Numer. Math. 44, 363-369 (1984)

Numerische Mathematik

Algorithmes mixtes asynchrones. Etude de convergence monotone

Mouhamed Nabih El Tarazi

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kuwait University, P.O. Box 5969, Kuwait

Résumé. Nous introduisons dans cet article deux classes d'algorithmes itératifs que nous appelons «Algorithmes mixtes asynchrones» et nous en étudierons la convergence selon un ordre partiel. Ces algorithmes sont implémentables aussi bien sur les monoprocesseurs que sur les multiprocesseurs, et avec leur étude de convergence constituent une généralisation des algorithmes mixtes classiques «Newton-relaxation».

Asynchronous Mixed Algorithms. Monotonic Convergence Study

Summary. In this paper we introduce two classes of iterative algorithms which we call "Asynchronous mixed algorithms" and we study their convergence under partial ordering. These algorithms can be implemented just as well on monoprocessors as on multiprocessors, and, along with their convergence study, constitute a generalization of the mixed classical "Newton-relaxation" algorithms.

Subject Classifications: AMS(MOS): 65H10; CR: 5.15.

Introduction

Dans cet article, nous introduisons deux classes d'algorithmes itératifs que nous appelons «Algorithmes mixtes asynchrones» pour résoudre des problèmes de la forme:

$$\text{Trouver } u \in D(M) \cap D(F) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{tel que } 0 \in M(u) + F(u)$$

où F est une application non linéaire et non nécessairement différentiable de $D(F) \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et M est une application monotone maximale diagonale (éventuellement multivoque) de $D(M) \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$).

Nous étudierons ensuite la convergence selon un ordre partiel de ces algorithmes.

Ces algorithmes mixtes asynchrones sont implémentables aussi bien sur les monoprocesseurs que sur les multiprocesseurs, et avec leur étude de convergence constituent une généralisation des algorithmes mixtes classiques «Newton-relaxation» introduits et étudiés par Ortega J.M., Rheinboldt W.C. [15], concernant les cas où F est différentiable.

Signalons que la formulation et l'étude de ces algorithmes diffèrent de celles faites par Ortega J.M., Rheinboldt W.C. [15].

Précisons enfin que le présent travail est lié à la notion de l'ordre partiel alors que, très différemment, le précédent [8] était lié à celle de la contraction.

1. Position du problème

On se propose de résoudre le problème:

(1) $$0 \in M(u) + F(u), \qquad u \in D(M) \cap D(F)$$

où:

(2) $$F(u) = (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u))^t,$$

une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de domaine de définition $D(F)$ et

(3) M est une multiapplication de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n (2^{\mathbb{R}^n})$ de domaine de définition $D(M)$ et telle que pour tout $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t \in D(M)$, $M(u) = (M_1(u_1), \ldots, M_n(u_n))^t$ avec, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ M_i est une multiapplication maximale monotone de $\mathbb{R}$ dans $2^{\mathbb{R}}$.

Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \leqq n$, et $(n_1, n_2, \ldots, n_\alpha)^t \in \mathbb{N}_+^\alpha$, on décompose tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ en α blocs U_i de n_i composantes. On a $\sum_{i=1}^{\alpha} n_i = n$. On munit chaque $E_i = \mathbb{R}^{n_i}$ de la relation d'ordre induite par le cône K_i des vecteurs de E_i de composantes non négatives. Sur $E = \mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{\alpha} \mathbb{R}^{n_i}$ on considère la relation d'ordre induite par $K = \prod_{i=1}^{\alpha} K_i$. Tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ ainsi décomposé sera noté par $u = U = (U_1, U_2, \ldots, U_\alpha)^t$ et pour toute matrice réelle A de type (n, n) on note $A = (A_{ik})$ la matrice par blocs A de type (α, α) correspondante à cette décomposition, enfin, pour tout $u = U = (U_1, \ldots, U_\alpha)^t \in D(F)$, [resp. $\in D(M)$] on note:

(4) $F(U) = (F_1(U), F_2(U), \ldots, F_\alpha(U))^t$, [resp. $M(U) = (\mathcal{M}_1(U_1), \ldots, \mathcal{M}_\alpha(U_\alpha))^t$].

