Evaluación 1

1. (30%) Sean los conjuntos:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x > 4 \ \wedge \ x \leq 16\}$$
$$B = \{2, 5, 7, 9, 15, 22\}$$
$$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x \geq 3 \ \wedge \ x < 20 \ \wedge \ x\%3 = 1\}$$

Utilizando el programa de operaciones entre conjuntos o de forma manual, realice las siguientes operaciones:

$$(A \cap C) \cup (A \oplus B)$$
$$\big((A \cup C) \oplus B\big) \cap (A - C)$$
$$\big((A \cup B) - (A \cap C)\big) \cap (A \cup B \cup C)$$

(A n C) U (A ⊕ B)

Primero hay que encontrar la diferencia simétrica de A y B:

$$A - B = \{x|x \in \mathbb{Z}, x > 4, x \leq 16, x \notin B\} = \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$$

$$B - A = \{x|x \in \mathbb{Z}, x \in B, x \notin A\} = \{2, 22\}$$

$$A \oplus B = \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 2, 22\}$$

Y ahora hay que encontrar la intersección de A y C:

$$A \cap C = \{x|x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 16, x \geq 3, x < 20, x \mod 3 = 1\}$$

$$A \cap C = \{x|x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 16, x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A \cap C = \{7, 10, 13, 16\}$$

Y la unión de las dos:

$(A \cap C) \cup (A \oplus B) = \{7, 10, 13, 16\} \cup \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 2, 22\}$

$= \{2, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 22\}$

Entonces, $(A \cap C) \cup (A \oplus B) = \{2, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 22\}$

((A U C) ⊕ B) n (A-C)

Primero hay que encontrar la unión de A y C:

$$A \cup C = \{x | x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 16, x \geq 3, x < 20, x \mod 3 = 1\}$$

$$A \cup C = \{x | x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 16, x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A \cup C = \{5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16\}$$

Encuentra la diferencia simétrica de la unión y B:

$$(A \cup C) \oplus B = ((A \cup C) - B) \cup (B - (A \cup C))$$

$$(A \cup C) - B = \{5, 8, 10, 11, 12, 13\}$$

$$B - (A \cup C) = \{2, 22\}$$

$$(A \cup C) \oplus B = \{5, 8, 10, 11, 12, 13, 2, 22\}$$

Encuentra la intersección de la diferencia simétrica y la diferencia de A y C:

$A - C = \{x | x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 16, x \mod 3 \neq 1\}$

$A - C = \{8, 10, 11, 14, 16\}$

$((A \cup C) \oplus B) \cap (A - C) = \{5, 8, 10, 11, 12, 13, 2, 22\} \cap \{8, 10, 11, 14, 16\}$

$= \{8, 10, 11\}$

Entonces, $((A \cup C) \oplus B) \cap (A - C) = \{8, 10, 11\}$

((A U B) – (A n C)) n (A U B U C)

Encuentra la unión de A y B:

$$A \cup B = \{2, 5, 7, 9, 15, 22\}$$

Encuentra la intersección de A y C:

$$A \cap C = \{7, 10, 13, 16\}$$

Encuentra la diferencia de unión y la intersección:

$$(A \cup B) - (A \cap C) = \{2, 5, 9, 15, 22\}$$

Encuentra la unión de A, B y C:

$$A \cup B \cup C = \{2, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 22\}$$

La unión de A, B y C es $\{x | x \in \mathbb{Z} \land x > 4 \land x < 20 \land x \mod 3 = 1 \lor x = 2 \lor x = 5 \lor x = 7 \lor x = 9 \lor x = 15 \lor x = 22\}$
Por lo tanto, $((A \cup B) - (A \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$ es $\{2, 5, 7, 9, 15, 22\}$.

1. (20%) María y Pedro pertenecen a un grupo de 8 personas, de entre las cuales se seleccionará un comité integrado por un director, un subdirector, un auditor y un vocal.
    a. ¿De cuántas formas se puede conformar el comité si se quiere que ninguno esté en él?
    b. ¿De cuántas formas se puede conformar el comité si se quiere que María esté en el comité?
    c. ¿De cuántas formas se puede conformar el comité si se quiere que María o Pedro ocupe la dirección?

a) Para seleccionar un comité de 4 personas (director, subdirector, auditor y un vocal) de un grupo de 6 personas (excluyendo a maría y pedro) se utiliza una combinación con la formula

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Donde n = 6, k = 4

$$(6,4) = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15$$

Por lo tanto hay 15 formas diferentes de seleccionar un comité de 4 personas excluyendo a maría y pedro

b) Necesitaríamos usar la misma formula pero esta vez con n = 7 y k= 3, Esto ya que hay que seleccionar un subconjunto de 3 personas de el grupo restante para poder unir a maría en el comité excluyendo a pedro

c)

$$(7,3) = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

Por tanto habrían 35 formas diferentes de formar el comité si se quiere que maría este en el

