Numer. Math. 39, 325–340 (1982)

Numerische
Mathematik

Some Convergence Results for Asynchronous Algorithms

Mouhamed Nabih El Tarazi

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kuwait University, P.O. Box 5969, Kuwait, Kuwait

Resumé. Nous présentons dans cet article des résultats de convergence des algorithmes asynchrones basés essentiellement sur la notion classique de contraction.

Nous généralisons, en particulier, tous les résultats de convergence de ces algorithmes qui font l'hypothèse de contraction en norme vectorielle qui récemment a été très souvant utilisée.

Par ailleurs, l'hypothèse de contraction en norme vectorielle peut se trouver difficile, voire impossible à vérifier pour certains problèmes qui peuvent être cependant abordés dans le cadre de la contraction classique que nous adoptons.

Summary. In this paper we present convergence results for the asynchronous algorithms based essentially on the notion of classical contraction.

We generalize, in particular, all convergence results for those algorithms which are based on the vectorial norm hypothesis, in wide spread use recently.

Certain problems, for which the vectorial norm hypothesis can be difficult or even impossible to verify, can nontheless be tackled within the scope of the classical contraction that we adopte.

Subject classifications. AMS(MOS): 65H10; CR: 5.15.

Introduction

De nombreux problèmes d'équations et d'inéquations fonctionnelles, de contrôle optimal peuvent (après discrétisation) être mis sous la forme d'équation de point fixe portant sur un grand nombre de variables.

Compte tenu du volume important d'informations à traiter pour résoudre ce genre de problème ou de la nécessité de le résoudre «rapidement», les moyens classiques de calcul sur un monoprocesseur se révèlent parfois insuffi-

0029-599X/82/0039/0325/$03.20

sants. C'est pourquoi nous assistons depuis quelques années au développement de moyens de calculs parallèles et des études correspondantes.

En vue d'approximer une solution de telles équations de point fixe, Chazan, D., Miranker, W.L. [4] ont introduit les itérations chaotiques (appelées aussi itérations chaotiques à retards). L'introduction des «retards» permet de constituer des modèles d'interactions de processus de calcul évoluant en parallèle de façon asynchrone tels que ceux que l'on peut envisager à propos de l'utilisation du multiprocesseur, en particulier de ceux parfois dénommés MIMD (Multiples Instructions, Multiples Données).

Les itérations asynchrones (terminologie donnée par Baudet, G.M. [1, 2] aux itérations chaotiques lorsque les retards peuvent être non bornés) ont la bonne propriété de regrouper sous un même formalisme les biens classiques méthodes de relaxations séquentielles (Gauss-Seidel, Southwell), des méthodes parallèles synchrones (Jacobi), parallèles asynchrones et des algorithmes mixtes asynchrones.

Les études faites concernant ce modèle d'algorithmes sont souvent liées à la notion d'ordre partiel:

- soit directement (cf. par exemple Couzot, P. [5], El Tarazi, M.N. [6–8], Jacquemard, C. [9, 10], Miellou, J.C. [14–16]).

- soit indirectement via la notion de norme vectorielle (hypothèse difficile, voire impossible à vérifier pour certains problèmes) (cf. par exemple Baudet, G.M. [1, 2], Charnay, M. [3], Robert, F., Charnay, M., Musy, F. [20], Chazan, D., Miranker, W.L. [4], El Tarazi, M.N. [6], Miellou, J.C. [12, 13]).

Des expérimentations numériques de calcul en parallèle sont faites par:

- Baudet, G.M. [1, 2] sur un multiprocesseur de type MIMD (un CMMP)

- El Tarazi, M.N. dans le chapitre VI de [8] sur un exemple non linéaire, Julliand, J., Perrin, G.R., Spiteri, P. [11], Mongenet, C. [17], Rosenfeld, J.L. [21] à l'aide des simulations.

Dans cet article nous allons rappeler la définition des algorithmes asynchrones et nous donnerons un résultat de convergence très général (théoreme principal 3.4.) de ces algorithmes en n'utilisant pas, contrairement à ce qui a été fait jusqu'à présent, l'hypothèse de contraction en norme vectorielle, mais en la remplaçant par l'hypothèse de contraction classique. Il en découlera deux corollaires 3.5 et 3.6., généralisant ainsi tous les résultats faisant l'hypothèse de contraction en norme vectorielle notamment ceux de Baudet, G.M. [1, 2], Robert, F., Charnay, M., Musy, F. [20] et Miellou, J.C. [12, 13]. Nous donnerons aussi un résultat de convergence locale des algorithmes asynchrones (théorème 3.11.) généralisant le théorème classique d'Ostrowski (cf. Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C. [18] page 300) concernant l'algorithme des approximations successives et le théorème de Robert, F. [19] concernant les relaxations chaotiques. (Rappelons que Robert, F. considère les relaxations chaotiques sans les retards et donc sans asynchronisme).

Nous rappellerons ensuite la définition des algorithmes asynchrones avec mémoire (une extension par Baudet, G.M. [1, 2] de la définition des algorithmes mixtes de type Newton-relaxations chaotiques à retards qui a été donnée par El Tarazi, M.N. [6, 7]) concernant un autre type de problèmes de point fixe. Nous donnerons un résultat de convergence de ces algorithmes (en nous ramenant au cas d'algorithmes asynchrones) généralisant celui donné par Baudet, G.M. [1, 2].

1. Le premier type de problèmes de point fixe

On considère dans la suite α-espaces de Banach réels E_i de norme $\|.\|_i$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$.

