C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1421-1425, 1998
Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Algorithmes parallèles asynchrones pour des systèmes singuliers

Jacques BAHI

Laboratoire de calcul scientifique, UMR 6623, B.P. 527, 90016 Belfort cedex, France
Courriel : jacques.bahi@iut-bm.univ-fcomte.fr

(Reçu le 2 avril 1998, accepté après révision le 25 mai 1998)

Résumé. Nous donnons dans ce papier un résultat de convergence concernant les algorithmes asynchrones à retards bornés pour des problèmes linéaires de point fixe avec des opérateurs non expansifs relativement à une norme uniforme avec poids. Ce résultat nous permet de proposer des algorithmes parallèles convergeant vers la solution de systèmes singuliers consistants, incluant des M-matrices singulières. Le problème de Neumann, l'équation de Poisson dans une sphère avec conditions aux bords périodiques, discrétisés par des différences finies conduisent à des M-matrices singulières (*voir* [3]). Une caractéristique importante de ce travail est qu'il nous permet d'étudier les algorithmes deux niveaux. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Parallel asynchronous algorithms for a class of singular linear systems

Abstract. *In this paper we give a convergence result concerning parallel bounded delayed asynchronous algorithms for linear fixed point problems with nonexpansive linear mappings with respect to a weighted maximum norm. This allows us to propose parallel algorithms which converge to the solution of consistent singular systems, including singular M-matrices* (see *for more details* [3]). *An important characteristic of our technical framework is that we are able to describe two-stage algorithms.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

The space $\mathbf{C}^n$ is considered as the product $\mathbf{C}^n = \prod_{i=1}^{\alpha} \mathbf{C}^{n_i}$, where $n = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i$. Equip $\mathbf{C}^{n_i}$ with a norm $\|\cdot\|_i$. Consider the matrices $T^p = \left(T_{ij}^p\right)_{1\le i,j\le\alpha}$, where $p \in \mathbf{N}$, and the sequence,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{for a given } X^0 = (X_1^0, ..., X_\alpha^0), \text{ for } p = 1, 2, ..., \quad \text{for } i = 1, ..., \alpha, \\ \quad X_i^{p+1} = \left\{\begin{array}{ll} T_i^p(X_1^{s_1(p)}, ..., X_\alpha^{s_\alpha(p)}) & \text{if } i \in J(p), \\ X_i^p & \text{if } i \notin J(p), \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Note présentée par Pierre-Louis LIONS.

where $T_i^p X = \sum_{j=1}^{\alpha} T_{ij}^p X_j$, $J = \{J(p)\}_{p \in \mathbf{N}}$ is a sequence of nonempty subsets of $\{1, ..., \alpha\}$, and $S = \{s_1(p), ..., s_\alpha(p)\}_{p \in \mathbf{N}}$ is a sequence of $\mathbf{N}^\alpha$ such that:

(c1) $\forall i \in \{1, ..., \alpha\}$, the subset $\{p \in \mathbf{N}, i \in J(p)\}$ is infinite;

(c2) $\forall i \in \{1, ..., \alpha\}, \forall p \in \mathbf{N}, s_i(p) \le p$.

– (h0) Suppose that $\exists$ a subsequence $\{p_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ such that, $\forall i \in \{1, ..., \alpha\}, i \in J(p_k)$ and $s_i(p_k) = p_k$.

The sequence (1) describes the behavior of a parallel asynchronous algorithm defined by J and S (*see* [2], [8], [6], [1], [5]).

THEOREM 1. – *Suppose that* (h0) *is satisfied and that:*

– (h1) $\exists K \in \mathbf{N}_+^*$, *such that*, $\forall i \in \{1, ..., \alpha\}, \forall p \in \mathbf{N}$, $p - K + 1 \le s_i(p) \le p$;

– (h2) $\exists \gamma \in \mathbf{R}^n, \gamma \gg 0$, $\forall p \in \mathbf{N}$, T^p *is nonexpansive with respect to a norm*

$$\|X\|_{\infty,\gamma} = \max_{1 \le i \le \alpha} \frac{\|X_i\|_i}{\gamma_i};$$

– (h3) $\lim_{p \to \infty} T^p = Q$, *where* Q *is paracontracting with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$.