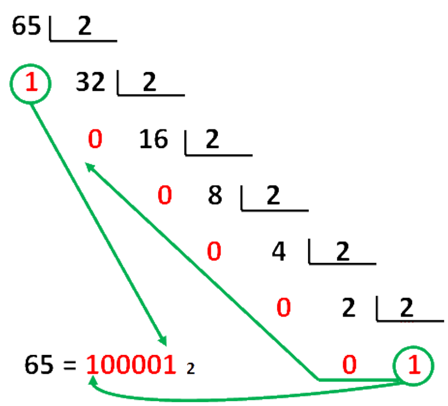
c) Habría que sumar las combinaciones donde maría ocupa la dirección mas las combinaciones de los casos donde pedro ocupa la dirección (C(7,3)+C(7,3)), ya que si María ocupa la dirección, entonces necesitamos seleccionar al subdirector, al auditor y al vocal del grupo restante de 7 personas (excluyendo a María).
Si Pedro ocupa la dirección, nuevamente necesitamos seleccionar al subdirector, al auditor y al vocal del grupo restante de 7 personas.

$$35 + 35 = 70$$

Dando como total 70 formas diferentes para formar el comité si se quiere que maría o pedro ocupen la dirección

2. (10%) Convierta de forma **manual** de base 10 a la base indicada:
   a. 35 a base 2
   b. 49 a base 6
   c. 362 a base 8
   d. 723 a base 16

Para cambiar la representación de un numero a otro sistema numérico habría que hacer el proceso tal que:



Donde el divisor es la base a la que se desea cambiar, el dividendo el numero y la combinación de los restos el numero en dicha base, por tanto:

a) 35 a base 2 = 100011 (Esta base llamada base binaria)
b) 49 a base 6 = 121
c) 362 a base 8 = 552
d) 723 a base 16 = 2D3 (Donde la letra D representa el valor 13 ya que en la base hexadecimal los números después del 9 se empiezan a representar usando letras de la A a la F)

3. (40%) Calcule las diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centradas para la primera y la segunda derivada en $x = 1{,}3$ de:

$$f(x) = 0{,}5x^4 - 0{,}4x^3 + 0{,}9x^2 - 2x + 5$$

Utilice un tamaño de incremento de 0,002. Además, calcule los valores verdaderos de las derivadas evaluadas en el punto solicitado.

Primeramente habría que calcular las primeras dos derivadas de la función f(x) =

F´(X)=

$$\frac{10x^3 - 6x^2 + 9x - 10}{5}$$

F´´(X)=

$$\frac{30x^2 - 12x + 9}{5}$$

Ahora habría que reemplazar x = 1.3 en las derivadas resultantes:

```
F´(X) = (10*(1.3)^3-6*(1.3)^2+9*(1.3)-10)/5
```

Dando como resultado F´(X) = 2.706

```
F´´(X)=(30*(1.3)^2-12*(1.3)+9)/5
```

Dando como resultado F´´(X) = 8.82

Ahora habría que utilizar las formulas finitas para estimar las derivadas:

- Primera diferencia finita dividida hacia adelante

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

- Primera diferencia finita dividida hacia atrás

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

- Primera diferencia finita dividida centrada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

- Segunda diferencia finita dividida hacia adelante

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

- Segunda diferencia finita dividida hacia atrás

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

- Segunda diferencia finita dividida centrada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Donde x = 1.3, h = 0.002

x + h = 1.302

x – h = 1.298

x + h(2) = 1.304

x – h(2) = 1.296

f(1.304) = 4.481144701

f(1.302) = 4.475679658

f(1.3) = 4.47025

f(1.298) = 4.464855622

f(1.296) = 4.459496419

Hacia adelante: F´(1.3) = (f(1.302)-f(1.3))/0.002 = 2.714829

Hacia atrás: F´(1.3) = (f(1.3)-f(1.298))/0.002 = 2.697189

Centrada : F´(1.3) = (f(1.302)-f(1.298))/0.004 = 2.706009

Para la primera derivada, la aproximación centrada es la mas precisa y se acerca al valor verdadero

Hacia adelante: F´´(1.3) = (f(1.304)-2f(1.302)+f(1.3))/0.002^2 = 8.84625

Hacia atrás: F´´(1.3) = (f(1.3)-2f(1.298)+f(1.296))/0.002^2 = 8.79375

Centrada: F´´(1.3) = (f(1.304)-2f(1.3)+f(1.298))/0.002^2 = 1375.08075

Observamos que tanto la aproximación hacia adelante tanto como la aproximación hacia atrás están bastante cerca del valor verdadero de la segunda derivada, mientras que la aproximación centrada difiere significativamente.