2. Problèmes de point fixe associes

Les hypothèses (2) à (4) étant vérifiées, nous supposons aussi:

(5) $(A(v), v \in D_0)$ une famille de Z-matrices, $D_0 \subset D(F)$.

(On retrouve la même chose en littérature sous le terme de L-matrices).

On note $A(V) = (A_{ik}(V))$, la matrice par blocs correspondante à $A(v)$.

(6) Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels non négatifs tels que $\forall v \in D_0$, $A(v)+\Lambda$ est une M-matrice où: Λ est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(7) $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha\} \in \prod_{i=1}^{\alpha} [0, +\infty[$, définis par:

$$\theta_1 \geqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq \ell \leqq n_1} \lambda_\ell, \quad \text{et } \forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha-1\},$$
$$\theta_{i+1} \geqq \operatorname{Max} \lambda_\ell / n_1 + \ldots + n_i + 1 \leqq \ell \leqq n_1 + \ldots + n_{i+1}.$$

(8) $$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha\} \in \prod_{i=1}^{\alpha} [0, 1] \qquad \text{tels que } \forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$$

ou bien $\omega_i = 1$ ou bien $\exists c_i \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$ tel que pour tout $v \in D_0$ et tout U_i^2, $U_i^1 \in \mathbb{R}^{n_i}$, on a:

$$U_i^2 \geqq U_i^1 \Rightarrow A_{ii}(V)(U_i^2 - U_i^1) \leqq c_i(U_i^2 - U_i^1)$$

avec $(1-\omega_i)\, c_i \leqq \theta_i$.

Nous définissons deux applications $G(W, V)$ [resp. $H(W, V, U)$] de $\mathbb{R}^n \times D_0$ (resp. de $\mathbb{R}^n \times D_0 \times D_0$) dans $\mathbb{R}^n$ (resp. dans $\mathbb{R}^n$) par:

Pour tout $w = W = (W_1, W_2, \ldots, W_\alpha)^t \in \mathbb{R}^n$, $v = V = (V_1, V_2, \ldots, V_\alpha)^t$, $u = U = (U_1, U_2, \ldots, U_\alpha)^t \in D_0$ on pose

(9) $$G(W, V) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha)^t, \qquad [\text{resp. } H(W, V, U) = (X_1, X_2, \ldots, X_\alpha)^t]$$

où $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ Y_i est la solution du problème:

(10) $$\begin{aligned} &\chi_i(Y_i) + (\omega_i A_{ii}(V) + \theta_i I)(Y_i - W_i), \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\alpha} A_{ii}(V)(V_k - W_k) - F_i(V), \qquad \chi_i(Y_i) \in \mathcal{M}_i(Y_i) \end{aligned}$$

[resp. X_i la solution du problème:

(11) $$\begin{aligned} &\chi_i(X_i) + (\omega_i A_{ii}(V) + \theta_i I)(X_i - W_i) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\alpha} A_{ik}(V)(U_k - W_k) - F_i(U), \qquad \chi_i(X_i) \in \mathcal{M}_i(X_i) \end{aligned}$$].

Par les hypothèses (5) à (8) on a $\forall v = V \in D_0$, et $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$, $(\omega_i A_{ii}(V) + \theta_i I)$ est une M-matrice. Par l'hypothèse (3) $\mathcal{M}_i$ est maximale, monotone, diagonale donc d'après un résultat de Tartar L. [17], et les résultats classiques sur la théorie des applications monotones maximales (cf. Rockafellar R.T. [16]) Y_i (resp. X_i) existe et est unique. De plus, il est évident que $\chi_i(Y_i)$ [resp. $\chi_i(X_i)$] est aussi unique dans $\mathcal{M}_i(Y_i)$ [resp. $\mathcal{M}_i(X_i)$]. Donc les applications $G(W, V)$ et $H(W, V, U)$ données par (9) sont parfaitement définies. Pour plus de détails cf. El Tarazi M.N. [7], [5].

