离散数学作业

Yizhi Zhou

Monday 10th October, 2022

Problem 1

(1) card A = 3

(2) 有双射 $f: N \to B: f(x) = x^2, cardB = cardN = \aleph_0$

(3) 有双射 $f: N \to C: f(x) = x^{109}, cardC = cardN = \aleph_0$

(4) 有双射 $f: N \to D: f(x) = x^{218}, cardD = cardN = \aleph_0$

(5)$B \cup C \approx N, cardE = \aleph_0$

(6) 有双射 $f: R^+ \to F: f(r) = (x^2 + y^2 = r^2), cardF = cardR^+ = \aleph$

Probelm 2

(a) 可数无限的。有双射 $f: N \to A$

$$f(x) = x + 11$$

(b) 可数无限的。有双射 $f: N \to B$

$$f(x) = -2x - 1$$

(c) 有限的。

(d) 不可数的。

(e) 可数无限的。有双射 $f: N \to E$

$$f(x) = \begin{cases} (2, \frac{x}{2} + 1), x \equiv 0(mod2) \\ (3, \frac{x-1}{2} + 1), x \equiv 1(mod2) \end{cases}$$

(f) 可数无限的。有双射 $f: N \to F$

$$f(x) = \begin{cases} 10 \cdot \dfrac{x}{2}, x \equiv 0(mod2) \\ -10 \cdot \dfrac{x+1}{2}, x \equiv 1(mod2) \end{cases}$$

Problem 3

证明:

若有从 A 到 B 的满射, 则对 B 中的每个元素, 只取 A 中对应的某一个元素, 再将关系反向, 即可得到 B 到 A 的单射, 因此 A 优势于 B。A 可数, 所以 B 一定可数。

Problem 4

证明:

任何一个有理数 y 必能化为既约分数 $\frac{p}{q}$ 的形式。因此我们可以找到满射 $f: N^2 \to Q$:

$$f((p,q)) = \frac{p}{q}$$

再从原点螺旋向外经过每一个整数点并排序即可得到 $N \to Q$ 的满射, 因此 N 优势于 Q;

而 $N \in Q$, 所以 Q 优势于 N, 所以二者等势.

Problem 5

证明:

$if \qquad n \equiv 0(modk)$, 则 $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \frac{n}{k}, \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor = \frac{n}{k} - 1$

$elif \qquad n \equiv 1, 2, \cdots (k-1)(modk)$, 则 $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \frac{n}{k} + 1, \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor = \frac{n}{k}$

两种情况下都有 $\lceil n/k \rceil = \lfloor (n-1)/k \rfloor + 1$

Problem 6

(a) 否。$a = 6, b = 15, c = 30 : a|c, b|c, ab \nmid c$

(b) 是。$a \mid c$, 则存在整数 m $s.t.$ $\frac{c}{a} = m$ 同理存在整数 n $s.t.$ $\frac{d}{b} = n, \therefore \ \frac{cd}{ab} = mn, ab \mid cd$

(c) 是。$a \mid ab, ab \mid c, \therefore a \mid c,$

(d) 否。$a = 4, b = 2, c = 2 : a \mid bc \qquad but \qquad a \nmid b \quad and \quad a \nmid c$

Problem 7

(a) 计算得 23300 mod $11 = 2$

(b) 首先有 $2^5 \equiv 1(mod31), \therefore 2^{3300} = (2^5)^{660} \equiv 1^{660} = 1(mod31)$

(c) 由费马小定理 $3^6 \equiv 1(mod7), \therefore 3^{516} = (3^6)^{86} \equiv 1^{86} = 1(mod7)$

Problem 8

证明:

(a) 连续 3 个整数, 其中必有一个使得 $2 \mid x$, 一个 $3 \mid y$(xy 可能相同)

而 $6 = 2 \times 3, gcd(2,3) = 1, \therefore 6 \mid n(n+1)(n+2)$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n &= \frac{3n^5 + 5n^3 + 7n}{15} \\ &= \frac{n(3n^4 + 5n^2 + 7)}{15} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n^2+8)+15}{15} \end{aligned} \tag{1}$$

因此只需证明 $15 \mid N = n(n+1)(n-1)(3n^2+8)$.

显然 $3 \mid n(n+1)(n-1)$. 当 $n \equiv 0, 1, 4(mod5)$ 时, 均有 $5 \mid n(n+1)(n-1)$, 从而得证;

当 $n \equiv 2(mod5), 3n^2 + 8 \equiv 3 * 4 + 8 \equiv 0(mod5)$,

当 $n \equiv 3(mod5), 3n^2 + 8 \equiv 3 * 9 + 8 \equiv 0(mod5)$,

而 $15 = 3 \times 5, gcd(3,5) = 1$,

从而 $15 \mid n(n+1)(n-1)(3n^2+8)$.

Problem 9

(a)

$$\begin{aligned} 125 &= 85 + 40 \\ 85 &= 40 \times 2 + 5 \\ 40 &= 5 \times 8 \end{aligned}$$

$\therefore\ gcd(85, 125) = 5$

(b)

$$\begin{aligned} 231 &= 72 \times +15 \\ 72 &= 15 \times 4 + 12 \\ 15 &= 12 + 3 \\ 12 &= 3 \times 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ gcd(231, 72) = 3$

(c)

$$\begin{aligned} 56 &= 45 + 11 \\ 45 &= 11 \times 4 + 1 \\ 11 &= 1 \times 11 \end{aligned}$$

$\therefore\ gcd(45,56)=1$

(d)

$$\begin{aligned}154&=64\times 2+26\\64&=26\times 2+12\\26&=12\times 2+2\\12&=2\times 6\end{aligned}$$

$\therefore\ gcd(154,64)=2$

Problem 10

证明:

因为存在无限个素数, 对充分大的素数 n,

$\phi(n)=n-1$, 而 $(n+1)$ 至少有一个质因数 2,$\phi(n+1)\le(n+1)(1-\frac{1}{2})<\ \phi(n)$

因此存在无限个 $n,s.t.\ \phi(n)>\phi(n+1)$