

閩南師範大學

理学硕士学位论文

形式背景下构建知识结构与寻找学
习路径的方法研究

周银凤

閩南師範大學

二〇二二年六月

学校代码：10402

学 号：2019022015

分 类 号：

密 级：

閩南師範大學

理学硕士学位论文

形式背景下构建知识结构与寻找学
习路径的方法研究

学 位 申 请 人：周银凤

指 导 教 师：李进金教授

学 位 类 别：理学硕士

学 科 专 业：应用数学

授 予 单 位：闽南师范大学

答 辩 日 期：二〇二二年六月

CODE:10402

NO.:2019022015

U.D.E.:

Classified Index:

A Thesis for the Degree of Master of Science

Research on methods of constructing knowledge structures and finding learning paths in formal contexts

Candidate : Zhou Yinfeng

Supervisor : Prof. Li Jinjin

Specialty : Applied Mathematics

Academic Degree Applied for : Master of Science

University : Minnan Normal University

Date of Thesis Defence : June, 2022

闽南师范大学

专业学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：周银凤

日期：2022 年 6 月 12 日

专业学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权闽南师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在_____年解密后适用本授权书。

2、不保密☒。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：周银凤

日期：2022 年 6 月 12 日

导师签名：李建新

日期：2022 年 6 月 12 日

摘 要

知识空间理论为构建知识评价体系提供了有效的途径. 形式概念分析是知识发现的有力工具. 知识空间理论与形式概念分析间存在密不可分的联系. 知识空间理论被运用于评估学习者的知识和指导未来的学习. 目前, 如何构建准确的知识结构是知识空间理论的重点研究问题之一. 随着技能认知水平的引入, 如何基于问题与技能之间的关系构建知识结构并进行知识评估和学习指导的课题备受关注. 在形式背景下, 不仅可运用求解概念的方法来快速构建知识结构, 还可进一步对学习者的知识评价和学习指导. 因此, 本文将技能映射、技能函数与形式背景建立联系, 讨论通过三种模型构建知识结构的方法, 并给出在三种模型下寻找学习路径的方法. 主要涉及以下几个方面的工作:

(1) 第一章主要介绍本论文所涉及的研究背景与目前研究现状, 并介绍主要的研究工作和基础知识.

(2) 第二章首先建立技能映射与形式背景之间的联系, 运用 \square, \diamond 算子构建知识结构. 其次, 为了减低构建知识结构的时间复杂度, 基于析取模型, 给出保持基不变的技能约简方法. 随后, 为了能够准确对学习者的技能进行评估并有效地进行学习指导, 提出良好技能映射的概念, 并基于合取与析取两种模型进一步给出技能评估与寻找学习路径的方法. 同时, 通过实验说明本章所提出方法的有效性和可行性.

(3) 第三章首先建立技能函数与形式背景之间的联系, 运用面向属性概念构建知识结构. 接着, 提出良好技能函数的概念, 给出技能函数满足良好性的条件, 并设计获取良好技能函数的算法. 随后, 基于技能函数的能力模型, 给出技能评估与获取学习路径的方法. 最后, 通过实验说明本章所提方法的有效性和可行性.

关键词: 形式背景; 技能映射; 技能函数; 知识结构; 学习路径; 技能评估

Abstract

Knowledge space theory provides an effective way to construct a knowledge evaluation system. Formal concept analysis is a powerful tool for knowledge discovery. There is an inextricable link between knowledge space theory and formal concept analysis. Knowledge space theory is used to assess learners' knowledge and to guide future learning. Currently, the construction of accurate knowledge structures is one of the key research questions of knowledge space theory. With the introduction of skill cognitive levels, there is a lot of interest in how to construct knowledge structures based on the relationship between items and skills and to assess knowledge and guide learning. In formal context, it is not only possible to quickly construct knowledge structures by solving concepts, but also to further evaluate and guide learners' knowledge. Therefore, this paper links skill maps, skill functions and formal contexts, discusses the methods of constructing knowledge structures through three models, and gives the methods of finding learning paths under the three models. This paper mainly studies the following aspects.

The first chapter introduces the background and current research status of this thesis, and introduces the main research work and basic knowledge.

The second chapter firstly establishes the connection between skill map and formal context, and constructs knowledge structure using operators \square, \diamond . Secondly, in order to reduce the time complexity of constructing the knowledge structure, a skill reduction method based on the disjunctive model is given to keep the base invariant. Then, in order to accurately assess learners' skills and effectively guide learning, the concept of well-formed skill map is proposed, and the methods of skills assessment and finding learning paths are further presented based on both conjunctive and disjunctive models. At the same time, the effectiveness and feasibility of the proposed methods are illustrated through experiments.

The third chapter firstly establishes the connection between skill functions and formal contexts, and uses attribute-oriented concepts to construct knowledge structures. Then, the concept of well-formed skill function is proposed, the well-formedness conditions of skill

function are given, and the algorithm to obtain well-formed skill function is designed. Then, based on the competence model of skill function, the methods of skills assessment and finding learning paths are given. Finally, the effectiveness and feasibility of the proposed methods are illustrated through experiments.

Key Words: Formal context; Skill map; Skill function; Knowledge structure; Learning paths; Skills assessment

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 主要研究内容.....	3
1.3 预备知识.....	3
1.3.1 形式概念分析基础知识.....	3
1.3.2 知识空间理论基础知识.....	5
1.3.3 基于能力的知识空间理论基础知识.....	7
第 2 章 基于技能映射构建知识结构与寻找学习路径的方法.....	9
2.1 技能映射与形式背景的关系.....	9
2.2 构建知识结构.....	10
2.3 保持基不变的技能约简.....	12
2.4 良好技能映射.....	14
2.5 技能评估与学习路径.....	20
2.5.1 合取模型下的技能评估与学习指导.....	20
2.5.2 析取模型下的技能评估与学习指导.....	23
2.6 实验部分.....	26
2.6.1 数据集.....	26
2.6.2 合取模型下的实验结果与分析.....	28
2.6.3 析取模型下的实验结果与分析.....	30
2.7 本章小结.....	33
第 3 章 基于技能函数构建知识结构与寻找学习路径的方法.....	35
3.1 技能函数与多标记背景.....	35
3.2 构建知识结构.....	38

3.3 良好技能函数.....	40
3.4 技能评估与学习路径.....	44
3.5 实验部分.....	48
3.5.1 数据集.....	48
3.5.2 实验结果与分析.....	49
3.6 本章小结.....	51
第4章 总结与展望.....	53
参考文献.....	55
致 谢.....	59
攻读学位期间取得的科研成果清单.....	61

第1章 绪论

1.1 前言

知识空间理论^[1] (Knowledge Space Theory, 简称“KST”) 是由美国数学心理学家 Falmagne J C 和比利时数学心理学家 Doignon J P 于 1985 年首先提出的用数学的方法来对学习者的知识评价和指导学习的一种数学心理模型。目前, KST 主要应用于辅助学习和自适应学习等领域^[2-5], 并在 ALEKS 等^[6]学习和评价系统中得到广泛的应用 (“ALEKS” 是 “Assessment and Learning in Knowledge Spaces” 的缩写, 见 <https://www.aleks.com/>).

KST 中, 知识结构是用于评估学习者的知识和指导未来学习的主要特征形式。如何准确地构建知识结构是 KST 中的重点研究问题之一。目前构建知识结构的方法有多种, 包括专家问询、样本数据分析等^[7-10]方法。为了更有效地构建知识结构, 近年来学者们将 KST 与其他学科建立了紧密的联系。Rusch A 与 Wille R^[11]于 1996 年首次将形式概念分析与 KST 建立联系, 介绍了知识空间与形式背景的互相转换过程。姚一豫等^[12,13]将粗糙集与 KST 相结合, 并用粗糙集的方法构建知识结构。Heller J 等^[14]将 KST 与认知诊断模型相比较, 并建立这两者之间的紧密联系。此外已有多位学者将技能的认知水平纳入 KST 中, 并将 KST 推广到基于能力的知识空间理论^[15-18] (Competence-based Knowledge Space Theory, 简称“Cb-KST”).

Cb-KST 中, 存在两个相互依赖的水平: 表现水平和能力水平。表现水平反映可观测到的学习者对问题的认知水平, 即知识状态。能力水平反映不可观测到的学习者对技能的认知水平, 即能力状态。学习者需要掌握与问题有关的某些技能或能力才能解决相应的问题。Doignon J P 和 Falmagne J C 等^[19-21]基于问题与技能之间的关系, 提出技能映射、技能多映射的概念, 并给出构建知识结构的新方法。技能映射有常见的两种模型: 析取模型和合取模型。析取模型表现为“或”关系, 学习者只需掌握某些与问题有关的技能便能解决该问题。合取模型表现为“与”关系, 学习者需掌握与问题有关的所有技能才能解决该问题。技能多映射是技能映射的推广, 常见的模型为能力模型。能力模型表现为“或”关系, 学习者只需达到用于解决问题的某些能力便能解决该问题。值得注意的是, 在技能多映射中, 分配给问题的能力可能不是极小的, 这加大了构建知识结构的复

杂度. 基于此, Düntsch I 等^[16]对技能多映射进行约简, 引入技能函数和问题函数的概念. Heller J 等^[22]指出技能映射的析取模型和合取模型可视为技能函数的两种特殊情形.

形式概念分析^[23](Formal Concept Analysis, 简称“FCA”)是由德国数学家 Wille R 于 1982 年提出的一种从形式背景建立概念格来进行数据分析和规则提取的强有力工具. 目前, FCA 已被广泛地研究, 并应用到机器学习^[24]、知识发现和知识获取^[25,26]等领域. Rusch A 与 Wille R^[11]首次将 FCA 与 KST 建立联系, 提出了由形式背景构造知识空间的方法. 这为 FCA 在教育与心理学等领域的应用奠定了基础. 相继地, Spoto A^[27]等将 Cb-KST 与 FCA 相结合, 并基于技能映射的合取模型, 提出了由形式背景构造知识结构的方法. 众所周知, 基于形式背景, 通过不同的算子可获得不同的概念格. Spoto A^[27]等基于反背景, 通过 Wille R^[23]提出的两个算子求解经典概念格, 从而构建技能映射通过合取模型诱导的知识结构. Düntsch I^[16]指出, 学习者所掌握的技能越多, 能够正确解决的问题也就越多. 因此, 基于正背景, 运用 Duntsch N、Gediga G^[28,29]和 Yao Y Y^[30,31]所提出的算子求解面向属性概念和面向对象概念来构建技能映射通过析取和合取两种模型诱导的知识结构, 以及构建技能函数通过能力模型诱导的知识结构是一个值得深入研究的课题.

事实上, 在构建知识结构的过程中, 可能存在冗余的技能. Doignon J P 在文[32]中提出了极小技能映射的概念. 高纯^[33]和 Xu F F^[34]等基于技能映射的析取模型, 对极小技能映射的生成方式做了进一步研究. 经数学心理学家 Falmagne J C^[20]等的研究发现, 在析取模型下, 技能映射诱导的知识结构是一个知识空间. 有限的知识空间必有一个基, 且知识空间可由基唯一确定. 李进金等^[35]称知识空间的基为知识基, 并基于知识基建立了形式背景与知识空间的紧密联系. 因此, 基于形式背景, 在保持基不变的情形下, 对技能的约简问题也值得深入探讨.

值得注意的是知识状态与能力状态并不是一一对应的. 已知学习者的知识状态, 并不能直接反应出其能力状态. 对此, Heller J 等^[14,36]基于技能映射的合取模型, 讨论知识状态与能力状态满足一一对应的条件. 一般地, 学习者可能学习并掌握了某些技能, 但知识状态却没有发生改变. 此时, 无法从学习者的表现水平评估其是否掌握了相应的技能, 且无法进行有效的学习指导. 这给以 Cb-KST 为理论框架的辅导系统^[17,37,38]带来巨大的麻烦. 基于此, Stefanutti L 等^[18]基于技能映射的合取模型研究能力结构满足良级性的条件, 使学习者只需学习一个有效的技能就能改变原有的知识状态. 然而, 现实生活

中往往存在一题多解的情形,且目前少有学者针对一题多解的情形,研究能力结构满足良级性的条件.实际上,学习者对技能的学习是特殊的概念认知学习^[39]过程.李金海等^[40]指出概念的渐进式认知能够实现阶段性认知,并根据阶段性认知及时指导下一步的行动,从而逐渐实现完全认知.学习者通过逐步学习并掌握更多的技能来达到解决更多问题的目的.换句话说,学习者通过学习技能来使得自身的知识状态发生改变.在现代教育中,不仅要关注学习者掌握了哪些技能,更要关注学习者下一步需学习哪些技能^[41].由此可见,将技能集逐步有效学习的学习路径进行可视化显得尤为重要.因此,本文运用形式概念分析对技能映射和技能函数做进一步研究.在三种模型下,构建知识结构,并讨论如何对学习者进行技能评估和进行有效的学习指导.

1.2 主要研究内容

本文主要研究内容包括以下几点:

1. 受文[11,27]的启发,建立技能映射与形式背景的联系,应用面向属性概念和面向对象概念分别构建技能映射通过合取模型与析取模型诱导的知识结构,并基于析取模型讨论保持基不变的技能约简问题.
2. 提出良好技能映射的概念,讨论技能映射满足良好性的条件,并设计获取良好技能映射的算法.随后,分别在合取与析取两种模型下讨论对学习者进行技能评估与寻找学习路径的方法.
3. 提出方式矩阵的概念,将技能函数分解为多个形式背景,并应用面向属性概念构建技能函数通过能力模型诱导的知识结构.
4. 提出良好技能函数的概念,讨论技能函数满足良好性的条件,并设计获取良好技能函数的算法.随后,在能力模型下讨论对学习者进行技能评估与获取学习路径的方法.

1.3 预备知识

1.3.1 形式概念分析基础知识

定义 1.3.1^[23] 三元组 (U, A, I) 称为一个形式背景,其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是对象集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是属性集, $I \subseteq U \times A$ 是 U 与 A 之间的二元关系.对任意 $x \in U$, $a \in A$, $(x, a) \in I$ 表示对象 x 具有属性 a , $(x, a) \notin I$ 表示对象 x 不具有属性 a .

定义 1.3.2^[23] 设 (U, A, I) 为形式背景, 对 $x \in U$ 和 $a \in A$, 定义

$$x^* = \{a \mid a \in A, (x, a) \in I\},$$

$$a^* = \{x \mid x \in U, (x, a) \in I\}.$$

其中 x^* 表示对象 x 所具有的属性集合, a^* 表示具有属性 a 的对象集合. 若对 $\forall x \in U$, 有 $x^* \neq \emptyset$, $x^* \neq A$, 且对 $\forall a \in A$, 有 $a^* \neq \emptyset$, $a^* \neq U$, 则称形式背景 (U, A, I) 是正则的.

定义 1.3.3^[42,43] 设 (U, A, I) 为形式背景, 对 $X \subseteq U$ 和 $B \subseteq A$, 定义

$$X^\diamond = \{a \in A \mid a^* \cap X \neq \emptyset\},$$

$$X^\square = \{a \in A \mid a^* \subseteq X\},$$

$$B^\diamond = \{x \in U \mid x^* \cap B \neq \emptyset\},$$

$$B^\square = \{x \in U \mid x^* \subseteq B\}.$$

其中, X^\diamond 表示 X 中的对象所具有的属性集合, X^\square 表示只有 X 中的对象才具有的属性集合, B^\diamond 表示具有 B 中属性的对象集合, B^\square 表示只具有 B 中属性的对象集合. 特别地, 记 $\{x\}^\diamond = x^\diamond$, $\{x\}^\square = x^\square$, $\{a\}^\diamond = a^\diamond$, $\{a\}^\square = a^\square$.

注意到, $X^\diamond = \bigcup_{x \in X} x^\diamond$, $B^\diamond = \bigcup_{b \in B} b^\diamond$, 易知 $\{x^\diamond \mid x \in U\}$ 是 $\{X^\diamond \mid X \subseteq U\}$ 的并式生成组, $\{b^\diamond \mid b \in A\}$ 是 $\{B^\diamond \mid B \subseteq A\}$ 的并式生成组.

定义 1.3.4^[42,43] 设 (U, A, I) 为形式背景, $X \subseteq U$, $B \subseteq A$. 若满足 $X = B^\square$ 且 $B = X^\diamond$, 则称二元组 (X, B) 是一个面向属性概念. 若满足 $X = B^\diamond$ 且 $B = X^\square$, 则称二元组 (X, B) 是一个面向对象概念.

上述两种概念中, X 为概念的外延, B 为概念的内涵. 用 $L_p(U, A, I)$ 表示形式背景 (U, A, I) 所有面向属性概念的集合, 用 $L_o(U, A, I)$ 表示形式背景 (U, A, I) 所有面向对象概念的集合.

定义 1.3.5^[42] 设 (U, A, I) 为形式背景, 对 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_p(U, A, I)$ (或 $L_o(U, A, I)$), 定义

$$(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2,$$

则 $L_p(U, A, I)$ 与 $L_o(U, A, I)$ 都是偏序集. 称 (X_2, B_2) 是 (X_1, B_1) 的父概念, (X_1, B_1) 是 (X_2, B_2) 的子概念. 若 $(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2)$ 且不存在 $(X, B) \in L_p(U, A, I)$ (或 $L_o(U, A, I)$) 使

得 $(X_1, B_1) \leq (X, B) \leq (X_2, B_2)$, 则称 (X_2, B_2) 是 (X_1, B_1) 的真父概念, (X_1, B_1) 是 (X_2, B_2) 的真子概念.

定义 1.3.6^[42,43] 设 (U, A, I) 为形式背景, 对 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_p(U, A, I)$, 定义

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = (X_1 \cap X_2, (B_1 \cap B_2)^{\diamond\Diamond}),$$

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = ((X_1 \cup X_2)^{\diamond\Diamond}, B_1 \cup B_2),$$

对 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_o(U, A, I)$, 定义

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = ((X_1 \cap X_2)^{\diamond\Diamond}, B_1 \cap B_2),$$

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = (X_1 \cup X_2, (B_1 \cup B_2)^{\diamond\Diamond}),$$

则 $(L_p(U, A, I), \vee, \wedge)$ 与 $(L_o(U, A, I), \vee, \wedge)$ 是完备格.

定义 1.3.7^[44] 三元组 (U, L, I) 称为一个单标记背景, 其中 U 为对象集, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ 为标记值集, $I \subseteq U \times L$, $(x, L_p) \in I$ 表示对象 x 在标记 L 下的取值为 L_p , $(x, L_p) \notin I$ 表示对象 x 在标记 L 下的取值不为 L_p .

将对象在标记 L 下的标记值视为形式背景中的属性, 则一个单标记背景可视为一个在特定属性下的形式背景.

定义 1.3.8^[44] 三元组 $(U, \bigcup_{i=1}^m L_i, \bigcup_{i=1}^m I_i)$ 称为一个多标记背景, 其中 (U, L_i, I_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ 为 m 个单标记背景.

多标记背景可看作是一个三元形式背景, 是在相同属性下由几个不同的单标记背景合并得到的. 也就是说, 多标记背景可分解为多个形式背景.

1.3.2 知识空间理论基础知识

知识状态是 KST 中的核心概念之一. 知识状态是指在非空问题域 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 中, 学习者在理想状态下所能正确解决的问题集合 $K \subseteq Q$. 所谓理想状态是指学习者在没有受到外界压力或情绪干扰的情况下, 没有由粗心导致的错误和由侥幸猜对的情况.

定义 1.3.9^[20] 若 \mathcal{K} 是由非空问题域 Q 的子集构成的知识状态集族, 且 \mathcal{K} 至少包含 \emptyset 和 Q , 则称 (Q, \mathcal{K}) 为知识结构.

在问题域 Q 明确的情况下, 可直接用 \mathcal{K} 表示知识结构. 本文所讨论的问题域 Q 都为非空有限的情形.