2.1. Proposition. *Les hypothèses* (2) *à* (8) *étant vérifiées, on vérifie facilement que les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(12.1) $u^* = U^* \in D_0$ *est une solution de* (1).

(12.2) $u^* = U^* \in D_0$ *est un point fixe de* G [*i.e.* $U^* = G(U^*, U^*)$].

(12.3) $u^* = U^* \in D_0$ *est un point fixe de* H [*i.e.* $U^* = H(U^*, U^*, U^*)$].

3. Algorithmes mixtes asynchrones

Dans ce paragraphe, nous allons définir deux algorithmes mixtes asynchrones. Nous supposons vérifiées les hypothèses (2) à (8). Ces deux algorithmes peuvent être définis de la manière suivante:

$$y^0 = Y^0 = (Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_\alpha^0)^t \in D_0$$

étant donnés, $Y^1, Y^2, \dots, Y^p$ étant calculés, on pose:

$$Y_i^{p+1} = \begin{cases} G_i[(\dots Y_k^{s_k(p)} \dots)^t;\ Y^{s(p)}] & \text{si } i \in J(p) \\ y_i^p & \text{si } i \notin J(p) \end{cases} \tag{13}$$

$$x^0 = X^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_\alpha^0)^t \in D_0,$$

et une suite $\{y^p = Y^p = (Y_1^p, Y_2^p, \dots, Y_\alpha^p)^t\}_{p \in \mathbb{N}} \subset D_0$ étant donnés, $X^1, X^2, \dots, X^p$ étant déterminés, on pose:

$$X_i^{p+1} = \begin{cases} H_i[(\dots X_k^{s_k(p)} \dots)^t;\ Y^{s(p)};\ X^{s(p)}] & \text{si } i \in J(p) \\ X_i^p & \text{si } i \notin J(p). \end{cases} \tag{14}$$

Ceci à condition bien entendu que $\forall p \in \mathbb{N}$, Y^p (resp. X^p) reste dans D_0 où

$J = \{J(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties non vides de l'ensemble $\{1, 2, \dots, \alpha\}$
$S = \{(s_1(p), \dots, s_\alpha(p), s(p))^t\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}^\alpha \times \mathbb{N}$
($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$).

En outre, J et S doivent vérifier les conditions:

(15.1) $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid i \in J(p)\}$ est infini,

(15.2) $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $s_i(p) \leqq p$ et $s(p) \leqq p$,

(15.3) $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$, $\lim_{p \to \infty} s_i(p) = \infty$ et $\lim_{p \to \infty} s(p) = \infty$.

L'algorithme (13) peut être noté par $(G, \{X^0, X^0\}, J, S)$, c'est un algorithme de type «Asynchrone avec mémoire» au sens de Baudet G.M. [1], [2], alors que l'algorithme (14) ne l'est pas. Les algorithmes asynchrones avec mémoire ont été étudiés dans un contexte différent (contexte «contraction») dans El Tarazi M.N. [7], [8].

3.1. Remarque. Considérons les algorithmes (13) et (14), pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ tel que $i \notin J(p)$ nous avons posé $Y_i^{p+1} = Y_i^p$ (resp. $X_i^{p+1} = X_i^p$), dans ces cas, nous posons $\chi_i(Y_i^{p+1}) = \chi_i(Y_i^p)$ [resp. $\chi_i(X_i^{p+1}) = \chi_i(X_i^p)$].

4. Etude de convergence selon un ordre partiel des algorithmes mixtes asynchrones

Pour conserver la monotonie des suites produites par les algorithmes (13) et (14), il est nécessaire de faire les hypothèses suivantes:

(16.1) $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqq q \Rightarrow s_i(p) \leqq s_i(q)$

(16.2) $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $s_i(p) \geqq s(p)$.

Nous supposons aussi:

(16.3) Il existe une suite $\{m_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissante telle que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ et vérifiant $m_\ell \leqq p < m_{\ell+1}$ on a $s(p) = m_\ell$. Avec $m_0 = 0$.

Les hypothèses (15.2), (16.2) et (16.3) entraînent

(16.4) $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, on a $s_i(m_\ell) = s(m_\ell) = m_\ell$.

