离散数学作业 Problem Set 5

201830099 周义植

Monday 24th October, 2022

Problem 1

证明:

对任意 $a \in A$, 因为 R 是集合 A 上的自反关系，所以 $(a,a) \in R$, 令 $t_1, t_2 \cdots t_{n-1} = a$, 则 $(a,t_1),(t_1,t_2),\cdots(t_{n-1},a) \in R^n$, 所以 $(a,a) \in R^n$, 所以 R^n 是自反的。

Problem 2

$r(R) = R \cup I_A = (a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c)$

$s(R) = R \cup R^{-1} = (a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,c)$

$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$

$R^3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$

Problem 3

证明:

自反：对任意正整数对 $(a,b), a+b = b+a \therefore ((a,b),(b,a)) \in R$

传递：对任意 $((a,b),(c,d)),((c,d),(e,f)) \in R$, 可得出 $a+d = b+c, c+f = d+e$, 两式子左右相加，有 $a+f = b+e, \therefore ((a,b),(e,f)) \in R$

对称：对任意 $((a,b),(c,d)) \in R$, 可知 $a+d = b+c, \therefore c+b = d+a, ((c,d),(a,b)) \in R$

综上，关系 R 为等价关系。

Problem 4

证明:

自反：对任意串 x, 其前三位就是自己的前三位，所以 xRx

传递：对任意 xRy, yRz,x 的前三位等于 y 的前三位，y 的前三位等于 z 的前三位，因此 x 的前三位等于 z 的前三位，所以 xRz

对称：对任意 xRy，x 的前三位等于 y 的前三位，y 的前三位也等于 x 的前三位，因此 yRx

综上，关系 R 为等价关系。

Problem 5

a){1},{2},{3},{4}

b){1,2},{1,3,4},{2,3,4}

c) 不存在。

d) 不存在。

e){2,4},{2,3,4}

f){2,4}

g){3},{4},{3,4}

h){3,4}

Problem 6

a) 是

b) 是

c) 是

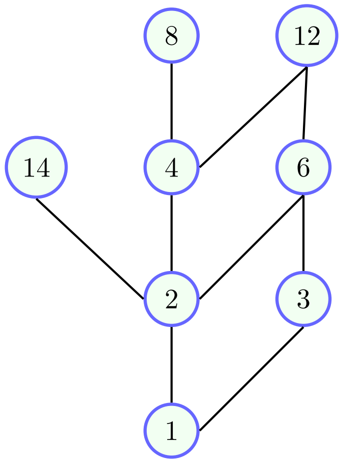
Problem 7

证明：

令 X=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Y=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

则对任意 $M \in A : XRM, MRY$, 所以 X, Y 为 (A, R) 的最小、最大元，因此对任意 $M, N \in A$, 从最大元逐步向下找，一定存在上确界。同理也一定存在下确界。因此 (A, R) 为格。

Problem 8



极大元：4，6；

极小元：2，3

最大元：不存在

最小元：不存在。

最小上界：12

最大下界：1

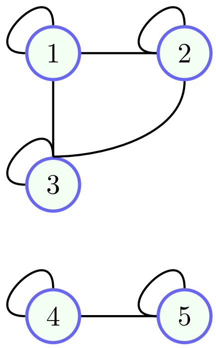
Problem 9

(1)$R = \{(1,2),(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(1,3),(3,1),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$

(2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{1}$$

(3)



Problem 10

分类讨论：

1+1+1+1 ： 1

2+1+1 ： $\binom{4}{2}$

2+2 : $\binom{4}{2}/2$

3+1: $\binom{4}{3}$

4: 1

所以共有 $1+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}/2+\binom{4}{2}+1=15$ 种。