离散数学作业 Problem Set 4

201830099 周义植

Monday 17[th] October, 2022

Problem 1

a) $2! < 2^2$

b) 证明: $2! = 2, 2^2 = 4, 2 < 4$, 所以 P(2) 成立。

c)$\forall k(P(k))$

d)$\forall k(P(k) \to P(k+1))$

e) 由于 P(K),$(k+1)! = k! \cdot (k+1) < k^k \cdot (k+1) < (k+1)^{k+1}$, 所以 $P(k+1)$.

f)

假设 $\exists k(\neg P(k))$, 令集合 $S = \{k \in Z^+, k > 1 \mid \neg P(k)\}$,S 为大于 1 整数的非空子集。

由良序公理，S 有最小元素 m(m>2)。$(m-1) \notin S$, 所以 $P(m-1)$ 成立;

而 $P(m-1) \to P(m), m \notin S$, 矛盾。

因此 $\forall k P(k)$ 成立。

Problem 2

证明:

$P(n)$: 存在自然数 a,b 使得 $5^n = a^2 + b^2$

首先可知 $5^0 = 1^2 + 0^2, 5^1 = 1^2 + 2^2$, 所以 $P(0), P(1)$ 为真。

而若 $P(k-1)$ 为真, 则 $5^{k+1} = 5^{k-1} \cdot 5^2 = (5a)^2 + (5b)^2$, 因此有 $P(k+1)$ 为真.

所以由数学归纳法知, 对于自然数 n,$P(n)$ 为真.

Problem 3

证明:

用反证法，假设 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}; p, q \in Z^+$, 则 $p = \sqrt{2}q$

所以令 $T = \left\{\sqrt{2}q | q, \sqrt{2}q \in Z^+\right\}$ 为正整数集子集，知 $T \neq \varnothing$

由良序公理，必存在最小元素 $q_0\sqrt{2} \in T$. 又 $1 < \sqrt{2} < 2$, 所以 $0 < (2-\sqrt{2}) < 1$

而 $(2-\sqrt{2})q_0 = \sqrt{2}(\sqrt{2}q_0 - 1) = \sqrt{2}q_1 \in Z^+, q_1 = (\sqrt{2}q_0 - 1) \in Z^+$, 因此 $\sqrt{2}q_1 \in T$

但 $\sqrt{2}q_1 < \sqrt{2}q_0$, 矛盾。

因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

Problem 4

a) 基础步骤：对于串中的一个单位符，

$$ones(x) = \begin{cases} 0, x == 0 \\ 1, x == 1 \end{cases}$$

递归步骤：$ones(\omega x) = ones(\omega) + ones(x)$.

b) 设 P(y): 每当 s 为位串,ones(sy) = ones(s) + s(y)

基础步骤：当 y 为单位符时，由 a) 中定义显然。

递归：$P(y)$ 时，令 a 为单位符，$ones(sya) = ones(sy) + ones(a) = ones(s) + ones(y) + ones(a) = ones(s) + ones(ya)$, 因此 $P(y) \to P(ya)$。

因此 $ones(st) = ones(s) + ones(t)$ 为真。

Problem 5

a)(1)0 (2)$Q(12, 5) = Q(7, 5) + 1 = Q(2, 5) + 2 = 2$

b) 求 $\lfloor a/b \rfloor$. 837.

Problem 6

设 A 为 000 开始的二进制串集合,B 为 111 结尾的二进制串集合。$|A| = |B| = 2^{n-3}$, 而 $|A \cap B| = 2^{n-6}$. 因此, 由容斥原理,000 开头或 111 结尾的二进制串数量 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^{n-2} - 2^{n-6}$

Problem 7

证明:

P(n): 假设 $A_1, A_2 \cdots An$ 为 n 个有限集合, 则

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$$

其中,$S_k = \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \quad k = 1, 2, \ldots, n$

$P(1), P(2)$ 为真显然。

$P(k)$ 为真时

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = &\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}|\, k - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})\right| \\
&= \sum^{k} |A_i| + |A_{k+1}| - \sum^{k} |A_{i1} \cap A_{i2}| + \sum^{k} |A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{i3}| \\
&\quad - \left(\sum^{k} |A_{i1} \cap A_{k+1}| - \sum^{k} |A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{k+1}| + \cdots \right) \\
&= \sum^{k+1} |A_i| - \sum^{k+1} |A_{i1} \cap A_{i2}| + \sum^{k+1} |A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{i3}| + \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k+1}| \\
&= S_1 - S_2 + S_3 \ldots\ldots + (-1)^{k+1} S_{k+1}
\end{aligned}
$$

P(k+1) 为真。

$\therefore P(k) \to P(k+1)$, 由数学归纳法 $\forall n P(n)$.