On considère le produit topologique:

$$E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i. \tag{1}$$

Tout élément $u \in E$ sera noté:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_\alpha), \quad \text{avec} \quad u_i \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha. \tag{2}$$

On munit l'espace E de la norme:

$$]|u|[= \operatorname*{Max}_i \frac{1}{\gamma_i} \|u_i\|_i \tag{3}$$

où

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}, \qquad \gamma_i \in \mathbb{R}, \ \gamma_i > 0. \tag{4}$$

On considère le problème de point fixe:

$$u = G(u), \qquad u \in D(G) \tag{5}$$

où

$$G(u) = (G_1(u), G_2(u), \ldots, G_\alpha(u)) \tag{6}$$

est une application de E dans E de domaine de définition $D(G)$.

2. Algorithmes asynchrones

Un algorithme asynchrone correspondant à l'application G: $D(G) \subset E \to E$, et partant du vecteur initial donné $u^0 \in D(G)$ est la suite $\{u^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ des vecteurs de E définie par:

$$u_i^{p+1} = \begin{cases} G_i(\ldots, u_k^{s_k(p)}, \ldots) & \text{si } i \in J(p) \\ u_i^p \quad \text{si } i \notin J(p) \end{cases} \tag{7}$$

$$i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}.$$

Ceci à condition bien entendu que $\forall p \in \mathbb{N}$ les arguments figurant au second membre de (7) soient bien dans $D(G)$

où

$J = \{J(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties non vides de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \alpha\}$. $J(p)$ correspond au sous-ensemble des composantes relaxées à l'étape p.

$S = \{(s_1(p), s_2(p), \ldots, s_\alpha(p))\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}^\alpha$. ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

En outre J et S vérifient:

(8.1) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid i \in J(p)\}$ est infini.

(8.2) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $s_i(p) \leqq p$.

(8.3) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\lim_{p \to \infty} s_i(p) = \infty$.

L'algorithme (7) sera noté par (G, u^0, J, S), (notation de Baudet, G.M. [1, 2]).

3. Étude de convergence des algorithmes asynchrones

Avant d'aborder l'étude de convergence des algorithmes asynchrones, nous considérons la définition et le lemme suivants:

3.1. Définition. On considère une suite $S = \{(s_1(p), s_2(p), \ldots, s_\alpha(p))\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^\alpha$ et on lui associe une suite $\{s(p)\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ définie par

$$s(p) = \operatorname*{Min}_i s_i(p). \tag{9}$$

Il est clair que l'on a:

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\},\ \lim_{p \to \infty} s_i(p) = \infty) \Rightarrow \lim_{p \to \infty} s(p) = \infty. \tag{10}$$

3.2. Définition. On considère deux suites J et S vérifiant (8.1) à (8.3) et la suite s associée à S définie par (9). On a donc:

$$\lim_{p \to \infty} s(p) = \infty \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad s(p) \leqq p. \tag{11.1}$$

On définit une suite d'entiers naturels $\{m_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de la façon suivante:

(11.2) m_0 est le plus petit entier naturel tel que

$$\bigcup_{0 \leqq s(p) \leqq p < m_0} J(p) = \{1, 2, \ldots, \alpha\}$$

m_0 existe par l'hypothèse (8.1) et par (11.1). Supposons connus $m_0, m_1, \ldots, m_\ell$, on définit $m_{\ell+1}$ comme étant le plus petit entier naturel tel que:

$$\bigcup_{m_\ell \leqq s(p) \leqq p < m_{\ell+1}} J(p) = \{1, 2, \ldots, \alpha\} \tag{11.3}$$

$m_{\ell+1}$ existe par (8.1) et (11.1).

3.3 Lemme. *Si l'on a:*

(12.1) $D=\prod_{i=1}^{\alpha} D_i \subset E; \quad D_i \subset E_i \qquad \forall\, i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}.$

(12.2) $\{u^*, u^0, u^1, \ldots, u^p\} \subset D$ *tels que*
$\forall\, 0 \leqq q \leqq p$ *on a:* $]|u^q - u^*|[\leqq \bar{r}, \ \bar{r}\in\mathbb{R}_+, \ p\in\mathbb{N}^*.$

(12.3) $(s_1(p), s_2(p), \ldots, s_\alpha(p))\in\mathbb{N}^\alpha$ *tel que* $\forall\, i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}$
$s_i(p) \leqq p$

alors

(12.4) $$v=(u_1^{s_1(p)}, u_2^{s_2(p)}, \ldots, u_\alpha^{s_\alpha(p)})\in D \quad et \quad]|v-u^*|[\leqq \bar{r}.$$

Démonstration. Compte tenu de (12.2) et (12.3) et pour $i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}$ fixé on a:

$$u^{s_i(p)}\in D \quad \text{et} \quad]|u^{s_i(p)} - u^*|[\leqq \bar{r}.$$

Or v_i est la ième composante de $u^{s_i(p)}$, donc $v_i\in D_i$ et par suite $v\in D$. D'autre part, $\forall\, i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}$ on a:

$$\frac{1}{\gamma_i}\, \|u_i^{s_i(p)} - u_i^*\|_i \leqq]|u^{s_i(p)} - u^*|[\leqq \bar{r}$$

donc

$$\frac{1}{\gamma_i}\, \|v_i - u_i^*\|_i \leqq \bar{r}$$

d'où

$$]|v-u^*|[\leqq \bar{r}.$$

3.4. Théorème principal. *Soit G une application de $D(G)\subset E$ dans E, on suppose*

(13) $D(G)=\prod_{i=1}^{\alpha} D_i(G)$

(14) $\exists\, u^*\in D(G)$ *tel que* $u^*=G(u^*)$

(15) $G(D(G))\subset D(G)$

(16) $\forall\, u\in D(G)$ *on a* $]|G(u)-G(u^*)|[\leqq \beta\,]|u-u^*|[$
avec $\beta\in\mathbb{R}, \ 0<\beta<1.$

alors tout algorithme asynchrone (G, u^0, J, S) correspondant à G et partant de $u^0\in D(G)$ converge vers u^* le point fixe de G.