定义 1.3.10^[20] 设 (Q, \mathcal{K}) 为知识结构. 若 \mathcal{K} 满足并封闭, 即对 $\forall K_i, K_j \in \mathcal{K}$, 有 $K_i \cup K_j \in \mathcal{K}$, 则称 (Q, \mathcal{K}) 为知识空间. 若 \mathcal{K} 满足交封闭, 即对 $\forall L_i, L_j \in \mathcal{K}$, 有 $L_i \cap L_j \in \mathcal{K}$, 则称 (Q, \mathcal{K}) 为闭包空间.

定义 1.3.11^[20] 设 $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1$ 分别为两个集族. 若 \mathcal{G}_1 包含 \mathcal{G} 中所有有限个元素的并组成的集合, 则称集族 \mathcal{G}_1 是 \mathcal{G} 的张成, 记为 $\mathbb{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1$, 或称 \mathcal{G} 张成 \mathcal{G}_1 .

显然, 由定义 1.3.11 可知集族 \mathcal{G}_1 是并封闭的. 由定义 1.3.10 和定义 1.3.11 可知知识空间 \mathcal{K} 可由 \mathcal{K} 的某子集族张成得到.

定义 1.3.12^[20] 设 (Q, \mathcal{K}) 为知识空间, 若 \mathcal{B} 是张成 \mathcal{K} 的最小子集族, 则称 \mathcal{B} 是 \mathcal{K} 的基.

通常情况下, \emptyset 可看作是 \mathcal{B} 的空子集族的并, 因此约定 $\emptyset \notin \mathcal{B}$. 定义 1.3.12 中最小子集族是指关于包含关系“ \subseteq ”的最小子集族, 即对 $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ 且 $\mathbb{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{K}$, 有 $\mathcal{G} = \mathcal{B}$. 此外, 对 \mathcal{B} 中的任何一个元素 K , K 不能表示为 \mathcal{B} 中其余元素的并. 也就是说, 对 $\forall K \in \mathcal{B}$, 不存在 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \setminus \{K\}$ 使得 $K = \bigcup \mathcal{B}'$.

李进金^[35]等称知识空间的基为知识基. 基张成知识空间, 即基包含了知识空间的所有信息, 是反映学习者能够掌握的最基本的知识状态的集族.

引理 1.3.1^[20] 若 (Q, \mathcal{K}) 为一个有限的知识空间, 则 \mathcal{K} 有且仅有一个基.

定义 1.3.13^[20] 设 \mathcal{F} 为非空集族. 对 $\forall q \in \bigcup \mathcal{F}$, \mathcal{F} 中含有 q 的极小集合称为 q 的原子. 若对 $q \in \bigcup \mathcal{F}$, L 是 q 的原子, 则称 $L \in \mathcal{F}$ 为一个原子.

某个问题 q 的原子可能不唯一, 且有限的知识结构中每个问题至少有一个原子.

引理 1.3.2^[20] 设 (Q, \mathcal{K}) 为知识空间, \mathcal{B} 是 \mathcal{K} 的基, 则 \mathcal{B} 是由 \mathcal{K} 的所有原子构成的集族.

定义 1.3.14^[20] 设 \mathcal{F} 是一个集族, 若对 $\forall K, L \in \mathcal{F}$, 存在有限序列

$$K = K_0, K_1, \dots, K_p = L,$$

使得 K_{i-1} 与 K_i 之间的距离为

$$d(K_{i-1}, K_i) = |(K_{i-1} \setminus K_i) \cup (K_i \setminus K_{i-1})| = 1,$$

其中 $1 \leq i \leq p$ 且 $p = d(K, L)$, 则称 \mathcal{F} 是良级的.

我们称满足定义 1.3.14 的有限序列 $K = K_0, K_1, \dots, K_p = L$ 是由 K 到 L 的紧路径. 若 \mathcal{F}

是良级的, 则称 \mathcal{F} 是满足良级性的.

1.3.3 基于能力的知识空间理论基础知识

在能力水平上, 对技能集 S , 学习者已经掌握的技能子集 $T \subseteq S$ 称为能力状态.

定义 1.3.15^[21] 若 \mathcal{T} 是由非空技能集 S 的子集构成的能力状态集族, 且 \mathcal{T} 至少包含 \emptyset 和 S , 则称 (S, \mathcal{T}) 为能力结构.

定义 1.3.16^[20] 三元组 (Q, S, τ) 称为一个技能映射, 其中 Q 为非空有限问题域, S 是与 Q 相对应的非空有限技能集, τ 是从 Q 到 $2^S \setminus \{\emptyset\}$ 的映射. 对 $\forall q \in Q$, $\tau(q) \subseteq S$ 表示与问题 q 的求解有关的技能集合. 若 $s \notin \tau(q)$, 则技能 s 与问题 q 的求解无关.

当问题域 Q 和技能集 S 给定时, 直接称 τ 是一个技能映射.

定义 1.3.17^[20] 设 (Q, S, τ) 为技能映射, 对 $T \subseteq S$, 称

$$K = \{q \in Q \mid \tau(q) \subseteq T\}$$

为 T 通过合取模型诱导得到的知识状态. 遍历 S 的子集所得到的知识状态构成的集族 \mathcal{K} 称为技能映射 τ 通过合取模型诱导得到的知识结构.

定义 1.3.18^[20] 设 (Q, S, τ) 为技能映射, 对 $T \subseteq S$, 称

$$K = \{q \in Q \mid \tau(q) \cap T \neq \emptyset\}$$

为 T 通过析取模型诱导得到的知识状态. 遍历 S 的子集所得到的知识状态构成的集族 \mathcal{K} 称为技能映射 τ 通过析取模型诱导得到的知识结构.

引理 1.3.3^[20] 设 (Q, S, τ) 为技能映射, $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ 分别为技能映射 τ 通过合取模型和析取模型诱导得到的知识结构, 则 \mathcal{K}_1 为闭包空间, \mathcal{K}_2 为知识空间, 且 \mathcal{K}_1 与 \mathcal{K}_2 互为对偶结构.

定义 1.3.19^[20] 设 (Q, S, τ) 为技能映射. 若对 $\forall S' \subset S$, $\tau': Q \rightarrow 2^{S'} \setminus \{\emptyset\}$, 在相同模型下, 技能映射 (Q, S', τ') 诱导的知识结构都异于 (Q, S, τ) 诱导的知识结构, 则称 (Q, S, τ) 为极小技能映射, S 为极小技能集.

定义 1.3.20^[20] 设 S 和 S' 是与问题域 Q 相对应的且不相等的非空技能集, 若存在一一映射 $f: S \rightarrow S'$, 使得对 $\forall q \in Q$, 有

$$\tau'(q) = f(\tau(q)) = \{f(s) \mid s \in \tau(q)\},$$

则称技能映射 (Q, S, τ) 和 (Q, S', τ') 同构.

在相同模型下, 两个同构的技能映射诱导相同的知识结构, 但诱导相同知识结构的

技能映射不一定同构. 特别地, 在相同模型下, 诱导相同知识结构的极小技能映射同构.

定义 1.3.21^[20,21] 三元组 (Q, S, μ) 称为一个技能多映射, 其中 Q 为非空有限问题域, S 是与 Q 相对应的非空有限技能集, μ 是从 Q 到 $2^{2^S \setminus \{\emptyset\}} \setminus \{\emptyset\}$ 的映射. 对 $\forall q \in Q$, $C \in \mu(q)$ 称为解决问题 q 的能力.

当问题域 Q 和技能集 S 给定时, 直接称 μ 是一个技能函数.

定义 1.3.22^[20,21] 设 (Q, S, μ) 为技能多映射, 对 $T \subseteq S$, 称

$$K = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q), C \subseteq T\}$$

为 T 通过能力模型诱导得到的知识状态. 遍历 S 的子集所得到的知识状态构成的集族 \mathcal{K} 称为技能多映射 μ 通过能力模型诱导得到的知识结构.

定义 1.3.23^[20,21] 设 (Q, S, μ) 为技能多映射, 若对 $\forall q \in Q$, $\forall C \in \mu(q)$, C 是解决问题 q 的极小能力, 则称 (Q, S, μ) 为技能函数.

第2章 基于技能映射构建知识结构与寻找学习路径的方法

在本章,首先根据技能映射与形式背景之间的关系,将技能映射转化为形式背景.其次,利用面向属性概念,构建技能映射通过合取模型与析取模型诱导的知识结构.再者,基于析取模型,在保持知识空间的基不变的前提下对技能进行约简,并设计技能约简的算法.接着,基于合取模型,讨论技能映射满足良好性的充要条件,设计获取良好技能映射的算法,并分别在合取模型与析取模型下,讨论技能评估与获取学习路径的方法.最后,在两个数据集上进行实验分析,说明本章算法的有效性和可行性.

2.1 技能映射与形式背景的关系

在无特殊说明的情形下,本章所讨论的技能映射 (Q, S, τ) 中,对任意 $p, q \in Q$, 都有 $\tau(p) \neq \tau(q)$.

一个技能与哪些问题的求解有关,或者一个问题的求解与哪些技能有关,是由问题与技能之间的关系决定的.技能映射 (Q, S, τ) 中,对 $\forall q \in Q$, $\tau(q) \subseteq S$ 表示与问题 q 的求解有关的技能集.于是可以得到如下结论.

定理 2.1.1 设 (Q, S, τ) 为技能映射, $I \subseteq Q \times S$ 为 Q 与 S 之间的二元关系.对任意 $q \in Q$, $s \in S$, 根据关系 $s \in \tau(q) \Leftrightarrow (q, s) \in I$ 可以得到形式背景 (Q, S, I) .

证明:对任意 $q \in Q$, $s \in S$, 如果 $s \in \tau(q)$, 则 $(q, s) \in I$; 如果 $s \notin \tau(q)$, 则 $(q, s) \notin I$. 显然, (Q, S, I) 是一个形式背景. 证毕.

给定一个技能映射 (Q, S, τ) , 根据定理 2.1.1 得到一个形式背景 (Q, S, I) , 称 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景.

例 2.1.1 给定技能映射 (Q, S, τ) , 其中 $Q = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{s, t, u, v\}$, 且

$$\tau(1) = \{t, u\}, \tau(2) = \{s, u, v\}, \tau(3) = \{t\}, \tau(4) = \{u\}.$$

对任意 $q \in Q$, $s \in S$, 由关系 $s \in \tau(q) \Leftrightarrow (q, s) \in I$ 可以得到关于技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I) 如表 2.1 所示.形式背景 (Q, S, I) 中,用 1 表示 $(q, s) \in I$, 用 0 表示 $(q, s) \notin I$.

表 2.1 关于技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I)

Q	s	t	u	v
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0

2.2 构建知识结构

技能映射通过合取模型与析取模型可以诱导得到两个互为对偶的知识结构. 由定理 2.1.1 可知技能映射可转换成为形式背景. 接下来, 我们将运用形式概念分析中的知识来构建知识结构.

定理 2.2.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 对 $T \subseteq S$, $K \subseteq Q$, 以下两个命题成立:

- (1) 若 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$, 则 T 在合取模型下诱导得到的知识状态为 K .
- (2) 若 $(K, T) \in L_o(Q, S, I)$, 则 T 在析取模型下诱导得到的知识状态为 K .

证明: (1) 对 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$, 有 $K = T^\square$ 且 $T = K^\diamond$. 而

$$T^\square = \{q \in Q \mid q^* \subseteq T\},$$

且

$$q^* = \{s \in S \mid (q, s) \in I\} = \tau(q).$$

显然, 对 $\forall q \in Q$, 有 $q^* = \tau(q)$, 于是 $K = \{q \in Q \mid \tau(q) \subseteq T\}$. 也就是说 T 在合取模型下诱导得到的知识状态为 K .

- (2) $(K, T) \in L_o(Q, S, I)$, 有 $K = T^\diamond$ 且 $T = K^\square$. 而

$$T^\diamond = \{q \in Q \mid q^* \cap T \neq \emptyset\},$$

且对 $\forall q \in Q$, 有 $q^* = \tau(q)$, 于是 $K = \{q \in Q \mid \tau(q) \cap T \neq \emptyset\}$. 也就是说 T 在析取模型下诱导得到的知识状态为 K . 证毕.

定理 2.2.2 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 记

$$\mathcal{K}^C = \{K \mid (K, T) \in L_p(Q, S, I)\},$$

$$\mathcal{K}^D = \{K \mid (K, T) \in L_o(Q, S, I)\},$$

则 \mathcal{K}^C 是技能映射 τ 通过合取模型诱导得到的闭包空间; \mathcal{K}^D 是技能映射 τ 通过析取模型诱导得到的知识空间, 且 \mathcal{K}^C 与 \mathcal{K}^D 互为对偶结构.

证明: 面向属性概念格 $L_p(Q, S, I)$ 中所有面向属性概念外延构成的集族是满足交封闭的, 面向对象概念格 $L_o(Q, S, I)$ 中所有面向对象概念外延构成的集族是满足并封闭的. 由定理 2.2.1 显然可得 \mathcal{K}^C 是 τ 通过合取模型诱导得到的闭包空间; \mathcal{K}^D 是 τ 通过析取模型诱导得到的知识空间, 且 \mathcal{K}^C 与 \mathcal{K}^D 互为对偶结构. 证毕.

类似地, 记

$$\mathcal{T}^C = \{T \mid (K, T) \in L_p(Q, S, I)\},$$

$$\mathcal{T}^D = \{T \mid (K, T) \in L_o(Q, S, I)\}.$$

注意到, $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 是 \mathcal{T}^C 的并式生成组, $\{s^\diamond \mid s \in S\}$ 是 \mathcal{K}^D 的并式生成组. 也就是说 $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 张成 \mathcal{T}^C , $\{s^\diamond \mid s \in S\}$ 张成 \mathcal{K}^D .

知识状态是学习者在理想状态下能够解决的问题子集. 特别地, 在析取模型下, 若学习者仅仅掌握了技能 s , 则该学习者的知识状态即为与技能 s 有关的问题集合. 于是可得如下结论.

推论 2.2.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 在析取模型下, 技能子集 $\{s\}$ 诱导得到的知识状态为 $K = s^\diamond = s^*$.

例 2.2.1 (续例 2.1.1). 由表 2.1 可得 $1^\diamond = \{t, u\}$, $2^\diamond = \{s, u, v\}$, $3^\diamond = \{t\}$, $4^\diamond = \{u\}$. 用 $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 张成得到 $\mathcal{T}^C = \{\emptyset, \{t\}, \{u\}, \{t, u\}, \{s, u, v\}, S\}$, 从而可得面向属性概念格 $L_p(Q, S, I)$ 如图 2.1 所示, 于是技能映射 (Q, S, τ) 通过合取模型诱导得到的闭包空间为 $\mathcal{K}^C = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, Q\}$.

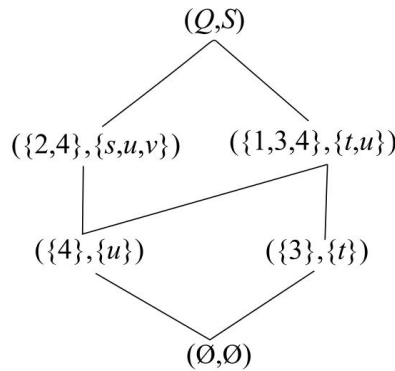


图 2.1 面向属性概念格 $L_p(Q, S, I)$

类似的, $s^\diamond = \{2\}$, $t^\diamond = \{1, 3\}$, $u^\diamond = \{1, 2, 4\}$, $v^\diamond = \{2\}$. 用 $\{s^\diamond \mid s \in S\}$ 张成得到 $\mathcal{K}^D = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, Q\}$, 即技能映射 (Q, S, τ) 通过析取模型诱导得到的知识空间为 \mathcal{K}^D , 且得到面向对象概念格 $L_o(Q, S, I)$ 如图 2.2 所示.

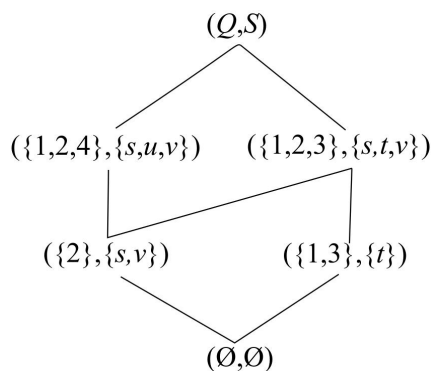


图 2.2 面向对象概念格 $L_o(Q, S, I)$

2.3 保持基不变的技能约简

技能映射通过合取模型与析取模型诱导得到的知识结构互为对偶结构. 本节将基于析取模型讨论技能的约简问题. 技能约简是保持知识结构不变的前提下, 删除冗余的技能. 在析取模型下, 技能映射诱导得到的知识结构为知识空间. 有限的知识空间必有一个基, 且知识空间可由基唯一确定. 故下文将讨论保持知识空间基不变的前提下, 技能的约简问题. 保持知识空间基不变, 从而保持知识结构不变.

定义 2.3.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 对 $q \in Q$, $s \in S$, 若 s^\diamond 是 $\{s^\diamond \mid s \in S\}$ 中包含问题 q 的极小集, 则记 $q \swarrow s$.

由定义 2.3.1 可知若 $q \swarrow s$, 则 s^\diamond 是问题 q 的原子. 用 $\sigma(q)$ 表示由问题 q 的所有原子构成的集合. 而知识空间的基可由所有的原子构成, 于是可得如下结论.

推论 2.3.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, $\mathcal{K}^D = \{K \mid (K, T) \in L_o(Q, S, I)\}$. 对 $\forall q \in Q$, 有 $\sigma(q) = \{s^\diamond \mid s \in S, q \swarrow s\}$, 且 \mathcal{K}^D 的基为 $\mathcal{B} = \bigcup_{q \in Q} \sigma(q)$.

由推论 2.3.1 可知, 知识空间 \mathcal{K}^D 的基 \mathcal{B} 只需由满足 $q \swarrow s$ 的技能来描述. 于是可以对形式背景进行约简, 约去不存在“ \swarrow ”的列, 且使得存在“ \swarrow ”的列各不相同.

定义 2.3.2 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 对 $s, t \in S$, 若 $s^\diamond = t^\diamond$, 则称技能 s, t 是相对必要的. 若存在 $u \in S$, 使得 $u^\diamond = s^\diamond \cup t^\diamond$, 则称技能 u 是不必要的.

由定义 2.3.2 显然可知, 对 $s \in S$, 若 s 是不必要的技能, 则对 $\forall q \in Q$, $q \not\prec s$ 都不成立. 也就是说, 技能 s 所对应的列不存在“ \prec ”.

定理 2.3.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 若对 $\forall s \in S$, 既不存在 $s' \in S \setminus \{s\}$ 使得 $s^\diamond = s'^\diamond$, 也不存在 $t, u \in S \setminus \{s\}$ 使得 $s^\diamond = t^\diamond \cup u^\diamond$, 则 τ 是极小技能映射, S 为极小技能集.

证明: 设技能映射 τ 通过析取模型诱导得到的知识空间的基为 \mathcal{B} . 若 τ 不是极小技能映射, 则 $\mathcal{B} \subset \{s^\diamond \mid s \in S\}$. 也就是说存在 $s \in S$ 使得 $s^\diamond \notin \mathcal{B}$, 即 s^\diamond 可由 \mathcal{B} 的某个子集族的并生成, 矛盾. 于是 τ 是极小技能映射, S 为极小技能集. 证毕.

推论 2.3.2 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 若对 $\forall s \in S$, 存在 $q \in Q$ 使得 $q \prec s$, 且形式背景 (Q, S, I) 的每列都各不相同, 则 τ 是极小技能映射, S 为极小技能集.

结合以上结论, 我们给出对技能进行约简的算法. 给定关于技能映射 τ 的形式背景, 通过对技能进行约简, 约去相对必要的技能和不必要的技能, 得到关于极小技能映射 τ' 的形式背景.

算法 2.3.1 获取关于极小技能映射的形式背景的算法

输入: 关于技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I) .

