour les itérations chaotiques sans termes de retards, dans le cas d'un espace produit d'espaces de Banach dans Charnay M. – Robert F. – Musy F. [4].

Le but de ce § III est donc de vérifier que lors de l'extension aux algorithmes R.C.R. on bénéficie des mêmes possibilités, quant à la mise en œuvre de l'algorithme secondaire, en particulier pour ce qui est de la prévision du nombre d'itérations de l'algorithme à effectuer pour atteindre une précision en norme vectorielle donnée.

§ IV –

Ce paragraphe est consacré, pour l'essentiel, à l'étude de divers types d'algorithmes R.C.R. qu'il est possible de mettre en œuvre sur un "multiprocesseur".

Au § IV.1, on précise les hypothèses de base faites tant sur le multiprocesseur envisagé, que sur le problème à traiter. Dans le commentaire de ces hypothèses on aborde la question de la signification pratique de ces hypothèses. Puis on rappelle la notion de "conduite" d'un algorithme de relaxation : à savoir ce qui concerne le choix de l'ordre dans lequel les composantes des itérés successifs sont relaxées.

Au § IV.2, on propose une classe d'algorithmes multiprocesseur à conduite libre, qui contient une généralisation "multiprocesseur" de l'algorithme de Gauss-Seidel, proposée et étudiée dans le cas d'un opérateur affine sur R^{α} par Chazan D. – Miranker W. [5] , Donnelly [6] , et sur le plan expérimental par Rosenfeld [21].

Dans le cas d'un monoprocesseur, on retrouve l'algorithme à "conduite libre" étudié par Ostrowskii [19], dans le cas des H-matrices, et par Schechter [23], Roux [22].

Nous renvoyons à [10] , [16] pour d'autres résultats sur les algorithmes R.C.R. (algorithmes conduits par l'algorithme secondaire ; convergence monotone application -a la résolution d'inéquations variationnelles discrétisées).

§ I – MATRICE MAJORANTE LINEAIRE D'UNE APPLICATION NON LINEAIRE ; APPLICATIONS CONTRACTANTES EN NORME VECTORIELLE.

I.1 - Notations, définitions.

Dans tout ce qui suit :

– T étant une matrice, nous désignerons par $\rho(T)$ le rayon spectral de T.

– Y étant une partie d'un espace vectoriel E, $\mathring{Y}$ désignera l'intérieur de Y.

– Nous noterons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

– Soit α un entier naturel, et soit $\{ E_i \}$ pour $i \in \{ 1, \ldots, \alpha \}$, une famille d'espaces de Banach, de normes respectives $\| \|_i$.

Nous considérons sur $E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i$, la norme vectorielle canonique x, qui à $v = \{ \ldots, v_i, \ldots \} \in E$, fait correspondre $x(v) = \ldots \|v_i\|_i \ldots$.

– Soit F une application, non linéaire en général de $D(F) \subset E$, à valeurs dans E.

– Soit T une matrice réelle de type $\{\alpha, \alpha.\}$

Définition 1 : *u étant un élément fixé de $D(F)$, si F et T vérifient la condition :*

$$x(F(u) - F(v)) \leqslant Tx(u-v) \quad \forall v \in D(F). \tag{1.1}$$

Nous dirons que T est une majorante linéaire en u, pour la norme vectorielle x, de F.

Définition 2 : *La condition* (1.1) *étant vérifiée, nous dirons que F est contractante en u, pour la norme vectorielle x, si :*

$$T \text{ est non négative, et } \rho(T) < 1 \tag{1.2}$$

T sera dite alors matrice de contraction de F en u.

Définition 3 : *Si F et T vérifient la condition :*

$$x(F(u) - F(v) \leqslant Tx(u-v) \quad \forall u,v \in D(F) \tag{1.3}$$

Nous dirons que T est une majorante linéaire de F, pour la norme vectorielle x.

Définition 4 : *Nous dirons que F est contractante sur $D(F)$ pour la norme vectorielle x, si les conditions* (1.2) *et* (1.3) *sont vérifiées. T sera dite alors matrice de contraction de F.*

I.2 - LA NORME $\| \|_{v,T}$ SUR E ; PROPRIETE DE CONTRACTION PAR RAPPORT A CETTE NORME, D'UNE APPLICATION CONTRACTANTE EN NORME VECTORIELLE.

– Soit T une matrice de type $\{\alpha, \alpha\}$ vérifiant la condition (1.2).

$\forall \nu \in]\ \rho(T), 1[$ on peut (Cf. [27]) trouver un vecteur $\Gamma_\nu = \{ \dots, \gamma_\nu^j, \dots \} \in R^\alpha$ de composantes $\gamma_\nu^j > 0$, $\forall j \in \{1, \dots, \alpha\}$ vérifiant :

(1.4) $|\Gamma_\nu|_2 = 1$ (où $|\ \ |_2$ désigne la norme euclidienne) et $T\Gamma_\nu \leqslant \nu\Gamma_\nu$.

De plus si T est irréductible, on peut prendre $\nu = \rho(T)$, et alors $\Gamma_{\rho(T)}$ est vecteur propre de T.

Nous introduisons maintenant sur $E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i$ la norme :

$$\forall v \in E \rightarrow \|v\|_{\nu,T} = \max_{i=1,\dots,\alpha} \frac{1}{\gamma_\nu^i} \|v_i\|_i .$$

Proposition 1 : *Soient F une application de $D(F) \subset E$, à valeurs dans E, T une matrice de type $\{\alpha, \alpha\}$ vérifiant la condition* (1.2), *et $u, v \in D(F)$, tels que :*

(1.5) $$x(F(u) - F(v)) \leqslant Tx(u - v)$$

On a alors :

(1.6) $$\|F(u) - F(v)\|_{\nu,T} \leqslant \nu \|u - v\|_{\nu,T}$$

Démonstration : Posons $\|u - v\|_{\nu,T} = \max_{i=1,\dots,\alpha} \dfrac{\|u_i - v_i\|}{\gamma_\nu^i} = r$, nous

(1.7) $$\|u_i - v_i\| \leqslant r\gamma_\nu^i \quad \forall i \in \{1, \dots, \alpha\} .$$

On a :

(1.8) $$x(F(u) - F(v)) \leqslant Tx(u - v) \leqslant T\Gamma_\nu \leqslant \nu\, r\Gamma_\nu .$$

où :

– la première inégalité de (1.8) est (1.5),

– la seconde inégalité de (1.8) s'obtient par (1.7), et le fait que par la condition (1.2) T est non négative,

– la troisième inégalité de (1.8) résulte de (1.4).

On peut réécrire scalairement l'inégalité obtenue entre le premier et le dernier terme de (1.8), sous forme :

$$\frac{\|F_i(u) - F_i(v)\|_i}{\gamma_i^\nu} \quad \nu r = \nu \|u - v\|_{\nu,T} \quad \forall i \in \{1, \dots, \alpha\} .$$

ou encore :

$$\|F(u) - F(v)\|_{\nu,T} \leqslant \nu \|u - v\|_{\nu,T}$$ q.e.d.

Corollaire 1 : *Une application F, contractante sur $D(F)$ (respectivement contractante en u), pour la norme vectorielle x, de matrice de contraction T, est contractante sur $D(F)$ (respectivement contractante en u) pour la norme $\| \ \|_{v,T}$.*

Démonstration : Il suffir de remplacer dans l'énoncé de la *proposition 1,* la condition (1.5), par la condition (1.3) (respectivement la condition (1.1)), et on obtient alors que (1.6) est vraie $\forall u,v \in D(F)$ *(respectivement* $u \in D(F)$ *étant fixé,* $\forall v \in D(F)$).

Corollaire 2 : *Soit F une application de domaine $D(F)$, fermé de E, à valeurs dans E, telle que :*

– *F soit contractante pour la norme vectorielle x sur $D(F)$.*

– $F(D(F)) \subset D(F)$

alors F admet un point fixe unique $u^* \in D(F)$. De plus $\forall u^\circ \in D(F)$ l'algorithme itératif :

$$u^{p+1} = F(u^p) \qquad p = 0, 1, 2, \dots$$

fournit une suite u^p convergeant fortement dans E (muni de la topologie de la norme $\| v \|_E = \max_{i=1,\dots,\alpha} \| v_i \|_i$).

Démonstration : On munit tout d'abord E de la topologie de la norme $\| \ \|_{v,T}$, qui est équivalente à celle de la norme $\| \ \|_E$.

Or, d'après le *corollaire 1, F* est contractante pour la norme $\| \ \|_{v,T}$, et on peut donc appliquer le classique théorème de point fixe pour les applications contractantes.

I.3 – Sur les applications contractantes en norme vectorielle en leur point fixe.

Soit F une application de $E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i$ dans lui-même.

Nous supposons :

(1.9) F contractante en norme vectorielle sur E.