– (h4) $\mathcal{N}(I - Q) \subseteq \mathcal{N}(I - T^p), \forall p \in \mathbf{N}$;

then:

i) $\forall\ X^0 \in \mathbf{C}^n$ *the sequence* (3) *is convergent in* $\mathbf{C}^n$

ii) $X^* = \lim_{p \to \infty} X^p \in \mathcal{N}(I - Q)$.

The hypothesis (h0) means that at times (iterations) the processors are synchronized and all the components are updated. This subsequence can be chosen by the programmer. The hypothesis (h1) means that after K iterations, all the processors are supposed to have updated their own data.

Theorem 1 allows us to give the following convergence result for two-stage asynchronous algorithms, (*see* [4], [7]).

PROPOSITION 2. – *Suppose that the hypotheses* (h0), (h1) *are satisfied. Let* $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. *Suppose that the splittings* $A = M - N$ *and* $M = F - G$ *are respectively regular and weakly regular and that:*

(a) $\exists \gamma \in \mathbf{R}^n, \gamma \gg 0$ *such that* $A\gamma = 0$;

(b) $M^{-1}N$ *is paracontracting with respect to* $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$;

(c) *at least one of the two following conditions is satisfied:*

– $\forall i \in \{1, .., n\}, \exists j \in \{1, .., n\}, (N)_{ij} \ne 0$;

– $\forall i \in \{1, .., n\}, \exists j \in \{1, .., n\}, (F^{-1}G)_{ij} \ne 0$;

then any asynchronous two-stage algorithm defined by (1) *converges to a solution of* $Ax = b$.

---

1. Convergence d'algorithmes parallèles asynchrones associés à des matrices non expansives

Les ensembles $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ désignent le noyau et l'image d'une matrice quelconque A.

DÉFINITION 1. – Nous dirons qu'un vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ est non négatif (positif), et on notera $x \ge 0$ ($x \gg 0$), si toutes ses coordonnées sont non négatives (strictement positives).

DÉFINITION 2. – Une matrice $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ est dite *non expansive* par rapport à une norme $\|\cdot\|$ si,

$$\forall x \in \mathbf{C}^n, \|Ax\| \le \|x\| \ ;$$

A est dite *paracontractante* si, $x \ne Ax \Longleftrightarrow \|Ax\| < \|x\|$.

L'espace $\mathbf{C}^n$ sera considéré comme le produit $\mathbf{C}^n = \prod_{i=1}^{\alpha} \mathbf{C}^{n_i}$, où $n = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i$. Munissons $\mathbf{C}^{n_i}$ d'une norme $\|\cdot\|_i$.

Considérons des matrices complexes $T^p = \left(T_{ij}^p\right)$ où $p \in \mathbf{N}$.

Soit la suite définie dans $\mathbf{C}^n$ par :

$$\begin{cases} \text{étant donné } X^0 = (X_1^0, ..., X_\alpha^0), \text{ pour } p = 1, 2..., \text{ pour } i = 1, ..., \alpha, \\ X_i^{p+1} = \begin{cases} T_i^p(X_1^{s_1(p)}, ..., X_\alpha^{s_\alpha(p)}) & \text{si } i \in J(p), \\ X_i^p & \text{si } i \notin J(p), \end{cases} \end{cases}$$

où $T_i^p X = \sum_{j=1}^{\alpha} T_{ij}^p X_j$, $J = \{J(p)\}_{p \in \mathbf{N}}$ est une suite de sous-ensembles non vides de $\{1, ..., \alpha\}$ et $S = \{s_1(p), ..., s_\alpha(p)\}_{p \in \mathbf{N}}$ est une suite de $\mathbf{N}^\alpha$ telle que,

(c1) $\forall l \in \{1, ..., \alpha\}$, le sous-ensemble $\{p \in \mathbf{N}, l \in J(p)\}$ est infini ;

(c2) $\forall l \in \{1, ..., \alpha\}, \forall p \in \mathbf{N}$, $s_l(p) \leq p$;

– (h0) Supposons que $\exists$ une sous-suite $\{p_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ telle que, $\forall i \in \{1, ..., \alpha\}, i \in J(p_k)$ et $s_i(p_k) = p_k$.