Démonstration. Elle se décompose en deux parties:

1ère partie

Montrons que (7) définit bien une suite $\{u^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ restant dans $D(G)$ et vérifiant:

(17) $$]|u^p - u^*|[\leqq \bar{r} \quad \text{avec} \quad \bar{r}=]|u^0 - u^*|[.$$

Nous raisonnons par récurrence sur p; supposons que $\forall q$: $0 \leqq q \leqq p$, u^q existe, $u^q \in D(G)$ et $]|u^q - u^*|[\leqq \bar{r}$ d'où et par le lemme 3.3 on a:

$$v = (u_1^{s_1(p)}, \ldots, u_\alpha^{s_\alpha(p)}) \in D(G). \tag{18}$$

Par conséquent et compte tenu de (18), (7), (13) et (15). u^{p+1} est bien défini, et $u^{p+1} \in D(G)$.

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ fixé:

- ou bien $i \notin J(p)$ donc $u_i^{p+1} = u_i^p$ ce qui implique en utilisant l'hypothèse de récurrence:

$$\frac{1}{\gamma_i} \|u_i^{p+1} - u_i^*\|_i = \frac{1}{\gamma_i} \|u_i^p - u_i^*\|_i \leqq \bar{r}. \tag{19}$$

- ou bien $i \in J(p)$ donc $u_i^{p+1} = G_i(v)$, en utilisant (14), (16) et le lemme 3.3, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_i} \|u_i^{p+1} - u_i^*\|_i &= \frac{1}{\gamma_i} \|G_i(v) - G_i(u^*)\|_i \leqq]|G(v) - G(u^*)|[\\ &\leqq \beta]|v - u^*|[\leqq \beta \bar{r} \leqq \bar{r} \end{aligned} \tag{20}$$

(19) et (20) impliquent que $]|u^{p+1} - u^*|[\leqq \bar{r}$.

2ème partie

Soit $\{m_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ la suite définie par 3.2. Montrons que $\forall \ell \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ et $p \geqq m_\ell$ on a: $]|u^p - u^*|[\leqq \beta^\ell \bar{r}$. Ceci montre la convergence de $\{u^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ vers u^*. D'après la définition de m_0 on a:

(21) $\forall p \geqq m_0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\exists q$: $0 \leqq s(q) \leqq q < p$
tel que $u_i^p = u_i^{q+1}$ et $i \in J(q)$.

Par suite

$$u_i^p = u_i^{q+1} = G_i(v), \qquad v = (u_1^{s_1(q)}, \ldots, u_\alpha^{s_\alpha(q)}) \in D(G).$$

En utilisant (14), (16), la première partie et le lemme 3.3, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_i} \|u_i^p - u_i^*\|_i &= \frac{1}{\gamma_i} \|u_i^{q+1} - u_i^*\|_i = \frac{1}{\gamma_i} \|G_i(v) - G_i(u^*)\|_i \\ &\leqq]|G(v) - G(u^*)|[\leqq \beta]|v - u^*|[\leqq \beta \bar{r}. \end{aligned}$$

Or, les inégalités précédentes ont lieu $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ (avec chaque fois q dépend de i), donc

$$\forall p \geqq m_0, \quad \text{on a} \quad]|u^p - u^*|[\leqq \beta \bar{r} \leqq \beta^0 \bar{r}. \tag{22}$$

Hypothèse d'induction

$$\forall p \geqq m_\ell, \quad \text{on a} \quad]|u^p - u^*|[\leqq \beta^\ell \bar{r} \tag{23}$$

alors compte tenu de la définition de $m_{\ell+1}$ on a:

(24) $\forall p \geqq m_{\ell+1}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\exists q$: $m_\ell \leqq s(q) \leqq q < p$
tel que $u_i^p = u_i^{q+1}$ et $i \in J(q)$

d'où:

$$(25) \qquad u_i^p = u_i^{q+1} = G_i(v) \quad \text{avec} \quad v = (u_1^{s_1(q)}, \ldots, u_\alpha^{s_\alpha(q)}) \in D(G).$$

Or $\forall k \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ on a $s(q) \leqq s_k(q)$, donc $m_\ell \leqq s_k(q)$ d'où et compte tenu de (23), on a $\forall k \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$:

$$\frac{1}{\gamma_k} \|v_k - u_k^*\|_k = \frac{1}{\gamma_k} \|u_k^{s_k(q)} - u_k^*\|_k \leqq]|u^{s_k(q)} - u^*|[\leqq \beta^\ell \bar{r}$$

d'où

$$]|v - u^*|[\leqq \beta^\ell \bar{r}$$

d'où et en utilisant (14) et (16) on a:

$$\frac{1}{\gamma_i} \|u_i^p - u_i^*\|_i = \frac{1}{\gamma_i} \|u_i^{q+1} - u_i^*\|_i = \frac{1}{\gamma_i} \|G_i(v) - G_i(u^*)\|_i$$
$$\leqq]|G(v) - G(u^*)|[\leqq \beta]|v - u^*|[\leqq \beta^{\ell+1} \bar{r}.$$

Or, les inégalités précédentes ont lieu $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ donc:

$$\forall p \geqq m_{\ell+1} \quad \text{on a} \quad]|u^p - u^*|[\leqq \beta^{\ell+1} \bar{r}.$$

3.5. Corollaire. *Soit G une application de $D(G) \subset E$ dans E, on suppose*

(26) $D(G) = \prod_{i=1}^{\alpha} D_i(G)$

(27) *$D(G)$ est une partie fermée dans E*

(28) $G(D(G)) \subset D(G)$

(29) $\forall u, v \in D(G)$ *on a* $]|G(u) - G(v)|[\leqq \beta]|u - v|[$
avec $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$

alors tout algorithme asynchrone (G, u^0, J, S) correspondant à G et partant de $u^0 \in D(G)$ converge vers $u^* \in D(G)$, unique point fixe de G.