Soit T la matrice de contraction de F, et u^* le point fixe de F.

Lorsque F est définie de manière implicite, il arrive que l'on ne puisse déterminer numériquement F d'une manieŕe exacte. Nous supposons qu'il existe dans ce cas une application $\widetilde{F}$ définie sur $D(\widetilde{F})$, bien déterminée numériquement, et qui approxime F au sens suivant :

(1.10) $$\overset{\circ}{D}(\widetilde{F}) \neq 0 \qquad \text{et } u^* \in \overset{\circ}{D}(\widetilde{F})$$

(1.11) $$\delta > 0 \text{ tel que } \forall j \in \{1, \dots \alpha\}, \ \forall w \in D(\widetilde{F}) \ \| \widetilde{F}_j(w) - F_j(w) \| \leqslant \delta \| F_j(w) - w_j \|_j$$

Notation : Nous noterons par Δ la matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\delta_j = \delta$.

Proposition 2 : *Les hypothèses* (1.9), (1.10), (1.11) *étant vérifiées, l'application* $\widetilde{F}$ *admet comme point fixe* u^*, *point fixe de* F. *De plus la matrice* $\widetilde{T} = T + \Delta + \Delta T$ *est une majorante linéaire de* $\widetilde{F}$ *en* u^*.

Si la condition (1.12) *ci-dessous est remplie alors* $\widetilde{F}$ *est contractant en norme vectorielle en* u^*.

(1.12) $\delta < \dfrac{1-\rho(T)}{1+\rho(T)}$ *(où* $\rho(T)$ *est le rayon spectral de* T *;* $\rho(T) < 1$ *par l'hypothèse* (1.9)).

Démonstration : Cf. J.-C. Miellou [16]

Introduction d'un paramètre de sur-relaxation.

(Cf. [4] pour le cas des applications contractantes en norme vectorielle sur $D(F)$).

On considère l'application $v \widetilde{F}_\omega(v) = (1-\omega)v + \omega\widetilde{F}(v)$ de domaine $D(\widetilde{F}_\omega) = D(\widetilde{F})$.

Proposition 3 : *Les hypothèses* (1.9), (1.10), (1.11) *étant vérifiées :*

$\widetilde{F}_\omega$ *a pour point fixe* u^*, *point fixe de* F *; De plus* $\widetilde{F}_\omega$ *admet en* u^* *la majorante linéaire* $\widetilde{T}_\omega = (1-\omega)\ I + \omega\widetilde{T}$.

L'hypothèse (1.12) *étant vérifiées, ainsi que l'hypothèse* (1.13) *ci-dessous, alors* $\widetilde{F}_\omega$ *est contractante en norme vectorielle, en* u^*.

(1.13) $$0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(\widetilde{T})}$$

Démonstration : Cf. J.-C. Miellou [16]

§ II – SUITES R-CHAOTIQUES. ALGORITHME DE RELAXATION CHAOTIQUE A RETARDS ASSOCIÉS A UNE SUITE R-CHAOTIQUE. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE.

II.1 - Suites R-chaotiques.

On considère une suite $\{h(p)\ ;\ k(p)\}$, où :

(2.1) $$\forall p \in \mathcal{N} \quad h(p) \subset \{1, \ldots, \alpha\} \quad \text{et } h(p) \neq \emptyset.$$

On suppose également que :

(2.2) $$\forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}\ \{p \in \mathcal{N} \mid i \in h(p)\} \quad \text{est un ensemble infini.}$$

(2.3) $\begin{cases} \forall p \in \mathcal{N} \quad k(p) = \{ k_1(p), \ldots, k_i(p), \ldots, k_\alpha(p) \} \text{ (*) et on suppose que} \\ \text{les composantes } k_i(p) \text{ de } k(p) \text{ appartiennent à } \mathcal{N}, \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\} . \end{cases}$

(2.4) Il existe un entier $s > 0$, et une fonction $s(p)$ définie sur $\mathcal{N}$, tels que :
- $p - s(p)$ soit une fonction croissante de p
- $s(p) \leqslant \min(s, p)$
- $\forall p \in N, \quad \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\} \quad 0 \leqslant k_i(p) < s(p)$

Définition 5 : *Nous dirons que une suite* $\{ h(p) \; ; \; k(p) \}$ *vérifiant les conditions* (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) *est une suite R-chaotique.*

La suite $\{ p_\ell \}$ *d'entiers naturels associés à la suite R-chaotique* $h(p); k(p)$

$\{ h(p) \; ; \; k(p) \}$ étant une suite R-chaotique, nous définissons $\{ p_\ell \}$ par induction sur $\ell \in \mathcal{N}$ de la manière suivante :

p_1 est le plus petit entier tel que :

(2.5) $$\bigcup_{0 \leqslant p < p_1 - s(p_1)} h(p) = \{ 1, \ldots, \alpha \}$$

– p_1 existe par l'hypothèse (2.2), et la définition de $s(p)$.

Supposons connus $p_1, \ldots, p_\ell$, on définit $p_{\ell+1}$ comme étant le plus petit entier tel que :

(2.6) $$\bigcup_{p_\ell \leqslant p < p_{\ell+1} - s(p_{\ell+1})} h(p) = \{ 1, \ldots, \alpha \}$$

– $p_{\ell+1}$ existe par l'hypothèse (2.2) et la définition de $s(p)$.

D'où l'énoncé :

Proposition 4 : $\{ h(p) \; ; \; k(p) \}$ *étant une suite R-chaotique,* (2.5), (2.6) *définissent une suite* $\{ p_\ell \}$, *partie infinie dénombrable de* $\mathcal{N}$.

II.2 – ALGORITHME DE RELAXATION CHAOTIQUE A RETARDS ASSOCIÉ A UNE SUITE R-CHAOTIQUE, POUR LA RECHERCHE D'UN POINT FIXE D'UNE APPLICATION NON LINÉAIRE DE DOMAINE $D(F) \subset E$, A VALEURS DANS E

– Soit F une application de $D(F) \subset E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i$, à valeurs dans E :

$$\forall v \in D(F) \xrightarrow{F} F(v) = \left\{ F_1(v), \ldots, F_j(v), \ldots, F_\alpha(v) \right\}$$

(*) Nous dirons que $k(p)$ est le "vecteur des retards" de la suite R-chaotique $\{ h(p) \; ; \; k(p) \}$.

– Soit $\{h(p)\,;\ k(p)\}$ une suite R-chaotique.
– Soit $u^{\circ} \in D(F)$ donné.

On considère alors la suite u^p d'éléments de E (où $\{u^p = u_1^p, \dots, u_i^p, \dots, u_\alpha^p\}$) ainsi définie par induction :

Supposons $\{u^1, \dots, u^p\}$ déterminés, alors :

$$\forall j \in \{1, \dots, \alpha\}\ u_j^{p+1} = \begin{cases} u_j^p & \text{si } j \notin h(p) \\ F_j(\dots, u_i^{p-k_i(p)}, \dots) & \text{si } j \in h(p) \end{cases} \tag{2.7}$$

REMARQUE 1 : (2.7) *permet de construire la suite* $\{u^p\}$ *pour* $p \in \mathcal{N}$, *à condition que les arguments figurant au second membre de* (2.7) *soient bien dans* $D(F)$, *pour* $j \in h(p)$.

Définition 6 : $\{h(p)\,;\ k(p)\}$ *étant une suite R-chaotique, et la condition de la* **remarque 1** *étant vérifiée, nous dirons que* (2.7) *définit l'algorithme de relaxation chaotique à retards, associé à la suite R-chaotique* $\{h(p)\,;\ k(p)\}$ *pour la recherche d'un point fixe de* F.

Notation : *Nous remplacerons dans toute la suite l'expression "algorithme de relaxation chaotique à retards" par l'abréviation : "algorithme R.C.R.".*

Définition 7 : $\{h(p)\,;\ k(p)\}$ *étant une suite R-chaotique ;* $\{p_\ell\}$ *étant la suite d'entiers naturels associée à* $\{h(p)\,;\ k(p)\}$ *par* (2.5), (2.6) ; $\{u_p\}$ *étant la suite des itérés produite par l'algorithme R.C.R. associé à* $\{h(p)\,;\ k(p)\}$ *,pour la recherche d'un point fixe de* F *; nous désignerons sous le terme de macro-itération de rang* ℓ *, le passage de* u_{p_ℓ} *à* $u_{p_\ell+1}$.

II.3 – ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DES ALGORITHMES R.C.R.

Soit F une application de $D(F) \in E$, à valeurs dans E, nous supposons que :

$$D(\mathring{F}) \neq \emptyset \tag{2.8}$$

(2.9) F admet un point fixe $u^* \in D(F)$

(2.10) $\begin{cases} F \text{ est contractante en } u^*, \text{ pour la norme vectorielle } x\,; \\ \text{Soit } T \text{ la matrice de contraction de } F \text{ en } u^*. \end{cases}$

$\forall r \geqslant 0$,, soit $B_{(u^*,r)}^{\nu,T}$ la boule de centre u^* et de rayon r dans E, pour la norme $\|\ \|_{\nu,T}$. Soit $r_\nu = \left\{\sup r \mid B_{(u^*,r)}^{\nu,T} \subset D(F)\right\}$.