Remarque 1. – (1) décrit le comportement d'un algorithme itératif exécuté de façon asynchrone sur un calculateur parallèle comportant α processeurs, à chaque itération $p+1$ le processeur α_i calcule X_i^{p+1} grâce à (1).

– $J(p)$ est le sous-ensemble des composantes relaxées à l'itération p ;

– $s_l(p)$ correspond au retard éventuel dû au $l^{\text{ème}}$ processeur lors du calcul du $l^{\text{ème}}$ bloc à l'itération p ;

– si l'on choisit $s_i(p) = p, \forall i \in \{1, ..., \alpha\}$, alors (1) décrit le comportement d'un algorithme synchrone (sans retard).

(*Voir* à ce sujet [2], [8], [6], [1], [5].)

THÉORÈME 3. – *Supposons que :*

– (h1) $\exists K \in \mathbf{N}_+^*$, *tel que*, $\forall i \in \{1, ..., \alpha\}, \forall p \in \mathbf{N}$, $p - K + 1 \leq s_i(p) \leq p$;

– (h2) $\exists \gamma \in \mathbf{R}^n, \gamma \gg 0$, $\forall p \in \mathbf{N}$, T^p *est non expansive par rapport à la norme*

$$\|X\|_{\infty,\gamma} = \max_{1 \leq i \leq \alpha} \frac{\|X_i\|_i}{\gamma_i} \ ;$$

– (h3)

$$\lim_{p \to \infty} T^p = Q,$$

où Q est paracontaractante par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$;

– (h4) $\mathcal{N}(I - Q) \subseteq \mathcal{N}(I - T^p)$, $\forall p \in \mathbf{N}$;

alors :

i) *pour tout* $X^0 \in \mathbf{C}^n$ *la suite* (1) *est convergente dans* $\mathbf{C}^n$;

ii) $X^* = \lim_{p \to \infty} X^p \in \mathcal{N}(I - Q)$.

Démonstration. – Elle se fait en quatre étapes :

i) $\{X^p\}_{p \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée grâce à (h2) et (c2). Considérons la sous-suite bornée de (1), $\{X^{p_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$, où p_k est définie par (h0), supposons que $\lim_{k \to \infty} X^{p_k} = X^*$ (ou une sous-suite de $\{X^{p_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$).

ii) $\left\{\|T^{p_k} X^{p_k}\|_{\infty,\gamma}\right\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers $\|X^*\|_{\infty,\gamma}$, grâce à (h0), (h1) et i).

iii) $X^* \in \mathcal{N}(I - Q)$, grâce à (h0), (h3), i) et ii).
iv) $\lim\limits_{p \to \infty} X^p = X^*$, grâce à (h1), (h2), (h4), i) et iii).

Remarque 2. – L'hypothèse (h0) signifie que de temps à autre (après quelques itérations) les processeurs mettent à jour leurs données et se synchronisent en les échangeant. Cette sous-suite peut être programmé par l'utilisateur.

L'hypothèse (h1) signifie que les retards dus aux communications entre processeurs et aux différents temps de calcul sont bornés, ce qui revient à supposer qu'au bout d'au plus K itérations, tous les processeurs finissent par mettre à jour leurs données.

2. Algorithmes asynchrones pour les systèmes singuliers

Nous nous intéressons à la résolution des systèmes linéaires consistents :

$$Ax = b, \tag{2}$$

où $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ est singulière et $b \in \mathcal{R}(A)$.

Considérons la décomposition par blocs de $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq\alpha}$, les vecteurs x et b sont décomposés de façons compatibles.

Considérons une décomposition de A sous la forme :

$$A = M - N, \tag{3}$$

où $M = \text{diag}(A_{11}, \ldots, A_{\alpha\alpha})$.

– (h5) Nous supposons que la matrice M est non singulière.