Démonstration. On applique le classique théorème de point fixe pour les applications contractantes pour dire qu'il existe $u^* \in D(G)$, unique point fixe de G, et ensuite on applique le théorème 3.4.

3.6. Corollaire. *Soit G une application de $D(G) \subset E$ dans E, on suppose*

(30) $\overset{0}{\widehat{D(G)}} \neq \emptyset$ *où* $\overset{0}{\widehat{D(G)}}$ *est l'intérieur de* $D(G)$

(31) $\exists u^* \in \overset{0}{\widehat{D(G)}}$ *tel que* $u^* = G(u^*)$

(32) $\forall u \in D(G)$ *on a* $]|G(u) - G(u^*)|[\leqq \beta]|u - u^*|[$
avec $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$.

$\forall r \geqq 0$, soit $B(u^*, r)$ la boule ouverte de centre u^* et de rayon r dans E muni de la norme $]|.|[$ définie dans (3). *Soit*

$$\bar{r} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid B(u^*, r) \subset D(G)\} \tag{33}$$

$\bar{r} > 0$ par les hypothèses (30) *et* (31), *éventuellement $\bar{r} = +\infty$ si $D(G) = E$. Alors tout algorithme asynchrone (G, u^0, J, S) correspondant à G et partant de $u^0 \in B(u^*, \bar{r})$ converge vers u^*, unique point fixe de G.*

Démonstration. On a:

$$B(u^*, \bar{r}) = \prod_{i=1}^{\alpha} B_i(u_i^*, \gamma_i \bar{r}) \tag{34}$$

où:

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $B_i(u_i^*, \gamma_i \bar{r})$ est la boule ouverte de centre u_i^* et de rayon $\gamma_i \bar{r}$ dans E_i muni de la norme $\|.\|_i$.

D'autre part, on a:

$$G[B(u^*, \bar{r})] \subset B(u^*, \bar{r}) \tag{35}$$

car si $v \in B(u^*, \bar{r})$, alors $]|v - u^*|[< \bar{r}$, mais

$$]|G(v) - G(u^*)|[\leqq \beta]|v - u^*|[\leqq \beta \bar{r} < \bar{r}$$

donc $G(v) \in B(u^*, \bar{r})$.

Il suffit donc de prendre la restriction de G sur $B(u^*, \bar{r})$ et appliquer le théorème 3.4.

3.7. T-contraction (i.e. contraction en norme vectorielle) et contraction

On considère l'application η de E dans $\mathbb{R}_+^\alpha$ qui à tout $v = (v_1, v_2, \ldots, v_\alpha) \in E$ fait correspondre $\eta(v) \in \mathbb{R}_+^\alpha$ défini par:

$$\eta(v) = (\|v_1\|_1, \|v_2\|_2, \ldots, \|v_\alpha\|_\alpha)^t. \tag{36}$$

L'application η est appelée une norme vectorielle sur E.

Une application G de $D(G) \subset E$ dans E est dite T-contractante sur $D(G)$ (ou une T-contraction sur $D(G)$) si $\forall u, v \in D(G)$ l'on a:

$$\eta[G(u) - G(v)] \leqq T\eta(u - v) \tag{37}$$

où

(38) T est une matrice non négative de type (α, α) dont le rayon spectral $\rho(T) < 1$.

G est dite T-contractante en v ($v \in D(G)$ fixé) si l'on a (37) et (38) $\forall u \in D(G)$. La T-contraction est donc la contraction en norme vectorielle. On a le résultat suivant qui donne une relation entre la T-contraction et la contraction:

3.8. Proposition (cf. Miellou, J.C. [13]). *Soit G une application de $D(G) \subset E$ dans E. Si $u, v \in D(G)$ tels que l'on a* (37) *et* (38) *alors* $\forall \beta \in]\rho(T), 1[$, $\exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\alpha$ *des nombres strictement positifs tels que:*

$$]|G(u) - G(v)|[\leqq \beta]|u - v|[\tag{39}$$

où $]|.|[$ *est définie par* (3).

3.9. Remarque. Le théorème 3.4 ainsi que les corollaires 3.5 et 3.6 généralisent tous les résultats faisant l'hypothèse de T-contraction ou de T-contraction en le point fixe u^* notamment ceux de Baudet, G.M. [1, 2]. Robert, F., Charnay, M., Musy, F. [20] et Miellou, J.C. [12, 13]. Par ailleurs l'hypothèse de T-contraction peut se trouver difficile, voire impossible à vérifier pour certains problèmes qui peuvent être cependant abordés dans le cadre de la contraction.

3.10. Lemme. *Soient G une application de $D(G) \subset E$ dans E et u^* est un élément de G. On suppose que l'application G est F-dérivable (dérivable au sens de Fréchet) en u^* et:*

$$\rho\{M(G'(u^*))\} < 1 \tag{40}$$

où, pour $A = (A_{ik}) \in \mathscr{L}(E, E)$ on définit:

$$\|A_{ik}\|_{ik} = \operatorname*{Sup}_{\|u_k\|_k \neq 0} \frac{\|A_{ik} u_k\|_i}{\|u_k\|_k} \tag{41}$$

et

$$M(A) = (\|A_{ik}\|_{ik}) \tag{42}$$

et $\rho(M)$ est le rayon spectral de M.