REMARQUE 2 : *Puisque, d'après l'hypothèse* (2.9) $u^* \in D(F)$, *on a* $r_\nu > 0$ *(éventuellement* $r_\nu = +\infty$ *si* $D(F) = E$).

Proposition 5 : *Les hypothèses* (2.8), (2.9), (2.10) *étant vérifiées, et* $\{h(p)\,;k(p)\}$ *étant une suite R-chaotique ; si* $u^\circ \in \mathring{B}^{\nu,T}_{(u^*,r_\nu)}$ *alors :*

i) (2.7) *définit bien* u^p, *quelque soit l'entier* p, *et* $\{u^p\}$ *reste dans* $\mathring{B}^{\nu,T}_{(u^*,r_\nu)}$.

ii) $\{u^p\}$ *converge fortement dans* E *vers* u^*, *point fixe de* F. *Plus précisément* $\{p_\ell\}$ *étant la suite d'entiers associée à* $\{h(p)\ ;\ k(p)\}$ *par* (2.5), (2.6) *et si* $\bar r = \|u^\circ - u^*\|_{\nu,T}$, on a :

$$\forall \ell \in \mathcal{N} \quad \sup_{p \geqslant p_\ell} \quad \|u^p - u^*\|_{\nu,T} \leqslant \nu^\ell\, r \tag{2.11}$$

iii) On a pour $\{u^p\}$ *l'estimation suivante de la vitesse asymptotique de convergence :*

$$\limsup_{\ell \to \infty} \quad (\sup_{p \geqslant p_\ell} \quad \|u^p - u^*\|_E)^{1/\ell} \leqslant \rho(T) \tag{2.12}$$

Démonstration :

i) Nous considérons $B^{\nu,T}_{(u^*,\bar r)}$ *où* $\bar r = \|u^\circ - u^*\|_{\nu,T}$. Nous raisonnons par induction sur p.

Supposons donc que pour tout entier q tel que : $0 \leqslant q \leqslant p$, on ait :

$$u^q \text{ existe, et } u^q \in B^{\nu,T}_{(u^*,\,\bar r)} \tag{2.13}$$

Comme $s(p)$ croit au plus comme p, il en résulte que :

$$u^{p-s(p)}\ ,\ u^{p-s(p)+1}, \dots, u^p \text{ appartiennent à } B^{\nu,T}_{(u^*,\bar r)} \subset D(F) \tag{2.14}$$

Par suite u^{p+1} existe, puisque la condition de la **remarque 1** est vérifiée, et :

– ou bien $j \notin h(p)$ et $u_j^{p+1} - u_j^p$, ce qui implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{1, \dots, \alpha\} \qquad \text{avec } j \notin h(p) \\ \dfrac{1}{\gamma_j^\nu} \|u_j^{p+1} - u_j^*\|_j = \dfrac{1}{\gamma_j^\nu} \|u_j^p - u_j^*\|_j \leqslant \bar r \end{array} \right. \tag{2.15}$$

– ou bien $j \in h(p)$, et $u_j^{p+1} = F_j(\dots, u_i^{p-k_i(p)}, \dots)$

Posons $v = \left\{ u_1^{p-k_1(p)}, \dots, u_i^{p-k_1(p)}, \dots, u_\alpha^{p-k_\alpha(p)} \right\}$

En utilisant (2.14), et le fait que $B^{\nu,T}_{(u^*,\bar{r})}$ est un produit de boules des espaces E_i, on a :

(2.16) $$v \in B^{\nu,T}_{(u^*,\bar{r})}$$

En utilisant les hypothèses (2.9), (2.10), la **proposition 1** et (2.16), on a :

$$\frac{1}{\gamma_j^\nu} \| u_j^{p+1} - u_j^* \| = \frac{1}{\gamma_j^\nu} \| F_j(v) - F(u_j^*) \|_j \leqslant \nu \| v - u^* \|_{\nu,T} \leqslant \nu \bar{r}$$

et donc :

(2.17) $$\forall j \in h(p) \quad \frac{1}{\gamma_j^\nu} \| u_j^{p+1} - u_j^* \|_j \leqslant \nu \bar{r}, \text{ où } \nu < 1.$$

De (2.15), (2.17), on déduit que $u^{p+1} \in B^{\nu,T}_{(u^*,\bar{r})}$ et i) est démontré.

ii) Nous considérons la suite d'entiers $\{ \ldots, p_\ell, \ldots \}$ où ℓ parcourt l'ensemble des entiers naturels, définie par (2.5), (2.6).

D'après la définition de p_1 .

(2.18) $$\begin{cases} \forall p \geqslant p_1 - s(p_1), \ \forall j \in \{1, \ldots, \alpha\}, \text{ il existe } q \text{ tel que } p > q \geqslant 0, \\ \text{et } u_j^p = u_j^{q+1}, \text{ et } j \in h(q). \end{cases}$$

Par suite :

$$u_j^{q+1} = F_j(\ldots, u_i^{q-k_i(q)}, \ldots)$$

où $q\text{-}k_i(q) \geqslant 0$ d'après la définition de $s(q)$. Posons :

$v = \{ u_1^{q-k_i(q)}, \ldots, u_i^{q-k_i(q)}, \ldots, u_\alpha^{q-k_\alpha(q)} \}$. Puisque $B^{\nu,T}_{(u^*,\bar{r})}$ est un produit de boules des espaces E_i, on a :

(2.19) $$v \in B^{\nu,T}_{(u^*,\bar{r})}$$

En utilisant les hypothèses (2.9), (2.10), la **proposition 1**, (2.19) on a :

$$\frac{1}{\gamma_j^\nu} \| u_j^p - u_j^* \|_j = \frac{1}{\gamma_j^\nu} \| u_j^{q+1} - u_j^* \|_j = \frac{1}{\gamma_j^\nu} \| F_j(v) - F_j(u_j^*) \|_j \leqslant \nu \| v - u^* \|_{\nu,T} \leqslant \nu \bar{r}$$

Or, les inégalités précédentes ont lieu, $\forall j \in \{1, \ldots, \alpha\}$ (avec q dépendant évidemment de j), donc :

(2.20) $$\forall p \geqslant p_1 - s(p_1) \quad u^p \in B^{\nu,T}_{(u^*, \nu\bar{r})}$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'induction :

(2.21) $$\forall p \geqslant p_\ell - s(p_\ell) \quad u^p \in B^{\nu,T}_{(u^*, \nu^\ell \bar{r})}$$

Alors compte tenu de la définition de $p_{\ell+1}$

$$(2.22)\qquad \begin{cases} \forall p \geqslant p_{\ell+1} - s\,(p_{\ell+1}) \qquad \forall j \in \{1, \ldots, \alpha\},\ \exists q \\ \text{avec : } p > q \geqslant p \qquad \text{tel que } u_j^p = u_j^{q+1} \text{ et } j \in h\,(q) \end{cases}$$

Par suite :

$$u_j^{q+1} = F_j\,(\ldots, u_i^{q-k_i(q)}, \ldots)$$

où, d'après la définition de $s(p)$ et de $\{p_\ell\}$:

$$(2.23)\qquad \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\} \quad q\text{-}k_i\,(q) \geqslant p_\ell - s(p_\ell)$$

et donc, d'après l'hypothèse d'induction (2.21) :

$$\forall i \in \{1, \ldots, \alpha\} \quad u^{q-k_i(q)} \in B^{\nu,T}_{(u^*, \nu^\ell \bar{r})}$$

Soit $v = \left\{u_1^{q-k_1(q)}, \ldots, u_i^{q-k_i(q)}, \ldots, u_\alpha^{q-k_\alpha(q)}\right\}$

Puisque $B^{\nu,T}_{(u^*,\nu^\ell \bar{r})}$ est un produit de boules des espaces E_i, on a :

$$(2.24)\qquad v \in B^{\nu,T}_{(u^*,\, \nu^\ell \bar{r})}$$

En utilisant les hypothèses (2.9), (2.10), la **proposition 1**, et (2.24), on a :

$$\frac{1}{\gamma_j^\nu}\|u_j^p - u_j^*\|_j = \frac{1}{\gamma_j^\nu}\|u_j^{q+1} - u_j^*\| = \frac{1}{\gamma_j^\nu}\|F_j\,(v) - F_j\,(u^*)\| \leqslant \nu\,\|v - u^*\|_{\nu,T} \leqslant$$
$$\leqslant \nu^{\ell+1}\,\bar{r}$$

Or les inégalités précédentes ont lieu $\forall j \in \{1, \ldots, \alpha\}$, donc :

$$(2.25)\qquad \forall p \geqslant p_{\ell+1} - s\,(p_{\ell+1}) \quad u^p \in B^{\nu,T}_{(u^*,\nu^{\ell+1} \bar{r})}$$

et (2.25) est équivalent à (2.11).

iii) Vérification de (2.18)

a) si T est irréductible, on choisit alors $\rho\,(T) = \nu$.