输出: 关于极小技能映射 τ' 的形式背景 (Q, S', I') .

step 1 计算 $\{s^\diamond \mid s \in S\}$.

step 2 对 $\{s^\diamond \mid s \in S\}$ 进行去重得到 $\{s^\diamond \mid s \in S'\}$.

step 3 对 $\forall s \in S'$, 执行以下操作:

If $\exists D \subset S'$ 使得 $s^\diamond = \bigcup_{t \in D} t^\diamond$ **then**

$S' \leftarrow S' \setminus \{s\}$

End If

step 4 得到形式背景 (Q, S', I') , 其中 $I' \subseteq Q \times S'$ 是 Q 与 S' 之间的二元关系.

例 2.3.1 表 2.2 是关于技能映射 (Q, S, τ) 的形式背景表 (Q, S, I) , 其中 $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{a, b, c, d, e\}$.

显然, $a^\diamond = \{1, 2, 4\}$, $b^\diamond = \{1, 2, 3, 4\}$, $c^\diamond = \{2, 3\}$, $d^\diamond = \{4, 5\}$, $e^\diamond = \{4, 5\}$. 可以发现, $d^\diamond = e^\diamond$, 且 $b^\diamond = a^\diamond \cup c^\diamond$. 也就是说 d, e 为相对必要的技能, b 为不必要的技能. 于是可约

去技能 b 和技能 e , 得到极小技能集为 $S' = \{a, c, d\}$. 由定义 2.3.1 显然可知 a^\diamond 是 $\{s^\diamond \mid s \in S'\}$ 中包含问题 1, 问题 2 和问题 4 的极小集, 于是有 $1 \not\prec a$, $2 \not\prec a$ 和 $4 \not\prec a$. 同理可得约简后带“ \prec ”的形式背景 (Q, S', I') 如表 2.3 所示, 其中 $I' \subseteq Q \times S'$ 是 Q 与 S' 之间的二元关系.

表 2.2 形式背景 (Q, S, I)

Q	a	b	c	d	e
1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	1
5	0	0	0	1	1

由表 2.3 可以发现形式背景表 (Q, S', I') 中每一列都存在“ \prec ”, 且每一列都各不相同. 此时可基于形式背景 (Q, S', I') 求解技能映射 (Q, S, τ) 通过两种模型诱导得到的知识结构, 即技能映射 (Q, S, τ) 通过合取模型诱导得到的闭包空间为

$$\mathcal{K}^C = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, Q\},$$

通过析取模型诱导得到的知识空间为

$$\mathcal{K}^D = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, Q\}.$$

表 2.3 带“ \prec ”的形式背景 (Q, S', I')

Q	a	c	d
1	\prec	0	0
2	\prec	\prec	0
3	0	\prec	0
4	\prec	0	\prec
5	0	0	\prec

2.4 良好技能映射

一般地, 知识状态与能力状态并不是一一对应的, 也就是说学习者可能学习并掌握了某些技能但知识状态并没有发生改变. 为了更好地对学习者所掌握的技能进行评估和

指导学习. 本节将基于合取模型讨论学习者每一步都只需学习并掌握一个技能便能改变知识状态的充要条件.

定义 2.4.1 设 (Q, \mathcal{K}) 是知识结构, $K \in \mathcal{K} (K \neq Q)$. 知识状态为 K 的学习者通过学习后达到紧接着的下一个状态 $K' \in \mathcal{K} (K \subset K')$ 称为 K 的后继状态.

性质 2.4.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 则 \mathcal{T}^C 是良级的当且仅当 \mathcal{T}^D 是良级的.

证明: 形式背景 (Q, S, I) 中, \mathcal{T}^C 是其所有面向属性概念内涵的集合, \mathcal{T}^D 是其所有面向对象概念内涵的集合. 显然 \mathcal{T}^C 与 \mathcal{T}^D 是互为对偶的. 因此, \mathcal{T}^C 是良级的当且仅当 \mathcal{T}^D 是良级的. 证毕.

定义 2.4.2 设 (Q, \mathcal{K}) 是知识结构, S 是技能集. 对 $s \in S$, 若知识状态为 $K \in \mathcal{K} (K \neq Q)$ 的学习者通过学习并掌握技能 s 后达到 K 的后继状态 $K' \in \mathcal{K}$, 则称 s 是由 K 到 K' 的有效技能.

定义 2.4.3 设 (Q, S, τ) 是技能映射, τ 通过合取(析取)模型诱导的知识结构为 \mathcal{K} . 若对任意 $K \in \mathcal{K} (K \neq Q)$, 存在由 K 到其后继状态的有效技能, 则称 τ 是良好的技能映射.

定理 2.4.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 对 $L_p(Q, S, I)$ 中任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, K_2 是知识状态 K_1 的后继状态.

证明: 由真父子概念的定义可知, 不存在 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$ 使得 $(K_1, T_1) \leq (K, T) \leq (K_2, T_2)$, 即 K_2 是知识状态为 K_1 的学习者通过学习后达到紧挨着的下一个知识状态, 也即 K_2 是知识状态 K_1 的后继状态. 证毕.

推论 2.4.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 则 τ 是良好的技能映射当且仅当 $\mathcal{T}^C (\mathcal{T}^D)$ 是良级的.

推论 2.4.2 设 (Q, S, I) 是关于良好技能映射 τ 的形式背景. 对 $L_p(Q, S, I)$ 中任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, $s \in (T_2 - T_1)$ 是由 K_1 到 K_2 的有效技能.

由于 \mathcal{T}^C 与 \mathcal{T}^D 是对偶的, 讨论技能映射 τ 满足良好性的充要条件, 我们只需讨论 \mathcal{T}^C 或 \mathcal{T}^D 满足良级性的充要条件. 为了方便, 下文将基于合取模型, 讨论 \mathcal{T}^C 满足良级性的充要条件.

定理 2.4.2 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景, 对 $L_p(Q, S, I)$ 中任意一对真父

子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, 有 $|T_2 - T_1| = 1$ 当且仅当 \mathcal{T}^C 是良级的.

证明: “ \Rightarrow ”, 对任意 $T, T' \in \mathcal{T}^C$, 不妨设 $T \subseteq T'$, 由 $L_p(Q, S, I)$ 是一个完备格可知存在 $K, K' \subseteq Q$, 使得 $(K, T) \leq \dots \leq (K', T')$. 显然存在由 T 到 T' 的紧路径. 若 $T \not\subseteq T'$, 且 $T, T' \neq \emptyset$, 则存在 $(\emptyset, \emptyset) \leq \dots \leq (K, T)$ 和 $(\emptyset, \emptyset) \leq \dots \leq (K', T')$, 即存在由 T 到 \emptyset 的紧路径和由 \emptyset 到 T' 的紧路径. 也就是说存在由 T 到 T' 的紧路径. 综上所述, \mathcal{T}^C 是良级的.

“ \Leftarrow ”, 对 $L_p(Q, S, I)$ 中任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, 显然有 $|T_2 - T_1| = 1$. 否则若 $|T_2 - T_1| > 1$, 由 \mathcal{T}^C 是良级的可知, 存在 $T \in \mathcal{T}^C$ 使得 $T_1 \subset T \subset T_2$. 于是存在 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$ 使得 $(K_1, T_1) \leq (K, T) \leq (K_2, T_2)$, 这与 (K_1, T_1) 是 (K_2, T_2) 的真子概念相矛盾. 证毕.

定义 2.4.4 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 对 $q \in Q$, $s \in S$, 若 q^\diamond 是 $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 中包含技能 s 的极小能力状态, 则记 $q \nearrow s$.

定理 2.4.3 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 对 $L_p(Q, S, I)$ 中任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, 有 $|T_2 - T_1| = 1$ 当且仅当对 $\forall q \in Q$, 至多存在一个技能 $s \in S$ 使得 $q \nearrow s$.

证明: “ \Rightarrow ”, 假设存在 $q \in Q$, $s, t \in S$ 使得 $q \nearrow s$ 且 $q \nearrow t$, 即 q^\diamond 是包含技能 s 和技能 t 的极小内涵. 存在 $K \subseteq Q$ 使得 $(K, q^\diamond) \in L_p(Q, S, I)$. 设 (K', T) 是 (K, q^\diamond) 的真子概念. 由 $T \subseteq q^\diamond$ 且 $s, t \notin T$ 得 $|q^\diamond - T| > 1$, 矛盾.

“ \Leftarrow ”, 对任意 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$, 用 n 表示 (K, T) 在面向属性概念格的哈斯图中的层数, 且 (\emptyset, \emptyset) 在第 1 层. 当 $n = 2$ 时, 显然存在 $q \in Q$ 使得 $T = q^\diamond$, 因此 $|T - \emptyset| = 1$. 假设 $n \leq m (2 < m \leq |S|)$ 时, (K, T) 有 $x (x \geq 1)$ 个真子概念 $(K_1, T_1), \dots, (K_x, T_x)$, 且 $|T - T_i| = 1 (i = 1, \dots, x)$. 由此可知, T_i 两两之间只有一个技能不同, 于是 (K, T) 所在的层中所有面向属性概念内涵两两之间也只有一个技能不同. 因此当 $n = m + 1 (2 < m \leq |S|)$ 时, 对 (K, T) 的任意真子概念 (K', T') , 有 $|T - T'| = 1$. 因此, 对 $L_p(Q, S, I)$ 中任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, 有 $|T_2 - T_1| = 1$. 证毕.

推论 2.4.3 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. \mathcal{T}^C 是良级的当且仅当对 $\forall q \in Q$, 至多存在一个技能 $s \in S$ 使得 $q \nearrow s$.

例2.4.1 表2.4是关于技能映射 (Q, S, τ) 的形式背景表 (Q, S, I) , 其中 $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \{a, b, c, d\}$.

表 2.4 形式背景 (Q, S, I)

Q	a	b	c	d
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	1	1
6	0	1	1	0

显然 $1^\diamond = \{a\}$, $2^\diamond = \{b\}$, $3^\diamond = \{a, c\}$, $4^\diamond = \{b, c, d\}$, $5^\diamond = \{a, c, d\}$, $6^\diamond = \{b, c\}$. 对任意 $s \in S$, 在 $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 中寻找包含技能 s 的极小能力状态, 从而得到带“ \nearrow ”的形式背景 (Q, S, I) 如表 2.5 所示. 其中, 对 $q \in Q$, $s \in S$, \nearrow 表示 $q \nearrow s$. 0 表示 $(q, s) \notin I$, 1 表示 $(q, s) \in I$.

表 2.5 带“ \nearrow ”的形式背景 (Q, S, I)

Q	a	b	c	d
1	\nearrow	0	0	0
2	0	\nearrow	0	0
3	1	0	\nearrow	0
4	0	1	1	\nearrow
5	1	0	1	\nearrow
6	0	1	\nearrow	0

由表 2.5 可知, 对任意 $q \in Q$, 至多存在一个技能 $s \in S$ 使得 $q \nearrow s$. $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 通过张成得到 $T^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, S\}$. 显然, T^C 是良级的, 也就是说技能映射 τ 是良好的.

设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 技能映射 τ 通过合取模型诱导得到的知识结构为 \mathcal{K}^C . 若 T^C 不是良级的, 即 τ 不满足良好性, 此时对 $K \in \mathcal{K}^C (K \neq Q)$, 不一定存在由 K 到其后继状态的有效技能. 也就是说, 知识状态为 K 的学习者可能学习并掌握了

某些技能但知识状态却无法改变. 此时, 将无法通过学习者对问题的回答情况来评估其是否掌握了相应的技能.

对 $s \in S$, 用 $\delta(s)$ 表示包含技能 s 的极小能力状态构成的集族. 若 \mathcal{T}^C 不是良级的, 说明存在 $q \in Q$, $s, t \in S (s \neq t)$, 使得 $q \nearrow s$ 且 $q \nearrow t$. 也就是说, $q^\diamond \in \delta(s)$ 且 $q^\diamond \in \delta(t)$. 考虑添加问题, 使得对 $\forall s' \in S (s' \neq s, t)$, $\delta(s')$ 保持不变, 且 $q^\diamond \notin \delta(s)$ 或 $q^\diamond \notin \delta(t)$. 也就是说, 通过添加问题, 使新得到的形式背景表中每一行至多只存在一个“ \nearrow ”.

定理 2.4.4 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 对 $q \in Q$, 若存在 $s, t \in S$ 使得 $q^\diamond \in \delta(s)$ 且 $q^\diamond \in \delta(t)$, 则增加满足以下两个条件的问题 p , 不改变 $\delta(s') (s' \in S, s' \neq s, t)$, 且使得 $q^\diamond \notin \delta(s)$ 或 $q^\diamond \notin \delta(t)$.

- (1) $p^\diamond \subset q^\diamond$, 且 $s \in p^\diamond$ 或 $t \in p^\diamond$;
- (2) 对 $\forall s' \in p^\diamond (s' \neq s, t)$, $B \in \delta(s')$, 有 $B \subset p^\diamond$.

证明: 当 $q^\diamond = \{s, t\}$ 时, 不妨设 $p^\diamond = \{t\}$, 显然问题 p 满足(1)(2)两个条件. 新增问题 p 后不改变 $\delta(s') (s' \in S, s' \neq s, t)$. 因为 $p^\diamond \subset q^\diamond$, 所以 $p^\diamond \in \delta(t)$ 且 $q^\diamond \notin \delta(t)$.

当 $q^\diamond \supset \{s, t\}$ 时, 不妨设 $q^\diamond = \{s, t, s'\}$, 取 $p^\diamond = \{t, s'\}$, 显然问题 p 满足(1)(2)两个条件. 新增问题 p 后, 由于对任意 $B \in \delta(s')$, 有 $B \subset p^\diamond$, 即 $p^\diamond \notin \delta(s')$, 因此 $\delta(s') (s' \in S, s' \neq s, t)$ 不改变. 同理因为 $p^\diamond \subset q^\diamond$, 所以 $q^\diamond \notin \delta(t)$.

综上所述, 定理成立.

证毕.

对 $q \in Q$, 定理 2.4.4 讨论的是存在两个技能 $s, t \in S$ 使得 q^\diamond 是包含 s 和 t 的极小能力状态的情形. 而实际上, 可能存在多个技能, 使得 q^\diamond 是包含这些技能的极小能力状态. 基于上述结论, 可得如下结论.

推论 2.4.4 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 对 $q \in Q$, 若存在 $s_1, \dots, s_m \in S$ ($2 \leq m \leq |S|$) 使得 $q^\diamond \in \delta(s_i) (i=1, \dots, m)$, 则添加满足以下两个条件的 $m-1$ 个问题 p_j ($j=1, \dots, m-1$), 不改变 $\delta(s') (s' \in S, s' \neq s_i, i=1, \dots, m)$, 且使得存在唯一的 $i \in \{1, \dots, m\}$ 使 q^\diamond 是包含 s_i 的极小能力状态.

- (1) $p_j^\diamond \subset q^\diamond$, 且存在唯一的 $i \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $s_i \in p_j^\diamond$;
- (2) 对 $\forall s' \in p_j^\diamond (s' \neq s_i, i=1, \dots, m)$, $B \in \delta(s')$, 有 $B \subset p_j^\diamond$.

给定关于技能映射 τ 的形式背景, 若 τ 不是良好的, 则说明存在 $q \in Q$ 使得 q^\diamond 是包含多个技能的极小能力状态. 根据定理 2.4.4 和推论 2.4.4, 可通过添加问题使得对任意 $q \in Q$, 至多存在一个技能 $s \in S$ 使得 $q \nearrow s$. 下面给出寻找关于良好技能映射 τ 的形式背景的计算法.

算法 2.4.1 获取关于良好技能映射的形式背景

输入 形式背景 (Q, S, I) .

输出 关于良好技能映射的形式背景 (Q', S, I') .

step 1 对 $\forall s \in S$, 在 $\{q^\diamond \mid (q, s) \in I, q \in Q\}$ 中寻找 $\delta(s)$.

step 2 对 $\forall q \in Q$, 计算 $\Omega(q) = \{s \mid q^\diamond \in \delta(s)\}$.

step 3 若对 $\forall q \in Q$, $|\Omega(q)| \leq 1$, 则跳转至 step 4; 否则记 $\xi' = \xi = \{\Omega(q) : q \in Q, |\Omega(q)| > 1\}$, 其中 $\xi(\xi')$ 按 $\Omega(q)$ 的基数从大到小进行排列, 并执行以下操作:

For $i = 2$ to $|\xi'|$ **do**

If $|\xi'(i) - \bigcup_{j=1, \dots, i-1} (\xi'(j) \cap \xi'(i))| \leq 1$ **then**

$\xi(i) \leftarrow \emptyset$;

Else

$\xi(i) \leftarrow \xi'(i) - \bigcup_{j=1, \dots, i-1} (\xi'(j) \cap \xi'(i))$;

End If

End For

For $i = 1$ to $|\xi|$ **do**

$\alpha = |\xi(i)| - 1$;

$Q \leftarrow Q \cup \{q_{|Q|+1}, \dots, q_{|Q|+\alpha}\}$, 其中 $q_{|Q|+i} (i=1, \dots, \alpha)$ 满足推论 2.4.4;

End For

step 4 $Q' \leftarrow Q$, $I' \subseteq Q' \times S$, 获得形式背景 (Q', S, I') .

例 2.4.2 (续例 2.1.1). 经过计算得 $\delta(s) = \delta(v) = \{2^\diamond\}$, $\delta(t) = \{3^\diamond\}$, $\delta(u) = \{4^\diamond\}$. 显然, 对问题 $2 \in Q$, 技能 $s, v \in S$ 满足 $2 \nearrow s$ 与 $2 \nearrow v$, 故技能映射 τ 不是良好的.

根据定理 2.4.4, 添加问题 5, 其中 $5^\diamond = \{s, u\}$. 此时, $Q' = Q \cup \{5\}$, $I' \subseteq Q' \times S$, 得到带“ \nearrow ”的形式背景 (Q', S, I') 如表 2.6 所示. 表 2.6 中, 对 $\forall q \in Q'$, 至多存在一个技能, 使得 q^\diamond 是包含该技能的极小能力状态. 也就是说 (Q', S, I') 所对应的技能映射是良好的.

表 2.6 带“ \nearrow ”的形式背景 (Q', S, I')

Q'	s	t	u	v
1	0	1	1	0
2	1	0	1	\nearrow
3	0	\nearrow	0	0
4	0	0	\nearrow	0
5	\nearrow	0	1	0

2.5 技能评估与学习路径

在合取模型与析取模型下,对学习者的技能进行评估,并将学习过程进行可视化,以便指导学习者进行有效地学习,从而降低学习过程中的时间成本,提高学习效率,优化学习效果.

2.5.1 合取模型下的技能评估与学习指导

2.2 节中,我们利用面向属性概念来构建技能映射通过合取模型诱导得到的知识结构.下面,我们将基于面向属性概念对学习者的技能评估和寻找学习路径.

定理 2.5.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 在合取模型下, 对 $\forall (K, T) \in L_p(Q, S, I)$, $T \subseteq S$ 是 2^S 中诱导知识状态 $K \subseteq Q$ 的最小能力状态.

证明: 设 $T' \subset T \subseteq S$ 也诱导知识状态 K , 则

$$K = \{q \in Q \mid \tau(q) \subseteq T' \subset T\} = \{q \in Q \mid \tau(q) \subset T\},$$

也就是存在 $s \in T$ 但 $s \notin T'$, 且对 $\forall q \in K$, $s \notin \tau(q)$, 否则 $\tau(q) \not\subseteq T'$. 因此对 $\forall q \in K$, 技能 s 与问题 q 的求解无关, 故 $s^* \cap K = \emptyset$, 这与 $T = K^\diamond$ 矛盾. 综上所述, T 是 2^S 中诱导知识状态 K 的极小能力状态. 证毕.

推论 2.5.1 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 在合取模型下, 对 $\forall (K, T) \in L_p(Q, S, I)$, 知识状态为 K 的学习者的最小能力状态为 T .

