

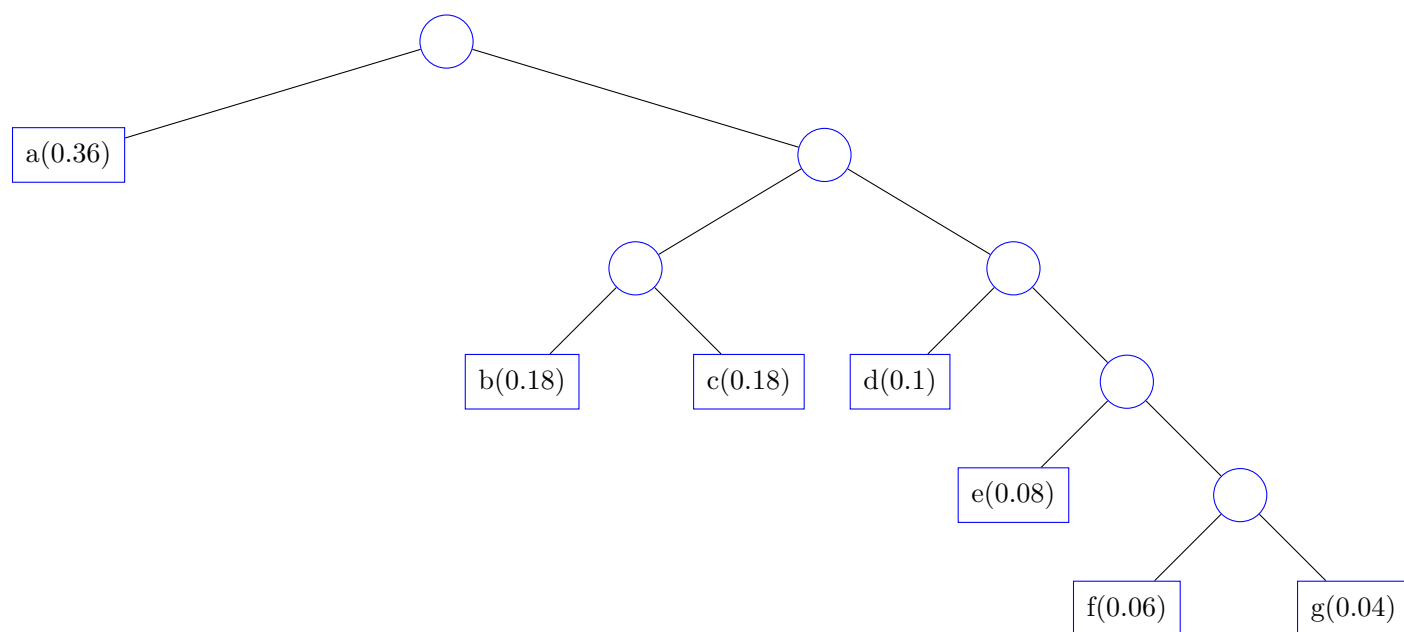
离散数学 Problem Set 11

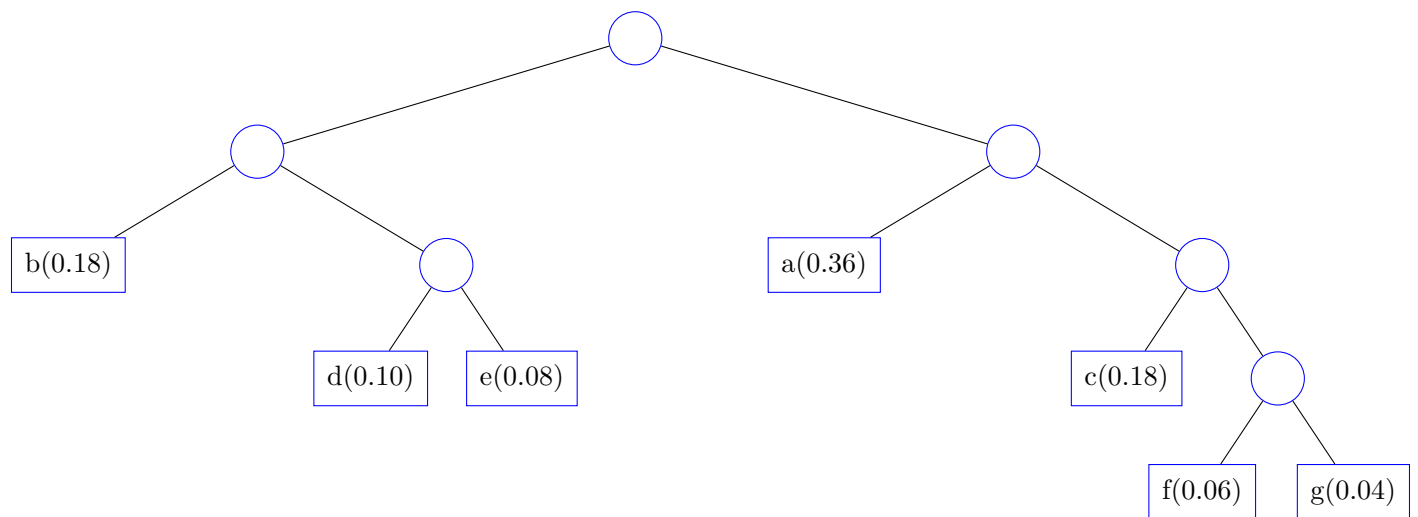
201830099 周义植

Wednesday 14th December, 2022

Problem 1

a





b

1) 平均: 2.56 方差: 1.7264

2) 平均: 2.56 方差: 0.4464

第二种方法。

Prolem 2

a

8

b

21

c

32

d

32

e

2048

Problem 3

Prim(从点 A 开始)

定义：状态中的 *tree*, *unseen*, *fringe* 分别表示该点已被加入 T、还未发现以及加入备选方案。
加入点 A:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
fringewgt	0	5		2					
parent	-1	<i>A</i>		<i>A</i>					
status	<i>tree</i>	<i>fringe</i>	<i>unseen</i>	<i>fringe</i>	<i>unseen</i>	<i>unseen</i>	<i>unseen</i>	<i>unseen</i>	<i>unseen</i>

选择 AD:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
fringewgt	0	3		2	7		6		
parent	-1	<i>D</i>		<i>A</i>	<i>D</i>		<i>D</i>		
status	<i>tree</i>	<i>fringe</i>	<i>unseen</i>	<i>tree</i>	<i>fringe</i>	<i>unseen</i>	<i>fringe</i>	<i>unseen</i>	<i>unseen</i>

以此类推，选择 DB, BC, CF, FE, EH, HI, HG.

Kruskal

加边：EF 并查集：(EF) 加边：AD 并查集：(EF) (AD) 加边：HI 并查集：(EF) (AD) (HI) 加边：BD 并查集：(EF) (ABD) (HI) 加边：CF 并查集：(CEF) (ABD) (HI) 加边：HE 并查集：(CEFHI) (ABD) 加边：BC 并查集：(ABDCEFHI) 加边：GH 并查集：(ABDCEFHI)G