On a : $\|v\|_E = \max\limits_{i=1,\ldots,\alpha} \|v_i\|_i \leqslant C\ \|v\|_{\nu,T} \quad \forall v \in E$

$$\text{où } C = \max_{i=1,\ldots,\alpha} \frac{1}{\gamma_j^\nu}.$$

On en déduit, en utilisant (2.11) que :

$$(\sup_{p \geqslant p_\ell} \|u^p - u^*\|_E)^{1/\ell} \leqslant C^{1/\ell}\,(\sup_{p \geqslant p_\ell} \|u^p - u^*\|_{\nu,T})^{1/\ell} \leqslant C^{1/\ell}\,\bar{r}^{\,1/\ell}\,\nu =$$
$$= C^{1/\ell}\,\bar{r}^{\,1/\ell}\,\rho\,(T).$$

D'où (2.12).

b) Si T est réductible :

$\forall \epsilon > 0$, ϵ assez petit, $\exists \nu_\epsilon = \rho(T) + \epsilon$ tel que :

$$\|v\|_E \leqslant C_\epsilon \|v\|_{\nu_\epsilon, T}, \text{ où } C_\epsilon = \max_{i=1,\dots,\alpha} \frac{1}{\gamma^\nu_{i\epsilon}}$$

$$\leqslant C_\epsilon^{1/\ell} \big(\operatorname*{Sup}_{p \geqslant p_\ell} \|u^p - u^*\|_{\nu_\epsilon, T}\big)^{1/\ell} \leqslant C_\epsilon^{1/\ell}\, \bar{r}_\epsilon^{1/\ell} \, (\rho(T) + \epsilon)$$

On remarque ici que, en général, dans (1.4), Γ_ν dépend de ν, c'est-à-dire ici de ϵ, d'où les notations $\gamma^\nu_{i\epsilon}$ et $\bar{r}_\epsilon$.

Par suite :

$$(2.26) \qquad \underset{(\epsilon \text{ assez petit})}{\forall \epsilon > 0} \quad \lim_{\ell \to \infty} \sup \big(\sup_{p \geqslant p_\ell} \|u^p - u^*\|_E\big)^{1/\ell} \leqslant \rho(T) + \epsilon.$$

et, comme le premier membre de (2.26) ne dépend pas de ϵ, on a bien (2.12) à savoir : $\lim_{\ell \to \infty} \sup \big(\sup_{p \geqslant p_\ell} \|u^p - u^*\|\big)^{1/\ell} \leqslant \rho(T)$.

q.e.d.

REMARQUE 3 : (2.12) *reste vrai (de même que l'énoncé du* **corollaire 2** *au* § *I), si on munit* E *d'une norme équivalente à* $\| \ \|_E$. *C'est en particulier le cas si,* φ *étant une norme holdérienne sur* R^α, *on munit* E *de la norme* $\varphi o x$, *qui est évidemment une norme équivalente à* $\| \ \|_E$.

Corollaire 3 : *Nous supposons que* $D(F) = E$, *et que* F *est contractante sur* $D(F)$, $\{h(p)\ ;\ k(p)\}$ *étant une suite R-chaotique, alors l'algorithme de relaxation chaotique associé, converge vers* u^*, *point fixe de* F, *dans* E *fort, de plus* (2.11), (2.12) *ont lieu.*

Démonstration : Nous sommes dans les conditions d'application du **corollaire 2**, donc u^* point fixe de F existe et est unique. Comme $D(F) = E$, dans le cas présent $r_\nu = +\infty$, et donc $\mathring{B}^{\nu,T}_{(u^*, r_\nu)} = E$. Donc $\forall u^\circ \in E$, si $\bar{r} = \|u^\circ - u^*\|$ on a bien $B^{\nu,T}_{(u^*, \bar{r})} \subset \mathring{B}^{\nu,T}_{(u^*, r_\nu)}$, et les conclusions de la **proposition 5** sont vraies.

REMARQUE 4 : *L'algorithme "des approximations successives" :*

$$(2.27) \qquad u^{p+1} = F(u^p) \qquad p = 0,1, \dots \qquad u^\circ \text{ donné}$$

est un cas particulier d'algorithme R.C.R.

En effet, considérons la suite $\{h(p)\ ;\ k(p)\}$ *ainsi définie :*

$$(2.28) \qquad \forall p \in \mathcal{N} \quad h(p) = \{1, \dots, \alpha\}\ ; \quad \forall i \in \{1, \dots, \alpha\} \quad k_i(p) = 0$$

L'algorithme R.C.R. associé à $\{h(p)\ ;\ k(p)\}$ *vérifiant* (2.28) *est bien* (2.27).

La **proposition 5** *nous permet donc de retrouver la seconde partie de l'énoncé du* **corollaire 2**, *avec néanmoins quelques modifications dans les hypothèses, en donnant une précision supplémentaire sur la vitesse assymptotique de convergence de l'algorithme "des approximations successives".*

REMARQUE 5 : *L'étude précédente, c'est-à-dire l'énoncé de la* **proposition 5**, *ainsi que sa démonstration, restent valables pour une formulation un peu plus générale des algorithmes R.C.R., à savoir :*

On considère une suite $\{h(p)\ ;\{\Delta_p^k\}\}$

– *où* $\{h(p)\}$ *vérifie les hypothèses* (2.1), (2.2),

– $s(p)$ *est définie comme en* (2.4), $\forall p\in \mathcal{N}$, $\forall k\in [0,s(p)]\,\mathcal{N}$, Δ_p^k *est une matrice réelle de type* α,α *et de coefficients* $\delta_{i,j}^{k,p}$ *vérifiant :*

$$(2.29)\qquad \begin{cases} \forall p\in \mathcal{N},\ \forall k\in [0,s(p)]\cap \mathcal{N}\ ,\ \forall i,j\in 1,\dots,\alpha \\ \delta_{i,j}^{k,p}\geqslant 0. \end{cases}$$

$$(2.30)\qquad \forall p\in \mathcal{N}\ ,\ \forall i,j\in \{1,\dots,\alpha\}\quad \sum_{k=0}^{s(p)} \delta_{i,j}^{k,p} = 1.$$

$u^\circ\in D(F)$ *étant donné, et* $\{u^1,\dots,u^p\}$ *étant supposés connus, l'analogue de* (2.7) *est alors :*

$$(2.31)\quad \forall j\in \{1,\dots,\alpha\}\ u_j^{p+1} = \begin{cases} u_j^p \quad si\ \ j\in h(p) \\ F_j\left(\dots,\ \sum_{k=0}^{s(p)} \delta_{i,j}^{k,p}\ u_i^{p-k}\ ,\dots\right) \end{cases}$$

On retrouve l'algorithme défini en (2.7) *en choisissant dans* (2.31) :

$$\delta_{i,j}^{k,p} = \begin{cases} 0 & si\ \ k\neq k_i(p) \\ 1 & si\ \ k=k\,(p) \end{cases}$$

REMARQUE 6 : (Explicitée par F. Charnay, dans un cadre technique différent : communication faite à l'auteur par F. Robert).

– $\{h(p)\ ;\ k(p)\}$ *étant une suite R-chaotique :*

– $\{u^\circ,u^1,\dots,u^{p_o}\}$ *étant donnés, on peut alors démarrer l'algorithme R.C.R.* (2.7) *à partir du rang* $p=p_o$.

Si :

a) Dans la définition de la suite $\{p_\ell\}$ (2.5) *est remplacé par :*

$$(2.5)\text{ bis}\qquad \bigcup_{p_0\leqslant p\leqslant p_1 - s(p_1)} h(p) = \{1,\dots,\alpha\}\ .$$

b) Dans l'énoncé de la **proposition 5**, *on remplace :*

$$u^\circ\in \mathring{B}^{\nu,T}_{(u^*,r_\nu)}\quad par\ u^\circ_,\dots,u^{p_o}\in\mathring{B}^{\nu,T}_{(u^*,r_\nu)}$$

Alors le reste de l'énoncé de la **proposition 5** *reste valable. Il en va de même pour sa démonstration, en posant :*

$$\bar{r}_o = \max_{0 \leqslant p \leqslant p_o} \|u^p - u^*\|_{v,T}$$

REMARQUE 7 : *On peut étendre, sans difficulté, aux algorithmes décrits dans la* REMARQUE 5, *la notion "d'initialisation multiple" considérée dans la* REMARQUE 6, *ainsi que les résultats correspondant de convergence.*

Il ne semble néanmoins pas utile d'insister davantage sur les extensions des algorithmes R.C.R. décrites dans les REMARQUES 5, 6, 7, tant que l'on n'a pas mis en évidence d'une manière suffisamment précise leur intérêt pratique éventuel. (On trouvera néanmoins une application particulière de la REMARQUE 6, au § III pour l'initialisation de l'algorithme secondaire de contrôle des erreurs).