Alors il existe un voisinage V_{u^*} de u^* sur lequel G est T-contractante en u^*.

Démonstration. On note $G'(u^*) = (G'_{ik}(u^*))_{i,k=1,2,\ldots,\alpha}$ et on considère sur E la norme:

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{\alpha} \|u_i\|_i. \tag{43}$$

On a $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ et $\forall v \in D(G)$:

$$G_i(v) - G_i(u^*) = G_i(v) - G_i(u^*) - \sum_{k=1}^{\alpha} G'_{ik}(u^*)(v_k - u_k^*) + \sum_{k=1}^{\alpha} G'_{ik}(u^*)(v_k - u_k^*)$$

d'où $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\forall v \in D(G)$ on a:

$$\|G_i(v) - G_i(u^*)\|_i \leqq \left\| G_i(v) - G_i(u^*) - \sum_{k=1}^{\alpha} G'_{ik}(u^*)(v_k - u_k^*) \right\|_i + \sum_{k=1}^{\alpha} \|G'_{ik}(u^*)(v_k - u_k^*)\|_i. \tag{44}$$

En utilisant la définition de la F-dérivée en u^*, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall v \in D(G)$ on a:

$$\|v-u^*\|_1 \leqq \delta \Rightarrow \|G(v)-G(u^*)-G'(u^*)(v-u^*)\|_1 \leqq \varepsilon \|v-u^*\|_1$$

d'où $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall v \in D(G)$ vérifiant $\|v-u^*\|_1 \leqq \delta$ on a pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$

$$\left\| G_i(v) - G_i(u^*) - \sum_{k=1}^{\alpha} G'_{ik}(u^*)(v_k - u_k^*) \right\|_i \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{\alpha} \|v_k - u_k\|_k. \tag{45}$$

D'autre part, en utilisant (41) on a $\forall i, k \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ et $\forall v \in D(G)$:

$$\|G'_{ik}(u^*)(v_k - u_k^*)\|_i \leqq \|G'_{ik}(u^*)\|_{ik} \cdot \|v_k - u_k^*\|_k \tag{46}$$

de (44), (45) et (46) on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall v \in D(G)$ vérifiant $\|v-u^*\|_1 \leqq \delta$ on a $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$

$$\|G_i(v) - G_i(u^*)\|_i \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{\alpha} \|v_k - u_k\|_k + \sum_{k=1}^{\alpha} \|G'_{ik}(u^*)\|_{ik} \cdot \|v_k - u_k^*\|_k$$

d'où:

$$\eta[G(v) - G(u^*)] \leqq [B_\varepsilon + M(G'(u^*))]\, \eta(v-u^*) = T_\varepsilon \eta(v-u^*)$$

avec B_ε est une matrice de type (α, α) dont les coefficients sont égaux à ε. Il est clair que si $\rho\{M(G'(u^*))\} < 1$, on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\rho(T_{\varepsilon_0}) < 1$, d'où le résultat.

3.11. Théorème. *Soient G une application de $D(G) \subset E$ dans E et u^* est un point fixe de G. On suppose que l'application G est F-dérivable en u^* et*

$$\rho\{M(G'(u^*))\} < 1$$

alors il existe un voisinage V_{u^*} de u^* sur lequel G est T-contractante en u^* de plus tout algorithme asynchrone (G, u^0, J, S) correspondant à G et partant de $u^0 \in B(u^*, \bar{r}) \subset V_{u^*}$ converge vers u^* unique point fixe de G dans V_{u^*}. ($\bar{r} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid B(u^*, r) \subset V_{u^*}\}$).

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 3.10, la proposition 3.8 et le corollaire 3.6 sur la restriction de G sur V_{u^*}.

3.12. Remarque. Le théorème 3.11 constitue une généralisation du théorème classique d'Ostrowski (cf. Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C. [18] page 300) concernant l'algorithme des approximations successives. D'autre part, ce théorème généralise aussi celui de Robert, F. [19] concernant les relaxations chaotiques sans les retards.

4. Le deuxième type de problèmes de point fixe

On considère l'espace E défini par (1) et muni de la norme (3). On considère le problème dit aussi de point fixe suivant:

(47) $u=H(u, u, \ldots, u), \ (u, u, \ldots, u) \in D(H)$

où:

(48) H est une application de $D(H) \subset E^m$ dans E

et

(49) $H(u^1, \ldots, u^m)=[H_1(u^1, \ldots, u^m), H_2(u^1, \ldots, u^m), \ldots, H_\alpha(u^1, \ldots, u^m)]$.

E^m sera muni de la norme:

$$\|U\|=\|(u^1, \ldots, u^m)\|=\max_{1 \leqq i \leqq m}]|u^i|[\tag{50}$$

où $\forall\, U \in E^m, \ U=(u^1, \ldots, u^m)$.

5. Algorithmes asynchrones avec mémoire

Un algorithme asynchrone avec mémoire correspondant à l'application $H\colon D(H) \subset E^m \to E$ et partant d'un vecteur donné $(u^1, \ldots, u^m) \in D(H)$ est la suite $\{u^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ des vecteurs de E définie pour $p=m, m+1, \ldots$ par:

$$u_i^{p+1}=\begin{cases} H_i(z^1, z^2, \ldots, z^m) & \text{si } i \in J(p) \\ u_i^p \quad \text{si } i \notin J(p) \end{cases} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\} \tag{51}$$

où

$$z^r=(\ldots, u_k^{s_k^r(p)}, \ldots), \qquad 1 \leqq r \leqq m \text{ et } 1 \leqq k \leqq \alpha. \tag{52}$$

Ceci à condition bien entendu que $(z^1, \ldots, z^m)$ reste dans $D(H)$ où:

$J=\{J(p)\}_{p \geqq m}$ est une suite de parties non vides de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \alpha\}$. $J(p)$ correspond au sous-ensemble des composantes relaxées à l'étape p.

