离散数学作业 Problem Set 7

201830099 周义植

Saturday 12th November, 2022

Problem 1

(1) 有限循环群的生成元为 a^r，其中 $gcd(a,r)=1$，所以所有生成元为 $a, a^1, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$

(2) 1 阶子群 $\{e\}$

3 阶子群 $\{e, a^5, a^{10}\}$

5 阶子群 $\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$

15 阶子群 G

Problem 2

证明：

设循环群的生成元为 a，对任意两个元素 $a^m, a^n, a^m \times a^n = a^{m+n} = a^n \times a^m$, 满足交换律，为阿贝尔群。

不一定。可找出反例，如 Klevin 四元群。

Problem 3

证明：

设 a 为 G_1 生成元，

对 $\forall p \in f(G_1)$, 有 $x \in G_1, x = a^r$

$\therefore p = f(a^r) = f^r(a)$, 所以 $f(G)$ 为循环群，有生成元 $f(a)$。

Problem 4

(a) 是。

(b) 不是。对于 {c,b}, 其上界有 {d,e,f}, 而无最小上界。

(c) 是。

(d) 不是。对于 {b,c}, 其上界有 {d,e,f,g}, 无最小上界。

(e) 不是。对于 {d,e}, 无下界。

(f) 是。

Problem 5

(a){a,d} 互补。c,d 没有补元。

(c){a,f}, 互补。b:c,d。c:b,e。d:b,e。e:c,d。

(f){a,f}, 互补。b:e.e:b. 其余元素没有补元。

Problem 6

a

是分配格。因为小于五元。

不是有补格，因为 b,c 没有补元。

所以其不是布尔格。

c

不是分配格。$b \wedge c = b \wedge d, b \vee c = b \vee d, but\ c \neq d.$ 由分配格的判定定理 2 知其不为分配格。

是有补格，由上一题知每个元素都有其补元。

所以其不是布尔格。

f

是分配格。因为没有与钻石格或五角格同构的子格。

由上一问知不是有补格。

所以不是布尔格。

Problem 7

证明:

设 a 为生成元，$x = a^r, r = 0, 1, \cdots n - 1$, 则等价于求解 r。

$x^m = e \Leftrightarrow (a^r)^m = a^{kn}, k \in N$，也即 $r = \frac{kn}{m}$

当 $k = 0, 1, \cdots m - 1$ 时，r 的解都满足条件且互不相等，所以方程共有 m 个解。

Problem 8

证明:

由交换律，$(ab)^{mn} = a^{mn}b^{mn} = e$. 设 $|ab| = k$，显然 $k|mn$.

又因为 $gcd(m,n) = 1$, 所以 k=1 或 m 或 n 或 mn。

若 k=1，则 ab=e,$(ab)^m = b^m = e$, 与 $b^n = e, (m,n) = 1$ 矛盾（除非 n=1），同理也可推出 m=1，此时 mn=1

若 k=m, 则 $(ab)^m = b^m = e$, 与 $b^n = e, (m,n) = 1$ 矛盾（除非 n=1，此时 mn=m。）

k=n 同理。

上述中的特殊情况也等价于 mn，所以 k 只能等于 mn。

Problem 9

证明:

首先，显然 $S \subseteq L$.

$\forall x, y \in S$, 设 $d \in L \wedge d \notin S, x \vee y = d$, 则 a,d 均为 {x,y} 上界，而 $d \npreceq a$, 则 d 肯定不为 x,y 的上确界，矛盾。所以 $x \vee y \in S$.

再令 $f = x \wedge y$, 则 $f \preceq x$, 又已知 $x \preceq a, \therefore f \preceq a, f \in S$.

综上所述，S 满足 L 上的交并运算，因此 $< S, \preceq >$ 为 L 的子格。

Problem 10

能。显然该运算封闭。

同时，满足结合律：$\forall x, y, z \in B$,

$$\begin{aligned}
&(x \oplus y) \oplus z = ((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \oplus z \\
&= (((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z') \vee \Big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y))' \wedge z\Big) \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \Big((x \wedge y')' \wedge (x' \wedge y)' \wedge z\Big) \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee ((x' \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge z) \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge y')) \wedge z) \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)
\end{aligned}$$

同理也可化简

$(x \oplus y) \oplus z = ((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \oplus z = (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

又 $0 \oplus y = (0 \wedge y') \vee (1 \wedge y) = 0 \vee y = y = y \oplus 0$ 所以 0 为单位元。

$\forall x \in B, x \oplus x = (x \vee x) \wedge (x^{'} \vee x^{'}) = x \wedge x^{'} = 0$, 所以每个元素都有其逆元即本身。

所以能构成群。又显然满足交换律，所以为阿贝尔群。

Problem 11

证明：

(1)

对 n 进行归纳。n=2 时即为德摩根率成立。当 n=k 成立时，

$$(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{k+1})' = ((a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \vee a_{k+1})' = (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k)' \wedge {a_{k+1}}'$$
$$= (a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k') \wedge {a_{k+1}}' = a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k' \wedge a_{k+1}'$$

n=k+1 成立。

(2)

即为 (1) 的对偶命题，显然成立。

Problem 12

证明：

$$\begin{aligned}
v \vee (u \wedge w') &= (w \wedge x) \vee ((w \vee x) \wedge w') \\
&= (w \wedge x) \vee ((w \wedge w') \vee (x \wedge w')) \\
&= (w \wedge x) \vee (0 \vee (x \wedge w')) \\
&= (w \wedge x) \vee (w' \wedge x) \\
&= x \wedge (w \vee w') \\
&= x \wedge 1 \\
&= x
\end{aligned}$$