REMARQUE 8 : *Il est possible de modifier, et d'étendre la définition des algorithmes R.C.R. de la manière suivante :*

Dans (2.7), $\forall p \in \mathcal{N}$, *on remplace* F, *par une application* F_p, *vérifiant les hypothèses :*

(2.32) $\quad F_p$ *admet le même point fixe* u^* *que* F.

(2.33) $\left\{ \begin{array}{l} F_p \text{ est contractante en } u^*, \text{ pour la norme vectorielle } x, \text{ de matrice de} \\ \text{contraction } T_p . \end{array} \right.$

(2.34) $\left\{ \begin{array}{l} \exists \nu \in]0,1] , \Gamma\nu \in R_+^{\alpha} ; \; \Gamma\nu = \; \ldots \gamma_i^{\nu} \ldots \quad \text{et } \forall i \in \{1 \ldots \alpha\} \; \gamma_i^{\nu} > 0, \\ \text{tels que } \forall p \in \mathcal{N} \quad T_p \, \Gamma\nu \leqslant \nu\Gamma\nu , \\ \nu, \text{ et } \Gamma\nu \text{ sont indépendants de } p \in \mathcal{N} \end{array} \right.$

Si les conditions (2.32), (2.33), (2.34) *sont remplies, on vérifie aisément, en tenant compte du fait que la norme* $\| \quad \|_{\nu, T_p}$ *est alors indépendante de* p, *que les conclusions i), ii) de la* **proposition 5**, *restent valables pour cette extension des algorithmes R.C.R.*

On peut appliquer la présente remarque pour formuler des méthodes de sur (sous) relaxation ou le paramètre de sur (sous) relaxation dépend de p *(Cf.* [18] , [28] , *pour l'étude de telles méthodes dans des cadres techniques différents).*

§ III – EXTENSION DE L'ALGORITHME DE ROBERT-SCHROEDER DE CONTROLE DES ERREURS AUX ALGORITHMES R.C.R.

III.1 - Algorithmes R.C.R. principal et secondaire, associés à une suite R-chaotique ; un résultat de comparaison.

Nous considérons une application, vérifiant les hypothèses (2.8), (2.9), (2.10) et une suite R-chaotique $\{ h(p) \ ; \ k(p) \}$.

T étant la matrice de contraction de F en u^*, nous distinguerons :

a) un algorithme R.C.R. associé à $\{ h(p) \ ; \ k(p) \}$, à une donnée initiale $u^\circ \in \overset{\circ}{D}(F)$, et à l'approximation du point fixe de F.

b) un algorithme R.C.R. associé à $\{ h(p) \ ; \ k(p) \}$, à une donnée initiale que nous préciserons ci-dessous (*), et à la résolution du problème :

$$z = Tz \quad \text{dans } R^\alpha . \tag{3.1}$$

Définiton 8 : *Nous désignerons sous le terme d'algorithme principal (respectivement d'algorithme secondaire), l'algorithme R.C.R. considéré en a) (respectivement en b).*

Proposition 6 : *Les hypothèses* (2.8), (2.9), (2.10) *étant vérifiées, et* $\{h(p) \ ; k(p)\}$ *étant une suite R-chaotique, soit* $\{u^p\}$ *la suite d'éléments de* E *produite par "l'algorithme principal". Soit* $\{p_\ell\}$ *la suite d'entiers associée à* $\{h(p) \ ; \ k(p)\}$ *par* (2.5), (2.6).

Nous supposons que :
Il existe $\ell_1 \in \mathcal{N}$ *, et une suite finie d'éléments de* R^α, *soit :*

(3.2) $\left\{z^{p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1})}, \ldots, z^{p_{\ell_1}}\right\}$, *telle que :* $\forall p \in \left\{p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1}) \ , \ldots, p_{\ell_1}\right\}$,

$$x(u^p - u^*) \leqslant z^p) .$$

Si $\{z^p\}$ *est la suite d'éléments de* R_+^α *produite par "l'algorithme secondaire", mis en œuvre à partir du rang* $p = p_{\ell_1}$ *et initialisé par* $\left\{z^{p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1})} \ldots, z^{p_{\ell_1}}\right\}$ *on a :*

$$\forall p \in \mathcal{N} \quad x(u^p - u^*) \leqslant z^p . \tag{3.3}$$

Démonstration : On raisonne par induction sur p :

– Soit $p > p_{\ell_1}$ et supposons que :

(3.4) $\forall q \in \left\{ p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1}), \ldots, p \right\}$, la condition $x(u^* - u^q) \leqslant z^q$ est vérifiée.

Formons u^{p+1} :

– si $j \notin h(p)$, d'après (2.7) $u_j^{p+1} = u_j^p$ et $z_j^{p+1} = z_j^p$

Donc, par l'hypothèse (3.4), on a :

$$\|u_j^{p+1} - u_j^*\| = \|u_j^p - u_j^*\| \leqslant z_j^p \equiv z_j^{p+1} \tag{3.5}$$

(*) Cf. l'énoncé de la **proposition 6.**

– si $j \in h(p)$, d'après (2.7), alors :

$$u_j^{p+1} = F_j\,(\ldots, u_i^{p-k_i(p)}, \ldots),$$
$$z_j^{p+1} = \sum_{i=1}^{\alpha} t_{i,j}\; z_i^{p-k_i(p)}$$

En tenant compte des hypothèses (2.9), (2.10), et de l'hypothèse d'induction (3.4), on a :

$$(3.6)\quad \left\{\begin{array}{l} \|u_j^{p+1} - u_j^*\|_j = \|F_j\,(\ldots, u_i^{p-k_i(p)}, \ldots) - u_j^*\|_j \leqslant \\ \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha} t_{i,j}\;\|u_i^{p-k_i(p)} - u_i^*\|_i \leqslant \sum_{i=1}^{\alpha} t_{i,j}\; z_i^{p-k_i(p)} = z_j^{p+1} \end{array}\right.$$

D'où le résultat par (3.5), (3.6).

III.2 - Initialisation de l'algorithme secondaire.

Nous utiliserons la :

Proposition 7 : *Les hypothèses* (2.8), (2.9), (2.10) *étant vérifiées, et T étant la matrice de contraction de F en son point fixe u^*, alors :*

$$(3.7)\qquad \forall v \in D(F) \qquad x\,(v-u^*) \leqslant (I-T)^{-1} x(v-F(v))\,.$$

Démonstration : Cf. J.-C. Miellou [16]

Méthode a/ d'initialisation de l'algorithme secondaire.

L'énoncé précédent peut être appliqué de la manière suivante :

Ayant déterminé, par l'algorithme principal,

$$\forall p \in \{\, p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1}), \ldots, p_{\ell_1} \} \;: u^p$$

nous prenons $v = u^p$ dans (3.7), d'où le choix des vecteurs z^p, vérifiant la condition (3.2).

$$\forall p \in \{\, p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1}), \ldots, p_{\ell_1} \} \quad z^p = (I-T)^{-1}\; x\,(u^p - F(u^p))\,.$$

Méthode b/ d'initialisation de l'algorithme secondaire :

Nous supposons les hypothèses (2.8), (2.9), (2.10) vérifiées, et nous considérons une suite R-chaotique $\{h(p)\;;\; k(p)\}$, ainsi que la suite $\{p_\ell\}$ associée définie par (2.5), (2.6).

Notation :

Soit $$\delta\ell = p_{\ell+1} - p_\ell$$

Nous supposerons que :

(3.8) $s(p) = s(p_{\ell_1}) \quad \forall p \in \{p_{\ell_1}, \ldots, p_{\ell_1+1}\}$

Nous considérons :

– l'espace $\hat{E}_{\ell_1} = \overset{\alpha}{\underset{i=1}{\pi}} \; \overset{s(p_{\ell_1})}{\underset{r=1}{\pi}} \; E_i$.

– la norme vectorielle canonique sur cet espace produit, soit $\hat{x}$:

$\hat{x}$ est une application de E_{ℓ_1} dans R^{β}_{+} où $\beta = \alpha \times s(p_{\ell_1})$.

– l'application $\mathcal{F}_{\ell_1}$

Soit $W = \left\{ w^{p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1})+1}, \ldots, w^{p_{\ell_1}} \right\} \in \hat{E}_{\ell_1}$

Nous considérons les itérations de "l'algorithme principal" associé à $\{h(p) \,;\, k(p)\}$ et à la recherche du point fixe de F, à partir du rang $p = p_{\ell_1}$, en initialisant ces itérations par W.