Problem 8

每个人选取课程的种类有 $C_8^5 = 56$ 种.

因此, 至少要有 $56 * 9 + 1 = 505$ 名学生, 使得至少有 10 名学生的学习计划相同.

Problem 9

a) 所有的选取方式为 C_{16}^5 种, 一名女教师也不包含的有 C_9^5 种, 因此包含至少一名女教师的选取方式有 $C_{16}^5 - C_9^5 = 4368 - 126 = 4242$ 种

b)$C_{16}^5 - C_9^5 - C_7^5 + 0 = 4221$ 种.

Problem 10

a) $C_{12+6-1}^{12} = 6188$

b) $C_{12+36-1}^{36} = 17417133617$

c) 相当于有 12 个已经选好, 所以组合数为 $C_{6+12-1}^{12} = 6188$

d) $C_{6+24-1}^{24} - C_{6+21-1}^{21} = C_{29}^{24} - C_{26}^{21}$

e) $C_{6+16-1}^{16} = C_{21}^{16}$

f) $C_{6+15-1}^{15} - C_{6+12-1}^{12} = C_{20}^{15} - C_{17}^{12}$

Problem 11

a) 枚举可得,$P(A) = 6/8 = 3/4$,$P(B) = (1+3)/8 = 1/2, P(A \cap B) = 1/8 = P(A)P(B)$ 所以二者独立。

b) $P(A) = 1/4, p(B) = 3/4, P(A \cap B) = 1/4 \neq P(A)P(B)$, 所以二者不独立.

Problem 12

设事件 A: 感染禽流感病毒;B: 禽流感检测呈阳性。知 $P(A) = 4\%, P(B|A) = 97\%, P(B|\overline{A}) = 2\%$
可求得 $P(AB) = P(B|A)P(A) = 3.88\%, P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 5.8\%$

a)$P(A|B) = P(AB)/P(B) \approx 66.9\%$

b)$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 33.1\%$

c)$P(A|\overline{B}) = P(A\overline{B})/P(\overline{B}) = P(\overline{B}|A)P(A)/P(\overline{B}) = (1 - P(B|A))P(A)/(1 - P(B)) \approx 0.127\%$

d)$P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - P(A|\overline{B}) = 99.873\%$

Problem 13

设事件 L: 迟到；A: 开车上班；B: 公共汽车；C: 骑车上班。

a) 首先能计算得 $P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) = 25\%$

从而 $P(A|L) = P(L|A)P(A)/P(L) = 2/3$

b) 首先能计算得 $P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) = 20\%$

从而 $P(A|L) = P(L|A)P(A)/P(L) = 3/4$

Problem 14

a)

x	$p(x)$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{2}{9}$
4	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{2}{9}$
6	$\frac{1}{9}$

$E(X) = 2 * \frac{1}{9} + 3 * \frac{2}{9} + 4 * \frac{1}{3} + 5 * \frac{2}{9} + 6 * \frac{1}{9} = 4$

b)

y	$p(y)$
1	$\frac{5}{9}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$

$E(Y) = 1 * \frac{5}{9} + 2 * \frac{1}{3} + 3 * \frac{1}{9} = \frac{14}{9}$

Problem 15

设事件 A：单独一次抽到次品。B: 下一次抽到次品。设第一次总数为 m，次品数为 n，则 $P(A) = \frac{n}{m}, P(B) = \frac{n}{m}\frac{n-1}{m-1} + \frac{m-n}{m}\frac{n}{m-1} = \frac{n}{m} = P(A)$, 由此每次抽到次品都是同分布的。

5 次中抽到次品的概率 $p = 1 - \frac{C_{16}^5}{C_{20}^5} = \frac{232}{323} \approx 71.8\%$

次品数量的期望 $E(X) = E(5A) = 5 * E(A) = 5 * 0.2 = 1$

方差 $var(A) = 0.8(1-0.2)^2 + 0.2(0-0.2)^2 = 0.52$

$var(X) = 5 * 0.52 = 2.6$