$S=\{(s_1^1(p), \ldots, s_\alpha^1(p), s_1^2(p), \ldots, s_\alpha^m(p))\}_{p \geqq m}$ est une suite d'éléments de $(\mathbb{N}^\alpha)^m$.

En outre J et S vérifient:

(53.1) $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid i \in J(p)\}$ est infini.

(53.2) $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}, \quad \forall\, r \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall\, p \geqq m \quad s_i^r(p) \leqq p$.

(53.3) $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}, \quad \forall\, r \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \lim_{p \to \infty} s_i^r(p)=\infty$.

L'algorithme (51) sera noté par (H, U^0, J, S) où $U^0=(u^1, \ldots, u^m)$. (Notation de Baudet, G.M. [1, 2].)

6. Étude de convergence des algorithmes asynchrones avec mémoire

Pour cette étude, nous allons nous ramener au cas concernant les algorithmes asynchrones. Pour cela on définit:

(54) $$\tilde{E}=E^m=\left(\prod_{i=1}^{\alpha} E_i\right)\times\ldots\times\left(\prod_{i=1}^{\alpha} E_i\right)=\prod_{k=1}^{\alpha m}\tilde{E}_k$$

(55) $$(\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha,\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha,\gamma_1,\ldots,\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha)=(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\ldots,\tilde{\gamma}_{\alpha m}).$$

On définit ainsi une application unique θ de l'ensemble $\{1,2,\ldots,\alpha m\}$ sur l'ensemble $\{1,2,\ldots,\alpha\}$ vérifiant:

(56) $$\forall k\in\{1,2,\ldots,\alpha m\},\quad \exists\, i\ (\text{unique})\in\{1,2,\ldots,\alpha\}\ \text{tel que}\ i=\theta(k).$$

Donc on a:

(57.1) $$\forall k\in\{1,2,\ldots,\alpha m\}\qquad \tilde{E}_k=E_{\theta(k)}$$

(57.2) $$\forall k\in\{1,2,\ldots,\alpha m\}\qquad \tilde{\gamma}_k=\gamma_{\theta(k)}.$$

On considère sur $\tilde{E}$ la norme:

(58) $$]|U|\tilde{[}=\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq \alpha m}\frac{1}{\gamma_{\theta(k)}}\|u_k\|_{\theta(k)}$$

où $\forall U\in\tilde{E}$, $U=(u_1,u_2,\ldots,u_{\alpha m})$.

On vérifie sans difficulté que:

(59) $$\forall U=(u^1,\ldots,u^m)=(u_1,u_2,\ldots,u_{\alpha m})\in\tilde{E}=E^m$$
$$\|U\|=\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq m}\,]|u^i|[=\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq \alpha m}\frac{1}{\gamma_{\theta(i)}}\|u_i\|_{\theta(i)}=]|U|\tilde{[}.$$

On définit une application G de $\tilde{E}=E^m$ à valeurs dans $\tilde{E}$ de domaine de définition $D(G)=D(H)$ par:

(60) $$G(U)=[H(U),H(U),\ldots,H(U)]=[H_1(U),\ldots,H_\alpha(U),H_1(U),\ldots,H_\alpha(U)]$$
$$U=(u^1,u^2,\ldots,u^m)=(u_1,u_2,\ldots,u_{\alpha m}).$$

$\forall U\in D(G)$ on a:

(61) $$G(U)=[G_1(U),G_2(U),\ldots,G_{\alpha m}(U)]$$
$$\text{avec}\quad \forall i\in\{1,2,\ldots,\alpha m\},\quad G_i(U)=H_{\theta(i)}(U).$$

On vérifie sans difficulté que:

(62) $$U^*=G(U^*)\ \Leftrightarrow\ u^*=H(u^*,u^*,\ldots,u^*),\quad U^*\in D(G)=D(H)$$

où

$$U^*=(u^*,u^*,\ldots,u^*)\in E^m,$$
$$U^*=(u_1^*,\ldots,u_\alpha^*,u_1^*,\ldots,u_\alpha^*,u_1^*,\ldots,u_\alpha^*)\in\tilde{E}.$$

Considérons maintenant l'algorithme asynchrone:

(63) $$u_i^{p+1}=\begin{cases}G_i(\ldots,u_k^{\tilde{s}_k(p)},\ldots) & \text{si } i\in\tilde{J}(p)\\ u_i^p & \text{si } i\notin\tilde{J}(p)\end{cases}$$
$$i\in\{1,2,\ldots,\alpha m\}$$

où

(64) $\tilde{J}=\{\tilde{J}(p)\}_{p\geq m}$ est une suite de parties non vides de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \alpha m\}$ définie par
$\forall p\geq m \quad \tilde{J}(p)=\bigcup_{i\in J(p)} \theta^{-1}(i)$
et

$\tilde{S}=\{(\tilde{s}_1(p), \tilde{s}_2(p), \ldots, \tilde{s}_{\alpha m}(p))=(s_1^1(p), \ldots, s_\alpha^1(p), s_1^2(p), \ldots, s_\alpha^m(p))\}_{p\geq m}$
est une suite d'éléments de $\mathbb{N}^{\alpha m}$.