On obtient alors une suite $\{W^p\}$ pour $p \geqslant p_{\ell_1}$, et soit :

$$U = \left\{ W^{p_{\ell_1}+1-s(p_{\ell_1})+1}, \ldots \; w^{p_{\ell_1}+1} \right\}, \quad U \in \hat{E}_{\ell_1}.$$

Soit $\mathcal{F}_{\ell_1}$ l'application de domaine $D(\mathcal{F}_{\ell_1}) = \overset{s(p_{\ell_1})}{\underset{r=1}{\pi}} D(F)$, qui à $W \in D(\mathcal{F}_{\ell_1})$ fait correspondre $U = \mathcal{F}_{\ell_1}(W)$.

– L'application $\mathcal{T}_{\ell_1}$

Soit $Z = \left\{ z^{p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1})+1}, \ldots, z^{p_{\ell_1}} \right\} \in R^{\beta} = \overset{s(p_{\ell_1})}{\underset{i=1}{\pi}} R^{\alpha}$

(où $\beta = \alpha \times s(p_{\ell_1})$).

Nous considérons les itérations de "l'algorithme secondaire", associé à $\{h(p) \,;\, k(p)\}$ à partir du rang p_{ℓ_1}, en initialisant ces itérations par Z. Soit $\{z^p\}$ la suite d'éléments de R^{α}, ainsi obtenue pour $p \geqslant p_{\ell_1}$.

Soit $Y = \left\{ z^{p_{\ell_1}+1-s(p_{\ell_1})+1}, \ldots, z^{p_{\ell_1}+1} \right\} \quad Y \in R^{\beta}$

Soit $\mathcal{T}_{\ell_1}$ l'application qui à $Z \in R^{\beta}$ fait correspondre $Y = \mathcal{T}_{\ell_1} Z$.

$\mathcal{T}_{\ell_1}$ est une application linéaire de R^{β} dans R^{β}, c'est donc une matrice de type $\{\beta, \beta\}$.

On vérifie aisément en utilisant l'hypothèse (3.8) au $\mathcal{T}_{\ell_1}$ est un produit de matrices de la forme :

$$(3.9)\quad \hat{T}_p = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} T_p & T_{p-1} & \cdots\cdots & & T_{p-s(p_{\ell_1})+1} \\ \hline I_\alpha & 0 & 0 & & \\ \hline & I_\alpha & 0 & & \\ \hline & & & 0 & \\ \hline 0 & & & I_\alpha & 0 \end{array}\right]$$

où $\hat{T}_p$ est une Bloc matrice, chaque bloc étant une matrice de type $\{\alpha , \alpha\}$, nulle, sauf pour les blocs sous-codiagonaux, qui sont la matrice I_α (identité dans R^α), et les blocs T_{p-k} de la première ligne, qui se construisent aisément à partir de la matrice de contraction et de $\{h(p) \; ; \; k(p)\}$:

$\forall k \in \{0, \ldots , s(p_{\ell_1})\}$, les coefficients $\{t_{i,j}^{p-k}\}$ de la matrice T_{p-k} sont en effet ainsi définis :

$$(3.10)\quad \begin{cases} \text{si} \quad j \notin h(p) \quad t_{i,j}^{p-k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \text{ où } k \neq 0 \\ 1 \text{ si } i = j \text{ et } k = 0 \end{cases} \\ \\ \text{si} \quad j \in h(p) \quad t_{i,j}^{p-k} = \begin{cases} 0 \text{ si } k = k_i(p) \\ t_{i,j} \text{ si } k = k_i(p) \end{cases} \end{cases}$$

et

$$(3.11)\quad \mathcal{T}_{\ell_1} = \prod_{p = p_{\ell_1}}^{p = p_{\ell_1}+1} \hat{T}_p$$

est donc une matrice non négative (puisque chaque matrice $\hat{T}_p$ est elle-même non négative).

Proposition 8 : *Les hypothèses* (2.8), (2.9), (2.10) *et* (3.8) *étant vérifiées, et* u^* *étant le point fixe de* F, *soit :*

$$U^* = \underbrace{\{u^*, u^*, \ldots, u^*\}}_{(s(p_{\ell_1})\ fois)} \in \hat{E}_{\ell_1}$$

alors :

i) $\mathcal{F}_{\ell_1}$ *admet* U^* *pour point fixe,*

ii) $\mathcal{F}_{\ell_1}$ *est contractante en* U^*, *de matrice de contraction* $\mathcal{C}_{\ell_1}$.

Démonstration : Cf. J.-C. Miellou [16]

D'où l'initialisation de l'algorithme secondaire :

Ayant déterminé, par l'algorithme principal,

$$\forall p \leqslant p_{\ell_1+1} \ ; \ u^p, \text{ on a :}$$

$$U^{\ell_1} = \{u^{p_{\ell_1}-s(p_{\ell_1})+1}, \ldots, u^{p_{\ell_1}}\}$$

$$U^{\ell_1+1} = \{u^{p_{\ell_{1+1}}-s(p_{\ell_1})+1}, \ldots, u^{p_{\ell_1}+1}\} = \mathcal{F}_{\ell_1}(U^{\ell_1}),$$

et en tenant compte des **propositions 7 et 8** :

$$\hat{x}(U^{\ell_1} - U^*) \leqslant (I_\beta - \mathcal{C}_{\ell_1})^{-1} \hat{x}(U^{\ell_1} - U^{\ell_1+1}$$

et par suite : $Z = (I - \mathcal{C}_{\ell_1})^{-1} \ \hat{x}(U^{\ell_1} - U^{\ell_1+1})$

a ses composantes qui vérifient les conditions (3.2).

III.3 - Utilisation de l'algorithme secondaire.

Les itérations de l'algorithme secondaire pouvant être considérablement moins onéreuses que celles de l'algorithme principal, on peut pratiquement utiliser cet algorithme secondaire, de la manière suivante :

1/ $u \in D(F)$ étant donné, on met en œuvre l'algorithme principal p_{ℓ_1} fois (respectivement p_{ℓ_1+1} fois), si l'on compte initialiser l'algorithme secondaire par la méthode a) (respectivement par la méthode b)). Dans l'un ou l'autre cas p_{ℓ_1} ou p_{ℓ_1+1}, sont choisis "suffisamment petits" pour que le coût des p_{ℓ_1} (ou p_{ℓ_1+1}) itérations principales correspondantes ne soit pas excessivement onéreux.

2/ On détermine $\{z^{p_{\ell_1}-s(p_{\ell_1})+1} 1, \ldots, z^{p_{\ell_1}}\}$ vérifiant (3.2) par la méthode a) ou b) choisie. La méthode b) a l'avantage de ne pas nécessiter de calcul "à part" de celui d'itérations principales de l'algorithmes R.C.R. que l'on doit mettre en œuvre.

3/ On réalise q itérations de l'algorithme secondaire, avec q "assez grand", puisque en principe, les dites itérations secondaires ne sont pas très onéreuses. On choisit dans la suite d'entiers $\{ p_{\ell_1+1}, \ldots, q \}$ le plus petit entier, soit $\bar{p}$ tel que le vecteur $z^{\bar{p}}$ ait ses différentes composantes suffisamment petites, c'est-à-dire susceptible d'assurer une précision en norme vectorielle suffisante pour l'élément de rang $p_{\ell_1} + \bar{p}$ que génèrerait l'algorithme principal.

4/ On revient alors à l'algorithme principal pour lequel on met en œuvre les itérations de rang $p_{\ell_1+1}, \ldots, \bar{p}$, ce qui est possible puisque l'on a conservé $\left\{ u^{p_{\ell_1} - s(p_{\ell_1}) + 1}, \ldots, u^{p_{\ell_1}} \right\}$

On a, d'après la **proposition 6** :

$$x(u^{p_{\ell_1} + \bar{p}} - u^*) \leqslant z^{p_{\ell_1} + \bar{p}}$$

REMARQUE 9 : *Il est possible d'obtenir la convergence de "l'algorithme principal", c'est-à-dire la convergence des itérations R.C.R. définies par* (2.7), *en deux temps :*

1/ On étudie la convergence des algorithmes R.C.R. dans le cas particulier de l'approximation du point fixe de $T \in \mathcal{L}(R^\alpha, R^\alpha)$, *T non négative, telle que* $\rho(T) < 1$, *c'est-à-dire contractante pour la norme vectorielle type* $\tilde{x}$ *sur* R^α.

(i.e) $\quad \forall z \in R^\alpha \qquad \tilde{x}(z) = \{ \ldots, |z_i|, \ldots \}$.

2/ Ayant obtenu au 1/ la convergence de la suite $\{ z^p \}$ *, produite par l'algorithme secondaire, vers O dans* R^α, *on en déduit que* $\{ u^p \}$ *étant la suite produite par l'algorithme principal :*

$\{ x(u^p - u^*) \}$ *converge vers O dans* R^α_+ *au moins aussi rapidement que* $\{ z^p \}$.