Nous considérons aussi les hypothèses suivantes:

(17) y^0 est une sur-solution de (1) (i.e. $y^0 \in D(M) \cap D(F)$ et $\exists\, \chi(y^0) \in M(y^0)$ tels que $\chi(y^0) + F(y^0) \geqq 0$).

(18) x^0 est une sous-solution de (1) (i.e. $x^0 \in D(M) \cap D(F)$ et $\exists\, \chi(x^0) \in M(x^0)$ tels que $\chi(x^0) + F(x^0) \leqq 0$).

(19) $x^0 \leqq y^0$, $\chi(x^0) \leqq \chi(y^0)$ et le segment conique $\langle x^0, y^0 \rangle \subset D_0$.

On remarque que l'hypothèse $\chi(x^0) \leqq \chi(y^0)$ est vérifiée lorsque l'on a (3) et $x^0 \leqq y^0$, (cf. El Tarazi M.N. [7]).

Nous énonçons maintenant des résultats de convergence selon un ordre partiel des algorithmes (13) et (14) appliqués au problème (1) dont les démonstrations sont très longues et assez techniques pour lesquelles on renvoit à El Tarazi M.N. [7].

4.1. Théorème. *Les hypothèses* (2) *à* (8) *et* (17) *à* (19) *étant vérifiées, nous supposons aussi:*

(20) *F est continue sur $\langle x^0, y^0 \rangle$*

(21) *$\forall x, y$ comparables de $\langle x^0, y^0 \rangle$, on a: $F(y) - F(x) \geqq A(x)(y - x)$.*

Si de plus la suite S vérifie (16.1) *à* (16.3), *alors l'algorithme* (13) (*partant de* y^0), *définit bien une suite $\{y^p = Y^p = (Y_1^p, Y_2^p, \dots, Y_\alpha^p)^t\}_{p \in \mathbb{N}}$, restant dans $\langle x^0, y^0 \rangle$, décroissante et convergente vers $y^* \in \langle x^0, y^0 \rangle$, y^* est une sur-solution du problème* (1), *et pour toute solution u^* du problème* (1) *dans $\langle x^0, y^0 \rangle$ on a $u^* \leqq y^*$. Si de plus $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ $\omega_i \neq 1$ alors y^* est une solution maximale du problème* (1) *dans $\langle x^0, y^0 \rangle$.*

4.2. Théorème. *Les hypothèses du théorème* 4.1 *étant vérifiées, si de plus une des conditions suivantes est vérifiée:*

(22) *L'application $A: \langle x^0, y^0 \rangle \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui à tout $v \in \langle x^0, y^0 \rangle$ fait correspondre $A(v)$ est continue.*

(23) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ *tel que* $\omega_i = 1$, $\exists c_i \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$, *où* $\exists$ *une matrice* $T_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}^{n_i})$ *tel que* $\forall v \in D_0$, $\forall U_i^2, U_i^1 \in \mathbb{R}^{n_i}$, *on a:*

$$U_i^2 \geqq U_i^1 \Rightarrow A_{ii}(V)(U_i^2 - U_i^1) \leqq c_i(U_i^2 - U_i^1)$$

ou

$$U_i^2 \geqq U_i^1 \Rightarrow A_{ii}(V)(U_i^2 - U_i^1) \leqq T_i(U_i^2 - U_i^1).$$

(24) L'application A définie dans (22) est croissante.

Alors l'algorithme (13) (partant de y^0), définit bien une suite

$$\{y^p = Y^p = (Y_1^p, Y_2^p, \ldots, Y_\alpha^p)^t\}_{p \in \mathbb{N}}$$

restant dans $\langle x^0, y^0 \rangle$, décroissante et convergente vers $y^* \in \langle x^0, y^0 \rangle$, y^* est une solution maximale du problème (1) dans $\langle x^0, y^0 \rangle$.

