离散数学作业 Problem Set 6

201830099 周义植

Monday 7th November, 2022

Problem 1

f_1

可交换：$x+y=y+x$

可结合：$x+(y+z)=(x+y)+z$

不幂等：只有 $0+0=0, x\neq 0$ 时，$x+x\neq x$

单位元：0，$0+x=x+0=x$

零元：无

逆元：$x+(-x)=0, \therefore x^{-1}=-x$

f_2

不可交换：$x\neq y$ 时 $x-y\neq y+x$

可结合：$x-(y-z)=(x-y)-z$

不幂等:$x\neq 0$ 时，$x-x\neq x$

单位元不存在，但是有右单位元 0：$x-0=x$

零元：无

逆元：不存在单位元，所以不讨论。

f_3

可交换：$x\cdot y=y\cdot x$

可结合：$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

不幂等:$x\neq 0,1$ 时，$x\cdot x\neq x$

单位元：1，$1\cdot x=x\cdot 1=x$

零元：0,$0\cdot x=x\cdot 0=0$

逆元：0 没有逆元，除此之外 $x\cdot\frac{1}{x}=1, \therefore x^{-1}=\frac{1}{x}(x\neq 0)$

f_4

可交换：$max(x,y) = max(y,x)$

可结合：$max(x, max(y,z)) = max(max(x,y),z) = max(x,y,z)$

幂等:$max(x,x) = x$

单位元：不存在。

零元：不存在。

逆元：不讨论。

f_5

可交换：$min(x,y) = min(y,x)$

可结合：$min(x, min(y,z)) = min(min(x,y),z) = min(x,y,z)$

幂等:$min(x,x) = x$

单位元：不存在。

零元：不存在。

逆元：不讨论。

f_6

可交换：$|x-y| = |y-x|$

不可结合：$x=2, y=1, z=3$ 时,$|x-|y-z|| = 0, ||x-y|-z| = 2$

不幂等:$x \neq 0$ 时，$|x-x| \neq x$

单位元: 不存在。$x < 0$ 时，$\forall a \in R, |a-x| = |x-a| \neq x$

零元：不存在。

逆元：不讨论。

Problem 2

1. 能。

交换律：$\forall x, y \in S, gcd(x,y) = gcd(y,x)$

结合律：$\forall x, y, z \in S, gcd(x, gcd(y,z)) = gcd(gcd(x,y),z) = gcd(x,y,z)$

单位元：不存在。

零元：1.$\forall x \in S, gcd(1,x) = gcd(x,1) = 1$

2. 不能，因为该运算在 S 上不封闭。反例：$lcm(7,9) = 63$

3. 能。

交换律：$\forall x, y \in S, x * y = y * x = max(x,y)$

结合律：$\forall x,y,z \in S,(x*y)*z=x*(y*z)=max(x,y,z)$

单位元；$1.forall x \in S, 1*x=x*1=x$

零元：$10.forall x \in S, 10*x=x*10=10$

4. 不能。该运算在 S 上不封闭。$2*2=0$

Problem 3

1

是代数系统。满足交换律和结合律（和加法的性质相同）即 $(g+f)(x)=g(x)+f(x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x),((f+g)+p)(x)=(f+g)(x)+p(x)=f(x)+g(x)+p(x)=f(x)+(g+p)(x)=(f+(g+p))$。单位元为 $f:f(x)=0,\forall x \in [a,b]$，没有零元。

2

是代数系统。不满足交换律和结合律（和减法的性质相同）。没有单位元和零元。

3

是代数系统。满足交换律和结合律（和乘法的性质相同，分析同第一小问）。单位元为 $f_1:f_1(x)=1,\forall x \in [a,b]$ 零元为 $f_0(x):f_0(x)=0,\forall x \in [a,b]$

4

不构成代数系统。

Problem 4

证明：

a)$a*b=a*(a*a)=(a*a)*a=b*a$

b) 若 $b*b=a$

①若 $a*b=b*a=a, then$

$$b*b=a$$

$$b*b*a=a*a$$

$$b*(b*a)=a*a$$

$$b*a=b$$

与 $b*a=a$ 矛盾;

②若 $a*b=b*a=b, then$

$$b*b=a$$
$$b*a*a=a$$
$$b*a=a$$

与 $b*a=b$ 矛盾;

因此 $b*b=b$

Problem 5

证明:

若 $\exists x \in G, x*x=x$, 则 $x=e*x=x^{-1}*x*x=x^{-1}*x=e$

Problem 6

证明:

封闭性: $\forall x, y \in Z$, 显然 $x+y-2 \in Z$;

结合律: $\forall x, y, t \in Z, (x+y-2)+t-2=x+(y+t-2)-2$;

单位元: $\forall x \in Z, x+2-2=2+x-2x, \therefore 1_s=2$;

逆元: $\forall x \in Z$, 令 $t=4-x$, 知 $t \in Z$, 且 $x+t-2=t+x-2=2$. 所以对任意 x，都存在其逆元 t。

综上，G 关于 $\odot$ 构成群。

Problem 7

证明:

首先由 $ea=ae, e \in H$ 知 H 非空。之后

① $\forall x, y \in H, ax=xa, ay=ya, \therefore (xy)a=x(ya)=x(ay)=(xa)y=(ax)y=a(xy), xy \in H$

② $\forall x \in H, xa=ax$

$$
\begin{aligned}
x^{-1}xa &= x^{-1}ax \\
a &= x^{-1}ax \\
ax^{-1} &= x^{-1}axx^{-1} \\
ax^{-1} &= x^{-1}a
\end{aligned}
$$

$\therefore x^{-1} \in H$

由子群判定定理，知 H 为 G 子群。

Problem 8

1,2,4,7,8,11,13,14 与 15 互素，所以 G 的生成元有 $a, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$

所有子群:

$< a >= G$;

$< a^3 >= \{a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}\}$

$< a^5 >= \{a^5, a^{10}, a^{15}\}$

Problem 9

证明:

首先因 H 非空，所以 xHx^{-1} 一定非空。又因 $x, h \in G, \therefore xhx^{-1} \in G$,H 为 G 非空子集。

① $\forall h_1, h_2 \in H, (xh_1x^{-1})(xh_2x^{-1}) = xh_1h_2x^{-1}$, 因为 H 为 G 的子群, 所以 $h_1h_2 \in H, \therefore xh_1h_2x^{-1} \in xHx^{-1}$

② $\forall h \in H, h^{-1} \in H, \therefore xh^{-1}x^{-1} \in xHx^{-1}$

综上，xHx^{-1} 为 G 的子群。

Problem 10

证明:

(不妨把函数写作 f 与 g) 即证明 $\forall x, y \in A, g(f(x \circ y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y))$

首先有 $\forall x, y \in A, f(x \circ y) = f(x) * f(y); \forall p, q \in B, g(p * q) = g(p) \cdot g(q)$

令 $p = f(x), q = f(y)$, 代入即可得证。