On a $\forall i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\theta(i)=i$, donc et en utilisant (61):

(65) $\forall i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $\forall U\in D(G)=D(H)$, on a $G_i(U)=H_i(U)$.
On constate que dans (63) si pour tout $p\geq m$ u^p est bien défini, alors u^p est de la forme:

$$u^p=(u_1^p, \ldots, u_\alpha^p, u_1^p, \ldots, u_\alpha^p, u_1^p, \ldots, u_\alpha^p). \tag{66}$$

D'autre part, l'algorithme (51) peut s'écrire de la façon suivante:

$$u_i^{p+1}=\begin{cases} H_i(\ldots, u_k^{\tilde{s}_k(p)}, \ldots) & \text{si } i\in J(p) \\ u_i^p \quad \text{si } i\notin J(p) \end{cases} \qquad i\in\{1, 2, \ldots, \alpha\}. \tag{67}$$

De (63) à (65) et de (67) on déduit que pour tout $p\geq m$, les α-premières composantes de u^p défini par (63) sont les composantes de u^p défini par (67).

Maintenant on peut montrer le théorème suivant:

6.1. Théorème. *Soit H une application de $D(H)\subset E^m=\tilde{E}$ dans E, on suppose*

(68) $D(H)=\prod_{i=1}^{\alpha m} \tilde{D}_i(H)=\prod_{i=1}^{m} D_i(H)$

(69) $\exists u^*\in D_i(H) \quad \forall i\in\{1, 2, \ldots, m\}$ *tel que* $u^*=H(u^*, u^*, \ldots, u^*)$

(70) $[H(D(H))]^m\subset D(H)$

(71) $\forall U\in D(H)$ *on a* $]|H(U)-H(U^*)|[\leq\beta]|U-U^*|\tilde{[}$
avec $U^*=(u^*, \ldots, u^*)$ *et* $\beta\in\mathbb{R}$, $0<\beta<1$

alors tout algorithme asynchrone avec mémoire (H, U^0, J, S) correspondant à H et partant de $U^0=(u^1, u^2, \ldots, u^m)\in D(H)$ converge vers u^* le point fixe de H.

Démonstration. Il faut montrer que la suite $\{u^p\}_{p\geq m}$ donnée par (67) est bien définie et elle converge vers u^*. Pour cela, il suffit de montrer que la suite $\{u^p\}_{p\geq m}$ donnée par (63) est bien définie et elle converge vers $(u^*, u^*, \ldots, u^*)$ ce qui est vrai car on vérifie facilement que nous sommes dans les conditions d'application du théorème 3.4 en tenant compte de l'application G définie par (60) et (61) et de l'algorithme asynchrone $(G, U^0, \tilde{J}, \tilde{S})$.

6.2. Remarque. Du théorème 6.1 on peut sans difficulté déduire des corollaires semblables aux corollaires 3.5 et 3.6.

6.3. T-contraction d'ordre m (m-contraction) et contraction

Une application H de $D(H) \subset E^m$ dans E est dite T-contractante d'ordre m sur $D(H)$ ou T-contraction d'ordre m sur $D(H)$ (*plus simplement* m-contractante ou m-contraction sur $D(H)$) si

$$\forall\, U=(u^1, u^2, \ldots, u^m) \in D(H) \quad \text{et} \quad \forall\, V=(v^1, v^2, \ldots, v^m) \in D(H) \quad \text{on a:}$$

$$\eta[H(U)-H(V)] \leqq T \cdot \max\{\eta(u^1-v^1), \ldots, \eta(u^m-v^m)\} \tag{72}$$

où T vérifie (38) et si $\{w^1, \ldots, w^m\}$ une partie de $\mathbb{R}^\alpha$, $z=\max\{w^1, \ldots, w^m\} \in \mathbb{R}^\alpha$, représente le vecteur de composantes:

$$z_i = \max\{w_i^r,\ 1 \leqq r \leqq m\} \tag{73}$$

et η est définie par (36).

H est dite T-contractante d'ordre m (m-contractante) en un point $V \in D(H)$ fixé si l'on a (72) $\forall\, U \in D(H)$.

L'hypothèse de m-contraction a été introduite et utilisée par Baudet, G.M. [1, 2] pour montrer la convergence des algorithmes asynchrones avec mémoire. Dans 6 et 6.1 nous avons ramené l'étude du problème (47) à l'étude d'un problème de la forme (5).

Nous allons, dans le théorème suivant, montrer que la contraction est une notion plus générale que la m-contraction et donc une propriété de type (72) entraîne une propriété de type (71) et par conséquent le théorème 6.1 avec ses corollaires généralise celui montré par Baudet, G.M. [1, 2].

6.4. Théorème. *Soit H une application de $D(H) \subset E^m$ dans E et G l'application de $D(G)=D(H) \subset E^m$ à valeur dans E^m définie par* (60) *et* (61). *On suppose que pour $U=(u^1, \ldots, u^m) \in D(H)$ et $V=(v^1, \ldots, v^m) \in D(H)$ on a:*

$$\eta[H(U)-H(V)] \leqq T \cdot \max\{\eta(u^1-v^1), \ldots, \eta(u^m-v^m)\} \tag{74}$$

où T vérifie (38).