PROPOSITION 4. – *Supposons que* (h0), (h1) *et* (h5) *ont lieu, et que :*
(a) $\exists\gamma \in \mathbf{R}^n, \gamma \gg 0$, *tel que*

$$A\gamma \geq 0\ ;$$

(b) *la décomposition* (3) *est faiblement régulière, alors la matrice* $M^{-1}N$ *est non expansive par rapport à la norme* $\|\cdot\|_{\infty,\Gamma}$, *où* $\Gamma = \gamma = (\Gamma_1, ..., \Gamma_\alpha)$. *Si, de plus,*
(c) $M^{-1}N$ *est paracontractante par rapport à la norme* $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$,
alors tout algorithme asynchrone associé au problème de point fixe par blocs $X = M^{-1}NX + M^{-1}b$ *converge vers une solution du problème* (2).

Démonstration. – On applique le théorème 3 avec $T^p = M^{-1}N$, $\forall p \in \mathbf{N}$.

3. Algorithmes asynchrones deux niveaux pour les systèmes singuliers

Pour $i \in \{1, ..., \alpha\}$, décomposons A_{ii} sous la forme $A_{ii} = F_i - G_i$, donc

$$M = F - G, \tag{4}$$

où $F = \text{diag}(F_1, \ldots, F_\alpha)$

– (h6) Supposons que F soit inversible.

Les algorithmes deux niveaux résultent de la possibilité qu'un ou plusieurs processeurs calculent leurs données itérativement en utilisant (4), au lieu de les calculer exactement. Supposons qu'à l'itération externe k, le processeur i effectue p_i^k itérations internes, alors le processeur i calcule le bloc i (s'il est relaxé) grâce à (*voir* [7]) :

$$T_i^{p_i^k} X = \left(F_i^{-1} G_i\right)^{p_i^k} X_i + \sum_{j=0}^{p_i^k - 1} \left(F_i^{-1} G_i\right)^j F_i^{-1} (NX + b)_i. \tag{5}$$

On obtient alors la proposition :

PROPOSITION 5. – *Soit* $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. *Supposons que* (h0), (h1), (h6) *ont lieu, que les décompositions* $A = M - N$ *et* $M = F - G$ *sont respectivement régulière, et faiblement régulière, et que :*
(a) $\exists \gamma \in \mathbf{R}^n, \gamma \gg 0$ *tel que* $A\gamma = 0$;
(b) $M^{-1}N$ *est paracontractante par rapport à* $\|\cdot\|_{\infty,\gamma}$;
(c) *une des deux conditions suivantes est satisfaite :*
– (5) *est choisi tel que,* $\forall i \in \{1,..,n\}, \exists j \in \{1,..,n\}, (N)_{ij} \neq 0$;
– (6) *est choisi tel que,* $\forall i \in \{1,..,n\}, \exists j \in \{1,..,n\}, (F^{-1}G)_{ij} \neq 0$;
alors tout algorithme deux niveaux asynchrone défini par (1) *et* (5) *converge vers une solution de* (2).

Démonstration. – La condition (c) et la condition (a) entraînent la convergence de $T_i^{p_i^k}$ vers $M^{-1}N$ paracontractante d'après (b), on applique le théorème 3.

Remarque 3. – Les hypothèses (a) des propositions 4 et 5 sont automatiquement vérifiées pour les M-matrices singulières irréductibles (*voir* [3]).

Références bibliographiques

[1] Baudet G.M., Billingsley P., Asynchronous iterative methods for multiprocessors, J. ACM 25 (1978) 226–244.
[2] Chazan D., Miranker W.L., Chaotic relaxation, Lin. Alg. Appl. 2 (1969) 199–222.
[3] Berman A., Plemmons R.J., Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, New York, third edition, 1979. Reprinted by SIAM, Philadelphia, 1994.
[4] Bru R., Elsner L., Neumann M., Convergence of infinite products of matrices and inner-outer iteration schemes, ETNA 2 (1994) 183–193.
[5] El Tarazi M.N., Some convergence results for asynchronous algorithms, Numer. Math. 39 (1982) 325–340.
[6] Miellou J.-C., Algorithmes de relaxation chaotique à retard, RAIRO (R-1) (1975) 55–82.
[7] Nichols N.K., On the Convergence of Two-Stage Iterative Processes for Solving Linear Equations, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973) 460–469.
[8] Robert F., Charnay M., Musy F., Itérations chaotiques série parallèle pour des équations non-linéaires de point fixe, Apl. Mat. 20 (1975) 1–38.