On note que la méthode précédente permet de se passer de la **proposition 3,** *du § II.3, dans la mesure où le résultat correspondant au 1/ n'est rien d'autre que la partie suffisante du Théorème du § 5 de Chazan D. – Miranker W.* [5] .

Toutefois cette méthode revient à mettre l'accent sur une propriété de convergence en norme vectorielle, plutôt que sur une propriété de convergence en norme ; comme le permettent les résultats du § II.3 relativement à la norme $\| \ \|_{v,T}$.

Par ailleurs, une présentation de la démonstration du cas particulier du 1/ci-dessus, est d'une rédaction sensiblement aussi longue que celle du cas général étudié directement au § II.3. Il est d'ailleurs important de noter que la norme $\| \ \|_{v,T}$, *introduite et utilisée aux § I et II, n'est, si l'on se restreint au cas particulier de la norme vectorielle type sur* R^α, *rien d'autre que la fonctionnelle de Minkowskii, d'un convexe utilisé dans la démonstration du théorème du § 5 de Chazan D. – Miranker W.* [5].

§ IV – EXEMPLES.

IV - 1 - Notations ; hypothèses ; conduite d'un algorithme R.C.R.

Ayant à résoudre le problème de la recherche du point fice de F, application de $E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i$, dans lui-même.

$$\forall v \in E, \text{ soit } F(v) = \{\ldots, F_j(v), \ldots\}.$$

nous considérons les tableaux d'hypothèses (H_A) et (H_B) ci-dessous :

Hypothèses (H_A) –

(4.1) *Nous disposons de processeurs identiques* $\{P_1, \ldots, P_\ell, \ldots, P_\beta\}$ *où* $\beta < \alpha$

(4.2) *Le temps de calcul de* $F_j(v)$ *par l'un des processeurs* P_ℓ, *est indépendant de* j *et de* v, *soit* τ.

(4.3) *Le délai entre l'affectation du processeur* P_ℓ, *a une tâche du type calcul de* $F_j(v)$, *et l'affectation du processeur* $P_{\ell+1}$ *a une tâche du même type est inférieur à* τ/β.

(4.4) *Le temps d'exécution par l'un des processeurs* P_ℓ *d'instructions d'affectation de variables indicées du type :* $u_j^{p+1} = u_j^p \ \forall j \in h(p)$ *est négligeable relativement à la durée d'une tâche du type calcul de* $F_j(v)$.

Commentaire sur les hypothèses (H_A) –

C_1 – l'hypothèse (4.1) peut être mise en défaut lorsque, les β processeurs étant identiques en début de travail, au cours de celui-ci l'un d'entre eux devient "proche de la panne", sans être pour autant totalement défaillant. En effet, sur les matériels actuels lorsque une instruction, lue par l'unité de commande du processeur, n'est pas exécutée, cette instruction est automatiquement relancée par le système. Il arrive que, après un ou plusieurs de ces essais, cette instruction finisse par s'exécuter, et le travail continue alors normalement. Par contre, au bout d'un nombre déterminé de tentatives infructueuses, le système diagnostique une panne au niveau de l'instruction considérée.

Toutefois, à condition de tolérer des "retards" plus importants que ceux explicités dans les algorithmes décrits ci-après, on reste bien, si l'hypothèse (4.1) n'est pas vérifiée, dans le cadre général des algorithmes R.C.R. ; il en va de même si l'hypothèse (4.2) n'est pas vérifiée.

C_2 – Le délai considéré dans l'hypothèse (4.3) correspond au fait qu'un multiprocesseur ne peut en général travailler dans le cadre d'une simultanéité complètement synchronisée. En effet lorsque deux processeurs demandent en même temps l'accès à une même adresse de la mémoire centrale (que ce soit pour la lecture soit d'une donnée, soit d'une instruction d'un programme) l'un d'entre eux est automatiquement mis en attente, jusqu'à ce que la demande de l'autre ait été satisfaite, par un dispositif fréquemment appelé sémaphore. Toutefois cette terminologie, correspond généralement à un dispositif "système" qui donne des commutations relativement lentes (de l'ordre de la milliseconde), alors que les algorithmes présentés ici ne peuvent se concevoir sans un dispositif assurant un délai extrêmement bref entre l'accès à une même mémoire de deux processeurs. Il est donc vraisemblable que le matériel utilisé par Rosenfeld [27], pour expérimenter la relaxation chaotique comporte un dispositif "hardware" spécial pour assurer des fonctions du type sémaphore.

C_3 – L'hypothèse (4.4) se vérifie, en pratique, parce que :

– l'instruction d'affectation a une durée relativement courte correspondant à un cycle de lecture et écriture en mémoire centrale,

– une partie extrêmement réduite (et même réduite à néant dans le cas d'un monoprocesseur) de l'ensemble des instructions d'affectation $u_j^{p+1} = u_j^p \forall i \in h(p)$, doit obligatoirement être exécutée pour réaliser les algorithmes R.C.R. proposés ci-après.

Hypothèse (H_B)

On considère β ensemble d'indices non vides $\mathfrak{J}_1 \quad \mathfrak{J}_2, \ldots, \quad \mathfrak{J}_\beta$ *tels que :*

$$\forall \ell \in \{1, \ldots, \beta\} \ \mathfrak{J}_\ell \subset \{1, \ldots, \alpha\} \tag{4.5}$$

(4.6) *Les ensembles* $\mathfrak{J}_\ell$ *sont disjoints*

$$\bigcup_{\ell \in \{1, \ldots, \beta\}} \mathfrak{J}_\ell = \{1, \ldots, \alpha\} \tag{4.7}$$

Commentaire sur les hypothèses (H_B) –

C_5 – Nous utiliserons les hypothèses (H_B) lorsque l'on affecte chaque processeur à un travail de relaxation sur un groupe bien déterminé d'équations du système à résoudre. Plus précisément $\forall \ell \in \{1, \ldots, \beta\}$, le processeur P_ℓ aura à effectuer une suite de calcul de fonctions $F_j(v)$ ou $j \in \mathfrak{J}_\ell$.

Terminologie : Lorsque nous ferons les hypothèses (H_B), pour un algorithme s'effectuant dans le cadre du commentaire C_5, nous parlerons d'algorithme par "sous-domaine", par analogie avec la situation où l'on travaille sur un maillage, à la suite de la discrétisation d'un problème aux dérivées partielles, et où l'on affecte chaque processeur à un sous-domaine du maillage considéré (Cf. [17]).

Conduite d'un algorithme R.C.R. –

Les exemples donnés dans les paragraphes suivants font ressortir que, compte tenu des hypothèses précédentes, dans un algorithme R.C.R., les retards $\{k(p)\}$ sont imposés par des contraintes technologiques.

Par contre l'utilisateur conserve très largement le choix de $\{h(p)\}$ qui détermine la ou les composantes de l'itéré u^p que l'on va "relaxer".

Terminologie : Nous appellerons "conduite" d'un algorithme R.C.R. tout procédé permettant de choisir ou déterminer $\{h(p)\}$.

IV.2 -Une méthode à "conduite libre"(*) multiprocesseur –

Soit $\beta \in \mathcal{N}$ tel que $1 \leqslant \beta < \alpha$

Nous considérons une suite $\{h(p) \; ; \; k(p)\}$, et les hypothèses :

$$(4.8) \qquad \begin{cases} \forall p \in \mathcal{N} \; h(p) \in \{1, \ldots, \alpha\} \; ^{(**)} \\ \text{et } h(p) \notin \bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant \min(p,\beta-1)} \{h(p-\ell)\} \end{cases}$$

$$(4.9) \qquad \forall j \in \{1, \ldots, \alpha\} \; \{p \in \mathcal{N} \mid h(p) = j\} \text{ est infini.}$$

$$(4.10) \qquad \forall p \in \mathcal{N}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\} \quad k_i(p) = \min\{p, \beta-1\} .$$

Définition 9 : *Les hypothèses* (H_A) *étant vérifiées, nous appellerons algorithme à conduite libre, multiprocesseur, un algorithme R.C.R. associé à une suite R-chaotique vérifiant les hypothèses* (4.8), (4.9), (4.10).

REMARQUE 10 : *On constate aisément, en prenant* $s = \beta$, *que une suite* $\{h(p) \; ; \; k(p)\}$ *vérifiant les hypothèses* (4.8), (4.9), (4.10) *est bien une suite R-chaotique. Il en résulte que si* F *est contractante en norme vectorielle en son point fixe, on obtient alors des propriétés de convergence et de contrôle des erreurs, pour un algorithme "à conduite libre", multiprocesseur, en utilisant les résultats des § II et III.*

Réalisation d'un algorithme "à conduite libre" multiprocesseur –

On suppose vérifiées les hypothèses (H_A). Soit $u^\circ \in E$, u° étant donné.