定理 2.5.2 设 (Q, S, I) 是关于良好技能映射 τ 的形式背景. 对 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$ ($K \neq Q$), 设 (K, T) 存在 $x(x \geq 1)$ 个真父概念 $(K_1, T_1), \dots, (K_x, T_x)$. 若知识状态为 K 的学习者的能力状态为 T_K , 则 $T \subseteq T_K$, 且对 $\forall s \in \bigcup_{i=1, \dots, x} (T_i - T)$, 有 $s \notin T_K$.

证明：由推论 2.5.1 可知，知识状态为 K 的学习者的最小能力状态为 T ，即 $T \subseteq T_K$ 。若 $x=1$ ，即 (K, T) 只有一个真父概念 (K_1, T_1) 。由 τ 是良好的，可设 $T_1 - T = \{s\}$ 。显然 $s \notin T_K$ ，否则学习者的知识状态为 K_1 。同理若 $x>1$ ，可得对 $\forall s \in \bigcup_{i=1, \dots, x} (T_i - T)$ ，有 $s \notin T_K$ 。综上所述，定理成立。证毕。

若技能映射 τ 不是良好的，且面向属性概念 (K', T') 是 (K, T) 的真父概念。此时设 $|T' - T| > 1$ ，若知识状态为 K 的学习者通过学习 $(T' - T)$ 中的技能，但知识状态却未发生改变时，我们无法准确地评估其是否掌握了 $(T' - T)$ 中的技能，而只能评估其至少已经掌握的技能。如例 2.2.1 中，由图 2.1 可知 $(\{2, 4\}, \{s, u, v\})$ 是 $(\{4\}, \{u\})$ 的真父概念，且 $|\{s, u, v\} - \{u\}| = |\{s, v\}| > 1$ 。知识状态为 $\{4\}$ 的学习者通过学习并掌握技能 s 和 v 可达到知识状态 $\{2, 4\}$ ，但若该学习者只学习并掌握技能 s 或 v 则不能有效地改变其原有的知识状态。因此，若该学习者的知识状态没有发生改变，其可能掌握了技能 s 或技能 v ，或两者都没有掌握。

推论 2.5.2 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景。在合取模型下，对 $\forall (K, T) \in L_p(Q, S, I)$ ，若知识状态为 K 的学习者的能力状态为 T_K ，则 $T \subseteq T_K$ 。

在合取模型下，给定关于某技能映射的形式背景 (Q, S, I) ，对 $\forall (K, T) \in L_p(Q, S, I)$ ，知识状态为 K 的学习者必定掌握了 T 中的所有技能。设状态 K 的后继状态为 K' ，且知识状态为 K' 的学习者必定掌握的技能子集为 T' ，则知识状态为 K 的学习者通过学习并掌握 $(T' - T)$ 中的所有技能可达到知识状态 K' 。

定理 2.5.3 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景。在合取模型下，对 $L_p(Q, S, I)$ 中的任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$ ，知识状态为 K_1 的学习者通过学习 $(T_2 - T_1)$ 中的所有技能可达到知识状态 K_2 。

证明：由推论 2.5.1 可得，知识状态为 K_1 的学习者的最小能力状态为 T_1 ，其通过学习并掌握 $(T_2 - T_1)$ 中的所有技能达到能力状态 T_2 。由定理 2.5.1 可得， T_2 是通过合取模型诱导知识状态 K_2 的最小能力状态，于是该学习者的知识状态可到达 K_2 。证毕。

给定关于某技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I) ， $\mathcal{K}^C = \{K \mid (K, T) \in L_p(Q, S, I)\}$ 。对知识状态 $K \in \mathcal{K}^C (K \neq Q)$ ，寻找 K 的所有后继状态及达到其后继状态需学习的技能，从而得

到技能集 S 在合取模型下的所有学习路径. 若技能映射 τ 是良好的, 则对 $\forall K \in \mathcal{K}^C$ ($K \neq Q$), 由 K 到其每个后继状态都只需要学习一个技能, 从而根据学习路径图能有效地指导学习, 并评估学习者是否掌握了相应的有效技能. 下面给出基于形式背景, 在合取模型下寻找学习路径图的算法.

算法 2.5.1 基于合取模型, 获取学习路径图

输入 关于技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I) .

输出 合取模型下的学习路径图 G^C .

step 1 给定一个空图 G^C .

step 2 $\partial \leftarrow \emptyset$, $\rho \leftarrow \emptyset$, 其中 ∂ 表示 G^C 中所有边的集合, ρ 表示 G^C 中的所有学习路径.

step 3 $\{q^\diamond \mid q \in Q\}$ 张成得到 \mathcal{T}^C .

step 4 计算 $\mathcal{K}^C = \{\{q \in Q \mid q^\diamond \subseteq T\} : T \in \mathcal{T}^C\}$.

step 5 对 $i = 1, \dots, |\mathcal{K}^C| - 1$, $j \in \{1, \dots, |\mathcal{K}^C|\}$, 执行以下操作:

If $\mathcal{K}^C(j)$ 是 $\mathcal{K}^C(i)$ 的后继状态 **then**

$\partial \leftarrow \partial \cup (\mathcal{K}^C(i), \mathcal{K}^C(j))$, 其中 $(\mathcal{K}^C(i), \mathcal{K}^C(j))$ 是由 $\mathcal{K}^C(i)$ 指向 $\mathcal{K}^C(j)$ 的边, 边的标记为 $\mathcal{T}^C(j) - \mathcal{T}^C(i)$;

End If

step 6 根据 ∂ 找出所有学习路径, 画出学习路径图 G^C .

例 2.5.1 (续例 2.4.1). 表 2.4 是关于技能映射 (Q, S, τ) 的形式背景. 由例 2.4.1 可知技能映射 τ 是良好的. 经过计算得 τ 通过合取模型诱导得到的知识结构为

$$\mathcal{K}^C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{2, 4, 6\}, Q\},$$

则对 $\forall K \in \mathcal{K}^C$ ($K \neq Q$), 存在由 K 到其后继状态的有效技能. 根据定理 2.5.3 可以得到在合取模型下, 技能集 S 的学习路径图如图 2.3 所示.

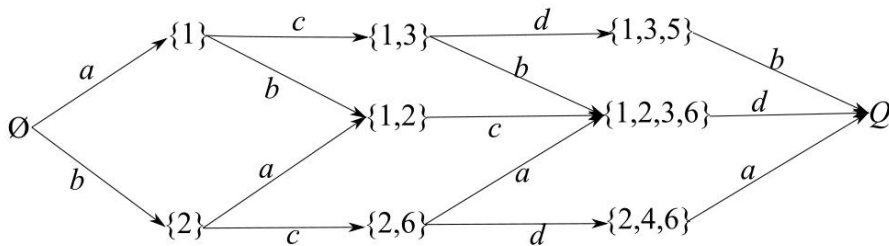


图 2.3 合取模型下技能集 S 的学习路径图

一方面, 由图 2.3 可知, 技能 b 和技能 c 都是知识状态 $\{1\}$ 到其后继状态的有效技能. 知识状态为 $\{1\}$ 的学习者通过学习技能 b 能够达到知识状态 $\{1,2\}$, 通过学习技能 c 能够达到知识状态 $\{1,3\}$. 另一方面, 我们得到处于 \mathcal{K}^C 中任意知识状态的学习者对技能的掌握情况如表 2.7 所示.

表 2.7 对 \mathcal{K}^C 的技能评估

\mathcal{K}^C	a	b	c	d
\emptyset	\times	\times		
$\{1\}$	\sqrt	\times	\times	
$\{2\}$	\times	\sqrt	\times	
$\{1,2\}$	\sqrt	\sqrt	\times	
$\{1,3\}$	\sqrt	\times	\sqrt	\times
$\{2,6\}$	\times	\sqrt	\sqrt	\times
$\{1,3,5\}$	\sqrt	\times	\sqrt	\sqrt
$\{2,4,6\}$	\times	\sqrt	\sqrt	\sqrt
$\{1,2,3,6\}$	\sqrt	\sqrt	\sqrt	\times
Q	\sqrt	\sqrt	\sqrt	\sqrt

在表 2.7 中, “ $K \times s$ ”表示知识状态为 K 的学习者没有掌握技能 s , “ $K \sqrt s$ ”表示知识状态为 K 的学习者掌握了技能 s . 如知识状态为 $\{1,3,5\}$ 的学习者掌握了技能 a, c, d 且没有掌握技能 b .

2.5.2 析取模型下的技能评估与学习指导

2.2 节中, 我们利用面向对象概念来构建技能映射通过析取模型诱导得到的知识结构. 下面, 我们将基于面向对象概念对学习者的技能评估和寻找学习路径.

定理 2.5.4 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 在析取模型下, 对 $\forall (K, T) \in L_O(Q, S, I)$, $T \subseteq S$ 是 2^S 中诱导知识状态 $K \subseteq Q$ 的最大能力状态.

证明: 对 $\forall (K, T) \in L_O(Q, S, I)$, 有 $T = K^\square = \{s \in S \mid s^* \subseteq K\}$, 于是对 $\forall s \in S \setminus T$, 有 $s^* \not\subseteq K$. 也就是说, 存在 $q \in Q$, 使得 $q \in s^*$ 且 $q \notin K$. 不妨设 $T' = T \cup \{s\}$, T' 通过析取模型诱导得到的知识状态为 $K' = \{q \in Q \mid q^* \cap T' \neq \emptyset\} = \{q \in Q \mid q^* \cap T \neq \emptyset \text{ 或 } s \in q^*\}$. 显然有 $K \subset K'$, 于是 T 是诱导知识状态 K 的最大能力状态. 证毕.

推论 2.5.3 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 在析取模型下, 对 $\forall (K, T) \in$

$L_o(Q, S, I)$, 知识状态为 K 的学习者的最大能力状态为 T .

定理 2.5.5 设 (Q, S, I) 是关于良好技能映射 τ 的形式背景. 对 $(K, T) \in L_o(Q, S, I)$ ($K \neq \emptyset$), 设 (K, T) 存在 $x(x \geq 1)$ 个真子概念 $(K_1, T_1), \dots, (K_x, T_x)$. 若知识状态为 K 的学习者的能力状态为 T_K , 则 $\bigcup_{i=1, \dots, x} (T - T_i) \subseteq T_K \subseteq T$.

证明: 由推论 2.5.3 可知, 知识状态为 K 的学习者的最大能力状态为 T , 即 $T_K \subseteq T$. 若 $x=1$, 即 (K, T) 只有一个子概念 (K_1, T_1) . 由 τ 是良好的, 可设 $T_1 = T - \{s\}$. 显然 $s \in T_K$, 否则 T_K 诱导的知识状态包含于 K , 矛盾. 同理若 $x \geq 1$, 可得对 $\forall s \in \bigcup_{i=1, \dots, x} (T - T_i)$, 有 $s \in T_K$, 即 $\bigcup_{i=1, \dots, x} (T - T_i) \subseteq T_K \subseteq T$ 成立. 证毕.

显然由定理 2.5.5 可知对 $\forall s \in S \setminus T$, 有 $s \notin T_K$, 即知识状态为 K 的学习者没有掌握 $S \setminus T$ 中的任何技能, 且已经掌握了 $\bigcup_{i=1, \dots, x} (T - T_i)$ 中的所有技能.

推论 2.5.4 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 在析取模型下, 对 $\forall (K, T) \in L_o(Q, S, I)$, 若知识状态为 K 的学习者的能力状态为 T_K , 则 $T_K \subseteq T$.

在析取模型下, 给定关于某技能映射的形式背景 (Q, S, I) , 对 $\forall (K, T) \in L_o(Q, S, I)$, 知识状态为 K 的学习者必定没有掌握 $S \setminus T$ 中的技能. 设状态 K 的后继状态为 K' , 且知识状态为 K' 的学习者必定没有掌握的技能子集为 $S \setminus T'$, 则知识状态为 K 的学习者通过学习并掌握 $(T' - T)$ 中的某些技能可达到知识状态 K' .

定理 2.5.6 设 (Q, S, I) 是关于技能映射 τ 的形式背景. 在析取模型下, 对 $L_o(Q, S, I)$ 中的任意一对真父子概念 $(K_1, T_1) \leq (K_2, T_2)$, 知识状态为 K_1 的学习者通过学习 $(T_2 - T_1)$ 中的任意一个技能可达到知识状态 K_2 .

证明: 由推论 2.5.3 可得, 知识状态为 K_1 的学习者的最大能力状态为 T_1 , 其通过学习并掌握任意技能都可改变知识状态. 由定理 2.5.4 可得, T_2 是通过析取模型诱导知识状态 K_2 的最大能力状态, 于是知识状态为 K_1 的学习者通过学习并掌握 $(T_2 - T_1)$ 中的任意一个技能可达到知识状态 K_2 . 证毕.

给定关于某技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I) , $\mathcal{K}^D = \{K \mid (K, T) \in L_o(Q, S, I)\}$. 对知识状态 $K \in \mathcal{K}^D (K \neq Q)$, 寻找 K 的所有后继状态以及达到其后继状态需学习的技能, 从而得到技能集 S 在析取模型下的学习路径. 若技能映射 τ 是良好的, 则对 $\forall K \in \mathcal{K}^D (K \neq Q)$,

由 K 到其每个后继状态都只有一条路径, 根据定理 2.5.5 可以更有效地指导学习, 并评估学习者是否掌握了相应的有效技能. 下面给出基于形式背景, 在析取模型下寻找学习路径图的算法.

算法 2.5.2 基于析取模型, 获取学习路径图

输入 关于技能映射 τ 的形式背景 (Q, S, I) .

输出 析取模型下的学习路径图 G^D .

step 1 给定一个空图 G^D .

step 2 $\partial \leftarrow \emptyset$, $\rho \leftarrow \emptyset$, 其中 ∂ 表示 G^D 中所有边的集合, ρ 表示 G^D 中的所有学习路径.

step 3 $\{s^\diamond \mid s \in S\}$ 张成得到 \mathcal{K}^D .

step 4 计算 $\mathcal{T}^D = \{\{s \in S \mid s^\diamond \subseteq K\} : K \in \mathcal{K}^D\}$.

step 5 对 $i = 1, \dots, |\mathcal{K}^D| - 1$, $j \in \{1, \dots, |\mathcal{K}^D|\}$, 执行以下操作:

If $\mathcal{K}^D(j)$ 是 $\mathcal{K}^D(i)$ 的后继状态 **then**

$\partial \leftarrow \partial \cup (\mathcal{K}^D(i), \mathcal{K}^D(j))$, 其中 $(\mathcal{K}^D(i), \mathcal{K}^D(j))$ 是由 $\mathcal{K}^D(i)$ 指向 $\mathcal{K}^D(j)$ 的边, 边的标记为 s , 其中 $s \in \mathcal{T}^D(j) - \mathcal{T}^D(i)$;

End If

step 6 根据 ∂ 找出所有学习路径, 画出学习路径图 G^D .

例 2.5.2 (续例 2.4.1). 表 2.4 是关于技能映射 (Q, S, τ) 的形式背景. 由例 2.4.1 可知技能映射 τ 是良好的. 经过计算得 τ 通过析取模型诱导得到的知识结构为

$$\mathcal{K}^D = \{\emptyset, \{4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, Q\},$$

则对 $\forall K \in \mathcal{K}^D (K \neq Q)$, 存在由 K 到其后继状态的有效技能. 根据定理 2.5.6 可以得到在析取模型下, 技能集 S 的学习路径图如图 2.4 所示.

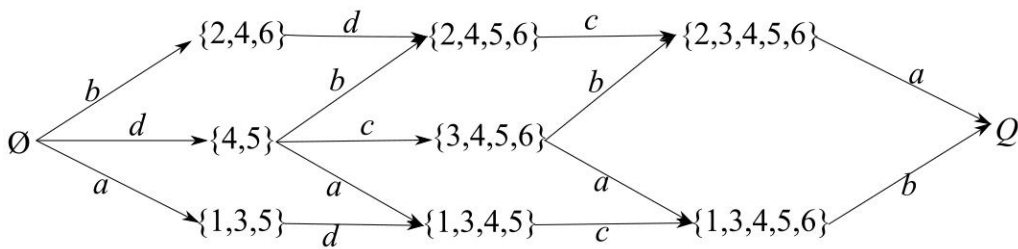


图 2.4 析取模型下技能集 S 的学习路径图

由图 2.4 可知, 知识状态 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 是知识状态 $\{2, 4, 5, 6\}$ 和 $\{3, 4, 5, 6\}$ 的后继状态, 有

效技能分别为技能 c 和技能 b . 知识状态为 $\{2,4,5,6\}$ 的学习者通过学习技能 c 可达到知识状态 $\{2,3,4,5,6\}$. 知识状态为 $\{2,3,4,5,6\}$ 的学习者必定掌握了技能 b, c , 且没有掌握的技能子集为 $S \setminus \{2,3,4,5,6\}^\square = S \setminus \{b, c, d\} = \{a\}$. 同理, 我们得到处于 \mathcal{K}^D 中任意知识状态的学习者对技能的掌握情况如表 2.8 所示.

表 2.8 对 \mathcal{K}^D 的技能评估

\mathcal{K}^D	a	b	c	d
\emptyset	\times	\times	\times	\times
$\{4,5\}$	\times	\times	\times	$\sqrt{}$
$\{2,4,6\}$	\times	$\sqrt{}$	\times	\times
$\{1,3,5\}$	$\sqrt{}$	\times	\times	\times
$\{1,3,4,5\}$	$\sqrt{}$	\times	\times	$\sqrt{}$
$\{2,4,5,6\}$	\times	$\sqrt{}$	\times	$\sqrt{}$
$\{3,4,5,6\}$	\times	\times	$\sqrt{}$	
$\{1,3,4,5,6\}$	$\sqrt{}$	\times	$\sqrt{}$	
$\{2,3,4,5,6\}$	\times	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	
\mathcal{Q}	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$		

2.6 实验部分

本节将通过实验说明我们所提出方法的有效性和可行性. 实验的硬件环境为 Intel (R) Core (TM) i7-4790 CPU @3.60GHz, 4.0 GB 内存, 运行 64 位 Windows 7 操作系统. 软件环境为 Matlab(R2013a) 和 RStudio (1.1.463).

2.6.1 数据集

实验数据集是 2 个来自 UCI 数据库的数据集, 分别为 COVID-19 Surveillance 数据集和 Soybean (Small) 数据集. 根据本章所讨论的问题, 对数据进行离散化处理, 得到两个技能映射 (Q_1, S_1, τ_1) 和 (Q_2, S_2, τ_2) . 根据定理 2.1.1, 将两个技能映射分别表示为形式背景 (Q_1, S_1, I_1) 和 (Q_2, S_2, I_2) . 具体数据如表 2.9 和表 2.10 所示, 其中

$$Q_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \quad S_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\};$$

$$Q_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \quad S_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}.$$

表 2.9 关于技能映射 τ_1 的形式背景 (Q_1, S_1, I_1)

Q_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	1	1	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	1	1	1	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0	1	0
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	1	1	0	0	0	1
7	1	1	0	0	0	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0
9	1	0	0	1	1	0	0
10	0	1	0	1	1	0	0
11	1	0	0	1	0	1	0
12	0	1	0	1	0	1	0
13	0	1	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	1

表2.10 关于技能映射 τ_2 的形式背景 (Q_2, S_2, I_2)

Q_2	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
10	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
11	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
12	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
14	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

2.6.2 合取模型下的实验结果与分析

根据算法 2.4.1 判断技能映射 τ_1 是否是良好的, 并通过添加问题 15、16、17, 获得关于良好技能映射 τ'_1 的形式背景 (Q'_1, S_1, I'_1) 如表 2.11 所示. 其中 $Q'_1 = Q_1 \cup \{15, 16, 17\}$, τ'_1 是从 Q'_1 到 $2^{S_1} \setminus \{\emptyset\}$ 的映射.