Il existe alors pour tout $\beta \in]\rho(T), 1[$ des nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_\alpha$ strictement positifs tels que, si l'on considère sur E la norme $]|\cdot|[$ définie par (3) *pour les $\gamma_1, \ldots, \gamma_\alpha$ précédents et sur $\tilde{E}=E^m$ la norme $]|\cdot|\tilde{[}$ définie par* (58) [*on tient compte de* (54) *à* (57)] *alors on a:*

$$]|H(U)-H(V)|[\leqq \beta \cdot]|U-V|\tilde{[} \tag{75}$$

et

$$]|G(U)-G(V)|\tilde{[} \leqq \beta \cdot]|U-V|\tilde{[}. \tag{76}$$

Démonstration. Etant donné que T vérifie (38), on sait (cf. Varga, R.S. [22]) que $\forall\, \beta \in]\rho(T), 1[$, on peut trouver un vecteur $\Gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\alpha)^t$ dépendant de β, de composantes $\gamma_i > 0$ tel que

$$T \cdot \Gamma \leqq \beta \cdot \Gamma. \tag{77}$$

Posons

$$U=(u^1, \ldots, u^m)=(u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha m})=(u_1^1, \ldots, u_\alpha^1, \ldots, u_1^m, \ldots, u_\alpha^m)$$
$$V=(v^1, \ldots, v^m)=(v_1, v_2, \ldots, v_{\alpha m})=(v_1^1, \ldots, v_\alpha^1, \ldots, v_1^m, \ldots, v_\alpha^m).$$

On a:

$$]|U-V|\tilde{[}= \operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq \alpha m} \frac{1}{\gamma_{\theta(k)}} \|u_k - v_k\|_{\theta(k)}$$

d'où $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ on a:

$$\frac{1}{\gamma_i} \|u_i^k - v_i^k\|_i \leqq]|U-V|\tilde{[}$$

donc $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, on obtient:

$$\eta(u^k - v^k) \leqq]|U-V|\tilde{[} \cdot \Gamma$$

par suite, et compte tenu de (73), on a:

$$\max\{\eta(u^1-v^1), \ldots, \eta(u^m-v^m)\} \leqq]|U-V|\tilde{[} \cdot \Gamma$$

d'où, et compte tenu de (74) et de (77), on a:

$$\eta[H(U)-H(V)] \leqq \beta \cdot]|U-V|\tilde{[} \cdot \Gamma$$

donc $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, on obtient:

$$\|H_i(U)-H_i(V)\|_i \leqq \beta \cdot]|U-V|\tilde{[} \cdot \gamma_i$$

d'où $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, on a:

$$\frac{1}{\gamma_i} \|H_i(U)-H_i(V)\|_i \leqq \beta \cdot]|U-V|\tilde{[}$$

donc:

$$]|H(U)-H(V)|[\leqq \beta]|U-V|\tilde{[}$$

d'où, et compte tenu de la définition de G, on a:

$$]|G(U)-G(V)|\tilde{[} \leqq \beta \cdot]|U-V|\tilde{[}.$$

References

1. Baudet, G.M.: Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors. Research report of the Department of Computer Science. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, Pennsylvania 15213, USA 1976
2. Baudet, G.M.: The Design and Analysis of Algorithms for Asynchronous Multiprocessors. Ph. D. Thesis. Department of Computer Science. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, Pennsylvania 15213, USA 1978
3. Charnay, M.: Thèse de 3ème cycle. Université Claude Bernard, Lyon, France 1975
4. Chazan, D., Miranker, W.L.: Chaotic relaxation. Linear Algebra and Appl. **2**, 199–222 (1969)

5. Couzot, P.: Rapport de recherche Mathématiques appliquées et Informatique. Université de Grenoble, France, 1977
6. El Tarazi, M.N.: Thèse de 3ème cycle. Université de Besançon, France, 1976
7. El Tarazi, M.N.: Sur des algorithmes mixtes par blocs de type Newton-Relaxation chaotique à retards. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris, 283, série A, pp. 721-724, 1976
8. El Tarazi, M.N.: Thèse de Doctorat ès Sciences. Université de Besançon, France, 1981
9. Jacquemard, C.: Sur le théorème de Stein-Rosenberg dans le cas des itérations chaotiques à retards. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris, 279, série A, pp. 887-889, 1974
10. Jacquemard, C.: Thèse de 3ème cycle. Université de Besançon, France, 1977
11. Julliand, J., Perrin, G.R., Spiteri, P.: Simulations d'exécutions parellèles d'algorithmes de relaxation asynchrone. Rapport de recherche E.R.A. CNRS Micro-systèmes et robotique n°070906 et de Mathématiques n°070654. Université de Besançon, France, 1980
12. Miellou, J.C.: Itérations chaotiques à retards. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris, 278, série A, pp. 957-960, 1974
13. Miellou, J.C.: Algorithmes de relaxation chaotique à retards. R.A.I.R.O., 9ème année, R-**1**, 55-82 (1975)
14. Miellou, J.C.: Itérations chaotiques à retards, études de la convergence dans le cas d'espaces partiellement ordonnés. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris, 280, série A, pp. 233-236, 1975
15. Miellou, J.C.: A mixte relaxation algorithm applied to quasi-variational inequations. Nice: Colloque IFIP Optimisation. Math. Lect. Notes. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
16. Miellou, J.C.: Relaxation chaotique de type monotone. Séminaire d'analyse numérique. Université de Grenoble, France, 1977
17. Mongenet, C.: Simulation d'exécutions parallèles d'un problème de contrôle optimal. Rapport de projet maîtrise S.M.I. Université de Besançon, France, 1980
18. Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: Academic Press 1970
19. Robert, F.: Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris, 284, série A, pp. 679-682, 1977
20. Robert, F., Charnay, M., Musy, F.: Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe. Apl. Mat. **20**, 1-38 (1975)
21. Rosenfeld, J.L.: A case study on programming for parallel processors. IBM Thomas J. Watson Research Center Report n° RC 64, USA 1967
22. Varga, R.S.: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, NJ, USA 1962

Received January 12, 1982