离散数学作业 Problem Set 10

201830099 周义植

Wednesday 14th December, 2022

Problem 1

证明:

无回路的简单连通图即为树。对每个叶子节点，其父节点一定只有其一个子节点为叶子节点（否则无法形成完美匹配）。匹配所有叶子节点和其父节点，又会得到若干不连通的树。如此反复进行，每次匹配的方法都唯一（叶子节点一定只能和父节点匹配），直到所有的点都被匹配或有的点无法匹配。该方案唯一，所以无回路的简单连通图最多存在一种完美匹配的方式。

Problem 2

证明:

将图染成黑白两色，相邻块的颜色不同。如此每个小矩形一定占据一个黑块和一个白块。但是按该方法染下的黑白两色不一样多，因此无法用小矩形盖住。

Problem 3

证明:

设二部图的两个点集大小为 x,n-x. 完全二部图的情况下边数最多，所以

$$m \leq x(n-x) \leq \frac{(x+n-x)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$

Problem 4

证明:

构造二部图 $G=(V_1,V_2,E)$,V_1 中的每个顶点表示一种 k 划分的每个子集，V_2 中的每个顶点表示另一种划分的每个子集，若两个子集有公共元素，则两点相邻。易知 $\forall A \subseteq V_1, |N(A)| \geq |A|$，因为 A 包

含的元素所有共同元素的集合一定大于 A 本身。由 Hall 定理存在饱和匹配，而两个点集大小相同，因此有完全匹配。将完全匹配中每条边的两个顶点取一个公共元素，则构成一个共同的代表集。

Problem 5

证明：

取任意一个点为起点，除去该点后将图按 problem 2 的方式染色，分为二部图 (V_1, V_2, E)，因为 N，M 均为奇数，$|V_1| = |V_2| + 1$（被取掉的点在 V_1）。除去起点取该图的最大匹配，则存在哈密顿回路等价于存在该匹配的增广路径（从该未饱和点开始再由该未饱和点结束）。而由 Berge 定理，矛盾。因此该图不存在哈密顿回路。

Problem 6

1

上界：$4(m-1)+1 = 81, m = 21$

下界：$m^4 = 81, m = 3$

2

由 $\lceil log_m l \rceil = h, m = 3$

Prolem 7

三个顶点：3 种。三个顶点的树只有 P_3 一种结构，两个树不同构当且仅当中间的点标记不同，共三种。

四个顶点：有 $P_4, K_{1,3}$ 两种结构，前者有 $4!/2 = 12$ 种，后者有 4 种，共 16 种。

Problem 8

设其由 x 个度数为 1 的顶点，则 $\Sigma deg(v) = x + \Sigma i * (n_i)$ 又有该图的边数 $m = x + \Sigma(n_i) - 1$

又有 $2m = \Sigma deg(v)$, 因此 $x = \Sigma(i-2) * n_i + 2$

Problem 9

证明：

边数 $m = n - 1 = 2n_2 + n_1$, 因此 $n_0 = n_2 + 1$

当只有度数为 0 或 1 的点时，$n = n_0 + n_2 = 2 * n_2 + 1$, 一定是奇数；

$t = n_0 = \frac{n+1}{2}$

Problem 10