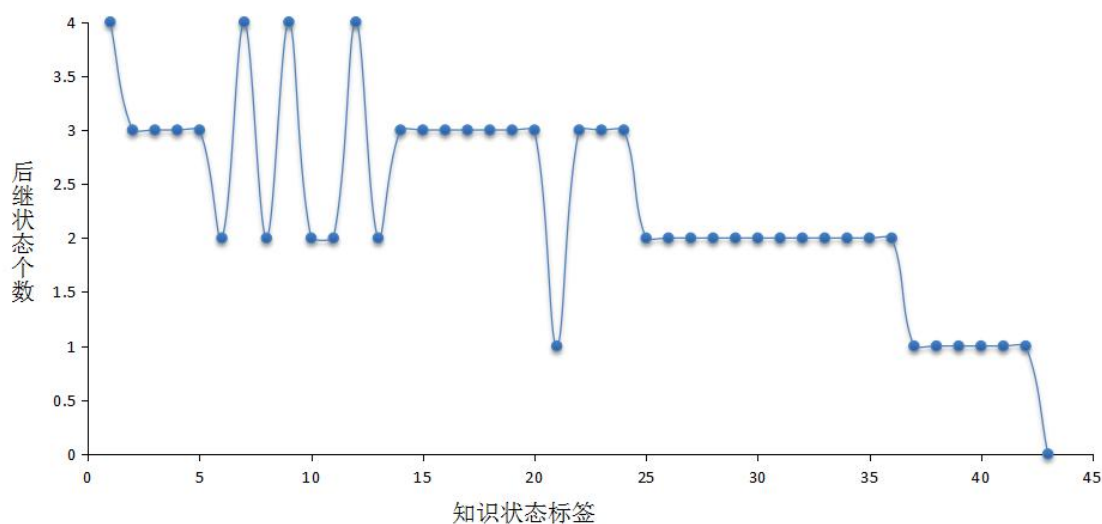
表 2.11 关于良好技能映射 τ'_1 的形式背景 (Q'_1, S_1, I'_1)

Q'_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	1	1	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	1	1	1	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0	1	0
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	1	1	0	0	0	1
7	1	1	0	0	0	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0
9	1	0	0	1	1	0	0
10	0	1	0	1	1	0	0
11	1	0	0	1	0	1	0
12	0	1	0	1	0	1	0
13	0	1	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	1
15	1	0	0	0	0	0	0
16	0	1	0	0	0	0	0
17	0	0	0	1	0	0	0

对 $\{q^\diamond \mid q \in Q'_1\}$ 张成得到 \mathcal{T}^C , 并根据 $\mathcal{K}^C = \{\{q \in Q'_1 \mid q^\diamond \subseteq T\} : T \in \mathcal{T}^C\}$ 得到技能映射 τ'_1 通过合取模型诱导的知识结构如表 2.12 所示. 由表 2.12 可知, 技能映射 (Q'_1, S_1, τ'_1) 通过合取模型诱导的知识结构 \mathcal{K}^C 中共有 43 个知识状态, 且除知识状态 $K = Q'_1$ 之外, 其余知识状态都存在后继状态. 例如, 知识状态 $\{8, 15, 16, 17\}$ 有 3 个后继状态, 分别为: $\{1, 2, 8, 9, 10, 15, 16, 17\}$, $\{3, 4, 8, 11, 12, 15, 16, 17\}$ 和 $\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 17\}$. 也就是说, 标签为 20 的知识状态有 3 个后继状态, 分别是标签为 31, 32, 33 的知识状态. 类似地, 可以得到知识结构 \mathcal{K}^C 中所有知识结构的后继状态个数, 具体如图 2.5 所示.

表 2.12 良好技能映射 τ'_1 通过合取模型诱导的知识结构 \mathcal{K}^C

标签	知识状态	标签	知识状态	标签	知识状态
1	\emptyset	16	{5,14,15,17}	31	{1,2,8,9,10,15,16,17}
2	{15}	17	{10,16,17}	32	{3,4,8,11,12,15,16,17}
3	{16}	18	{12,16,17}	33	{5,6,7,8,13,14,15,16,17}
4	{17}	19	{13,14,16,17}	34	{2,4,9,10,11,12,15,16,17}
5	{14}	20	{8,15,16,17}	35	{2,5,7,9,10,13,14,15,16,17}
6	{15,16}	21	{5,6,7,13,14,15,16}	36	{4,5,7,11,12,13,14,15,16,17}
7	{15,17}	22	{2,9,10,15,16,17}	37	{5,9,11,14,15,17}
8	{5,14,15}	23	{4,11,12,15,16,17}	38	{10,12,13,14,16,17}
9	{16,17}	24	{5,7,13,14,15,16,17}	39	{1,2,3,4,8,9,10,11,12,15,16,17}
10	{13,14,16}	25	{9,11,15,17}	40	{1,2,5,6,7,8,9,10,13,14,15,16,17}
11	{14,17}	26	{5,9,14,15,17}	41	{3,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15,16,17}
12	{15,16,17}	27	{5,11,14,15,17}	42	{2,4,5,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17}
13	{5,7,13,14,15,16}	28	{10,12,16,17}	43	Q'_1
14	{9,15,17}	29	{10,13,14,16,17}		
15	{11,15,17}	30	{12,13,14,16,17}		

图 2.5 \mathcal{K}^C 中知识状态的后继状态个数

根据算法 2.5.1 得到合取模型下技能集 S_1 的有效学习路径图, 其中 S_1 的部分有效学习路径图如图 2.6 所示. 在图 2.6 中, 顶点表示知识状态的标签, 连线上的标识表示学习者需要学习的技能. 由图 2.6 可以看出, 知识状态标签为 20 的学习者通过学习技能 e 可以达到标签为 31 的知识状态; 学习技能 f 可以达到标签为 32 的知识状态; 学习技能 g

可以达到标签为 33 的知识状态.

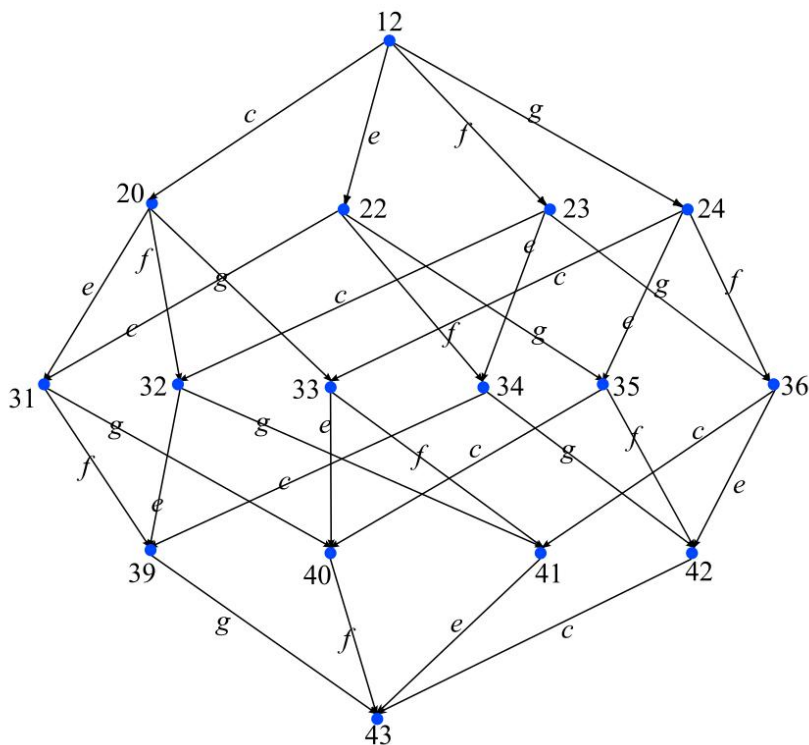


图 2.6 合取模型下技能集 S_1 的部分学习路径图

基于良好技能映射得到的学习路径图中, 处于任意知识状态的学习者都可以通过学习一个有效技能来改变自己原本的知识状态. 此时, 不仅可通过学习路径图指导学习者进行有效地学习, 还可通过判断学习者的知识状态是否发生改变来评估其是否掌握了相应的有效技能.

2.6.3 析取模型下的实验结果与分析

在析取模型下, 学习者只需掌握与问题有关的某个技能便能解决该问题. 技能集中可能存在相对必要技能与不必要技能. 根据算法 2.3.1 对技能映射 (Q_2, S_2, τ_2) 进行约简, 得到极小技能映射 (Q_2, S'_2, τ'_2) , 且关于极小技能映射 τ'_2 的形式背景 (Q_2, S'_2, I'_2) 如表 2.13 所示, 其中 $S'_2 = \{a, b, d, e, f, g, h, j\}$, τ'_2 是从 Q_2 到 $2^{S'_2} \setminus \{\emptyset\}$ 的映射.

计算 $\{s^\diamond \mid s \in S'_2\}$ 得到极小技能映射 τ'_2 通过析取模型诱导的知识空间的基为

$$\mathcal{B} = \{\{3, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 6, 8, 13\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 14\}, \{7, 9, 10, 11, 12, 14\}, \\ \{9, 10, 11, 12, 14, 15\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15\}\},$$

\mathcal{B} 张成得到极小技能映射 τ'_2 通过析取模型诱导的知识空间 \mathcal{K}^D 如表 2.14 所示.

表2.13 关于极小技能映射 τ'_2 的形式背景 (Q_2, S'_2, I'_2)

Q_2	a	b	d	e	f	g	h	j
1	0	0	1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	1	1	1	0	0
4	0	1	1	1	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	0	1	0
6	0	1	1	1	1	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	1	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	0	0	1
11	1	0	0	0	0	0	0	1
12	1	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	1	1	0	0	0	0
14	1	1	0	1	0	0	0	1
15	0	0	0	1	0	0	0	1

表 2.14 技能映射 τ'_2 通过析取模型诱导得到的知识结构 \mathcal{K}^D

标签	知识状态	标签	知识状态	标签	知识状态
1	\emptyset	16	$\{3,6,7,9,10,11,12,14\}$	31	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,13,14,15\}$
2	$\{3,6\}$	17	$\{3,6,9,10,11,12,14,15\}$	32	$\{1,3,4,6,7,9,10,11,12,14,15\}$
3	$\{1,3,4\}$	18	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,13\}$	33	$\{2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,14\}$
4	$\{1,3,4,6\}$	19	$\{1,2,3,4,5,6,8,13,14\}$	34	$\{2,3,4,5,6,9,10,11,12,14,15\}$
5	$\{2,5,6,7\}$	20	$\{1,3,4,7,9,10,11,12,14\}$	35	$\{2,3,5,6,7,9,10,11,12,14,15\}$
6	$\{2,3,5,6,7\}$	21	$\{1,3,4,9,10,11,12,14,15\}$	36	$\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,14\}$
7	$\{1,3,4,6,8,13\}$	22	$\{2,5,6,7,9,10,11,12,14\}$	37	$\{1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,14,15\}$
8	$\{2,3,4,5,6,14\}$	23	$\{3,6,7,9,10,11,12,14,15\}$	38	$\{1,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$
9	$\{7,9,10,11,12,14\}$	24	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,13,14\}$	39	$\{1,3,4,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$
10	$\{9,10,11,12,14,15\}$	25	$\{1,2,3,4,5,6,8,13,14,15\}$	40	$\{2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,14,15\}$
11	$\{1,2,3,4,5,6,14\}$	26	$\{1,3,4,6,7,9,10,11,12,14\}$	41	$\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,14,15\}$
12	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	27	$\{1,3,4,6,9,10,11,12,14,15\}$	42	$\{1,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$
13	$\{2,3,4,5,6,7,14\}$	28	$\{1,3,4,7,9,10,11,12,14,15\}$	43	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$
14	$\{7,9,10,11,12,14,15\}$	29	$\{2,3,5,6,7,9,10,11,12,14\}$	44	$\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$
15	$\{1,2,3,4,5,6,7,14\}$	30	$\{2,5,6,7,9,10,11,12,14,15\}$	45	Q_2

显然, 经过技能约简之后, 构建析取模型诱导得到的知识结构的时间复杂度明显降低. 由表 2.14 可知技能映射 (Q_2, S'_2, τ'_2) 通过析取模型诱导得到的知识结构有 45 个知识状态, 且除知识状态 $K = Q_2$ 之外, 其余知识状态都存在后继状态. 例如, 知识状态 $\{1, 3, 4\}$ 有 3 个后继状态, 分别为: $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 14\}$ 和 $\{1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 14, 15\}$. 也就是说, 标签为 3 的知识状态有 3 个后继状态, 分别是标签为 4, 20, 21 的知识状态. 类似地, 可以得到知识结构 \mathcal{K}^D 中所有知识结构的后继状态个数, 具体如图 2.7 所示.

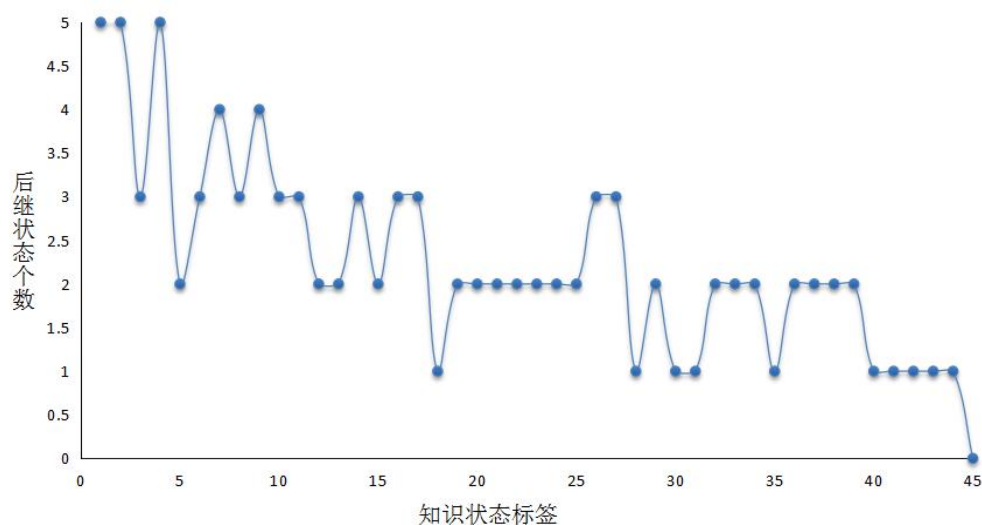
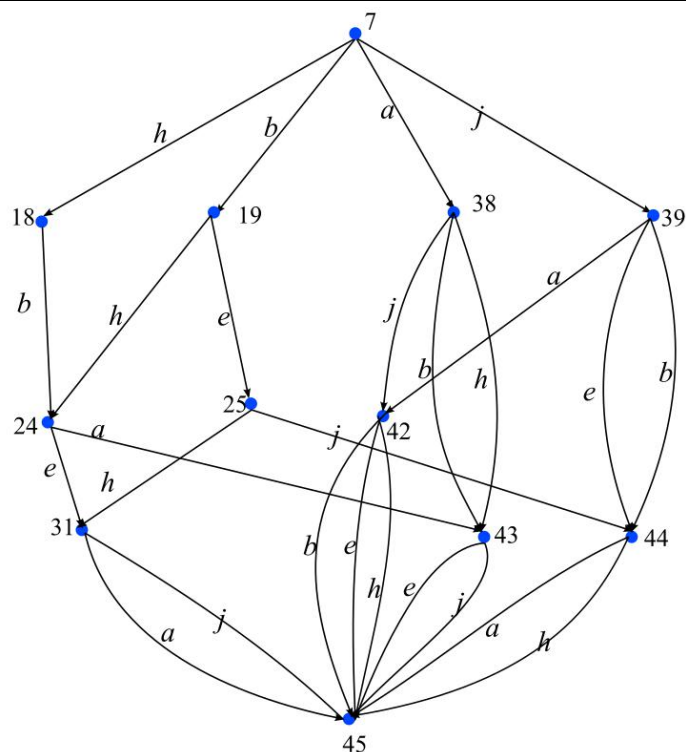


图 2.7 \mathcal{K}^D 中知识状态的后继状态个数

根据算法 2.5.2 得到析取模型下极小技能集 S'_2 的有效学习路径图, 其中 S'_2 的部分有效学习路径图如图 2.8 所示. 在图 2.8 中, 顶点表示知识状态的标签, 连线上的标识表示学习者需要学习的技能. 由图 2.8 可以看出, 一个状态到其某个后继状态之间可能存在多条路径, 也就是说处于某一知识状态的学习者到达某一后继状态有多种学习方式进行选择. 如图 2.8 中, 标签为 39 的知识状态具有 2 个后继状态, 标签分别为 42 和 44. 其中标签为 39 的知识状态到标签为 44 的知识状态之间有两条路径, 所需要学习的技能分别为 e 和 b . 知识状态为标签 39 的学习者通过学习并掌握技能 e 或技能 b 都能达到标签为 44 的知识状态. 在指导学习者进行学习时, 可根据技能的难易程度选择较为容易的技能进行学习以提高学习效率.

图 2.8 析取模型下极小技能集 S'_2 的部分有效学习路径图

2.7 本章小结

基于技能与问题间的关系,本章将技能映射与形式概念分析相结合.首先将技能映射转换为形式背景.运用求解面向属性概念与面向对象概念来构建相应技能映射通过合取模型与析取模型诱导的知识结构.为了降低构建知识结构的时间复杂度,2.3节中基于析取模型,在保持基不变的前提下,讨论了技能的约简问题.不同的技能子集可能诱导相同的知识状态,即学习者对技能的学习不一定是有效的.为了更好地评估学习者的技能并进行有效的学习指导,2.4节讨论了技能映射满足良好性的充要条件,使得学习者每一步只需学习一个技能便能改变原有的知识状态.2.5节中,分别在合取与析取两种模型下对学习者的技能进行评估,并设计获取有效学习路径图的算法.对于每一步都只需学习一个技能的学习路径,不仅可以有效地指导学习者进行学习,还能根据学习者知识状态的改变来评估其是否掌握了相应的技能.

第3章 基于技能函数构建知识结构与寻找学习路径的方法

在本章, 首先将解决问题域 Q 的方案视为标记, 建立技能函数与多标记背景之间的关系, 并将技能函数分解为多个形式背景. 其次, 基于分解得到的形式背景, 运用面向对象概念构建相应技能函数通过能力模型诱导的知识结构. 再者, 提出良好技能函数的概念, 讨论技能函数满足良好性的条件, 并设计获取良好技能函数的算法. 接着, 基于良好的技能函数, 讨论对学习者的技能评估与学习指导的方法, 并设计获取每一步都只需学习一个技能的学习路径图的方法. 最后, 运用实验说明本章所提方法的可行性与有效性.

3.1 技能函数与多标记背景

能力模型下, 解决某个问题可能有多种方法, 此时解决问题域 Q 的方案有多种. 将解决问题域 Q 的方案视为标记, 则一个技能函数可表示为一个多标记背景. 将问题视为对象, 技能视为属性. 设 (Q, S, μ) 是一个技能函数, 且 $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 即存在解决问题域 Q 的 r 种方案.

定义 3.1.1 设 (Q, S, μ) 是一个技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$. 记 C_q^k 表示解决问题域 Q 的第 k 种方案下用于解决问题 q 的极小能力, $(C_{q_1}^k, C_{q_2}^k, \dots, C_{q_{|Q|}}^k)$ 表示解决问题域 Q 的第 k 种方案.

定义 3.1.2 设 (Q, S, μ) 是一个技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 称 $B_{r \times |Q|}$ 为问题域 Q 的方式矩阵, 其中 $B(k, :) = (C_{q_1}^k, C_{q_2}^k, \dots, C_{q_{|Q|}}^k)$, $k = 1, \dots, r$.

定理 3.1.1 设 (Q, S, μ) 是一个技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, $I_k (k = 1, \dots, r)$ 为 Q 与 S 之间的二元关系. 对 $\forall s \in S$, $q \in Q$, $k = 1, \dots, r$, 根据关系 $s \in C_q^k \Leftrightarrow (q, s) \in I_k$ 可以得到多标记背景 $(Q, \bigcup_{k=1}^r C^k, \bigcup_{k=1}^r I_k)$, 其中 $C^k \subseteq S$ 表示第 k 种方案下用于解决 Q 的技能集合.

