离散数学作业 Problem Set 8

201830099 周义植

Monday 21st November, 2022

Problem 1

a) 3,3,3,3

b) 2,2,2,2

c) 4,3,3,3

d) 3,3,3,3

Problem 2

证明：设有 n 个顶点，因为简单图顶点度数最多为 n-1, 而各个顶点度数又不相同，所以所有顶点的度数刚好为 0∼n-1. 但若有顶点的度数为 0，则度最大的顶点也未连接该点，其度不可能为 n-1，矛盾。

Probloem 3

证明：$\delta(G) \leqslant d(v_i) \leqslant \Delta(G)$

所以 $\mathcal{V}\delta(G) \leqslant \Sigma d(v_i) \leqslant \mathcal{V}\Delta(G)$

由握手定理，$\delta(G) \leqslant \frac{2\epsilon}{\mathcal{V}} \leqslant n\Delta(G)$

Problem 4

1

邻接矩阵 A

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1
v_4	0	0	1	0	1
v_5	0	0	1	1	0

(1)

关联矩阵 B

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	0	0	0
v_2	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1
v_4	0	1	1	0
v_5	0	0	1	1

(2)

$BB^T - A$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	0	0	0	0
v_2	0	1	0	0	0
v_3	0	0	2	0	0
v_4	0	0	0	2	0
v_5	0	0	0	0	2

(3)

2) D 是对角矩阵，对角线上的元素表示每个节点的度。

$d_{ij} = d_{ji} = B_{i:} \cdot B_{j:}$(表示行向量)，即 d_{ij} 表示 v_i, v_j 共同的边数，若 $i \neq j$ 则表示两点间的边数（如简单图则为 0or1，表示两点是否相连），特别地 d_{ii} 表示该点所连的边数，即为该点的度。$D - A$ 将 $i \neq j$ 的元素减为零，只留下对角线上的元素表示每个点的度。

Problem 5

证明：

如一个简单图 G 是自补图，设其边数为 n，则 $e(G) = e(\bar{G}), e(G) + e(\bar{G}) = e(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}, \therefore e(G) = \frac{n(n-1)}{4}, n \equiv 0, 1(mod\ 4)$

又因为该图为正则图，设 $d(v_i) = k$ 则对其补图也有 $d(v_i) = k$，则每个点在完全图中的度为 $d(v_i) = 2k, \therefore 2 \mid n-1$

综上，$n \equiv 1(mod\ 4)$

Problem 6

证明:

首先将一个图 G 的顶点度的平均值记作 $z(G)$, 去掉一个顶点后的图为 $G^{'}$

a

$z(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} d(v_i)+\Delta(G)}{n}$; 删去度最大的顶点后, 每个其余与其相邻顶点的度都减一。$z(G^{'}) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} d(v_i)-\Delta(G)}{n-1}$

$n(n-1)(z(G)-z(G^{'})) = n\Delta(G) - \sum_{i=1}^{n-1} d(v_i)$

b

反驳: 对于 $K_3, z(G) = 2$ 删去某个点, $z(G^{'}) = 1$.

Problem 7

证明: 如图不连通, 则其可分为几个连通子图。在 G 的补图中, 每个连通子图中的每个点都会连到另一个连通子图的每个点, 至少都会连到同一个点, 所以这些点与该共同点互相连通。同理, 所有的点都互相连通。

Problem 8

1

不是强连通的, 因为点 a 出度为 0。是弱连通的。

2

不是强连通的, 因为点 c 出度为 0。是弱连通的。

3

不是强连通的, 也不是弱连通的。

Problem 9

证明:

对于任意两点，若既互不相连也没有公共节点，则这两个点所连的点的集合不相交，则这两个集合的势之和最多为 n-2(所有的点再减去这两个点)，即两个点的度之和最多为 n-2, 矛盾。所以这两个点一定要么相连要么连接一个以上共同点，该两点连通。又由于点选取的任意性，该图连通。

Problem 10

证明：

当 n=1，2 时显然成立。

假设当 n=k 时，结论成立，即对于有 k 个顶点的图，若 $e > \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ 时结论成立；

当 n=k+1 时，若此时每个结点度数为 k，则结论显然成立，否则必存在一个结点 v 度数至多只有 k-1，即这个结点最多只有 k-1 条边和它相连。因为此时总的边数 $e > \frac{k(k-1)}{2}$, 则其它 k 个结点之间的边数 $e^{'} > \frac{k(k-1)}{2} - (k-1) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$。根据归纳假设，这 k 个结点之间是连通的。

而对除去的这个节点，若其度为 0，则除去该点后的图 $e^{'} > \frac{k(k-1)}{2} = e(K_k)$, 显然矛盾。所以该点至少与其余点中的 1 个点连通，因此整个图连通。

由数学归纳法，结论成立。