On affecte le processeur P_1 au calcul de :

$$(4.11) \qquad \begin{cases} u_j^1 = u_j^\circ & \text{si } j \neq h(O) \\ u_j^1 = F_j(u^\circ) & \text{si } j = h(O) \end{cases}$$

(*) "Conduite libre est une traduction de la locution "free steering", Cf. [16], [21].

(**) Contrairement au cas des § précédents $h(p)$ est ici considéré comme un élément de $\{1, \ldots, \alpha\}$ et non comme une partie de $\{1, \ldots, \alpha\}$.

— Pour $p \leqslant \beta - 1$, on affecte le processeur P_{p+1} au calcul de :

$$(4.12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u_j^{p+1} = u_j^p \quad \text{si } j \notin \bigcup\limits_{0 \leqslant \ell \leqslant p} \{ h(\ell) \} \\[2ex] u_j^{p+1} = F_j \quad (\ldots, u_i^{p-k_i(p)}, \ldots) \quad \text{si } j = h(p) \end{array} \right.$$

Par les hypothèses (4.3), (4.4), si l'origine des temps se trouve à l'instant du lancement de (4.11), alors au bout d'un temps inférieur à τ, l'ensemble des processeurs P_ℓ travaillent en parallèle, au calcul de fonctions F_j ( ).

— Pour $p \geqslant \beta$ par les hypothèses (4.1), (4.2), c'est nécessairement le processeur P_ℓ, où $\ell = p \mod(\beta) + 1$ qui est libéré le premier de l'une des taches de calcul de F_j (v), simultanément en cours.

Donc :

pour $\ell = p \mod(\beta) + 1$

on affecte le processeur P_ℓ au calcul de :

$$(4.13)\qquad u_j^{p+1} = u_j^p \qquad \text{si } j \notin \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant \beta} \{ h(p-r) \} .$$

$$(4.14)\qquad u_j^{p+1} = u_j^p = \ldots = u_j^{p-\beta+1} \qquad \text{si } j = h(p-\beta).$$

$$(4.15)\qquad u_j^{p+1} = F_j \quad (\ldots, u_i^{p-k_i(p)}, \ldots) \text{ si } j = h(p)$$

Situations particulières —

a) Méthode du type Gauss-Seidel multiprocesseur (Cf. [5] , [6] pour des études de cet algorithme dans le cas d'un opérateur affine sur R^α).

Les hypothèses (H_A) et (4.10) étant vérifiées, on fait le choix suivant pour $\{ h(p) \}$.

$$(4.16)\qquad h(p) = p \mod(\alpha) + 1$$

où (4.16) implique bien (4.8), (4.9).

b) Méthode à "conduite libre", multiprocesseur par "sous-domaine".

Nous faisons les hypothèses (H_A) et (H_B), et (4.10), nous considérons une suite $\{ h(p) \}$ vérifiant :

$$(4.17)\qquad \forall p \in \mathcal{N} \quad h(p) \in \mathfrak{I}_{p \mod(\beta)+1} .$$

$$(4.18)\qquad \forall \ell \in \{1, \ldots \beta\} , \ \forall j \in \mathfrak{I}_\ell \ : \{ p \in \mathcal{N} \mid h(p) = \{ j \} \} \text{ est infini.}$$

$$\forall p \in \mathcal{N} \ \left(\bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant \min(p,\beta-1)} h(p) \right) \ \mathfrak{I}_{p \mod(\beta)+1} = \emptyset .$$

d'où (4.8) est bien vérifiée et (4.18) implique (4.9).

On remarque de plus que : $\forall \ell \in \{1, \ldots, \beta\}$ le processeur P_ℓ effectue des calculs de fonctions $F_j(\ )$ pour $j \in \mathcal{J}_\ell$, et uniquement pour $j \in \mathcal{J}_\ell$.

Il s'agit donc bien d'un algorithme entrant dans le cadre de la définition 9, et d'un algorithme par "sous-domaine" au sens du commentaire C-5 § 4.1.

REMARQUE 11. *On trouvera dans J.-C. Miellou* [16], *une étude d'une méthode du type Southwell "multiprocesseur" par "sous-domaine". Une autre extension de la méthode de Southwell aux algorithmes R.C.R. a été obtenue par Charnay M.* [4 bis].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER A. *Méthodes numériques pour le décomposition, et la minimisation de fonctions non différentielles.* Numer Math., 18, 213-223, (1972).

[2] AUSLANDER A. – MARTINET B. *Méthodes de décomposition en théorie de l'optimisation.* Séminaire d'analyse numérique 1971-1972. Université de Clermont-Ferrand.

[3] CEA J. – GLOWINSKI R. *Sur des méthodes d'optimisation par relaxation.* Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle (analyse numérique R3), pp. 5-32, déc. 1973.

[4] CHARNAY M – MUSY F. – ROBERT F. *Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe.* (A paraître dans Aplikace Matematiky).

[4bis] CHARNAY M. Thèse de 3ème cycle. Université Claude Bernard, Lyon (1975).

[5] CHAZAN D. – MIRANKER W. *Chaotic relaxation.* Linear algebra and its applications, 2, pp. 199-222 (1969).

[6] DONNELLY J.D.P. *Periodic chaotic relaxation.* Linear algebra and its applications, 4, pp. 117-128 (1971).

[7] GLOWINSKI R *La méthode de relaxation.* Rendiconti di matematica, 14, Univ. de Rome, (1971)

[8] KRASNOSELSKII et al. *Approximate solution of operator équations.* Walters-Nordhoff-Publishing Groningen (1972).

[9] KULISH U. *Uber reguläre Zerlegungen von Matrizen und einige Anwendungen.* Numerische 11, pp 444-449 (1968).

[10] LUONG N X. Thèse de 3ème cycle. Université de Besançon (1975).

[11] MAREK I *Frobenius theory of positive operators . comparison theorems and applications.* SIAM J. Appl. Math. Vol 19, n°3, pp. 607-627, (1960).

[12] MIELLOU J-C. Thèse, Grenoble, Chap. I, (1970).

[13] MIELLOU J.-C. C.R.A.S., 273, série A, pp 1257-1260, (1971).

[14] MIELLOU J.-C C.R.A.S., 275, série A, pp. 1107-1110, (1972).

[15] MIELLOU J-C. C R.A.S , 278, série A, pp. 957- 960, (1974)

[16] MIELLOU J.-C. *Algorithmes de Relaxation Chaotique à retards - exposé au séminaire d'analyse numérique* – I.M.A. Grenoble 25 Avril 1974.

[17] MORICE PH. *Calcul parallèle, et équations aux dérivées partielles de type elliptique.* Colloque d'analyse numérique d'Anglet, (1971).

[18] ORTEGA J.-M. – RHEINBOLDT W.C. *Iterative solution of non linear equations in severale variables.* Academic Press, (1970).

[19] OSTROWSKI A. *Determinanten mit überwiegender Haupt diagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen.* Comm. Math. Helv. 30, pp. 175-210, (1955).

[20] OSTROWSKI A. *Iterative solution of linear systems of functionnal equations.* Journal Math. Anal. and Appli. 2, pp. 351-369, (1961).

[21] ROBERT F. *Blocs H-matrices et convergence des méthodes itératives classiques par Blocs.* Linear Algebra and its Applications, 2, pp. 223 - 265, (1969).

[22] ROSENFELD J. *A case study on programming for parallel processors.* Research Report RC 64, IBM, Watson Research Center, Korktown Heights, New-York, (1967).

[23] ROUX J. *E.D.F. – Bulletin de la direction des études et recherches.* Série C, Mathématiques – Informatique : n° 2, 1972, pp. 77-90 - n° 1, 1973, pp. 43-54.

[24] SCHECHTER S. *Relaxation methods for linear equations.* Comm. Pure and appl. Math. 12, pp. 313-335, (1959).

[25] SCHECHTER S. *Iteration methods for non linear problems.* Trans. A.M.S. 104, pp. 179-189, (1962).

[26] SCHROEDER J. *Computing error bounds in solving linear systems.* M.R.C. Tech. Report 242, July 1961. Univ. of Wiconsin.

[27] VARGA R.S. Matrix iterative Analysis, Prentice Hall. (1962).

[28] YOUNG D.M. *"Iterative solution of large linear systems".* Academic Press – 1971.

[29] CHARNAY F. – MUSY M. *Sur le Théorème de Stein-Rosenberg.* RAIRO R-2, p. 95-108 (Août 1974).

[30] FIORIOT J.-CH. – HUARD P. *Relaxation chaotique en optimisation.* Publication du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille. (1974).

[31] JACQUEMARD C.R.A.S. 279 Série A, pp. 887-889 (1974).

[32] MIELLOU J.-C. C.R.A.S. 280 Série A, pp. 233-236 (1975).