证明: $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 即有 r 种方案可用于解决问题域 Q . 解决问题域 Q 的一种方案可通过关系 $s \in C_q^k \Leftrightarrow (q, s) \in I_k$ 转换为一个形式背景 (Q, C^k, I_k) . 显然, 这 r 个形式背景进行合并可以得到多标记背景 $(Q, \bigcup_{k=1}^r C^k, \bigcup_{k=1}^r I_k)$. 证毕.

多标记背景 $(Q, \bigcup_{k=1}^r C^k, \bigcup_{k=1}^r I_k)$ 可以分解为 r 个形式背景 (Q, C^k, I_k) , $k = 1, \dots, r$. 这 r

个形式背景分别代表着问题域 Q 的 r 种解决方案. 显然, 问题域 Q 的方式矩阵 $B_{r \times |Q|}$ 的每一行都表示问题域 Q 的一种解决方案. 得到如下推论.

推论 3.1.1 设 (Q, S, μ) 是一个技能函数, $B_{r \times n}$ 是问题域 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 的方式矩阵, I_k 是 Q 与 S 之间的二元关系. 对 $\forall s \in S, i = 1, \dots, n$, 根据关系 $s \in B(k, i) \Leftrightarrow (q_i, s) \in I_k$ 可以得到 r 个形式背景 $(Q, S, I_k), k = 1, \dots, r$.

例 3.1.1 给定技能函数 (Q, S, μ) , 其中 $Q = \{1, 2, 3, 4\}, S = \{s, t, u, v, x, y\}$, 且

$$\mu(1) = \{\{s, t\}, \{t, u\}\}, \mu(2) = \{\{x, y\}\}, \mu(3) = \{\{s, u\}, \{u, v\}\}, \mu(4) = \{\{s, u\}\}.$$

显然, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)| = 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$, 即共有 4 种方案可用于解决问题域 Q . 得到问题域 Q 的方式矩阵

$$B_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \{s, t\} & \{x, y\} & \{s, u\} & \{s, u\} \\ \{s, t\} & \{x, y\} & \{u, v\} & \{s, u\} \\ \{t, u\} & \{x, y\} & \{s, u\} & \{s, u\} \\ \{t, u\} & \{x, y\} & \{u, v\} & \{s, u\} \end{pmatrix}.$$

从而得到多标记背景 $(Q, \bigcup_{k=1}^4 C^k, \bigcup_{k=1}^4 I_k)$ 如表 3.1 所示.

表 3.1 多标记背景 $(Q, \bigcup_{k=1}^4 C^k, \bigcup_{k=1}^4 I_k)$

	\mathcal{C}^1					\mathcal{C}^2						\mathcal{C}^3					\mathcal{C}^4						
	s	t	u	x	y	s	t	u	v	x	y	s	t	u	x	y	s	t	u	v	x	y	
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
3	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0

多标记背景 $(Q, \bigcup_{k=1}^4 C^k, \bigcup_{k=1}^4 I_k)$ 可分解为 4 个形式背景, 分别代表着问题域 Q 的 4 个解决方案. 也就是说技能函数 (Q, S, μ) 可分解为 4 个形式背景, 分别如表 3.2 至表 3.5 所示. 经过计算, 得到这 4 个形式背景的面向属性概念格. 为了方便, 用问题序列表示问题集, 用技能序列表示技能集. 例如, 问题集 $\{2, 3, 4\}$ 可表示为 234, 技能集 $\{s, u, v\}$ 可表示为 suv .

表 3.2 所示形式背景的面向属性概念格为 $L_p(Q, S, I_1) = \{(\emptyset, \emptyset), (1, st), (34, su), (2, xy), (134, stu), (12, stxy), (234, suxy), (Q, stuxy)\}$.

表 3.2 形式背景 (Q, S, I_1)

Q	s	t	u	v	x	y
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	1	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0

表 3.3 所示形式背景的面向属性概念格为 $L_p(Q, S, I_2) = \{(\emptyset, \emptyset), (1, st), (4, su), (3, uv), (2, xy), (14, stu), (34, suv), (134, stuv), (12, stxy), (24, suxy), (23, uvxy), (124, stuxy), (234, suvxy), (Q, S)\}$.

表 3.3 形式背景 (Q, S, I_2)

Q	s	t	u	v	x	y
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0	0

表 3.4 所示形式背景的面向属性概念格为 $L_p(Q, S, I_3) = \{(\emptyset, \emptyset), (34, su), (1, tu), (2, xy), (134, stu), (234, suxy), (12, tuxy), (Q, stuxy)\}$.

表 3.4 形式背景 (Q, S, I_3)

Q	s	t	u	v	x	y
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	1	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0

表 3.5 所示形式背景的面向属性概念格为 $L_p(Q, S, I_4) = \{(\emptyset, \emptyset), (4, su), (1, tu), (3, uv), (2, xy), (14, stu), (34, suv), (13, tuv), (134, stuv), (24, suxy), (12, tuxy), (23, uvxy), (124, stuxy), (234, suvxy), (123, tuvxy), (Q, S)\}$.

表 3.5 形式背景 (Q, S, I_4)

Q	s	t	u	v	x	y
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0	0

3.2 构建知识结构

设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$. 当 $r > 1$ 时, 技能函数 (Q, S, μ) 可分解为 r 个形式背景. 一个形式背景对应着一种问题域 Q 的解决方案.

定义 3.2.1 设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $(Q, S, I_k) (k=1, \dots, r)$ 是由其分解得到的 r 个形式背景. 记

$$L(Q, S, \mu) = \bigcup_{k=1, \dots, r} L_P(Q, S, I_k),$$

$$L_K(Q, S, \mu) = \{(\bigcup_{i=1, \dots, x} K_i, T) | (K_i, T_i) \in L(Q, S, \mu), T = T_1 = \dots = T_x, 1 \leq x \leq r\}.$$

定理 3.2.1 设 (Q, S, μ) 是技能函数. 对任意 $(K, T) \in L_K(Q, S, \mu)$, T 通过能力模型诱导得到的知识状态为 K . 记 $\mathcal{K} = \{K | (K, T) \in L_K(Q, S, \mu)\}$, 则 \mathcal{K} 是由技能函数 μ 通过能力模型诱导得到的知识结构.

证明: 设 $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 即存在 r 种解决问题域 Q 的方法. 对 $\forall (K, T) \in L_K(Q, S, \mu)$, 存在 $(K_i, T_i) \in L(Q, S, \mu) (i=1, \dots, x)$, 使得 $T = T_1 = \dots = T_x$, $K = \bigcup_{i=1, \dots, x} K_i$.

当 $x=1$ 时, 显然存在第 $k \in \{1, \dots, r\}$ 种方法, 使得在此方法下用 T 能够解决的问题集为 K_1 , 且在其他方法下用 T 能够解决的问题集要么为 \emptyset , 要么为 K_1 . 于是 T 通过能力模型诱导得到的知识状态为 $K = K_1$.

当 $x > 1$ 时, 存在 x 种方法, 使得在这 x 种方法下, 用 T 能够解决的问题集分别为 K_1, \dots, K_x , 且在其他方法下用 T 能够解决的问题集要么为 \emptyset , 要么为 $K \in \{K_1, \dots, K_x\}$. 于是 T 通过能力模型诱导得到的知识状态为 $K = \bigcup_{i=1, \dots, x} K_i$.

综上所述, 对 $(K, T) \in L_K(Q, S, \mu)$, T 通过能力模型诱导得到的知识状态为 K . 记 $\mathcal{K} = \{K | (K, T) \in L_K(Q, S, \mu)\}$, 显然 $\emptyset, Q \in \mathcal{K}$, 故 \mathcal{K} 是由技能函数 μ 通过能力模型诱导得

到的知识结构.

证毕.

例 3.2.1 (续例 3.1.1). 对于例 3.1.1 给出的技能函数 (Q, S, μ) , 由例 3.1.1 可知其可分解为 4 个形式背景, 且可得到每个形式背景的面向属性概念格. 根据定义 3.2.1 计算得:

$$\begin{aligned} L_K(Q, S, \mu) = \{(\emptyset, \emptyset), (1, st), (1, tu), (2, xy), (3, uv), (34, su), (34, suv), (134, stu), \\ (13, tuv), (134, stuv), (12, stxy), (12, tuxy), (23, uvxy), (234, suxy), \\ (234, suvxy), (123, tuvxy), (Q, stuxy), (Q, S)\}. \end{aligned}$$

根据定理 3.2.1 可知技能集 $\{u, v\}$ 通过能力模型诱导得到的知识状态为 $\{3\}$, 同理可得技能函数 μ 通过能力模型诱导得到的知识结构为

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, Q\}.$$

定义 3.2.2 设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $(Q, S, I_k) (k=1, \dots, r)$ 是由 (Q, S, μ) 分解得到的 r 个形式背景, 且 $\mathcal{T}_k = \{T \mid (K, T) \in L_p(Q, S, I_k)\}$, 称

$$\mathbb{T} = \{T \mid (K, T) \in L_K(Q, S, \mu)\}$$

是由技能函数 μ 确定的能力族.

显然, $\mathbb{T} = \bigcup_{k=1, \dots, r} \mathcal{T}_k$, 且 $\emptyset \in \mathbb{T}$, 但 $S \in \mathbb{T}$ 不一定成立. 若 $S \in \mathbb{T}$, 说明在问题域 Q 的某种解决方案中, 学习者需要掌握 S 中的所有技能才能达到知识状态 Q , 此时我们称 (S, \mathbb{T}) 是由技能函数 μ 确定的能力结构. 若 $S \notin \mathbb{T}$, 说明问题域 Q 的每一种解决方案中, 学习者只需掌握 S 中的部分技能便能达到知识状态 Q .

给定一个技能函数 (Q, S, μ) , 可以得到问题域 Q 的方式矩阵 B . 矩阵 B 的每一行都表示着解决问题域 Q 的一种方案, 都对应着一个形式背景. 结合以上结论, 我们给出基于方式矩阵 B 构建技能函数 (Q, S, μ) 通过能力模型诱导的知识结构的算法.

算法 3.2.1 基于方式矩阵构建知识结构的算法

输入: 技能函数 (Q, S, μ) .

输出: 技能函数 (Q, S, μ) 通过能力模型诱导的知识结构 \mathcal{K} .

step 1 令 $\mathcal{K} \leftarrow \emptyset$, $\mathbb{T} \leftarrow \emptyset$.

step 2 $n = |Q|$, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$.

step 3 得到问题域 Q 的方式矩阵 B .

step 4 对 $k = 1, \dots, r$, $B(k, :)$ 张成 \mathcal{T}_k .

```

step 5  $\mathbb{T} = \bigcup_{k=1 \dots r} \mathcal{T}_k$ .
step 6 For  $i = 1$  to  $|\mathbb{T}|$  do
     $\mathcal{K}(i) \leftarrow \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q), C \subseteq \mathbb{T}(i)\}$ ;
End For
step 7 输出  $\mathcal{K}$ .
    
```

3.3 良好技能函数

对于一般的技能函数, 学习者可能学习并掌握了某些技能但知识状态却没有发生改变. 此时, 无法根据学习者知识状态的改变来对其技能进行评估. 为此, 我们对满足良好性的技能函数进行研究.

定义 3.3.1 设 (Q, S, μ) 是技能函数, μ 通过能力模型诱导的知识结构为 \mathcal{K} . 若对 $\forall K \in \mathcal{K}$ ($K \neq Q$), 存在由 K 到其后继状态的有效技能, 则称 μ 是良好的技能函数.

定理 3.3.1 设 (Q, S, μ) 是技能函数, \mathbb{T} 是由技能函数 μ 确定的能力族, 则 \mathbb{T} 是良级的当且仅当 μ 是良好的技能函数.

证明: 设技能函数 (Q, S, μ) 所诱导的知识结构为 (Q, \mathcal{K}) .

“ \Rightarrow ”, 对 $K \in \mathcal{K}$ ($K \neq Q$), K' 是 K 的后继状态. 存在 $T, T' \in \mathbb{T}$ 使得 $(K, T), (K', T') \in L_K(Q, S, \mu)$, 且 $T \subset T'$, 则 $|T - T'| = 1$, 否则与 \mathbb{T} 是良级的相矛盾. 即存在由 K 到 K' 的有效技能 $s \in (T - T')$, 因此 μ 是良好的.

“ \Leftarrow ”, 对 $T, T' \in \mathbb{T}$, 存在 $K, K' \in \mathcal{K}$, 使得 $(K, T), (K', T') \in L_K(Q, S, \mu)$. 以下分两种情况进行讨论.

(1) K, K' 存在包含关系, 不妨设 $K \subset K'$.

若 K' 是 K 的后继状态, 显然存在由 T 到 T' 的紧路径: $T \subset T'$.

若 K' 不是 K 的后继状态, 则存在 $K_1, \dots, K_x \in \mathcal{K}$ ($x \geq 1$) 使得

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_x \subset K_{x+1} = K',$$

且 K_i 是 K_{i-1} ($i = 1, \dots, x+1$) 的后继状态. 存在 $T_1, \dots, T_x \in \mathbb{T}$ ($x \geq 1$) 使得

$$(K_i, T_i) \in L_K(Q, S, \mu) (i = 1, \dots, x).$$

显然存在由 T 到 T' 的紧路径: $T \subset T_1 \subset \dots \subset T_x \subset T'$.

(2) K, K' 不存在包含关系, 则存在 $\emptyset = K_1, \dots, K_x \in \mathcal{K} (x \geq 1)$ 使得

$$\emptyset = K_1 \subset \dots \subset K_x \subset K_{x+1} = K,$$

且 K_{i+1} 是 $K_i (i=1, \dots, x)$ 的后继状态. 由(1)可得由 T 到 \emptyset 的紧路径: $T \supset \dots \supset \emptyset$. 同理可得由 \emptyset 到 T' 的紧路径: $\emptyset \subset \dots \subset T'$. 因此存在由 T 到 T' 的紧路径.

综上, 可知对 $T, T' \in \mathbb{T}$, 存在由 T 到 T' 的紧路径, 即 \mathbb{T} 是良级的. 证毕.

定理 3.3.2 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是两个良级的集族, 且 $\emptyset \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, 则 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 也是良级的.

证明: $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 都是良级的, 说明对 $C, L \in \mathcal{T}_i (i=1, 2)$, 存在由 C 到 L 的紧路径. 对任意 $C, L \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, 若 $C, L \in \mathcal{T}_1$ 或 $C, L \in \mathcal{T}_2$, 显然 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 中存在由 C 到 L 的紧路径. 不妨设 $C \in \mathcal{T}_1$ 且 $L \in \mathcal{T}_2$. 由 $\emptyset \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, 可知 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 中存在由 C 到 \emptyset 的紧路径, 以及由 \emptyset 到 L 的紧路径. 于是 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 中存在由 C 到 L 的紧路径. 综上, 对任意 $C, L \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 中存在由 C 到 L 的紧路径, 即 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 是良级的. 证毕.

推论 3.3.1 设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $(Q, S, I_k) (k=1, \dots, r)$ 是由 (Q, S, μ) 分解得到的 r 个形式背景. 若对 $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, \mathcal{T}_k 是良级的, 则技能函数 μ 确定的能力族 \mathbb{T} 是良级的.

\mathbb{T} 是良级的说明对 $\forall K \in \mathcal{K} (K \neq Q)$, 存在由 K 到其后继状态的有效技能. 换句话说, 知识状态为 K 的学习者通过学习一个技能便能改变原有的知识状态. 此时, 不仅可指导学习者进行有效地学习, 还能通过学习者对问题的回答情况来评估其是否掌握了相应的有效技能. 若 \mathbb{T} 不是良级的, 即存在 $k \in \{1, \dots, r\}$ 使得 \mathcal{T}_k 不是良级的. 我们考虑通过添加问题, 使得对 $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, \mathcal{T}_k 是良级的. 也就是说, 通过添加问题使新得到的技能函数是良好的.

设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $(Q, S, I_k) (k=1, \dots, r)$ 是由 (Q, S, μ) 分解得到的 r 个形式背景. 对任意 $s \in S$, $\delta(s^k) (k=1, \dots, r)$ 表示 \mathcal{T}_k 中包含技能 s 的极小集构成的集族. 记 $\mathcal{C} = \{C \in \mu(q) | q \in Q\}$ 是技能函数 (Q, S, μ) 所有极小能力构成的集族. 对 $s \in S$, $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{C}$ 表示 \mathcal{C} 中含有技能 s 的能力构成的集族.

定理 3.3.3 设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $(Q, S, I_k) (k=1, \dots, r)$ 是由 (Q, S, μ) 分解得到的 r 个形式背景. 若存在 $C \in \mathcal{C}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $s, t \in S$, 使得 $C \in \delta(s^k)$

且 $C \in \delta(t^k)$, 则添加满足以下两个条件的问题 p , 不改变 $\delta(s'^k)(k=1, \dots, r, s' \in S, s' \neq s, t)$, 且对任意 $k \in \{1, \dots, r\}$, 有 $C \notin \delta(s^k)$ 或 $C \notin \delta(t^k)$.

- (1) $\mu(p) = \{M\}$, 使得 $s \in M \subseteq \bigcap \mathcal{C}_s$ 或 $t \in M \subseteq \bigcap \mathcal{C}_t$;
- (2) 对 $\forall s' \in M(s' \neq s, t)$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $B \in \delta(s'^k)$, 有 $B \subset M$.

证明: 当 $C = \{s, t\}$ 时, 不妨设 $\mu(p) = \{\{t\}\}$. 显然问题 p 满足(1)(2)两个条件, 且添加问题 p 之后不改变 $\delta(s'^k)(k=1, \dots, r, s' \in S, s' \neq s, t)$. 由 $\{t\} \subset C$ 可知能力 $\{t\}$ 在 r 个形式背景中都是包含技能 t 的极小集, 且此时对 $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, 有 $C \notin \delta(t^k)$.

当 $C \supset \{s, t\}$ 时, 取满足(1)(2)两个条件的问题 p , 且 $\mu(p) = \{M\}$ 使得 $t \in M \subseteq \bigcap \mathcal{C}_t$. 由于对 $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $B \in \delta(s'^k)$, 有 $B \subset M$, 因此新增问题 p 之后不改变 $\delta(s'^k)(k=1, \dots, r, s' \in S, s' \neq s, t)$. 显然 $M \subset C$, 因此能力 M 在 r 个形式背景中都是包含技能 t 的极小集, 且此时对 $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, 有 $C \notin \delta(t^k)$. 综上所述, 定理成立. 证毕.

推论 3.3.2 设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $(Q, S, I_k)(k=1, \dots, r)$ 是由 (Q, S, μ) 分解得到的 r 个形式背景. 若存在 $C \in \mathcal{C}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $s_1, \dots, s_m \in S(2 \leq m \leq |S|)$, 使得 $C \in \delta(s_i^k)(i=1, \dots, m)$, 则添加满足以下两个条件的 $m-1$ 个问题 $p_j(j=1, \dots, m-1)$, 不改变 $\delta(s'^k)(k=1, \dots, r, s' \in S, s' \neq s_i, i=1, \dots, m)$, 且对任意 $k \in \{1, \dots, r\}$, 存在唯一的 $i \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $C \in \delta(s_i^k)$.

- (1) $\mu(p_j) = \{M\}$, 且存在唯一的 $i \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $s_i \in M \subseteq \bigcap \mathcal{C}_{s_i}$;
- (2) 对 $\forall s' \in M(s' \neq s_i, i=1, \dots, m)$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $B \in \delta(s'^k)$, 有 $B \subset M$.

给定技能函数 (Q, S, μ) , 若 μ 不是良好的, 根据定理 3.3.3 和推论 3.3.2 可通过添加问题使新得到的技能函数是良好的. 下面给出获取良好技能函数及其方式矩阵的算法.

算法 3.3.1 获取良好技能函数及其方式矩阵

输入 技能函数 (Q, S, μ) .