4.3. Proposition. *Les hypothèses du théorème* 4.2 *étant vérifiées, si de plus:*

(25) $$\forall v \in \langle x^0, y^0 \rangle, \quad A(v) \quad \textit{est une M-matrice.}$$

Alors y^* *est une solution unique du problème* (1) *dans* $\langle x^0, y^0 \rangle$.

4.4. Théorème. *Les hypothèses* (2) *à* (8), (17) *à* (21) *et* (24) *étant vérifiées, alors l'algorithme* (14) [*partant de* x^0 *et tenant compte de la suite* $\{y^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ *définie par l'algorithme* (13)] *définit bien une suite* $\{x^p = X^p = (X_1^p, X_2^p, \ldots, X_\alpha^p)^t\}_{p \in \mathbb{N}}$ *restant dans* $\langle x^0, y^* \rangle$, *croissante et convergente vers* $x^* \in \langle x^0, y^* \rangle$, x^* *est une solution minimale du problème* (1) *dans* $\langle x^0, y^0 \rangle$.

4.5. Corollaire. *Les hypothèses du théorème* 4.4 *et* (25) *étant vérifiées alors* $x^* = y^*$ *solution unique du problème* (1) *dans* $\langle x^0, y^0 \rangle$.

5. Cas d'une application differentiable

Si l'application F définie dans (2) est G-différentiable (différentiable au sens de Gateaux) alors on peut prendre dans (5)

(26) $$A(v) = F'(v)$$

ceci si $F'(v)$ est une Z-matrice.

Pour avoir (21), il suffit de supposer

(27) F est G-différentiable et convexe pour l'ordre (0-convexe) sur un ensemble convexe $D_0 \subset D(F)$.

On a dans ce cas (cf. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. [15], 13.3.2., page 448)

(28) $$F(y) - F(x) \geqq F'(x)(y - x).$$

Bibliographie

1. Baudet, G.M.: Asynchronous iterative methods for multiprocessors. Research report of the Department of Computer Science. Carnegie-Mellon University. Pittsburgh 1976

2. Baudet, G.M.: The design and analysis of algorithms for asynchronous multiprocessors. Ph.D. Thesis. Department of Computer Science. Carnegie-Mellon University. Pittsburgh 1978
3. Chazan, D., Miranker, W.L.: Chaotic relaxation. Linear Algebra and Appl. **2**, 199–222 (1969)
4. Couzot, P.: Rapport de recherche Mathématiques appliquées et Informatique. Université de Grenoble, 1977
5. El Tarazi, M.N.: Thèse de 3ème cycle. Université de Besançon, 1976
6. El Tarazi, M.N.: Sur des algorithmes mixtes par blocs de type Newton-Relaxation chaotique à retards. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris, 283, série A, 721–724 (1976)
7. El Tarazi, M.N.: Thèse de Doctorat ès Sciences. Université de Besançon, 1981
8. El Tarazi, M.N.: Some convergence results for asynchronous algorithms. Numer. Math. **39**, 325–340 (1982)
9. Jacquemard, C.: Sur le théorème de Stein-Rosenberg dans le cas des itérations chaotiques à retards. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris **279** (série A), 887–889 (1974)
10. Jacquemard, C.: Thèse de 3ème cycle. Université de Besançon, 1977
11. Miellou, J.C.: Cours d'Analyse Numérique, D.E.A. Université de Besançon, 1975
12. Miellou, J.C.: Itérations chaotiques à retards, études de la convergence dans le cas d'espaces partiellement ordonnés. Comptes rendus. Acad. Sci. Paris **280** (série A), 233–236 (1975)
13. Miellou, J.C.: A mixte relaxation algorithm applied to quasi-variational inequations. Colloque IFIP Optimisation, Nice. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1975
14. Miellou, J.C.: Relaxation chaotique de type monotone. Séminaire d'analyse numérique. Université de Grenoble, 1977
15. Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: Academic Press 1970
16. Rockafellar, R.T.: On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. Trans. Amer. Math. Soc. **149**, 75–88 (1970)
17. Tartar, L.: Une nouvelle caractérisation des M-matrices. R.I.R.O., 5ème année, R-3, 127–128 (1971)

Reçu le 19 juillet, 1982 / 14 février, 1984