Problem 4

3 次。

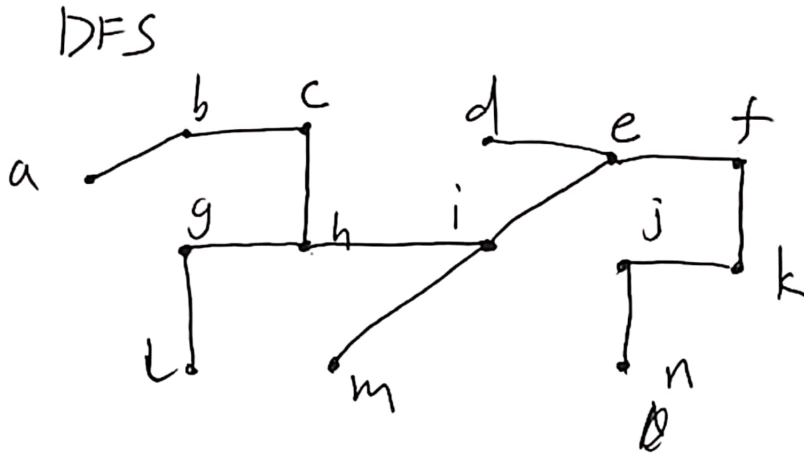
第一次，1, 2, 3 与 4, 5, 6。有两种可能的结果：

1) 一样重。则伪币在 7, 8，将 1 与 7 称重，如不平则 7 为伪币，反之为 8；

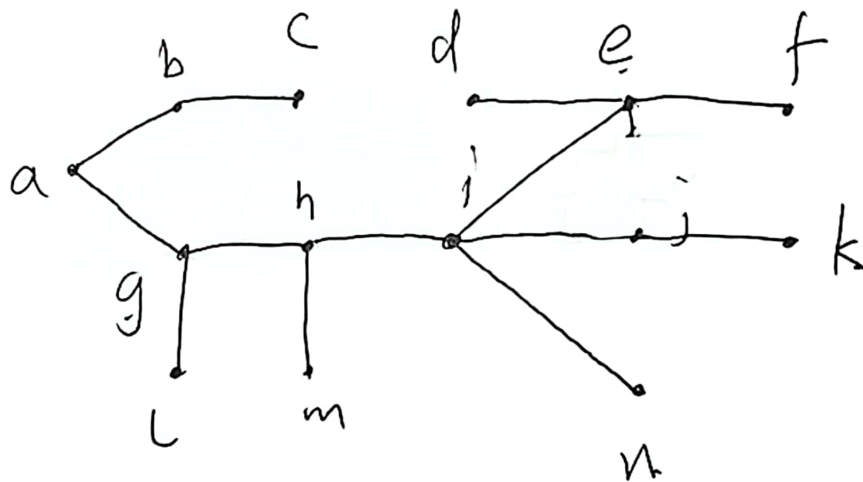
2) 不一样重。由对称性，不妨 1, 2, 3 轻。将 1, 7 与 4, 5 称重，如不平衡，只能是 1, 7 轻。此时有 3 种可能：1 轻或 4/5 重。则再将 4, 5 称重，如不平衡则重的为伪币，如平衡则 1 为伪币。如 1,

7 与 4, 5 等重, 则可能性为 2/3 轻或 6 重, 则将 2, 3 称重, 轻的为伪币, 等重则 6 为伪币。

Problem 5



BFS



Problem 6

证明:

对于该边较晚发现的点 A 来说, 若要该边不是背边, 则需要另一个点 B 在此时已完全结束 (否则 A 一定是 B 的后代)。而在遍历 B 的整个过程中, A 都没有开始遍历, 那么一定会遍历这条边, 矛盾; 因此该边一定是背边。

Problem 7

证明：

假设该图存在两个不同的最小生成树 T_1, T_2 , 其边按权值的升序排列分别为 e_1, e_2, \dots, e_k 与 e'_1, e'_2, \dots, e'_k 。由于边的权重互不相同，每个权值唯一地代表一条边。设 i 是最小的使 $e_i \neq e'_i$ 的下标，不失一般性令 $e_i < e'_i$, 则对 $T_2 + \{e_i\}$ 必定存在圈，且其中存在不在 T_1 中的边 ab , 则 $W(ab) \geq W(e'_i) > W(e_i)$, 因此用 e_i 代替 ab 可得到权值更小的生成树，与假设的 MST 矛盾。因此边权值互不相同的图 MST 唯一。