输出 良好的技能函数 (Q', S, μ') 及其方式矩阵 B .

step 1 $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, $n = |Q|$.

step 2 得到 (Q, S, μ) 的方式矩阵 $B_{r \times n}$, 对 $B_{r \times n}$ 的行进行重新排列, 使得第 k 种方法下的能力个数不少于第 $k+1$ 种方法下的能力个数.

step 3 $Q' \leftarrow Q$, $k = 1$, 并执行以下操作:

While $k \leq r$ **do**

对 $\forall s \in S$, 在 $B(k, :)$ 中寻找 $\delta(s^k)$;

对 $\forall C \in B(k, :)$, 计算 $\Omega(C) = \{s \mid C \in \delta(s^k)\}$;

If $\exists C \in B(k, :)$, $|\Omega(C)| > 1$ **then**

记 $\varphi = \varphi' = \{\Omega(C) : C \in B(k, :), |\Omega(C)| > 1\}$, 其中 $\varphi(\varphi')$ 按 $\Omega(C)$ 的基数从大到小进行排列;

For $i = 2$ to $|\varphi'|$ **do**

If $|\varphi'(i) - \bigcup_{j=1, \dots, i-1} (\varphi'(j) \cap \varphi'(i))| \leq 1$ **then**

$\varphi(i) \leftarrow \emptyset$;

Else

$\varphi(i) \leftarrow \varphi'(i) - \bigcup_{j=1, \dots, i-1} (\varphi'(j) \cap \varphi'(i))$;

End If

End For

For $i = 1$ to $|\varphi|$ **do**

$\alpha = |\varphi(i)| - 1$;

$Q' \leftarrow Q' \cup \{q_{|Q'|+1}, \dots, q_{|Q'|+\alpha}\}$, 其中 $\mu'(q_{|Q'|+i}) = \{M_{|Q'|+i}\} (i = 1, \dots, \alpha)$ 满足推论 3.3.2;

End For

对 $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, \alpha$,

$B(i, |Q'| + j) \leftarrow M_{|Q'|+j}$;

End If

$k = k + 1$;

End While

step 4 对 $\forall q \in Q$, $\mu'(q) = \mu(q)$.

例 3.3.1 给定技能函数 (Q, S, μ) , 其中 $Q = \{1, 2, 3\}$, $S = \{a, b, c, d\}$, 且

$$\mu(1) = \{\{b, d\}\}, \mu(2) = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \mu(3) = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}.$$

由 $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)| = 4$, $|Q| = 3$ 可以得到问题域 Q 的方式矩阵为

$$B_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} \{b,d\} & \{a,c\} & \{a,b,c\} \\ \{b,d\} & \{a,c\} & \{b,d\} \\ \{b,d\} & \{b,d\} & \{a,b,c\} \\ \{b,d\} & \{b,d\} & \{b,d\} \end{bmatrix}.$$

矩阵 $B_{4 \times 3}$ 的每一行都对应着一个形式背景. 其中当 $k=1$ 时, 根据定义 2.4.4 在 $\{\{b,d\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ 中寻找包含 S 中技能的极小集, 可以得到带“ \nearrow ”的形式背景 (Q, S, I_1) 如表 3.6 所示.

表 3.6 带“ \nearrow ”的形式背景 (Q, S, I_1)

Q	a	b	c	d
1	0	\nearrow	0	\nearrow
2	\nearrow	0	\nearrow	0
3	1	\nearrow	1	0

由表 3.6 可知, $\delta(a^1) = \delta(c^1) = \{\{a,c\}\}$, $\delta(b^1) = \delta(d^1) = \{\{b,d\}\}$. 显然, 技能函数 (Q, S, μ) 不是良好的. 根据定理 3.3.3, 添加两个问题: $\mu'(4) = \{\{b\}\}$, $\mu'(5) = \{\{a\}\}$, 得到良好的技能函数 (Q', S, μ') , 其中 $Q' = Q \cup \{4, 5\}$, 且对 $\forall q \in Q$, $\mu'(q) = \mu(q)$. 经过计算得技能函数 μ' 通过能力模型诱导得到的能力族为

$$\mathbb{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, S\},$$

显然, 能力族 \mathbb{T} 是良级的.

3.4 技能评估与学习路径

3.2 节中, 我们将技能函数分解为多个形式背景, 并利用这些形式背景的面向属性概念来构建该技能函数通过能力模型诱导的知识结构. 接下来, 我们将在此基础上对学习者进行技能评估并寻找学习路径.

定理 3.4.1 设 (Q, S, μ) 是一个技能函数, \mathbb{T} 是由 μ 确定的能力族. 对 (K_1, T_1) , $(K_2, T_2) \in L_K(Q, S, \mu)$, 若满足 $K_1 \subset K_2$, 且 T_2 是 \mathbb{T} 中满足 $T_1 \subset T_2$ 的极小能力状态, 则 K_2 是知识状态 K_1 的后继状态.

证明: 由 $K_1 \subset K_2$, 且 T_2 是 \mathbb{T} 中满足 $T_1 \subset T_2$ 的极小能力状态可得, 知识状态为 K_1 的

学习者学习最少的技能达到能力状态 T 之后可达到知识状态 K_2 . 显然, 由后继状态的定义可知 K_2 是知识状态 K_1 的后继状态. 证毕.

推论 3.4.1 设 (Q, S, μ) 是良好的技能函数, 对 $(K_1, T_1), (K_2, T_2) \in L_K(Q, S, \mu)$, 若 K_2 是 K_1 的后继状态, 则 $s \in (T_2 - T_1)$ 是由 K_1 到 K_2 的有效技能.

在能力模型下, 存在解决问题的多种方法, 即用于解决问题的极小能力可能不唯一. 若已知学习者的知识状态, 则该学习者的极小能力状态可能不唯一.

定义 3.4.1 设 (Q, S, μ) 是技能函数, $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|$, 且 $L_K(Q, S, \mu)$ 如定义 3.2.1 所示. 记

$$L_{KT}(Q, S, \mu) = \{(K, \bigcap_{i=1, \dots, y} T_i) | (K_i, T_i) \in L_K(Q, S, \mu), K = K_1 = \dots = K_y, 1 \leq y \leq r\}.$$

对 $(K, T) \in L_K(Q, S, \mu)$, 若 $(K, T) \in L_{KT}(Q, S, \mu)$, 则 $T \subseteq S$ 是 2^S 中诱导知识状态 $K \subseteq Q$ 的最小能力状态, 即知识状态为 K 的学习者的最小能力状态为 T .

定理 3.4.2 设 (Q, S, μ) 是良好的技能函数. 对 $\forall (K, T) \in L_{KT}(Q, S, \mu) (K \neq Q)$, 设 K 存在 $x (x \geq 1)$ 个后继状态, 由 K 到其各个后继状态的有效技能的集合为 D . 若知识状态为 K 的学习者的能力状态为 T_K , 则 $T \subseteq T_K$, 且对 $\forall s \in D$, 有 $s \notin T_K$.

证明: 设 \mathbb{T} 是由 μ 确定的能力族. 对 $\forall (K, T) \in L_{KT}(Q, S, \mu)$, 存在 $T_1, \dots, T_y \in \mathbb{T} (y \geq 1)$ 使得 $(K, T_1), \dots, (K, T_y) \in L_K(Q, S, \mu)$ 且 $T = \bigcap_{i=1, \dots, y} T_i$. 显然, 知识状态为 K 的学习者至少掌握了 T 中的所有技能, 即 $T \subseteq T_K$. 对 $\forall s \in D$, 若 $s \in T_K$, 则学习者的知识状态将达到 K 的某个后继状态, 矛盾. 于是对 $\forall s \in D$, 有 $s \notin T_K$. 证毕.

若技能函数 (Q, S, μ) 不是良好的, 则存在 $(K, T), (K', T') \in L_K(Q, S, \mu)$, 使得 K' 是 K 的后继状态, 且 $|T' - T| > 1$. 若知识状态为 K 的学习者通过学习 $(T' - T)$ 中的技能, 但知识状态未发生变化. 此时, 我们无法准确地评估该学习者是否掌握了 $(T' - T)$ 中的技能, 而只能评估其至少已经掌握的技能. 如例 3.2.1 中, 对 $(2, xy), (12, stxy) \in L_K(Q, S, \mu)$, 根据定理 3.4.1 显然可知, $\{1, 2\}$ 是知识状态 $\{2\}$ 的后继状态, 且 $|\{s, t, x, y\} - \{x, y\}| = |\{s, t\}| > 1$. $\{s, t, x, y\}$ 是通过能力模型诱导知识状态 $\{1, 2\}$ 的极小能力状态. 知识状态为 $\{2\}$ 的学习者通过学习并掌握技能 s 和 t 可达到知识状态 $\{1, 2\}$, 但若该学习者只掌握了技能 s 或 t 则并不能有效地改变其原有的知识状态. 因此, 若该学习者的知识状态没有发生改变, 其可

能掌握了技能 s 或技能 t ，或两者都没有掌握。

推论 3.4.2 设 (Q, S, μ) 是技能函数，对 $\forall (K, T) \in L_{KT}(Q, S, \mu) (K \neq Q)$ ，若知识状态为 K 的学习者的能力状态为 T_K ，则 $T \subseteq T_K$ 。

特别地，若学习者的知识状态为 $K = Q$ ，则存在 $T \subseteq S$ 使得 $(Q, T) \in L_{KT}(Q, S, \mu)$ ，且该学习者至少掌握了 T 中的所有技能。

推论 3.4.3 设 (Q, S, μ) 是一个良好的技能函数。在能力模型下，对 $(K_1, T_1), (K_2, T_2) \in L_K(Q, S, \mu)$ ，若 K_2 是 K_1 的后继状态，则知识状态为 K_1 的学习者通过学习并掌握技能 $s \in (T_2 - T_1)$ 可达到知识状态 K_2 。

给定一个技能函数 (Q, S, μ) ，运用算法 3.3.1 判断其是否是良好的并输出一个良好的技能函数及其相应问题域的方式矩阵。基于良好的技能函数，下面给出在能力模型下，获取技能集的有效学习路径的算法。

算法 3.4.1 基于良好技能函数，获取有效学习路径

输入 良好技能函数 (Q, S, μ) 对应的方式矩阵。

输出 技能集 S 的学习路径图。

step 1 给定一个空图 G ， $\mathbb{T} \leftarrow \emptyset$ ， $\mathcal{K} \leftarrow \emptyset$ 。

step 2 $\partial \leftarrow \emptyset$ ， $\rho \leftarrow \emptyset$ ，其中 ∂ 表示 G 中所有边的集合， ρ 表示 G 中的所有学习路径。

step 3 对 $k = 1, \dots, r$ ， $B(k, :)$ 张成 \mathcal{T}_k 。

step 4 $\mathbb{T} = \bigcup_{k=1, \dots, r} \mathcal{T}_k$ ， \mathbb{T} 按集合的包含关系由小到大进行排列。

step 5 对 $i = 1, \dots, |\mathbb{T}|$ ，

$\mathcal{K}(i) \leftarrow \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q), C \subseteq \mathbb{T}(i)\}$ 。

step 6 对 $i = 1, \dots, |\mathcal{K}| - 1$ ， $j \in \{1, \dots, |\mathcal{K}|\}$ ，执行以下操作：

If $\mathcal{K}(j)$ 是 $\mathcal{K}(i)$ 的后继状态 **then**

$\partial \leftarrow \partial \cup (\mathcal{K}(i), \mathcal{K}(j))$ ，其中 $(\mathcal{K}(i), \mathcal{K}(j))$ 是由 $\mathcal{K}(i)$ 指向 $\mathcal{K}(j)$ 的边，边的标记为

$\mathbb{T}(j) - \mathbb{T}(i)$ ；

End If

step 7 根据 ∂ 找出所有学习路径 ρ ，画出学习路径图 G 。

若技能函数是良好的，根据技能集的有效学习路径图不仅可以有效地指导学习者学习，还可以根据学习者对问题的回答情况来评估其是否掌握了相应的有效技能。

例 3.4.1 给定技能函数 (Q, S, μ) , 其中 $Q = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{s, t, u, v\}$, 且

$$\mu(1) = \{\{s, t\}, \{t, u\}\}, \mu(2) = \{\{s, u\}, \{u, v\}\}, \mu(3) = \{\{t\}\}, \mu(4) = \{\{u\}\}.$$

显然 $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)| = 4$, 问题域 Q 的方式矩阵为

$$B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \{s, t\} & \{s, u\} & \{t\} & \{u\} \\ \{s, t\} & \{u, v\} & \{t\} & \{u\} \\ \{t, u\} & \{s, u\} & \{t\} & \{u\} \\ \{t, u\} & \{u, v\} & \{t\} & \{u\} \end{bmatrix}.$$

通过计算得:

$$L(Q, S, \mu) = \{(\emptyset, \emptyset), (3, t), (4, u), (13, st), (24, su), (24, uv), (34, tu), (134, tu), (134, stu), (234, tuv), (Q, stu), (Q, tuv), (Q, S)\};$$

$$L_K(Q, S, \mu) = \{(\emptyset, \emptyset), (3, t), (4, u), (13, st), (24, su), (24, uv), (134, tu), (Q, stu), (Q, tuv), (Q, S)\};$$

$$L_{KT}(Q, S, \mu) = \{(\emptyset, \emptyset), (3, t), (4, u), (13, st), (24, u), (134, tu), (Q, tu)\}.$$

显然, 由技能函数 (Q, S, μ) 通过能力模型诱导得到的知识结构为

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, Q\}.$$

由 μ 确定的能力结构为

$$\mathbb{T} = \{\emptyset, \{t\}, \{u\}, \{s, t\}, \{s, u\}, \{u, v\}, \{t, u\}, \{s, t, u\}, \{t, u, v\}, S\}.$$

可以发现, \mathbb{T} 是良级的, 即技能函数 (Q, S, μ) 是良好的. 对任意 $K \in \mathcal{K} (K \neq Q)$, 存在由 K 到其后继状态的有效技能. 由此可得能力模型下, 技能集 S 的学习路径图如图 3.1 所示.

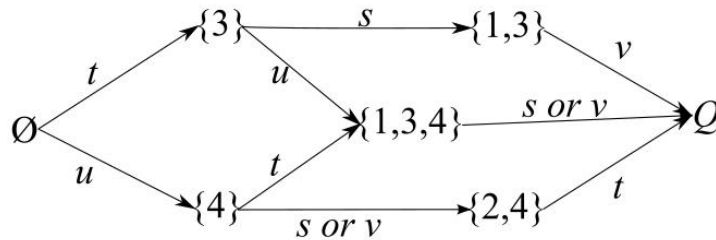


图 3.1 能力模型下技能集 S 的学习路径图

由图 3.1 可知, 技能 s 和技能 v 都是由知识状态 $\{4\}$ 到 $\{2, 4\}$ 的有效技能. 知识状态为 $\{4\}$ 的学习者通过学习技能 s 或技能 v 都能达到后继状态 $\{2, 4\}$. 另一方面, 若知识状态为 $\{4\}$ 的学习者学习技能 s 后并未改变原有的知识状态, 则说明其未掌握技能 s . 此外,

根据定理 3.4.3, 得到处于 \mathcal{K} 中任意知识状态的学习者对技能的掌握情况如表 3.7 所示. 表 3.7 中, 知识状态为 $\{1,3\}$ 的学习者至少掌握了技能 s, t , 且没有掌握技能 v .

表 3.7 对 \mathcal{K} 的技能评估

\mathcal{K}	s	t	u	v
\emptyset		\times	\times	
$\{3\}$	\times	$\sqrt{}$	\times	
$\{4\}$	\times	\times	$\sqrt{}$	\times
$\{1,3\}$	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$		\times
$\{2,4\}$		\times	$\sqrt{}$	
$\{1,3,4\}$	\times	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	\times
\mathcal{Q}		$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	

3.5 实验部分

为了验证本章所提方法的可行性和有效性, 我们对数据集进行实验分析. 实验的硬件环境为 Intel (R) Core (TM) i7-4790 CPU @3.60GHz, 4.0 GB 内存, 运行 64 位 Windows 7 操作系统. 软件环境为 Matlab(R2013a) 和 RStudio (1.1.463).

3.5.1 数据集

实验数据是来自 UCI 数据库的 StoneFlakes 数据集. 根据本章所讨论的问题, 对数据进行离散化处理, 得到新的数据集, 表示为技能函数 (Q, S, μ) . 其中, $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $S = \{h, i, j, k, l, m, n\}$, 且

$$\begin{aligned}
 \mu(1) &= \{\{k\}, \{l, m, n\}\}, \quad \mu(2) = \{\{j\}, \{k, m\}\}, \\
 \mu(3) &= \{\{j, k\}, \{j, l\}\}, \quad \mu(4) = \{\{i, l\}, \{i, m, n\}\}, \\
 \mu(5) &= \{\{i, l\}, \{i, j, m, n\}\}, \quad \mu(6) = \{\{i, j, k\}\}, \\
 \mu(7) &= \{\{h, j\}, \{h, l, m, n\}\}, \quad \mu(8) = \{\{h, j\}\}, \\
 \mu(9) &= \{\{h, j, l\}\}, \quad \mu(10) = \{\{h, i, k, l\}, \{h, l, m, n\}\}.
 \end{aligned}$$

对技能函数 (Q, S, μ) , $r = \prod_{q \in Q} |\mu(q)| = 128$, 由算法 3.3.1 获得良好的技能函数 (Q', S, μ') 及其方式矩阵. 其中 $Q' = Q \cup \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, 对 $\forall q \in Q$, $\mu'(q) = \mu(q)$, 且

$$\mu'(11) = \{\{h\}\}, \quad \mu'(12) = \{\{l\}\},$$

$$\mu'(13) = \{\{m\}\}, \mu'(14) = \{\{n\}\},$$

$$\mu'(15) = \{\{j\}\}, \mu'(16) = \{\{i, j\}\}.$$

3.5.2 实验结果与分析

运用算法3.2.1获得技能函数 (Q', S, μ') 通过能力模型诱导的知识结构 \mathcal{K} 如表3.8所示. 由表3.8可知, 良好技能函数 (Q', S, μ') 通过能力模型诱导得到的知识结构 \mathcal{K} 有114个知识状态. 也就是说, 在理想状态下, 学习者通过解答问题域 Q' 之后所能达到的知识状态共有114种可能性. 根据学习者的知识状态, 可选取适当的技能供学习者学习, 以改变其知识状态.

表3.8 技能函数 μ' 通过能力模型诱导的知识结构 \mathcal{K}

标签	知识状态	标签	知识状态	标签	知识状态
1	\emptyset	39	$\{2, 14, 15, 16\}$	77	$\{2, 7, 8, 11, 13, 14, 15\}$
2	$\{1\}$	40	$\{4, 5, 11, 12\}$	78	$\{2, 7, 8, 11, 13, 15, 16\}$
3	$\{11\}$	41	$\{4, 5, 12, 13\}$	79	$\{2, 7, 8, 11, 14, 15, 16\}$
4	$\{12\}$	42	$\{4, 5, 12, 14\}$	80	$\{1, 2, 3, 7, 8, 11, 13, 15\}$
5	$\{13\}$	43	$\{4, 11, 13, 14\}$	81	$\{1, 2, 3, 7, 8, 11, 14, 15\}$
6	$\{14\}$	44	$\{1, 2, 3, 12, 15\}$	82	$\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 12, 13\}$
7	$\{1, 11\}$	45	$\{1, 2, 3, 13, 15\}$	83	$\{1, 2, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$
8	$\{1, 12\}$	46	$\{1, 2, 3, 14, 15\}$	84	$\{2, 3, 4, 5, 12, 13, 15, 16\}$
9	$\{1, 14\}$	47	$\{1, 2, 4, 13, 14\}$	85	$\{2, 3, 4, 5, 12, 14, 15, 16\}$
10	$\{11, 12\}$	48	$\{1, 2, 11, 12, 13\}$	86	$\{2, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 15\}$
11	$\{11, 13\}$	49	$\{1, 2, 11, 13, 14\}$	87	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 16\}$
12	$\{11, 14\}$	50	$\{1, 2, 12, 13, 14\}$	88	$\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 15, 16\}$
13	$\{12, 13\}$	51	$\{1, 4, 5, 12, 14\}$	89	$\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 15\}$
14	$\{12, 14\}$	52	$\{2, 3, 12, 13, 15\}$	90	$\{1, 2, 3, 7, 8, 11, 13, 14, 15\}$
15	$\{13, 14\}$	53	$\{2, 3, 12, 14, 15\}$	91	$\{1, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$
16	$\{2, 15\}$	54	$\{2, 7, 8, 11, 15\}$	92	$\{2, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}$
17	$\{1, 2, 13\}$	55	$\{4, 5, 11, 12, 13\}$	93	$\{2, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15\}$
18	$\{1, 11, 12\}$	56	$\{4, 5, 11, 12, 14\}$	94	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 15, 16\}$
19	$\{1, 11, 14\}$	57	$\{1, 2, 3, 6, 15, 16\}$	95	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 16\}$
20	$\{1, 12, 14\}$	58	$\{1, 2, 3, 12, 13, 15\}$	96	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 16\}$
21	$\{11, 12, 13\}$	59	$\{1, 2, 3, 12, 14, 15\}$	97	$\{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 16\}$
22	$\{11, 12, 14\}$	60	$\{1, 2, 3, 13, 14, 15\}$	98	$\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 16\}$

标签	知识状态	标签	知识状态	标签	知识状态
23	{11,13,14}	61	{1,2,4,5,12,13}	99	{1,2,3,6,7,8,11,14,15,16}
24	{2,13,15}	62	{1,2,4,11,13,14}	100	{1,2,3,7,8,9,11,12,13,15}
25	{2,14,15}	63	{1,4,5,10,11,12}	101	{1,2,3,7,8,9,11,12,14,15}
26	{2,15,16}	64	{1,4,5,12,13,14}	102	{1,2,4,5,7,10,11,12,13,14}
27	{4,5,12}	65	{2,7,8,11,13,15}	103	{2,4,5,7,8,11,13,14,15,16}
28	{4,13,14}	66	{2,7,8,11,14,15}	104	{1,2,3,4,5,6,12,13,14,15,16}
29	{1,2,3,15}	67	{2,7,8,11,15,16}	105	{2,3,4,5,7,8,9,11,12,15,16}
30	{1,2,11,13}	68	{1,2,3,6,13,15,16}	106	{1,2,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15}
31	{1,2,12,13}	69	{1,2,3,6,14,15,16}	107	{2,3,4,5,7,8,9,11,12,13,15,16}
32	{1,2,13,14}	70	{1,2,3,7,8,11,15}	108	{2,3,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16}
33	{1,4,5,12}	71	{1,2,3,12,13,14,15}	109	{1,2,3,4,5,6,7,8,11,13,14,15,16}
34	{1,11,12,14}	72	{1,2,4,5,12,13,14}	110	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,16}
35	{1,12,13,14}	73	{1,4,5,10,11,12,14}	111	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16}
36	{2,3,12,15}	74	{1,7,10,11,12,13,14}	112	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16}
37	{2,13,14,15}	75	{2,3,4,5,12,15,16}	113	{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16}
38	{2,13,15,16}	76	{2,4,5,13,14,15,16}	114	Q

对于知识结构 \mathcal{K} 中的每一个知识状态,寻找其后继状态以及达到各后继状态需要学习并掌握的技能.从而得到能力模型下技能集 S 的有效学习路径图,以及 \mathcal{K} 中各知识状态的后继状态个数如图3.2所示.图3.3展示了能力模型下技能集 S 的部分有效学习路径图.

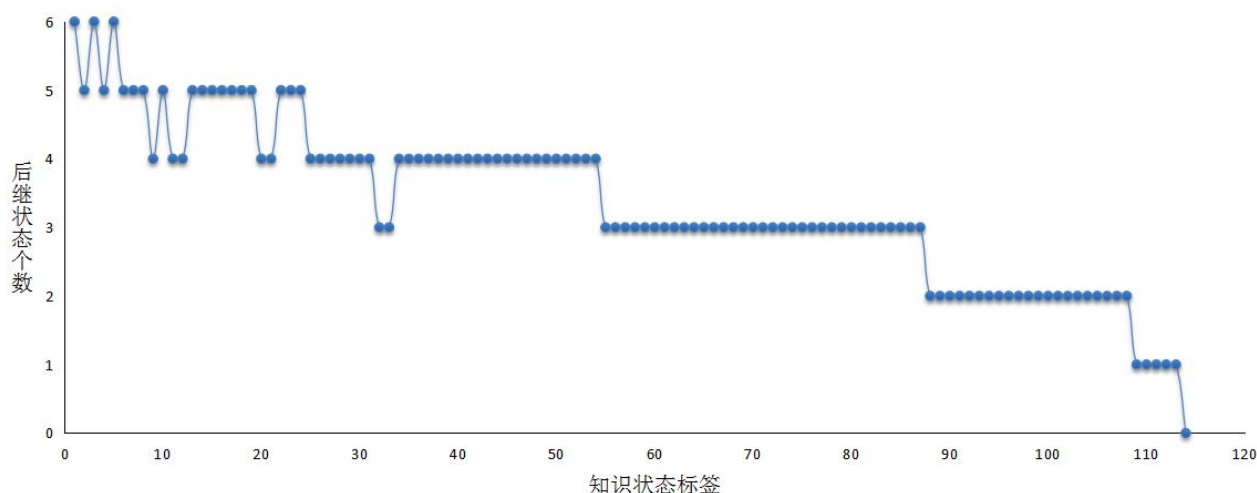


图3.2 \mathcal{K} 中各知识状态的后继状态个数

由图3.2和图3.3可知,标签为88的知识状态有3个后继状态,分别是标签为98, 99,

110的知识状态. 由图3.3可知标签为88的知识状态到其后继状态的有效技能集为 $D = \{l, m, n\}$. 可指导知识状态为标签88的学习者对技能 l, m, n 进行有效的学习. 若该学习者的知识状态标签达到110, 说明其掌握了技能 l ; 若其知识状态标签达到98, 说明其掌握了技能 m ; 若其知识状态标签达到99, 说明其掌握了技能 n . 另一方面, 若学习者的知识状态标签未发生改变, 则说明其未掌握技能 l, m, n .

对于每一步只需学习一个有效技能的学习路径图, 不仅可以有效地指导学习者进行学习, 还可以根据学习者知识状态的变化来评估其是否掌握了相应的有效技能. 以上结论说明了算法的有效性和可行性.

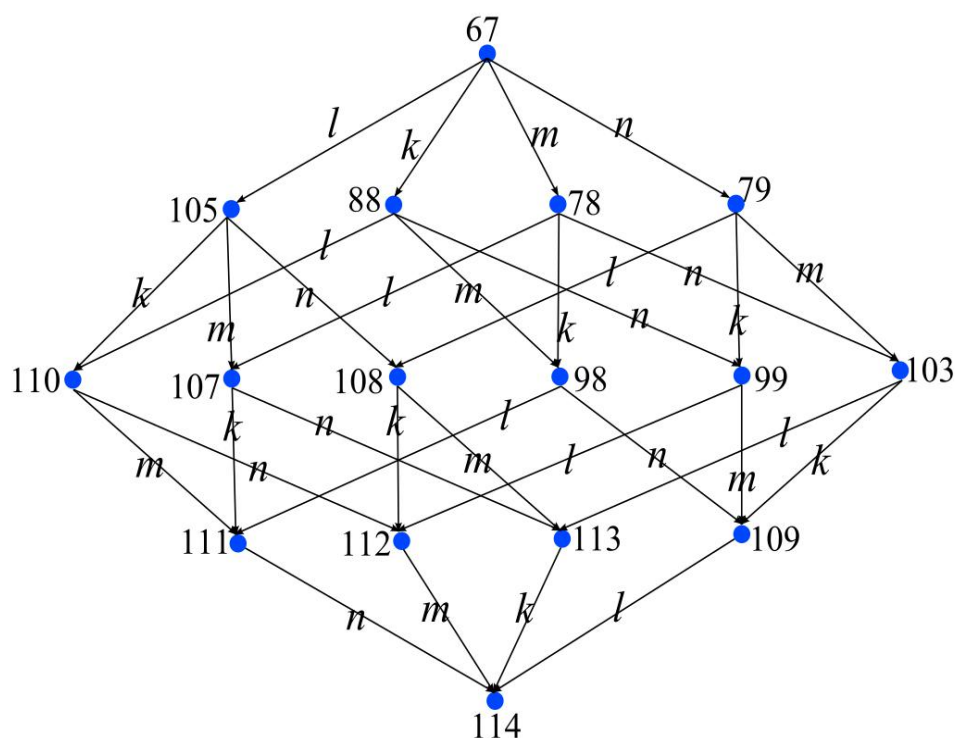


图 3.3 能力模型下技能集 S 的部分有效学习路径图

3.6 本章小结

本章对第二章的内容进行推广, 基于形式背景对技能函数进行研究. 首先运用面向对象概念, 提出了基于问题域的方式矩阵构建相应技能函数通过能力模型诱导知识结构的方法. 为了进一步对学习者的技能评估和有效的学习指导, 提出了良好技能函数的概念, 得到了技能函数满足良好性的条件, 并设计了寻找满足良好性的技能函数与有效学习路径的算法. 经过实验分析, 良好的技能函数可得到逐步进行有效学习的学习路径.

基于每一步只需学习一个技能的学习路径图不仅可用于有效指导学习者的学习,还可用于评估学习者是否掌握了相应的有效技能.

第4章 总结与展望

本文对知识空间理论与形式概念分析间的联系进行了研究. 第一章, 介绍了目前国内研究现状, 指出了展开本研究的重要性及其意义, 并简要介绍了知识空间与形式概念分析的基础知识. 第二章, 基于技能映射, 运用形式概念分析构建技能映射通过析取模型与合取模型所诱导的知识结构, 提出良好技能映射的概念, 并基于析取与合取这两种模型讨论对学习者进行技能评估与寻找学习路径的方法. 第三章, 基于技能函数, 运用形式概念分析构建技能函数通过能力模型诱导的知识结构, 提出良好技能函数的概念, 并基于良好技能函数讨论对学习者进行技能评估与寻找学习路径的方法. 另外, 进行实验分析并说明了本文所提方法的可行性与有效性. 除此之外, 以下是本文的创新点以及进一步的研究计划, 包括但不限于以下研究内容:

(1) 论文研究的创新点:

1. 建立技能映射, 技能函数与形式背景之间的紧密联系, 并运用面向属性概念和面向对象概念来获取知识状态, 从而得到在析取模型, 合取模型以及能力模型这三种模型下构建知识结构的方法.
2. 为减低构建知识结构的时间复杂度, 提出了保持知识空间基不变的技能约简, 且设计出在析取模型下对技能约简的算法.
3. 为更好地进行技能评估与进行学习指导, 提出良好技能映射和良好技能函数的概念, 从而在三种模型下获取每一步只需学习一个有效技能的学习路径.

(2) 进一步的研究计划:

1. 基于形式背景, 研究运用面向属性概念的动态更新方法给出知识结构的动态更新方法.
2. 基于形式背景, 研究能力状态与知识状态满足一一对应的条件.
3. 引进技能的学习复杂度, 研究最优方法选择与最佳学习路径选择等问题.
4. 与概念认知学习相结合, 在多种模型下研究技能评估与寻找学习路径的新方法.

参考文献

- [1] Doignon J P, Falmagne J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23 (02): 175-196.
- [2] 周弦, 谢深泉. 基于知识空间理论的自适应测试过程[J]. 计算机应用, 2007 (S1): 68-69+72.
- [3] 郭维威, 刘锋. 基于扩展知识空间的计算机自适应测试方法的研究与实施[J]. 计算机产品与流通, 2017, (08): 6.
- [4] Sitthisak O, Gilbert L, Albert D. Adaptive learning using an integration of competence model with knowledge space theory[C]//2013 IIAI International Conference on Advanced Applied Informatics (IIAIAAI). IEEE Computer Society, 2013: 199-202.
- [5] Doble C, Matayoshi J, Cosyn E, et al. A data-based simulation study of reliability for an adaptive assessment based on knowledge space theory[J]. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 2019, 29 (02): 258-282.
- [6] Reddy A A, Harper M. ALEKS-based placement at the university of illinois[M]//Knowledge spaces: applications in education. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013: 51-68.
- [7] Falmagne J C, Koppen M, Villano M, et al. Introduction to knowledge spaces: how to build, test, and search them[J]. Psychological Review, 1990, 97 (02): 201-224.
- [8] Koppen M, Doignon J P. How to build a knowledge space by querying an expert[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1990, 34 (03): 311-331.
- [9] Heller J. A formal framework for characterizing querying algorithms[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2004, 48 (01) : 1-8.
- [10] Schrepp M. A method for the analysis of hierarchical dependencies between items of a questionnaire[J]. Methods of Psychological Research Online, 2003, 19: 43-79.
- [11] Rusch A, Wille R. Knowledge spaces and formal concept analysis[M]//Data analysis and information systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996: 427-436.
- [12] Yao Y, Miao D, Xu F. Granular structures and approximations in rough sets and knowledge spaces[M]//Rough set theory: a true landmark in data analysis. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009: 71-84.
- [13] 王国胤, 姚一豫, 于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报, 2009, 32 (07): 1229-1246.
- [14] Heller J, Stefanutti L, Anselmi P, et al. On the link between cognitive diagnostic models and knowledge space theory[J]. Psychometrika, 2015, 80 (04): 995-1019.
- [15] Doignon J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]//Contributions to mathematical psychology, psychometrics, and methodology. Springer, New York, NY, 1994: 111-121.
- [16] Düntsch I, Gediga G. Skills and knowledge structures[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1995, 48 (01): 9-27.
- [17] Heller J, Augustin T, Hockemeyer C, et al. Recent developments in competence-based knowledge

- space theory[M]//Knowledge spaces. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013: 243-286.
- [18] Stefanutti L, de Chiusole D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2017, 80: 22-32.
- [19] Doignon J P, Falmagne J C. Knowledge spaces[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999.
- [20] Doignon J P, Falmagne J C. Learning spaces: interdisciplinary applied mathematics[M], Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
- [21] Falmagne J C, Albert D, Doble C, et al. Knowledge spaces: applications in education[M], New York: Springer Science and Business Media , 2013.
- [22] Heller J, Ünlü A, Albert D. Skills, competencies and knowledge structures[M]//Knowledge spaces. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013: 229-242.
- [23] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[M]//Ordered sets. Springer, Dordrecht, 1982: 445-470.
- [24] Zupan B, Bohanec M, Demšar J, et al. Learning by discovering concept hierarchies[J]. Artificial Intelligence, 1999, 109 (1-2): 211-242.
- [25] 张云中, 柳迪, 张原铭. 基于形式概念分析的知识发现研究态势[J]. 情报科学, 2018, 36 (09): 153-158.
- [26] Valtchev P, Missaoui R, Godin R, et al. Generating frequent itemsets incrementally: two novel approaches based on Galois lattice theory[J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14 (2-3): 115-142.
- [27] Spoto A, Stefanutti L, Vidotto G. Knowledge space theory, formal concept analysis, and computerized psychological assessment[J]. Behavior Research Methods, 2010, 42 (01): 342-350.
- [28] Duntsch N, Gediga G. Modal-style operators in qualitative data analysis[C]//2002 IEEE International Conference on Data Mining, 2002. Proceedings. IEEE, 2002: 155-162.
- [29] Dünsch I, Gediga G. Approximation operators in qualitative data analysis[M]//Theory and applications of relational structures as knowledge instruments. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003: 214-230.
- [30] Yao Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis[C]//International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004: 59-68.
- [31] Yao Y Y. Concept lattices in rough set theory[C]//IEEE Annual Meeting of the Fuzzy Information, 2004. Processing NAFIPS'04. IEEE, 2004, 2: 796-801.
- [32] Doignon J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]//Contributions to mathematical psychology, psychometrics, and methodology. Springer, New York, NY, 1994: 111-121.
- [33] 高纯, 王睿智. 知识空间理论析取模型下最小技能集的生成[J]. 计算机科学与探索, 2010, 4 (12): 1109-1114.
- [34] Xu F F, Miao D Q, Yao Y Y, et al. Analyzing skill sets with or-relation tables in knowledge spaces[C]//2009 8th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. IEEE, 2009: 174-180.

- [35] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019, 49 (04): 517-526.
- [36] Heller J, Anselmi P, Stefanutti L, et al. A necessary and sufficient condition for unique skill assessment[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2017, 79: 23-28.
- [37] Hockemeyer C, Conlan O, Wade V P, et al. Applying competence prerequisite structures for eLearning and skill management[J]. Journal of Universal Computer Science, 2003, 9 (12): 1428-1436.
- [38] de Chiusole D, Stefanutti L, Anselmi P, et al. Stat-Knowlab. assessment and learning of statistics with competence-based knowledge space theory[J]. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 2020, 30 (04): 668-700.
- [39] 李金海, 闫梦宇, 徐伟华, 等. 概念认知学习的若干问题与思考[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2020, 50 (04): 501-515.
- [40] 李金海, 米允龙, 刘文奇. 概念的渐进式认知理论与方法[J]. 计算机学报, 2019, 42 (10): 2233-2250.
- [41] Kickmeier-Rust M D, Steiner C M, Albert D. Uncovering learning processes using competence- based knowledge structuring and hasse diagrams[C]//VISLA@ LAK. 2015: 36-40.
- [42] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005 (06): 628-639.
- [43] Wei L, Qi J J. Relation between concept lattice reduction and rough set reduction[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23 (08): 934-938.
- [44] 郝晨, 范敏, 李金海, 等. 多标记背景下基于粒标记规则的最优标记选择[J]. 模式识别与人工智能, 2016, 29 (03): 272-280.

致 谢

时光飞逝，转眼间三年紧张而又充实的研究生生活即将画上句号。在这三年的科研生活中，我得到了很多老师、同学和朋友的悉心照顾与热心关怀，让我从一个懵懂女孩成长为一个能够独立开展科研，能够在学习任务繁重的同时合理安排自己的时间的学生。在学位论文即将完成之际，我要向所有给予我帮助、支持和鼓励我的人表示衷心的感谢。

首先，我要感谢我的指导老师李进金教授。在我的学位论文的选题、构思、撰写再到最终定稿的每一个环节中，李老师都耐心地指导着我。三年以来，无论是在学习上，还是在生活上，李老师总是无微不至的关心着我，支持与鼓励我。李老师比较严格，经常询问我的科研进展，并督促我要好好学习。正因为李老师这份严格的关心，让我明确了自己的人生理想，并朝着理想努力地奋斗着。在此，学生向李老师表示衷心的感谢，真心谢谢您，可敬的李老师！

其次，我要诚挚地感谢王宏琨教授、黄韩亮教授、林国平教授、陈锦坤教授、许晴媛教授、马周明副教授、韩光明老师、林艺东老师、孙文博士、张呈玲师姐、许丽婷师姐等在学习上给予我的无私帮助。感谢康碧芳老师、张赫老师、郑珊老师等在我的日常生活中对我的关怀与鼓励。感谢我的同窗伙伴和师弟师妹们给我的支持与陪伴。

最后，感谢家人一直以来给予我的鼓励与支持，感谢我的朋友一直以来的关心与陪伴，使我能够顺利完成学业。

再次向所有帮助和关心过我的老师、同学和朋友表示衷心的感谢！

攻读学位期间取得的科研成果清单

文章名称	发表刊物（出版社）	发表时间	署名次序
基于析取模型的技能约简与推测关系的研究	闽南师范大学学报(自然科学版)	2020.09.30	1
形式背景下的技能约简与评估	计算机科学与探索	2021.01.28	1
形式背景下的学习路径与技能评估	模式识别与人工智能	2021.12.15	1
Skills and fuzzy knowledge structures	Journal of Intelligent & Fuzzy Systems	2022.02.02	1